

Univerza
v Ljubljani
Fakulteta
za gradbeništvo
in geodezijo



Jamova cesta 2
1000 Ljubljana, Slovenija
<http://www3.fgg.uni-lj.si/>

DRUGG – Digitalni repozitorij UL FGG
<http://drugg.fgg.uni-lj.si/>

To je izvirna različica zaključnega dela.

Prosimo, da se pri navajanju sklicujete na bibliografske podatke, kot je navedeno:

Krofl, Ž., 2016. Računalniški program za optimalno dimenzioniranje armiranobetonskih prevezov. Diplomski naloga. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo. (mentor Lopatič, J.): 58 str.

<http://drugg.fgg.uni-lj.si/5842/>

Datum arhiviranja: 12-10-2016

University
of Ljubljana
Faculty of
Civil and Geodetic
Engineering



Jamova cesta 2
SI – 1000 Ljubljana, Slovenia
<http://www3.fgg.uni-lj.si/en/>

DRUGG – The Digital Repository
<http://drugg.fgg.uni-lj.si/>

This is original version of final thesis.

When citing, please refer to the publisher's bibliographic information as follows:

Krofl, Ž., 2016. Računalniški program za optimalno dimenzioniranje armiranobetonskih prevezov. B.Sc. Thesis. Ljubljana, University of Ljubljana, Faculty of civil and geodetic engineering. (supervisor Lopatič, J.): 58 pp.

<http://drugg.fgg.uni-lj.si/5842/>

Archiving Date: 12-10-2016

Univerza
v Ljubljani

Fakulteta za
*gradbeništvo in
geodezijo*



Jamova 2
1000 Ljubljana, Slovenija
telefon (01) 47 68 500
faks (01) 42 50 681
fgg@fgg.uni-lj.si

**UNIVERZITETNI ŠTUDIJSKI
PROGRAM GRADBENIŠTVO
KONSTRUKCIJSKA SMER**

Kandidat:

ŽIGA KROFL

**RAČUNALNIŠKI PROGRAM ZA OPTIMALNO
DIMENZIONIRANJE ARMIRANOBETONSKIH
PREREZOV**

Diplomska naloga št.: 3501/KS

**COMPUTER PROGRAM FOR OPTIMUM DESIGN OF
REINFORCED CONCRETE SECTIONS**

Graduation thesis No.: 3501/KS

Mentor:

izr. prof. dr. Jože Lopatič

Ljubljana, 15. 09. 2016

STRAN ZA POPRAVKE

Stran z napako	Vrstica z napako	Namesto	Naj bo
-----------------------	-------------------------	----------------	---------------

IZJAVE

Spodaj podpisani študent Žiga Krofl, vpisna številka 26102320, avtor pisnega zaključnega dela študija z naslovom: Izdelava računalniškega programa za optimalno dimenzioniranje armiranobetonskih prerezov poljubne oblike,

IZJAVLJAM**1. Obkrožite eno od variant a) ali b)**

a) da je pisno zaključno delo študija rezultat mojega samostojnega dela;

b) da je pisno zaključno delo študija rezultat lastnega dela več kandidatov in izpolnjuje pogoje, ki jih Statut UL določa za skupna zaključna dela študija ter je v zahtevanem deležu rezultat mojega samostojnega dela;

2. da je tiskana oblika pisnega zaključnega dela študija istovetna elektronski obliki pisnega zaključnega dela študija;

3. da sem pridobil/-a vsa potrebna dovoljenja za uporabo podatkov in avtorskih del v pisnem zaključnem delu študija in jih v pisnem zaključnem delu študija jasno označil/-a;

4. da sem pri pripravi pisnega zaključnega dela študija ravnal/-a v skladu z etičnimi načeli in, kjer je to potrebno, za raziskavo pridobil/-a soglasje etične komisije;

5. soglašam, da se elektronska oblika pisnega zaključnega dela študija uporabi za preverjanje podobnosti vsebine z drugimi deli s programsko opremo za preverjanje podobnosti vsebine, ki je povezana s študijskim informacijskim sistemom članice;

6. da na UL neodplačno, neizključno, prostorsko in časovno neomejeno prenašam pravico shranitve avtorskega dela v elektronski obliki, pravico reproduciranja ter pravico dajanja pisnega zaključnega dela študija na voljo javnosti na svetovnem spletu preko Repozitorija UL;

7. da dovoljujem objavo svojih osebnih podatkov, ki so navedeni v pisnem zaključnem delu študija in tej izjavi, skupaj z objavo pisnega zaključnega dela študija.

V Ljubljani

Datum: _____

Podpis študenta/-ke: _____

BIBLIOGRAFSKO-DOKUMENTACIJSKA STRAN IN IZVLEČEK:

UDK:	624.012.45:624.046:004.42 (043.2)
Avtor:	Žiga Krofl
Mentor:	izr. Prof. dr. Jože Lopatič
Naslov:	Računalniški program za optimalno dimenzioniranje armiranobetonskih prerezov
Obseg in oprema:	58 str., 10 pregl., 51 sl., 47 en.
Ključne besede:	AB prečni prerez, mejna nosilnost, dvojno ekscentrična osna obremenitev, poljubna oblika, optimizacija

Izvleček

V diplomski nalogi je predstavljen računalniški program za optimalno dimenzioniranje armiranobetonskih prerezov poljubne oblike, obremenjenih z dvojno ekscentrično osno silo. Računanje poteka v programu Excel, za postopek optimizacije je uporabljen podprogram Solver.

Obod prereza predstavim kot mnogokotnik, armaturo podam kot točke v prerezu. Pri računu predpostavim linearen potek deformacij po prerezu in delovne diagrame betona običajne trdnosti ter armature skladno z EC2. Pri integraciji napetosti po prerezu uporabim Greenov izrek in prevedem površinski integral na krivuljni integral po obodu prereza. Notranje količine izračunam za vsak odsek mnogokotnika posebej. Vse enačbe na nivoju odseka so analitične.

Pravilnost programa potrdim z računom enostavnih prerezov. Dobljene rezultate primerjam z obstoječimi rešitvami. Na koncu optimiziram nesimetričen prerez obremenjen z dvojno ekscentrično osno silo.

BIBLIOGRAPHIC-DOCUMENTALISTIC INFORMATION:

UDK: 624.012.45:624.046:004.42 (043.2)
Author: Žiga Krofl
Supervisor: Assoc. Prof. Jože Lopatič, Ph.D.
Title: A computer program for optimization of reinforced concrete cross section
Notes: 58 p., 10 tab., 51 fig., 47 eq.
Key words: RC cross section, ultimate bearing capacity, combined biaxial bending and axial load, arbitrary shape, optimization

Abstract

A computer program for optimization of reinforced concrete cross section of an arbitrary shape loaded with combined biaxial bending and axial load is presented in the graduation thesis. The computation takes place in the Excel computer program, optimization is performed with the Solver Add-in.

The perimeter of the cross section area is presented as a polygon, the steel reinforcement bars are input as points in the area. The stress-strain relationship of the conventional strength concrete and steel rebar are compliant with the EC2 code. Bernoulli's assumption that plane sections remain plane is valid. By employing Green's Theorem, the double integral of the longitudinal stresses is transformed to line integral along the cross sections perimeter. For each section of the polygon, the forces are computed. All equations on the section level are analytical in nature.

The verification of the program is performed by comparing the results obtained on standard cross sections with results available in the literature. The application of the computer program is illustrated with asymmetrical RC cross-section design example.

ZAHVALA

Iskreno se zahvaljujem mentorju izr. prof. dr. Jožetu Lopatiču za pomoč pri pisanju naloge.

KAZALO VSEBINE

1	UVOD	1
2	ENAČBE ZA RAČUN GEOMETRIJSKIH IN MEHANSKIH LASTNOSTI PREREZA	3
2.1	Greenov izrek	3
2.2	Enačba daljice odseka mnogokotnika.....	4
2.3	Račun površine prereza	5
2.4	Račun statičnega momenta prereza okoli osi z'	6
2.5	Račun statičnega momenta prereza okoli osi y'	8
2.6	Račun težišča prereza:	9
2.7	Delovni koordinatni sistem (x, y, z)	10
2.8	Račun vztrajnostnega momenta prereza okoli osi $y - I_y$	10
2.9	Račun vztrajnostnega momenta prereza okoli osi $z - I_z$	11
2.10	Povzetek geometrijskih karakteristik prereza.....	13
2.11	Določitev deformacijske ravnine:.....	13
2.12	Delovni diagram betona.....	14
2.13	Delovni diagram armature	15
2.14	Določitev integralnih intervalov na odseku i	16
2.15	Račun rezultirajoče sile v betonu $F_{c,Rd}$	17
2.16	Prijemališče sile betona $F_{c,Rd}$	19
2.17	Določitev koordinat armature:.....	22
2.18	Račun komponent vektorja projektne odpornosti v prerezu	24
3	NELINEARNO PROGRAMIRANJE	25
3.1	Spremenljivke	25
3.2	3.2 Robni pogoji:	25
3.3	Namenska funkcija	26
3.3.1	Iskanje minimalne potrebne armature	26
3.3.2	Odziv prereza.....	26
3.4	Metode reševanja.....	27
4	PRIMERI	29

4.1	Potrditev geometrijskih karakteristik	29
4.1.1	Primer A1, pravokotni prerez ($60 \times 50 \text{ cm}$):	29
4.1.2	Primer A2	32
4.1.3	Primer A3	34
4.2	Enoosni upogib.....	36
4.2.1	Primer B1	36
4.2.2	Primer B2:	39
4.2.3	Primer B3:	41
4.3	Dvoosni upogib	43
4.3.1	Primer C1	43
4.3.2	Primer C2	45
4.3.3	Primer C3 – L prerez.....	50
4.3.4	Primer C 4	52
5	ZAKLJUČEK	57
VIRI	58

KAZALO SLIK

Slika 2.1 Ilustracija predstavitve mnogokotnika v koordinatnem sistemu (y', z') in enačbe daljice med točkama T_5 in T_6 .	4
Slika 2.2 Ilustracija računa ploščine območja D	7
Slika 2.3 Trije koordinatni sistemi in relacije med njimi	10
Slika 2.4 Ilustracija postavitve deformacijske ravnine	13
Slika 2.5 Delovni diagram betona	14
Slika 2.6 Delovni diagram armature	16
Slika 2.7 Ilustracija določanja intervalov	19
Slika 2.8 Račun prijemališča sile betona $F_{c,Rd}$	20
Slika 2.9 Določitev koordinat armature	23
Slika 3.1 Pogovorno okno podprograma Solver z namensko funkcijo, spremenljivkami in robnimi pogoji	28
Slika 4.1 Primer A 1 pravokotni prerez 60x50 cm	29
Slika 4.2 Rezultat računa za primer A1 pri zasuku $\varphi = 0^\circ$	30
Slika 4.3 Račun za primer A1, zasuk $\varphi = 45^\circ$	31
Slika 4.4 Račun za primer A1, zasuk $\varphi = 55^\circ$	31
Slika 4.5 Primer A2, križ iz štirih kvadratov 20 cm x 20 cm in enega pravokotnika 10 cm x 20 cm	32
Slika 4.6 Račun za primer A2, zasuk $\varphi = 7^\circ$	33
Slika 4.7 Račun za primer A2, zasuk $\varphi = 23^\circ$	33
Slika 4.8 Račun za primer A2, zasuk $\varphi = 181^\circ$	33
Slika 4.9 Račun za primer A2, zasuk $\varphi = 190^\circ$	34
Slika 4.10 Primer A3 pravokotnik dimenzij 120 x 100 cm s pravokotno odprtino 40x50 cm	34
Slika 4.11 Račun geometrijskih karakteristik za primer A3, zasuk $\varphi = 0^\circ$	35
Slika 4.12 Račun za geometrijskih karakteristik za primer A3, zasuk $\varphi = 10^\circ$	36
Slika 4.13 Račun za primer B1, pravokotni prerez, enoosni upogib, enojna armatura, def. ravnina – 3.5/10	37
Slika 4.14 Račun za primer B1, pravokotni prerez, enoosni upogib, enojna armatura, def. ravnina – 3.5/5	38
Slika 4.15 Račun za primer B1, pravokotni prerez, enoosni upogib, enojna armatura, def. ravnina – 2.5/10	38
Slika 4.16 Račun za T prerez enoosni upogib, enojna armatura, def. ravnina – 2.2/10	40
Slika 4.17 Račun za T prerez enoosni upogib, enojna armatura, def. ravnina – 3.5/4	40
Slika 4.18 Račun za T prerez enoosni upogib, enojna armatura, def. ravnina – 3.5/10	41
Slika 4.19 Račun za primer B3, deformacijska ravnina – 3.5/5, $\delta = 0.20$, $k_d = 0.28$	42
Slika 4.20 Račun za primer B3, deformacijska ravnina – 3.5/5, $\delta = 0.20$, $k_d = 0.30$	42

Slika 4.21 Račun za primer B3, deformacijska ravnina $-3.5/5$, $\delta = 0.20$, $k_d = 0.32$	43
Slika 4.22 Račun sile v betonu, primer C1, kontrola enačb in postopka.....	44
Slika 4.23 Preglednica delnih rezultatov za račun integrala po napetostih v betonu primer C1	45
Slika 4.24 Račun projektne odpornosti prereza C2, $-3.5/10$ $\varphi = 0^\circ$	46
Slika 4.25 Račun projektne odpornosti prereza C2, $-3.5/10$ $\varphi = 10^\circ$	48
Slika 4.26 Račun projektne odpornosti prereza C2, $-3.5/10$ $\varphi = 20^\circ$	48
Slika 4.27 Račun projektne odpornosti prereza C2, $-3.5/10$ $\varphi = 30^\circ$	49
Slika 4.28 Račun projektne odpornosti prereza C2, $-3.5/10$ $\varphi = 40^\circ$	49
Slika 4.29 Račun projektne odpornosti prereza C2, $-3.5/10$ $\varphi = 50^\circ$	50
Slika 4.31 Parametri za račun minimalne upogibne odpornosti okoli osi y $M_{y,Rdy}$	51
Slika 4.32 Račun deformacijske ravnine za min. M_{Rdy}	51
Slika 4.30 Primer C4 L prerez 60x50 cm.....	51
Slika 4.33 Parametri za račun minimalne upogibne odpornosti okoli osi z $M_{z,Rdz}$	52
Slika 4.34 Račun deformacijske ravnine za min. M_{Rdz}	52
Slika 4.35 Pogovorno okno Reševalca.....	53
Slika 4.36 Račun minimalne armature za 1. OP, palice niso vezane	53
Slika 4.37 Račun minimalne armature za 2. OP, palice niso vezane	54
Slika 4.38 Račun minimalne armature za 1. OP, palice so v dveh skupinah	54
Slika 4.39 Račun minimalne armature za 2. OP, palice so v dveh skupinah	55
Slika 4.40 Račun minimalne armature za 1. OP, palice imajo enak prerez	55
Slika 4.41 Račun minimalne armature za 2. OP, palice imajo enak prerez	56

Ta stran je namenoma prazna

1 UVOD

Postopek projektiranja armiranobetonskih konstrukcij v Sloveniji in Evropi pokrivajo evropski standardi za beton [1]. Pri projektiranju je treba dokazati varnost konstrukcije proti poružitvi, njeno uporabnost in trajnost. Ločimo mejna stanja nosilnosti in mejna stanja uporabnosti konstrukcije. MEJNO STANJE NOSILNOSTI: prevrnitev konstrukcije, tvorba porušnega mehanizma pri statično nedoločenih konstrukcijah, porušitev kritičnega prereza ali bistveno povečane deformacije, značilno za statično določene konstrukcije, uklon in ostali problemi teorije drugega reda, značilni za vitke konstrukcije, utrujanje materiala. MEJNO STANJE UPORABNOSTI: pojav razpok in pomikov, ki ogrožajo trajnost konstrukcije ali motijo njen izgled in uporabnost, lokalne poškodbe ki ogrožajo nosilnost, trajnost, izgled in uporabnost, nihanje konstrukcije zaradi delovanja dinamičnih obtežb.

V okviru diplomske naloge sem se ukvarjal z nosilnostjo armiranobetonskih (AB) prečnih prerezov poljubne oblike, obremenjenih s poljubno dvojno ekscentrično osno silo.

Osnovni cilj diplomske naloge je izdelava programskega orodja v programu Excel za izračun projektne odpornosti armiranobetonskega prereza za izbran potek deformacij. Armiranobetonski prečni prerez je poljubne oblike s poljubno razporejenimi armaturnimi palicami. Nadgradnja te osnove je uporaba podprograma Solver oz. Reševalec za dimenzioniranje in optimizacijo prereza.

Mejna nosilnost armiranobetonskega prečnega prereza je določena z mejnimi deformacijami. Za betone običajne trdnosti je računski mejna deformacija $\epsilon_{cu2} = -3.5 \text{ ‰}$, v armaturi pa je mejna deformacija neomejena, oziroma, če dopustim utrjevanje armature, je deformacija omejena, s kakšnim ϵ_{ud} pa je odvisno od duktilnosti izbrane armature. V primeru male ekscentričnosti osne sile je mejna deformacija v betonu običajne trdnosti na oddaljenosti $3/7h$ od najbolj obremenjenega roba ali vogala prečnega prereza $\epsilon_{c2} = -2 \text{ ‰}$. Za poenostavitev delovanja programa pa se je v programu izvedla tudi kontrola na $4/7h$ oddaljenosti. Mejna nosilnost AB prečnega prereza je dosežena, ko je v vsaj eni točki prereza deformacija enaka mejni deformaciji. Dejansko so se v programu izvedle kontrole mejnih deformacij v 4 točkah, v obeh skrajnih robovih prereza, kjer deformacija ne sme preseči -3.5 ‰ in v točkah na oddaljenosti $3/7h$ in $4/7h$ od skrajnega roba, kjer deformacija ne sme preseči -2 ‰ . Ob predpostavki linearnega poteka deformacij po prerezu lahko izračunam napetosti v prerezu z uporabo delovnih diagramov za beton in jeklo. Z integracijo napetosti izračunam nosilnost prereza. Integracija poteka po analitičnih enačbah. Numerične napake se pojavijo le pri prerezih z neravnimi odseki, ki jih aproksimiram z mnogokotnikom.

Diplomska naloga ima poleg uvoda še štiri poglavja. V drugem poglavju sem predstavil teoretične osnove na katerih so bile izpeljane enačbe za račun projektne odpornosti armiranobetonskega prereza

poljubne oblike pri dvojno ekscentrični osni obremenitvi. Pripravil sem vse potrebne postopke za vnos geometrije, armature, računski opis delovnih diagramov armature in betona. Pripravil sem vse potrebne analitične enačbe za račun geometrijskih lastnosti prereza in integracijo napetosti po prerezu. Enačbe za račun geometrijskih karakteristik so iste enačbe, ki sem jih uporabil tudi za integracijo napetosti, s tem da so bile pri teh integralih potrebne še enačbe višjega reda. Armiranobetonski prerez sem predstavil s točkami ki predstavljajo oglišča mnogokotnika. Točke je treba podajati zaporedoma v smeri urinega kazalca. Na vsakem odseku sem izračunal geometrijske karakteristike (in sile v prerezu) z enostavnimi enačbami. Vse enačbe so sestavljene iz linearnih kombinacij $\int_{y_i}^{y_{i+1}} z^m(y)y^n dy$. Za lažje delo v programu Excel sem včasih uporabil tudi integriranje po z : $\int_{z_i}^{z_{i+1}} y^m(z)z^n dz$. Delne vsote sem seštel skupaj za cel mnogokotnik. Dodatno v tem poglavju predstavim mehanske lastnosti betona in armature ter osnovne predpostavke, ki jih upoštevam pri dimenzioniranju.

V tretjem poglavju sem opisal postopek dimenzioniranja in optimiziranja armiranobetonskega prereza z uporabo programa Excel in podprograma Solver. Armiranobetonski prerez je obremenjen s poljubno dvojno ekscentrično osno silo. Računal sem komponente vektorja projektne odpornosti N_{Rd} , M_{yRd} , M_{zRd} v armiranobetonskem prerezu. Te komponente so odvisne od treh spremenljivk, ki določajo deformacijsko ravnino. Za spremenljivke sem izbral deformaciji v dveh skrajnih točkah prereza in zasuk deformacijske ravnine. Za lažji račun v programu Excel sem fiksiral deformacijsko ravnino tako, da se obrača/vrti samo okoli osi Y_L lokalnega koordinatnega sistema in namesto tega vrtil prerez okoli vzdolžne osi X_L lokalnega koordinatnega sistema.

V program Excel vgrajeni program Solver poišče najmanjšo potrebno količino armature, z upoštevanjem naslednjih robnih pogojev:

$$(N_{Ed}, M_{yEd}, M_{zEd})_i = (N_{Rd}, M_{yRd}, M_{zRd})_i, \quad i \in (1, \dots, m), \quad m \dots \text{število obtežnih primerov}$$

$$\varepsilon_{sj} \leq \varepsilon_{ud} \quad j \in (1, \dots, n), \quad n \dots \text{število pozicij palic}$$

$$\varepsilon_c(z) \geq \varepsilon_{c2} \quad z \in (3h/7, 4h/7), \text{kontrola pri mali ekscentričnosti}$$

$$\varepsilon_c(z) \geq \varepsilon_{cu2} \quad z \in (0, h), \quad \text{kontrola pri veliki ekscentričnosti}$$

Možnosti pri uporabi Solverja so seveda veliko večje, lahko fiksiram količino armature in iščem največji upogibno odpornost pri dani osni sili. Lahko poiščem najmanjšo površino prereza in armature pri danih projektnih obtežnih primerih.

V četrtem poglavju sem podal računske primere in primerjave dobljenih rezultatov z rezultati, ki jih sem jih našel v strokovni literaturi.

2 ENAČBE ZA RAČUN GEOMETRIJSKIH IN MEHANSKIH LASTNOSTI PREREZA

S pomočjo Greenovega izreka sem poenostavil račun geometrijskih lastnosti in projektne odpornosti iz računanja površinskih integralov na računanje integralov po obodu prereza. Najprej sem izračunal površino in statična momenta prereza. Prerez sem predstavil kot zaporedje ogljišč mnogokotnika. Ogljišča sem vnašal v začetnem koordinatnem sistemu (x', y', z') , pri čemer je x' vzdolžna os, prerez pa se nahaja v ravnini (y', z') . Iz dobljenih rezultatov sem določil geometrijsko težišče prereza. Definiral sem nov koordinatni sistem (X_L, Y_L, Z_L) , ki ima izhodišče v geometrijskem težišču prereza, osi pa so vzporedne z začetnim koordinatnim sistemom (x', y', z') . V novem, lokalnem koordinatnem sistemu (X_L, Y_L, Z_L) sem izračunal še vztrajnostna momenta prereza.

Za račun napetosti sem pripravil vse enačbe za integracijo tako, da se račun napetosti v betonu izvede v isti tabeli kot račun geometrijskih karakteristik. Najprej določim meje za območje prereza kjer so napetosti v betonu polinomske oblike in potem še za območje kjer so napetosti v betonu konstantne. Te meje določim za vsak odsek posebej, tako da v vsaki vrstici poteka račun za polinomski in konstantni del. Če odsek ni na območju polinoma oz. konstantne vrednosti, so meje za integracijo izbrane tako, da je interval integriranja ena sama točka in da tako integral rezultat 0.

Račun prispevka napetosti armature je bil enostavnejši, iz izračunane deformacije v središču armature sem izračunal napetost po delovnem diagramu in seštejel po vseh palicah. Pri računu napetosti sem upošteval neto betonski prerez, torej sem odštél napetost v betonu pri računu napetosti v armaturi.

2.1 Greenov izrek

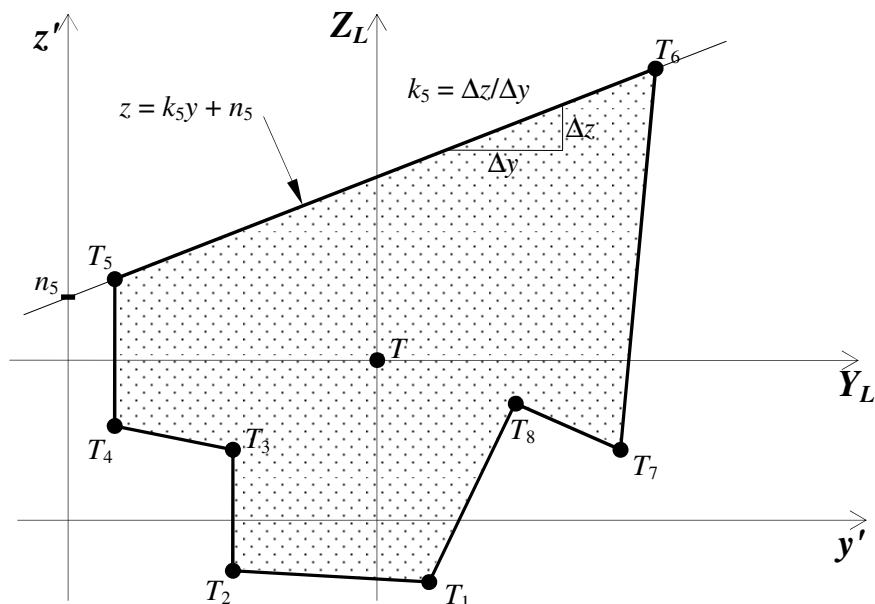
Naj bo C odsekoma gladka sklenjena krivulja v ravnini (y, z) . Naj bosta L in M parcialno zvezno odvedljivi funkciji na omejenem območju D , katerega rob je krivulja C . Potem velja:

$$\oint_{C^+} L(y, z) dy + M(y, z) dz = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial L}{\partial z} \right) dy dz \quad (1)$$

Integracija poteka v pozitivni smeri. To pomeni v nasprotni smeri urinega kazalca. Za območje D v tem primeru velja da je to armiranobetonski prerez, krivulja C pa je obod prereza, ki ga predstavlja mnogokotnik. Tako prerez kot mnogokotnik izpolnjujeta vse zahteve izreka. Mnogokotnik je odsekoma gladka sklenjena krivulja, prerez pa je omejeno območje.

2.2 Enačba daljice odseka mnogokotnika

Obod prereza sem predstavil kot seznam koordinat oglišč v začetnem koordinatnem sistemu (y'_i, z'_i) kjer $i \in (1 \dots n)$, in n je število oglišč. Vsaki dve zaporedni oglišči sem povezal z daljico, ki predstavlja rob armiranobetonskega prereza.



Slika 2.1 Ilustracija predstavitve mnogokotnika v koordinatnem sistemu (y', z') in enačbe daljice med točkama T_5 in T_6 .

Enačba daljice med ogliščema T_i in T_{i+1} zapisana v eksplicitni obliki:

$$z' = k_i y' + n_i \quad (2)$$

smerni koeficient k_i :

$$k_i = (z'_{i+1} - z'_i) / (y'_{i+1} - y'_i) \quad (3)$$

začetna vrednost n_i :

$$n_i = z'_i - (z'_{i+1} - z'_i) / (y'_{i+1} - y'_i) y'_i = (z'_i (y'_{i+1} - y'_i) - (z'_{i+1} - z'_i) y'_i) / (y'_{i+1} - y'_i)$$

$$n_i = (y'_{i+1} z'_i - y'_i z'_{i+1}) / (y'_{i+1} - y'_i)$$

$$n_i = (y'_{i+1} z'_i - y'_i z'_{i+1}) / (y'_{i+1} - y'_i) \quad (4)$$

in še enačba daljice v eksplicitni obliki izražena z $y'_i, z'_i, y'_{i+1}, z'_{i+1}$:

$$y' = z'_i + (z'_{i+1} - z'_i) / (y'_{i+1} - y'_i) (y' - y'_i) \quad (5)$$

$$z' = y'_i + (y'_{i+1} - y'_i) / (z'_{i+1} - z'_i) (z' - z'_i)$$

2.3 Račun površine prereza

Za račun površine prereza sem uporabil Greenov izrek (1). Parcialno zvezno odvedljivi funkciji M in L sem izbral tako, da bo izraz v ploščinskem integralu na desni strani Greenovega izreka enak -1 .

$$M(y', z') = 0 \quad L(y', z') = z'$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial L}{\partial z} \right) dy dz = \iint_D -1 \cdot dy dz = -A = \oint_{C^+} L(y', z') dy' + M(y', z') dz' = \oint_{C^+} z' dy' \quad (6)$$

Seveda velja da je integral 1 po območju D kar površina območja. Ker sem v mojem primeru podajal točke v smeri urinega kazalca, pa velja:

$$A = \iint_D 1 \cdot dy' dz' = \oint_{C^-} z' dy' \quad (7)$$

C^- pri krivuljnem integralu pomeni integracijo v smeri urinega kazalca.

Če želim integrirati po z' , vzamem:

$$M(y', z') = y' \quad L(y', z') = 0$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial z'} \right) dy' dz' = \iint_D 1 dy' dz' = \oint_{C^+} L(y', z') dy' + M(y', z') dz' = \oint_{C^+} y' dz' \quad (8)$$

Ker sem v mojem primeru podajal točke v smeri urinega kazalca, velja:

$$A = \iint_D 1 \cdot dy' dz' = - \oint_{C^-} y' dz' \quad (9)$$

Integral po krivulji C sem razdelil na seštevek integralov po daljicah $T_i T_{i+1}$, kjer i teče od 1 ... n ; tako se enačba (9) prevede na integracijo po odsekih:

$$A_i = \int dA = \int_{y'_i}^{y'_{i+1}} z'(y') dy' = \int_{y'_i}^{y'_{i+1}} (z'_i + (z'_{i+1} - z'_i)/(y'_{i+1} - y'_i)(y' - y'_i)) dy'$$

$$A_i = z'_i(y'_{i+1} - y'_i) + (z'_{i+1} - z'_i)/(y'_{i+1} - y'_i)((y'_{i+1})^2 - (y'_i)^2)/2 - y'_i(y'_{i+1} - y'_i)$$

$$A_i = z'_i(y'_{i+1} - y'_i) + (z'_{i+1} - z'_i)((y'_{i+1} + y'_i)/2 - y'_i) = z'_i(y'_{i+1} - y'_i) + (z'_{i+1} - z'_i)(y'_{i+1} - y'_i)/2$$

Dobil sem enačbo za A_i izraženo s koordinatami oglišč T_i in T_{i+1}

$$A_i = (z'_{i+1} + z'_i)(y'_{i+1} - y'_i)/2 = \int z' dy' = - \int y' dz' \quad (10)$$

Enačbo sem rešil tudi v programu *mathematica* z naslednjim ukazom:

Simplify[Integrate[($z_i + (z_{i+1} - z_i)(y - y_i)/(y_{i+1} - y_i)$), { y, y_i, y_{i+1} }]]]

Rešitev v programu *mathematica* je potrdila pravilnost računa.

Če gledamo na sliko 2.1, je tudi jasno, zakaj da integriranje po y' v smeri urinega kazalca pozitiven rezultat. Ploščina pravokotnega trapeza, ki ga tvorijo daljica $T_i T_{i+1}$, os y' in dve navpični daljici ki tečeta skozi oglišči T_i in T_{i+1} , je negativna, saj je osnovnica $(y_{i+1} - y_i)$ negativna, povprečna višina $(z_{i+1} + z_i)/2$ pa je pozitivna. Ploščina tega trapeza, ki se nahaja pod območjem D , je torej pravilno, da se odšteje od naslednje delne ploščine A_{i+1} , ki pa ima pozitivno vrednost.

Integriranje po z pa sešteva ploščine trapezov ki jih tvorijo os z' , dve vodoravni daljici ki tečeta skozi oglišči T_i in T_{i+1} in daljica $T_i T_{i+1}$. Tako ima ploščina trapeza pod daljico $T_i T_{i+1}$ pozitivno vrednost, saj je osnovnica $(z_{i+1} - z_i)$ pozitivna, prav tako pa je pozitivna tudi povprečna višina trapeza $(y_{i+1} + y_i)/2$. Vendar ker je ta trapez izven območja D , bi morala biti njegova ploščina negativna. Zato je torej logično da ima enačba negativen predznak.

Ko so vsi segmenti sešteti, dobim površino območja D :

$$A = \sum A_i \quad (11)$$

2.4 Račun statičnega momenta prereza okoli osi z'

Za račun statičnega momenta območja D okoli osi z' sem uporabil Greenov izrek (1). Parcialno zvezno odvedljivi funkciji M in L sem izbral tako, da bo izraz v ploščinskem integralu na desni strani Greenovega izreka enak $-y'$.

$$M(y', z') = 0 \quad L(y', z') = y'z'$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial z'} \right) dy' dz' = \iint_D -y' dy' dz' = S_z = \oint_{C^+} L(y', z') dy' + M(y', z') dz' = - \oint_{C^+} y' z' dy' \quad (12)$$

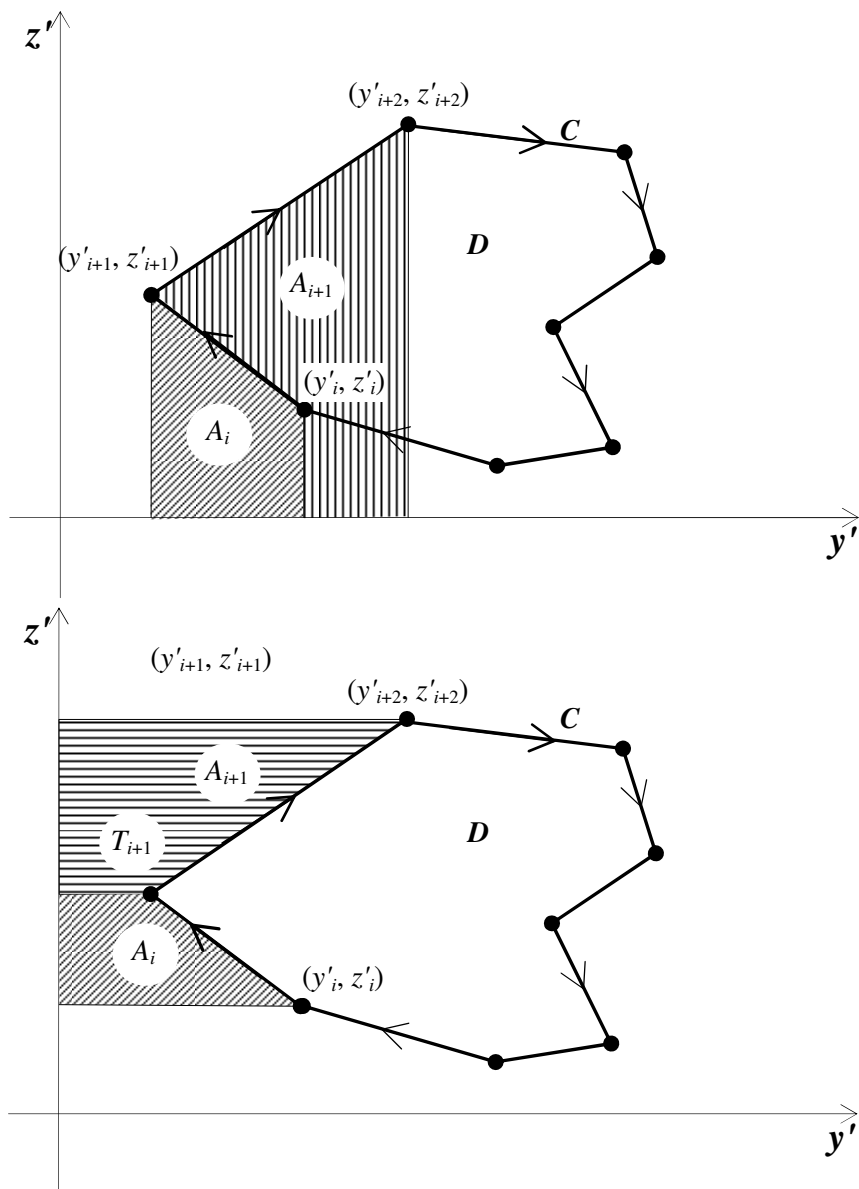
Ker sem v mojem primeru podajal točke v smeri urinega kazalca, velja:

$$S_z = \iint_D y' dy' dz' = \oint_{C^-} y' z' dy' \quad (13)$$

C^- pri krivuljnem integralu pomeni integracijo v smeri urinega kazalca. Integral po krivulji C sem razdelil na seštevek integralov po daljicah $T_i T_{i+1}$, kjer i teče od 1 ... n ; tako se enačba (13) prevede na integracijo po odsekih:

$$S_z = \sum S_{zi}$$

$$S_{zi} = \int_{y_i}^{y_{i+1}} z(y) y dy \quad (14)$$



Slika 2.2 Ilustracija računa ploščine območja D

V enačbo (14) sem vstavil enačbo daljice (5):

$$\begin{aligned}
 S_{zi} &= \int_{y_i}^{y_{i+1}} (z_i + (z_{i+1} - z_i)/(y_{i+1} - y_i)(y - y_i))y dy = \int_{y_i}^{y_{i+1}} (ky + n)y dy \\
 &= (ky^3/3 + ny^2/2) \Big|_{y_i}^{y_{i+1}} = (ky_{i+1}^3/3 + ny_{i+1}^2/2) - (ky_i^3/3 + ny_i^2/2) = k(y_{i+1}^3 - y_i^3)/3 + n(y_{i+1}^2 - y_i^2)/2 \\
 &= (z_{i+1} - z_i)/(y_{i+1} - y_i) \cdot (y_{i+1}^3 - y_i^3)/3 + n(y_{i+1}^2 - y_i^2)/2 \\
 &= (z_{i+1} - z_i) \cdot (y_{i+1}^2 + y_{i+1}y_i + y_i^2)/3 + (y_{i+1}z_i - y_iz_{i+1})(y_{i+1} + y_i)/2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (y_{i+1}^2 z_{i+1} + y_i y_{i+1} z_{i+1} + y_i^2 z_{i+1} - y_{i+1}^2 z_i - y_i y_{i+1} z_i - y_i^2 z_i)/3 + (y_{i+1}^2 z_i - y_i^2 z_{i+1} + y_i y_{i+1} z_i - y_i y_{i+1} z_{i+1})/2 \\
&= y_{i+1}^2 z_{i+1}/3 - y_i y_{i+1} z_{i+1}/6 - y_i^2 z_{i+1}/6 + y_{i+1}^2 z_i/6 + y_i y_{i+1} z_i/6 - y_i^2 z_i/3 \\
&= (2y_{i+1}^2 - y_i y_{i+1} - y_i^2) z_{i+1}/6 + (y_{i+1}^2 + y_i y_{i+1} - 2y_i^2) z_i/6
\end{aligned}$$

Dobil sem enačbo za S_{z_i} izraženo s koordinatami oglišč T_i in T_{i+1}

$$S_{z_i} = (2y_{i+1} + y_i)(y_{i+1} - y_i)z_{i+1}/6 + (y_{i+1} + 2y_i)(y_{i+1} - y_i)z_i/6 = \int z y dy = S_{z_i} \quad (15)$$

Enačbo sem rešil tudi v programu *mathematica* z naslednjim ukazom:

Simplify[Integrate[($z_i + (z_{i+1} - z_i)(y - y_i)/(y_{i+1} - y_i)$), { y, y_i, y_{i+1} }]]

Rešitev v programu *mathematica* je potrdila pravilnost računa.

2.5 Račun statičnega momenta prereza okoli osi y'

Račun statičnega momenta prereza okoli osi y' sledi istemu postopku kot račun statičnega momenta okoli osi z' , s tem da sem tukaj integriral po z' . Parcialno zvezno odvedljivi funkciji M in L sem izbral tako, da bo izraz v ploščinskem integralu na desni strani Greenovega izreka enak z' .

$$M(y', z') = y' z' \quad L(y', z') = 0$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial z'} \right) dy' dz' = \iint_D z' dy' dz' = S_y = \oint_{C^+} L(y', z') dy' + M(y', z') dz' = \oint_{C^+} y' z' dz' \quad (16)$$

Ker sem v mojem primeru podajal točke v smeri urinega kazalca, velja:

$$S_y = \iint_D z' dy' dz' = - \oint_{C^-} y' z' dz' \quad (17)$$

C^- pri krivuljnem integralu pomeni integracijo v smeri urinega kazalca.

Integral po krivulji C sem razdelil na seštevek integralov po daljicah $T_i T_{i+1}$, kjer i teče od 1 ... n ; tako se enačba (17) prevede na integracijo po odsekih:

$$S_y = \Sigma S_{y_i} = \Sigma \int dS_y = - \Sigma \int_{z'_i}^{z'_{i+1}} y'(z') z' dz'$$

V zgornjo enačbo sem vstavil enačbo daljice (5):

$$S_{y_i} = - \int_{z'_i}^{z'_{i+1}} y'(z') z' dz' = - \int_{z'_i}^{z'_{i+1}} (y'_i + (y'_{i+1} - y'_i)/(z'_{i+1} - z'_i) \cdot (z' - z'_i)) \cdot z' dz'$$

$$- S_{y_i} = (kz'^3/3 + nz'^2/2) \Big|_{z'_i}^{z'_{i+1}} = (kz_{i+1}^3/3 + nz_{i+1}^2/2) - (kz_i^3/3 + nz_i^2/2) = k(z_{i+1}^3 - z_i^3)/3 + n(z_{i+1}^2 - z_i^2)/2$$

$$\begin{aligned}
 &= (y_{i+1} - y_i)/(z_{i+1} - z_i) \cdot (z_{i+1}^3 - z_i^3)/3 + n(z_{i+1}^2 - z_i^2)/2 \\
 &= (y_{i+1} - y_i)(z_{i+1}^2 + z_{i+1}z_i + z_i^2)/3 + (z_{i+1}y_i - z_iy_{i+1})(z_{i+1} + z_i)/2 \\
 &= (z_{i+1}^2y_{i+1} + z_iz_{i+1}y_{i+1} + z_i^2y_{i+1} - z_{i+1}^2y_i - z_iz_{i+1}y_i - z_i^2y_i)/3 + (z_{i+1}^2y_i - z_i^2y_{i+1} + z_iz_{i+1}y_i - z_iz_{i+1}y_{i+1})/2 \\
 &= z_{i+1}^2y_{i+1}/3 - z_iz_{i+1}y_{i+1}/6 - z_i^2y_{i+1}/6 + z_{i+1}^2y_i/6 + z_iz_{i+1}y_i/6 - z_i^2y_i/3 \\
 &= (2z_{i+1}^2 - z_iz_{i+1} - z_i^2)y_{i+1}/6 + (z_{i+1}^2 + z_iz_{i+1} - 2z_i^2)y_i/6
 \end{aligned}$$

Dobil sem enačbo za S_{y_i} izraženo s koordinatami oglišč T_i in T_{i+1}

$$S_{y_i} = - (2z_{i+1} + z_i)(z_{i+1} - z_i)y_{i+1}/6 - (z_{i+1} + 2z_i)(z_{i+1} - z_i)y_i/6 = \int yz dz \quad (18)$$

Enačbo sem rešil tudi v programu *mathematica* z naslednjim ukazom:

Simplify[Integrate[($y_i + (y_{i+1} - y_i)(z - z_i)/(z_{i+1} - z_i)$), {z, z_i, z_{i+1}}]]

Rešitev v programu *mathematica* je potrdila pravilnost računa.

2.6 Račun težišča prereza:

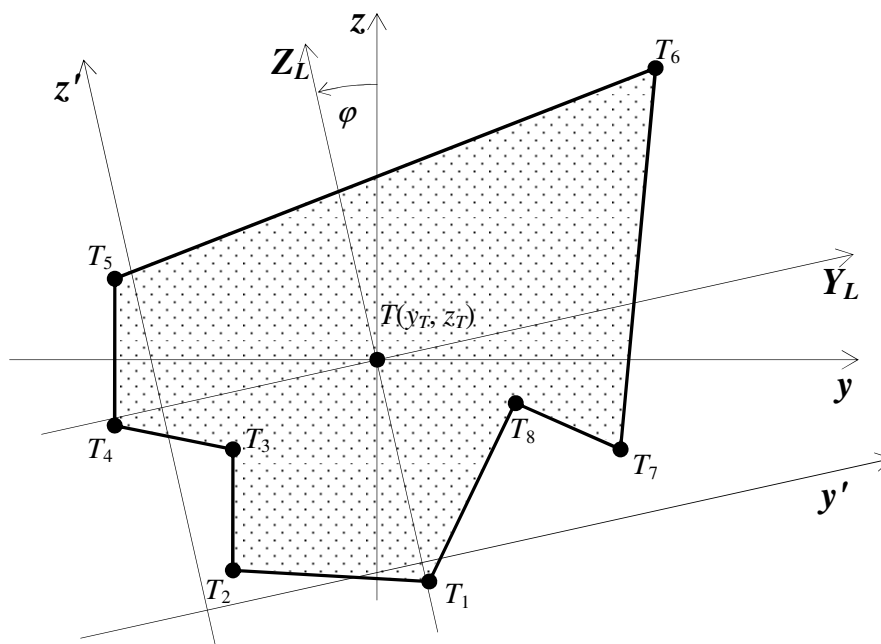
Ko sem izračunal oba statična momenta okoli y' in z' ter ploščino območja D , sem lahko izračunal geometrijsko težišče prereza $T(y'_T, z'_T)$. Potem sem definiral nov koordinatni sistem, lokalni koordinatni sistem (X_L, Y_L, Z_L) . Lokalni koordinatni sistem ima izhodišče v geometrijskem središču prereza, koordinatne osi pa so vzporedne s koordinatnimi osmi začetnega koordinatnega sistema (x', y', z') . V lokalnem koordinatnem sistemu (X_L, Y_L, Z_L) sem podajal obtežbe.

Enačbe za račun težišča:

$$\begin{aligned}
 S_z &= \sum S_{z_i} & y_T &= S_z/A \\
 S_y &= \sum S_{y_i} & z_T &= S_y/A
 \end{aligned} \quad (19)$$

Enačba za preračun koordinat iz začetnega koordinatnega sistema v novi, lokalni koordinatni sistem:

$$(X_L, Y_L, Z_L) = (x', y' - y'_T, z' - z'_T) \quad (20)$$



Slika 2.3 Trije koordinatni sistemi in relacije med njimi

2.7 Delovni koordinatni sistem (x, y, z)

Definiral sem še tretji koordinatni sistem, delovni koordinatni sistem (x, y, z). Ta koordinatni sistem ima isto izhodišče kot lokalni koordinatni sistem (X_L, Y_L, Z_L), isto koordinatno os x , osi y in z , torej koordinati prečnega prereza pa se zasukata za kot φ . Lastnost delovnega koordinatnega sistema je ta, da je os y vedno vzporedna z nevtralno osjo deformacij ki jo določa deformacijska ravnina. Vzporednost osi y z nevtralno osjo ima za rezultat precejšnjo poenostavitev računov projektne odpornosti prereza. Predvsem to velja za integracijo napetosti v betonu.

Enačbe za preračun koordinat iz lokalnega koordinatnega sistema v delovni koordinatni sistem:

$$x = X_L$$

$$y = Y_L \cos \varphi - Z_L \sin \varphi$$

$$z = Y_L \sin \varphi + Z_L \cos \varphi \quad (21)$$

2.8 Račun vztrajnostnega momenta prereza okoli osi $y - I_y$

Račun vztrajnostnega momenta prereza okoli osi y sem delal v lokalnem koordinatnem sistemu. Drugače pa je sledil istemu postopku kot račun statičnega momenta okoli osi y' , pri računu vztrajnostnega momenta je seveda ročica kvadrirana. Parcialno zvezno odvedljivi funkciji M in L sem izbral tako, da bo izraz v ploščinskem integralu na desni strani Greenovega izreka enak z^2 .

$$M(y, z) = yz^2 \quad L(y, z) = 0$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial L}{\partial z} \right) dydz = \iint_D z^2 dydz = I_y = \oint_{C^+} L(y, z) dy + M(y, z) dz = \oint_{C^+} yz^2 dz \quad (22)$$

Ker sem v mojem primeru podajal točke v smeri urinega kazalca, velja:

$$I_y = \iint_D z^2 dydz = - \oint_{C^-} yz^2 dz \quad (23)$$

C^- pri krivuljnem integralu pomeni integracijo v smeri urinega kazalca.

Integral po krivulji C sem razdelil na seštevek integralov po daljicah $T_i T_{i+1}$, kjer i teče od 1 ... n ; tako se enačba (23) prevede na integracijo po odsekih:

$$I_y = \sum I_{y_i} = - \sum \int_{z_i}^{z_{i+1}} y(z) z^2 dz$$

V zgornjo enačbo sem vstavil enačbo daljice (5):

$$\begin{aligned} I_{y_i} &= - \int_{z_i}^{z_{i+1}} y(z) z^2 dz = - \int_{z_i}^{z_{i+1}} (y_i + (y_{i+1} - y_i)/(z_{i+1} - z_i)(z - z_i)) z^2 dz \\ &= - (kz^4/4 + nz^3/3) \Big|_{z_i}^{z_{i+1}} = - (kz_{i+1}^4/4 + nz_{i+1}^3/3) + (kz_i^4/4 + nz_i^3/3) \\ &= - k(z_{i+1}^4 - z_i^4)/4 - n(z_{i+1}^3 - z_i^3)/3 \\ &= - (y_{i+1} - y_i)(z_{i+1}^3 + z_{i+1}^2 z_i + z_{i+1} z_i^2 + z_i^3)/4 - (z_{i+1} y_i - z_i y_{i+1})(z_{i+1}^2 + z_{i+1} z_i + z_i^2)/3 \\ &= - (3z_{i+1}^3 - z_{i+1}^2 z_i - z_{i+1} z_i^2 - z_i^3) y_{i+1} / 12 - (z_{i+1}^3 + z_{i+1}^2 z_i + z_{i+1} z_i^2 - 3z_i^3) y_i / 12 \end{aligned}$$

Dobil sem enačbo za I_{y_i} izraženo s koordinatami oglišč T_i in T_{i+1}

$$I_{y_i} = (z_i - z_{i+1})(2z_i z_{i+1}(y_{i+1} + y_i) + z_i^2(3y_i + y_{i+1}) + z_{i+1}^2(y_i + 3y_{i+1}))/12 = - \int yz^2 dz = I_{y_i} \quad (24)$$

Enačbo sem rešil tudi v programu *mathematica* z naslednjim ukazom:

Simplify[Integrate[(y_i + (y_{i+1} - y_i)(z - z_i)/(z_{i+1} - z_i))z², {z, z_i, z_{i+1}}]]

Rešitev v programu *mathematica* je potrdila pravilnost računa.

2.9 Račun vztrajnostnega momenta prereza okoli osi $z - I_z$

Za račun vztrajnostnega momenta območja D okoli osi z sem uporabil Greenov izrek (1). Parcialno zvezno odvedljivi funkciji M in L sem izbral tako, da je izraz v ploščinskem integralu na desni strani Greenovega izreka enak y^2 .

$$M(y, z) = 0 \quad L(y, z) = y^2 z$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial L}{\partial z} \right) dydz = - \iint_D y^2 dydz = -I_z = \oint_{C^+} L(y, z) dy + M(y, z) dz = \oint_{C^+} y^2 z dy \quad (25)$$

Ker sem v mojem primeru podajal točke v smeri urinega kazalca, velja:

$$I_z = \iint_D y^2 dydz = \oint_{C^-} y^2 z dy \quad (26)$$

C^- pri krivuljnem integralu pomeni integracijo v smeri urinega kazalca.

Integral po krivulji C sem razdelil na seštevek integralov po daljicah $T_i T_{i+1}$, kjer i teče od 1 ... n ; tako se enačba (26) prevede na integracijo po odsekih:

$$I_z = \Sigma I_{z_i} = \Sigma \int_{y_i}^{y_{i+1}} z(y) y^2 dy$$

V zgornjo enačbo sem vstavil enačbo daljice (5):

$$I_{z_i} = - \int_{y_i}^{y_{i+1}} z(y) y^2 dy = - \int_{y_i}^{y_{i+1}} (z_i + (z_{i+1} - z_i)/(y_{i+1} - y_i)(y - y_i)) y^2 dy$$

Dobil sem enačbo za I_{z_i} izraženo s koordinatami oglišč T_i in T_{i+1}

$$I_{z_i} = (y_{i+1} - y_i)(2y_i y_{i+1}(z_{i+1} + z_i) + y_i^2(3z_i + z_{i+1}) + y_{i+1}^2(z_i + 3z_{i+1}))/12 = - \int y^2 z dz \quad (27)$$

Enačbo sem rešil tudi v programu *mathematica* z naslednjim ukazom:

Simplify[Integrate[($z_i + (z_{i+1} - z_i)(y - y_i)/(y_{i+1} - y_i)$) y^2 , { y, y_i, y_{i+1} }]]

Rešitev v programu *mathematica* je potrdila pravilnost računa.

2.10 Povzetek geometrijskih karakteristik prereza

$$A = \sum_{i=0}^n \int_{y'_i}^{y'_{i+1}} z'(y') dy' = \sum_{i=0}^n (z'_{i+1} + z'_i) (y'_{i+1} - y'_i) / 2$$

$$S_y = \sum_{i=0}^n \int_{z'_i}^{z'_{i+1}} y'(z') z' dz' = \sum_{i=0}^n - (2z'_{i+1} + z'_i) (z'_{i+1} - z'_i) y'_{i+1} / 6 - (z'_{i+1} + 2z'_i) (z'_{i+1} - z'_i) y'_i / 6$$

$$S_z = \sum_{i=0}^n \int_{y'_i}^{y'_{i+1}} z'(y') y' dy' = \sum_{i=0}^n (2y'_{i+1} + y'_i) (y'_{i+1} - y'_i) z'_{i+1} / 6 + (y'_{i+1} + 2y'_i) (y'_{i+1} - y'_i) z'_i / 6$$

$$y'_T = S_z / A \quad z'_T = S_y / A$$

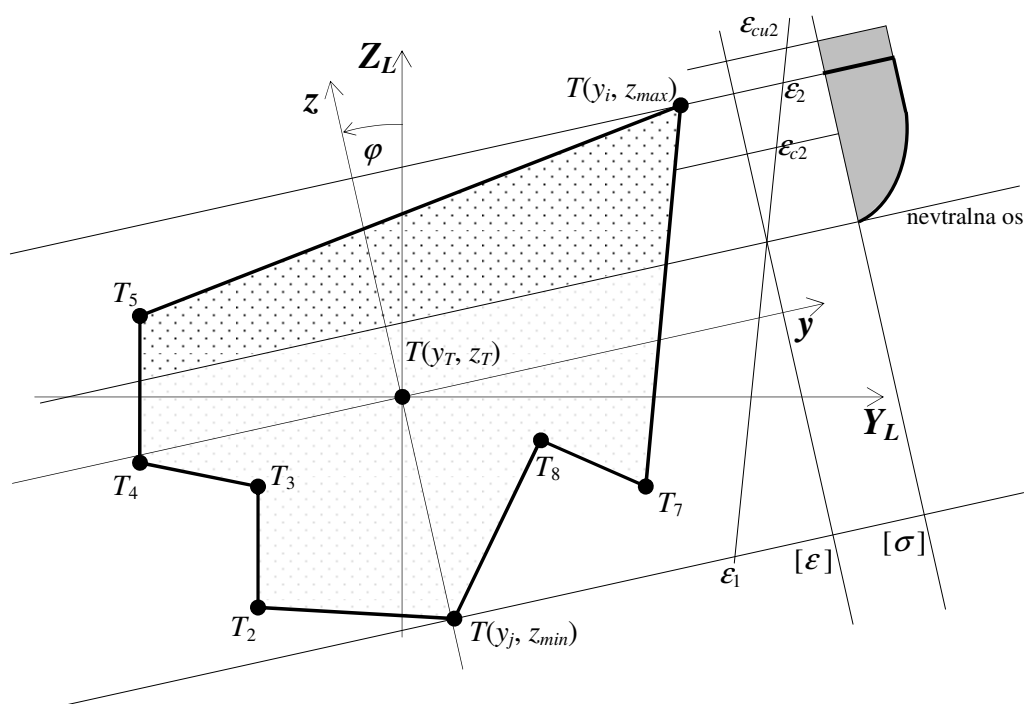
$$I_y = - \sum_{i=0}^n \int_{z'_i}^{z'_{i+1}} y(z) z^2 dz = \sum_{i=0}^n (z_i - z_{i+1}) (2z_i z_{i+1} (y_{i+1} + y_i) + z_i^2 (3y_i + y_{i+1}) + z_{i+1}^2 (y_i + 3y_{i+1})) / 12$$

$$I_z = \sum_{i=0}^n \int_{y'_i}^{y'_{i+1}} z(y) y^2 dy = \sum_{i=0}^n (y_{i+1} - y_i) (2y_i y_{i+1} (z_{i+1} + z_i) + y_i^2 (3z_i + z_{i+1}) + y_{i+1}^2 (z_i + 3z_{i+1})) / 12$$

Vse enačbe od poglavja 2.3 do 2.9 sem rešil tudi s pomočjo programa *mathematica*, uporabil sem ukaza **Simplify** in **Integrate**.

2.11 Določitev deformacijske ravnine:

Deformacijsko ravnino določim s tremi parametri: ε_1 , ε_2 in φ . ε_1 je deformacija prereza v najnižji točki prereza, ε_2 je deformacija v najvišji točki prereza φ pa je zasuk prereza okoli osi x , ki poteka skozi geometrijsko težišče prereza.



Slika 2.4 Ilustracija postavitve deformacijske ravnine

$$\varepsilon_1 = \varepsilon(z_{min})$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon(z_{max}) \quad (28)$$

Integracijo vzdolžnih napetosti v betonu sem izvedel na vsakem odseku posebej. Najprej sem določil globino nevtralne osi z_0 . Delovni koordinatni sistem je izbran tako, da je nevtralna os vzporedna z osjo y . Prav tako določim z_p in z_k , ki določata razdaljo do osi kjer velja $\varepsilon(z_p) = \varepsilon_{c2}$ in $\varepsilon(z_k) = \varepsilon_{cu2}$.

$$z_k = z_{min} + (\varepsilon_{cu2} - \varepsilon_1)(z_{max} - z_{min})/(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$$

$$z_p = z_{min} + (\varepsilon_{c2} - \varepsilon_1)(z_{max} - z_{min})/(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$$

$$z_0 = z_{min} + (0 - \varepsilon_1)(z_{max} - z_{min})/(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \quad (29)$$

Ni nujno da se katerakoli od teh osi nahaja v prerezu. V posebnih primerih, ko je deformacijska ravnina vzporedna s prerezom, določim z_0 , z_p in z_k na drug način, drugače pri računih pride do deljenja z nič.

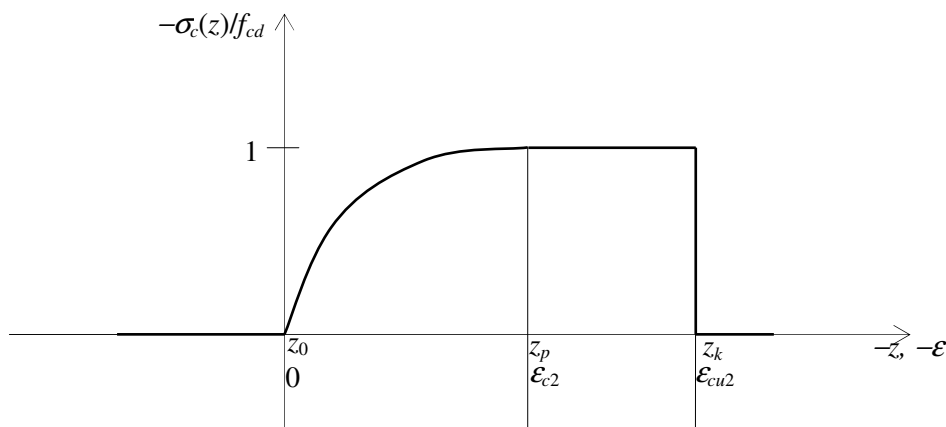
v primeru da velja: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \leq 0$ potem: $z_k = z_{max}$, $z_p = z_{max}$, $z_0 = z_{min}$

v primeru da velja: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 > 0$ potem: $z_k = z_{max}$, $z_p = z_{max}$, $z_0 = z_{max}$ (30)

2.12 Delovni diagram betona

Enačba polinomskega dela enačbe napetosti v betonu:

$$\sigma_{cp}(z)/f_{cd} = (1 - (1 - \varepsilon_c(z)/\varepsilon_{c2})^n)$$



Slika 2.5 Delovni diagram betona

Količine n , ε_{c2} in ε_{cu2} so odvisne od izbire kvalitete betona, za betone običajne trdnosti pa velja:

$$n = 2, \varepsilon_{c2} = -2‰ \text{ in } \varepsilon_{cu2} = -3.5‰$$

$$\bar{\sigma}_{cp}(z) = \sigma_{cp}(z)/f_{cd} = \sum_{j=0}^2 a_j z^j = a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

Ker računam vse količine v prerezu v odvisnosti od koordinat y in z , predstavim tudi napetosti v betonu kot funkcijo spremenljivke z .

pogoji:
$$\bar{\sigma}_c(z_p) = a_2 z_p^2 + a_1 z_p + a_0 = 1$$

$$\bar{\sigma}_c(z_0) = a_2 z_0^2 + a_1 z_0 + a_0 = 0$$

$$\bar{\sigma}_c'(z_p) = 2a_2 z_p + a_1 = 0$$

Iz pogojev izračunani koeficienti a_2 , a_1 in a_0 :

$$a_0 = (z_0^2 - 2z_p z_0)/(z_0 - z_p)^2$$

$$a_1 = 2z_p/(z_0 - z_p)^2$$

$$a_2 = -1/(z_0 - z_p)^2$$

(31)

Če velja $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, se v enačbah pojavi deljenje z 0, zato:

v primeru da velja $\varepsilon_{c2} \leq \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \leq 0$, postavim $a_2 = a_1 = 0$, $a_0 = 2\varepsilon_1/\varepsilon_{c2} - (\varepsilon_1/\varepsilon_{c2})^2$,

$$\text{Sicer } a_2 = a_1 = a_0 = 0. \quad (32)$$

2.13 Delovni diagram armature

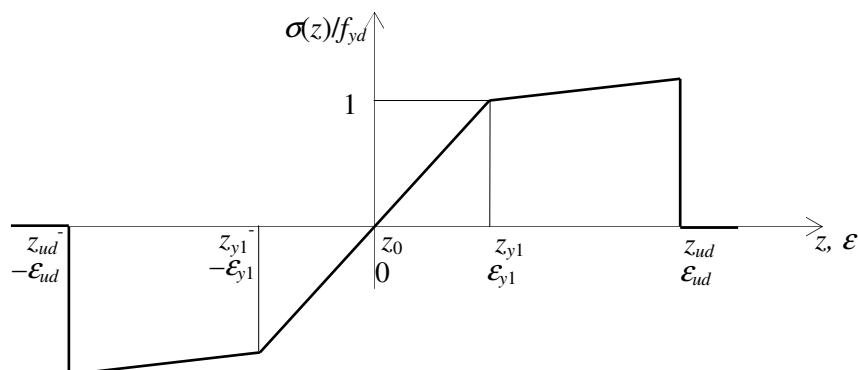
Ker so armaturne palice podane kot točke, ni bilo potrebe po zapletenem integriranju, zato napetosti predstavim kot funkcijo deformacij. Deformacije pa izračunam iz koordinate z . Poleg tega odštejem še napetosti v betonu in tako upoštevam neto prerez betona.

$$\varepsilon_{ud} = 0.9\varepsilon_{uk} = 22.5‰ \quad \dots \text{ mejna deformacija armature (pri razredu duktilnosti A)}$$

$$E_s = 20000 \text{ kN/cm}^2 \quad \dots \text{ elastični modul armature}$$

$$E_p = 1000 \text{ kN/cm}^2 \quad \dots \text{ modul utrditve armature (pri razredu duktilnosti A)}$$

$$\varepsilon_{y1} = f_{yd}/E_s \quad \dots \text{ deformacija na meji tečenja}$$



Slika 2.6 Delovni diagram armature

$$z_{y1} = z_{min} - (\epsilon_{y1} + \epsilon_1)(z_{max} - z_{min})/(\epsilon_2 - \epsilon_1)$$

$$z_{y1}^- = z_{min} + (\epsilon_{y1} - \epsilon_1)(z_{max} - z_{min})/(\epsilon_2 - \epsilon_1)$$

$$z_{ud} = z_{min} - (\epsilon_{ud} + \epsilon_1)(z_{max} - z_{min})/(\epsilon_2 - \epsilon_1)$$

$$z_{ud}^- = z_{min} + (\epsilon_{ud} - \epsilon_1)(z_{max} - z_{min})/(\epsilon_2 - \epsilon_1) \quad (33)$$

$$\sigma_s(z) = f_{yd}\epsilon/\epsilon_{y1} - \sigma_c(z), \quad z_{y1}^- < z < z_{y1}$$

$$\sigma_s(z) = f_{yd}(1 + k_p(\epsilon - \epsilon_{y1})/(\epsilon_{uk} - \epsilon_{y1})) - \sigma_c(z), \quad z_{ud}^- < z < z_{y1}^- \text{ in } z_{y1} < z < z_{ud}$$

$$\sigma_s(z)/f_{yd} = 0 \quad \text{sicer.} \quad (34)$$

Pri tem je: $k_p = E_p(\epsilon_{ud} - \epsilon_{y1})/f_{yd}$

2.14 Določitev integralnih intervalov na odseku i

Pri integriranju vzdolžnih napetosti v betonu sem razdelil prečni prerez na 4 območja. V prvem območju so deformacije v betonu pozitivne, zato so napetosti v betonu nič. Integracija v tej coni je trivialna. V drugem območju so deformacije negativne, vendar večje od ϵ_{c2} , torej so napetosti v polinomskem delu. V tretjem območju so napetosti konstantne, v četrtem pa je beton porušen, napetosti so nič. Četrte območje je predvideno zato, da se podprogram Solver izogne konvergenčnim problemom. Območja določim za vsak odsek posebej. Na vsakem odseku pogledam v kateri od štirih območju se nahaja in temu primerno izračunam meje integriranja z_{0i} , z_{pi} in z_{ki} za različna območja. V nadaljevanju so navedene enačbe, ki določajo integralne odseke na odseku i . Kako določim z_{0i} , z_{pi} in z_{ki} za odsek i :

Če premica $z = z_0$ seka odsek i , potem velja $z_{0i} = z_0$

drugače velja $z_{0i} = \min(z_i, z_{i+1})$ če odsek nad premico $z = z_0$, sicer velja $z_{0i} = \max(z_i, z_{i+1})$

$$z_{0i} = \text{IF}((z_0 - z_i)(z_0 - z_{i+1}) > 0; \text{IF}(\text{ABS}(z_0 - z_i) < \text{ABS}(z_0 - z_{i+1}); z_i; z_{i+1}); z_0)$$

podobno torej:

$$z_{pi} = \text{IF}((z_p - z_i)(z_p - z_{i+1}) > 0; \text{IF}(\text{ABS}(z_p - z_i) < \text{ABS}(z_p - z_{i+1}); z_i; z_{i+1}); z_p)$$

$$z_{ki} = \text{IF}((z_k - z_i)(z_k - z_{i+1}) > 0; \text{IF}(\text{ABS}(z_k - z_i) < \text{ABS}(z_k - z_{i+1}); z_i; z_{i+1}); z_k) \quad (35)$$

Določim še pripadajoče y_{0i} , y_{pi} in y_{ki} za odsek i

če $z_{i+1} = z_i$, potem velja $y_{0i} = (y_i + y_{i+1})/2$, preprečim $\text{div}/0$, y_{0i} poljubno izberem.

drugače velja $y_{0i} = y_i + (z_{0i} - z_i)(y_{i+1} - y_i)/(z_{i+1} - z_i)$.

$$y_{0i} = \text{IF}(z_{i+1} = z_i; (y_i + y_{i+1})/2; y_i + (z_{0i} - z_i)(y_{i+1} - y_i)/(z_{i+1} - z_i))$$

podobno:

$$y_{pi} = \text{IF}(z_{i+1} = z_i; (y_i + y_{i+1})/2; y_i + (z_{pi} - z_i)(y_{i+1} - y_i)/(z_{i+1} - z_i))$$

$$y_{ki} = \text{IF}(z_{i+1} = z_i; (y_i + y_{i+1})/2; y_i + (z_{ki} - z_i)(y_{i+1} - y_i)/(z_{i+1} - z_i)) \quad (36)$$

2.15 Račun rezultirajoče sile v betonu $F_{c,Rd}$

Ko sem določil območja integriranja, sem izračunal še enačbe za račun rezultirajoče sile v betonu. Te podenačbe so enake kot za geometrijske karakteristike, zato sem za račun integralov uporabil Greenov izrek (1). Parcialno zvezno odvedljivi funkciji M in L sem izbral tako, da je izraz v ploščinskem integralu na desni strani Greenovega izreka enak $\bar{\sigma}_c(z)$ za polinomski del oziroma 1 za konstantni del :

$$M(y, z) = \bar{\sigma}_c(z)y \quad L(y, z) = 0 \quad \text{za polinomski del}$$

$$M(y, z) = y \quad L(y, z) = 0 \quad \text{za konstantni del}$$

Ker sem v mojem primeru podajal točke v smeri urinega kazalca, velja:

$$\bar{N}_{c,Rd,i}(z) = \int_D \bar{\sigma}_c(z) dA = - \int_{z_i}^{z_{i+1}} y(z) \bar{\sigma}_c(z) dz$$

$$\bar{N}_{c,Rd,i}(z) = - \int_{z_i}^{z_{0i}} y(z) \cdot 0 \cdot dz - \int_{z_{0i}}^{z_{pi}} y(z) \bar{\sigma}_c(z) dz - \int_{z_{pi}}^{z_{ki}} y(z) \cdot 1 \cdot dz - \int_{z_{ki}}^{z_{i+1}} y(z) \cdot 0 \cdot dz \quad (37)$$

Vsak odsek razdelim na štiri dele, natezni del, tlačni polinomski del, tlačni konstantni del in porušeni del. Zakaj še ta četrti del? Pri določanju deformacijske ravnine pri dani obtežbi, prerezu in armaturi je

treba pustiti prostor za deformacijsko ravnino ki presega mejne deformacije. Če Solver najde rešitev s porušenim prerezom, je to lahko znak da bi se dalo prerez oblikovati bolje, brez porušenega dela.

$$\begin{aligned}\bar{N}_{c,Rd,i}(z) &= -\int_{z_{0i}}^{z_{pi}} y(z) \bar{\sigma}_c(z) dz - \int_{z_{pi}}^{z_{ki}} y(z) \cdot 1 \cdot dz \\ -\bar{N}_{c,Rd,i}(z) &= \int_{z_{0i}}^{z_{pi}} y(z) \sum_{j=0}^2 a_j z^j dz + \int_{z_{pi}}^{z_{ki}} y(z) dz = \int_{z_{0i}}^{z_{pi}} y(z) a_0 dz + \int_{z_{0i}}^{z_{pi}} y(z) a_1 z dz + \int_{z_{0i}}^{z_{pi}} y(z) a_2 z^2 dz + \int_{z_{pi}}^{z_{ki}} y(z) dz \\ -\bar{N}_{c,Rd,i}(z) &= a_0 \int_{z_{0i}}^{z_{pi}} y(z) dz + a_1 \int_{z_{0i}}^{z_{pi}} y(z) z dz + a_2 \int_{z_{0i}}^{z_{pi}} y(z) z^2 dz + \int_{z_{pi}}^{z_{ki}} y(z) dz\end{aligned}\quad (38)$$

Potrebno je paziti, tukaj so različne mejne vrednosti za polinomski del in konstantni del.

$$\int_{z_{pi}}^{z_{ki}} y(z) dz = (y_{ki} + y_{pi})(z_{ki} - z_{pi})/2 \quad (\text{konstantni del})$$

$$\int_{z_{0i}}^{z_{pi}} y(z) dz = (y_{pi} + y_{0i})(z_{pi} - z_{0i})/2 \quad (\text{polinomski del } \downarrow)$$

$$\int_{z_{0i}}^{z_{pi}} y(z) z dz = (2z_{pi} + z_{0i})(z_{pi} - z_{0i})y_{pi}/6 + (z_{pi} + 2z_{0i})(z_{pi} - z_{0i})y_{0i}/6$$

$$\int_{z_{0i}}^{z_{pi}} y(z) z^2 dz = (z_{pi} - z_{0i})(2z_{0i}z_{pi}(y_{pi} + y_{0i}) + z_{0i}^2(3y_{0i} + y_{pi}) + z_{pi}^2(y_{0i} + 3y_{pi}))/12 \quad (39)$$

Enačbe sem rešil tudi v programu *mathematica* z naslednjimi ukazi:

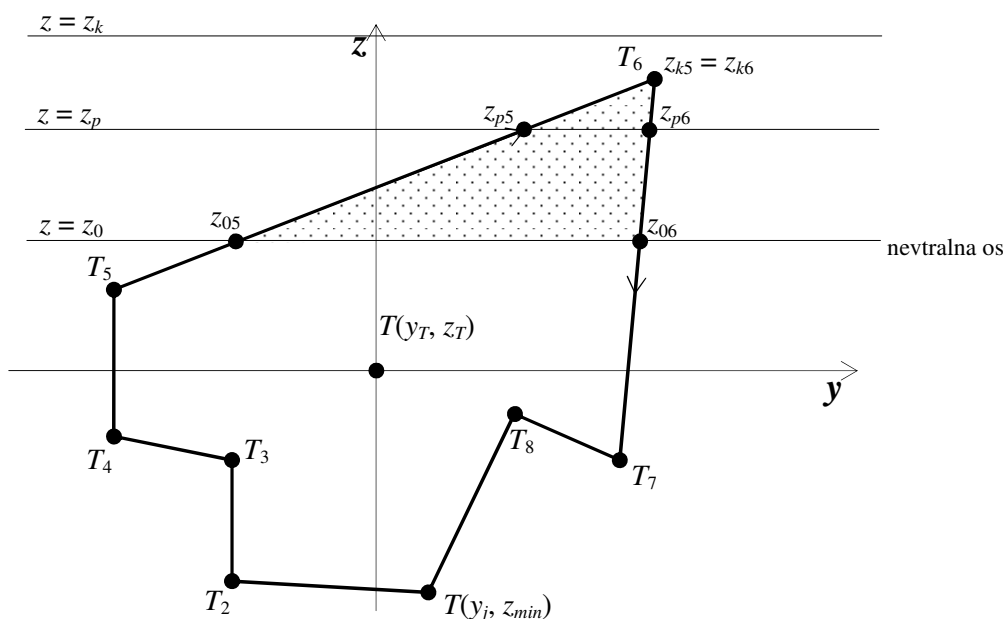
Simplify[Integrate[(y_i + (y_{i+1} - y_i)(z - z_i)/(z_{i+1} - z_i), {z, z_{pi}, z_{ki}}]]]

Simplify[Integrate[(y_i + (y_{i+1} - y_i)(z - z_i)/(z_{i+1} - z_i), {z, z_{0i}, z_{pi}}]]]

Simplify[Integrate[(y_i + (y_{i+1} - y_i)(z - z_i)/(z_{i+1} - z_i))z, {z, z_{0i}, z_{pi}}]]]

Simplify[Integrate[(y_i + (y_{i+1} - y_i)(z - z_i)/(z_{i+1} - z_i))z², {z, z_{0i}, z_{pi}}]]]

Rešitev v programu *mathematica* je potrdila pravilnost računa.

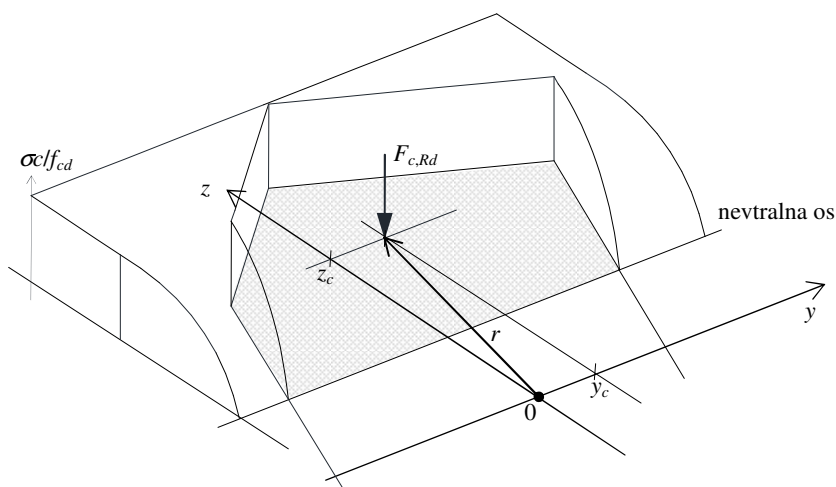


Slika 2.7 Ilustracija določanja intervalov

Ko je odsek usmerjen navzdol, se integrira v napačno smer, popravim z $\text{SIGN}(z_{i+1} - z_i)$. Ko program integrira po odseku T_5T_6 , tudi računsko določeni pododseki z_{0i} , z_{pi} , z_{ki} sledijo isti smeri. Ko pa program integrira odsek T_6T_7 , pa računa v napačno smer, računa namreč od z_{06} do z_{p6} in od z_{p6} do z_{k6} kar pa je v tem primeru v napačno smer. Če je torej $z_{i+1} < z_i$ moram integral popraviti z $\text{SIGN}(z_{i+1} - z_i)$. V slučaju ko izberem deformacijsko ravnino ki ima tlačne napetosti na spodnjem delu, se vsi izrazi izračunajo v napačno smer, vključno s temi ki so popravljeni. Zato na koncu $\bar{N}_{c,Rd}$ tudi popravim in sicer z izrazom $\text{IF}(\varepsilon_2 > \varepsilon_1; N_{c,Rd} = f_{cd}\bar{N}_{c,Rd}; N_{c,Rd} = -f_{cd}\bar{N}_{c,Rd})$.

2.16 Prijemališče sile betona $F_{c,Rd}$

Prijemališče sile betona $F_{c,Rd}$ izračunam kot težišče prizmatičnega telesa, ki je omejeno z ravnino (y, z) , z navpičnimi ravninami na ravnino (y, z) ki gredo skozi robove prereza in s ploskvijo ki opisuje napetosti v betonu. Te podenačbe so enake kot za geometrijske karakteristike, zato sem za račun integralov uporabil Greenov izrek (1). Parcialno zvezno odvedljivi funkciji M in L sem izbiral tako, da je izraz v ploščinskem integralu na desni strani Greenovega izreka enak $\bar{\sigma}_c(z) \cdot r$ za polinomski del oziroma r za konstantni del, pri čemer je r ročica momenta :

Slika 2.8 Račun prijemališča sile betona $F_{c,Rd}$

"Statični moment" okoli osi y :

$$M(y, z) = \bar{\sigma}_c(z)yz \quad L(y, z) = 0 \quad \text{za polinomski del}$$

$$M(y, z) = yz \quad L(y, z) = 0 \quad \text{za konstantni del}$$

Ker sem v mojem primeru podajal točke v smeri urinega kazalca, velja:

$$z_{ci}\bar{N}_{c,Rd,i} = \int_D z dF_c = -\int_{z_i}^{z_{i+1}} zy(z) \bar{\sigma}_c(z) dz = -\int_{z_i}^{z_{0i}} zy(z) \cdot 0 \cdot dz - \int_{z_{0i}}^{z_{pi}} zy(z) \bar{\sigma}_{cp}(z) dz - \int_{z_{pi}}^{z_{ki}} zy(z) \cdot 1 \cdot dz$$

$$z_{ci}\bar{N}_{c,Rd,i} = -\int_{z_{0i}}^{z_{pi}} zy(z) \bar{\sigma}_{cp}(z) dz - \int_{z_{pi}}^{z_{ki}} zy(z) \cdot 1 \cdot dz$$

$$-z_{ci}\bar{N}_{c,Rd,i}(z) = \int_{z_{0i}}^{z_{pi}} zy(z) \sum_{j=0}^2 a_j z^j dz + \int_{z_{pi}}^{z_{ki}} zy(z) dz$$

$$-z_{ci}\bar{N}_{c,Rd,i}(z) = \int_{z_{0i}}^{z_{pi}} zy(z) a_0 dz + \int_{z_{0i}}^{z_{pi}} zy(z) a_1 z dz + \int_{z_{0i}}^{z_{pi}} zy(z) a_2 z^2 dz + \int_{z_{pi}}^{z_{ki}} zy(z) dz$$

$$\int_{z_{pi}}^{z_{ki}} y(z) z dz = (2z_{ki} + z_{pi})(z_{ki} - z_{pi})y_{ki}/6 + (z_{ki} + 2z_{pi})(z_{ki} - z_{pi})y_{pi}/6 \quad \text{prispevek konstantnega dela}$$

$$\int_{z_{0i}}^{z_{pi}} y(z) z dz = (2z_{pi} + z_{0i})(z_{pi} - z_{0i})y_{pi}/6 + (z_{pi} + 2z_{0i})(z_{pi} - z_{0i})y_{0i}/6 \quad \text{prispevek polinomskega dela}$$

$$\int_{z_{0i}}^{z_{pi}} y(z) z^2 dz = (z_{pi} - z_{0i})(2z_{0i}z_{pi}(y_{pi} + y_{0i}) + z_{0i}^2(3y_{0i} + y_{pi}) + z_{pi}^2(y_{0i} + 3y_{pi}))/12 \quad (40)$$

$$\int_{z_{0i}}^{z_{pi}} y(z) z^3 dz = (z_{0i} - z_{pi})(z_{0i}^3(4y_{0i} + y_{pi}) + z_{0i}^2z_{pi}(2y_{pi} + 3y_{0i}) + z_{0i}z_{pi}^2(2y_{0i} + 3y_{pi}) + z_{pi}^3(y_{0i} + 4y_{pi}))/20$$

$z_c\bar{N}_{c,Rd}$ ni produkt z_c in $\bar{N}_{c,Rd}$ ampak vsota statičnih momentov 3D telesa na sliki Slika 2.8

$$z_c \bar{N}_{c,Rd} = \sum z_{ci} \bar{N}_{c,Rd,i}$$

$$z_c = z_c \bar{N}_{c,Rd} / F_c$$

V primeru da je cel prerez v nategu:

če $F_c = 0$, potem $z_c = 0$

Enačbe sem rešil tudi v programu *mathematica* z naslednjimi ukazi:

Simplify[Integrate[($y_i + (y_{i+1} - y_i)(z - z_i)/(z_{i+1} - z_i)$), {z, z_{pi}, z_{ki}}]]

Simplify[Integrate[($y_i + (y_{i+1} - y_i)(z - z_i)/(z_{i+1} - z_i)$), {z, z_{0i}, z_{pi}}]]

Simplify[Integrate[($y_i + (y_{i+1} - y_i)(z - z_i)/(z_{i+1} - z_i)$)², {z, z_{0i}, z_{pi}}]]

Simplify[Integrate[($y_i + (y_{i+1} - y_i)(z - z_i)/(z_{i+1} - z_i)$)³, {z, z_{0i}, z_{pi}}]]

Rešitev v programu *mathematica* je potrdila pravilnost računa.

"Statični moment" okoli osi z:

$$M(y, z) = \bar{\sigma}_c(z)y^2/2 \quad L(y, z) = 0 \quad \text{za polinomski del}$$

$$M(y, z) = y^2/2 \quad L(y, z) = 0 \quad \text{za konstantni del}$$

Ker sem v mojem primeru podajal točke v smeri urinega kazalca, velja:

$$yF_{ci} = \int y dF_c = -\int_{z_i}^{z_{i+1}} y^2(z) f(z) dz/2 = -\int_{z_i}^{z_{0i}} y^2(z) \cdot 0 \cdot dz/2 - \int_{z_{0i}}^{z_{pi}} y^2(z) f_2(z) dz/2 - \int_{z_{pi}}^{z_{ki}} y^2(z) \cdot 1 \cdot dz/2$$

$$yF_{ci} = -\int_{z_{0i}}^{z_{pi}} y^2(z) f_2(z) dz/2 - \int_{z_{pi}}^{z_{ki}} y^2(z) dz/2$$

$$-yF_{ci} = a_0 \int_{z_{0i}}^{z_{pi}} y^2(z) dz/2 + a_1 \int_{z_{0i}}^{z_{pi}} y^2(z) z dz/2 + a_2 \int_{z_{0i}}^{z_{pi}} y^2(z) z^2 dz/2 + \int_{z_{pi}}^{z_{ki}} y^2(z) dz/2$$

$$-2yF_{ci} = a_0 \int y^2 dz + a_1 \int y^2 z dz + a_2 \int y^2 z^2 dz + \int y^2 dz$$

$$\int_{z_{pi}}^{z_{ki}} y^2(z) dz = (y_{pi}^2 + y_{pi} y_{ki} + y_{ki}^2)(z_{pi} - z_{ki})/3 \quad \text{prispevek konstantnega dela}$$

$$\int_{z_{0i}}^{z_{pi}} y^2(z) dz = (y_{0i}^2 + y_{0i} y_{pi} + y_{pi}^2)(z_{0i} - z_{pi})/3 \quad \text{prispevek polinomskega dela}$$

$$\int_{z_{0i}}^{z_{pi}} y^2(z) z dz = (z_{0i} - z_{pi})(2y_{0i} y_{pi} (z_{pi} + z_{0i}) + y_{0i}^2 (3z_{0i} + z_{pi}) + y_{pi}^2 (z_{0i} + 3z_{pi}))/12$$

$$\int_{z_{0i}}^{z_{pi}} y^2(z)z^2 dz = (z_{0i} - z_{pi})(y_{0i}^2(6z_{0i}^2 + 3z_{0i}z_{pi} + z_{pi}^2) + y_{0i}y_{pi}(3z_{0i}^2 + 4z_{0i}z_{pi} + 3z_{pi}^2) + y_{pi}^2(z_{0i}^2 + 3z_{0i}z_{pi} + 6z_{pi}^2))/30 \quad (41)$$

$$yF_c = \sum z F_{ci}$$

$$y_c = yF_c/F_c$$

V primeru da je cel prerez v nategu:

če $F_c = 0$, potem $y_c = 0$

Enačbe sem rešil tudi v programu *mathematica* z naslednjimi ukazi:

Simplify[Integrate[($y_i + (y_{i+1} - y_i)(z - z_i)/(z_{i+1} - z_i)$)², {z, z_{pi}, z_{ki}}]]

Simplify[Integrate[($y_i + (y_{i+1} - y_i)(z - z_i)/(z_{i+1} - z_i)$)², {z, z_{0i}, z_{pi}}]]

Simplify[Integrate[($y_i + (y_{i+1} - y_i)(z - z_i)/(z_{i+1} - z_i)$)²z, {z, z_{0i}, z_{pi}}]]

Simplify[Integrate[($y_i + (y_{i+1} - y_i)(z - z_i)/(z_{i+1} - z_i)$)²z², {z, z_{0i}, z_{pi}}]]

Rešitev v programu *mathematica* je potrdila pravilnost računa.

2.17 Določitev koordinat armature:

Koordinate armature lahko določim ročno, se pa izkaže da je za hitrejše delo bolj ugodno, da se koordinate armature generirajo kar avtomatično ob vsakem ogljišču. Ko spreminjam prerez, mi ni treba dodatno razmišljati še o pozicijah palic, paziti na to kakšen a je določen, odmik od roba že upošteva tudi diameter vzdolžnih palic. Uporabljene so oznake za:

C_{ai} ... središče armaturne palice v ogljišču i ,

\vec{n}_i ... normala na daljico $T_{i-1}T_i$,

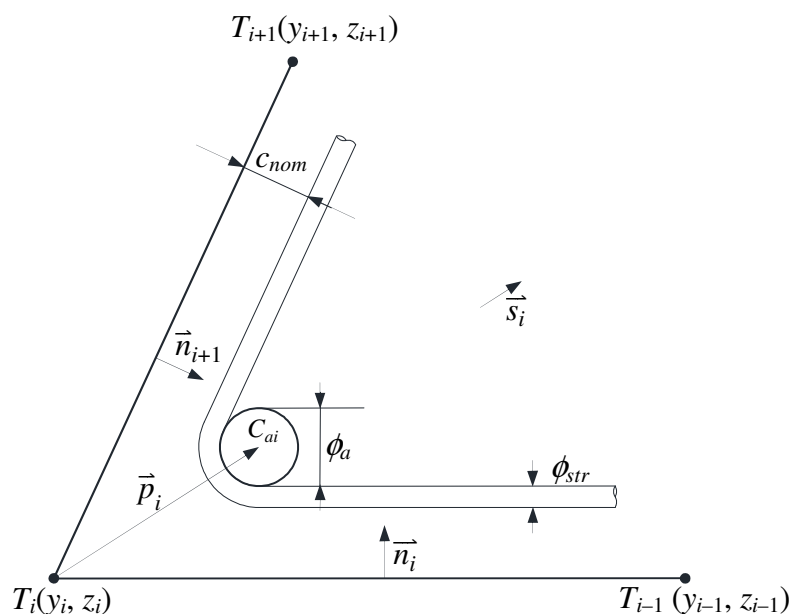
\vec{n}_{i+1} ... normala na daljico T_iT_{i+1} ,

$\vec{p}_i = T_iC_{ai}$... daljica T_iC_{ai} ,

c_{nom} ... krovni sloj betona,

ϕ_{str} ... premer stremena in

ϕ_a ... premer armaturne palice.



Slika 2.9 Določitev koordinat armature

Najprej sem izračunal normalna vektorja na premici odsekov \vec{n}_i in \vec{n}_{i+1} . Ko ju vektorsko seštejem, dobim simetralo kota v oglišču i , ki kaže v notranjost prereza. Simetralo dobim tudi ko seštejem smerna vektorja odsekov, vendar ne kaže vedno v notranjost prereza, medtem ko vsota normal vedno kaže v notranjost prereza. Simetralo normiram, potem pa jo skalarno množim z normalo. Normirano simetralo delim z dobljenim skalarnim produktom. Tako dobim vektor v smeri simetrale oglišča, ki sega nad daljico točno eno enoto. Sedaj samo še pomnožim dobljeni vektor z izračunano razdaljo od roba betona in imam smerni vektor \vec{p}_i , ki povezuje oglišče in pravilni položaj armature palice v tem oglišču.

$$\vec{n}_i = (\Delta z_i, -\Delta y_i)$$

$$\Delta y_i = (y_i - y_{i-1}) / ((y_i - y_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2)^{1/2}$$

$$\Delta z_i = (z_i - z_{i-1}) / ((y_i - y_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2)^{1/2}$$

$$\vec{s}_i = (\vec{n}_i + \vec{n}_{i+1}) / |\vec{n}_i + \vec{n}_{i+1}|$$

$$\vec{p}_i = (c_{nom} + \phi_{str} + \phi_{ai}/2) \cdot \vec{s}_i / \vec{s}_i \cdot \vec{n}_i = (c_{nom} + \phi_{str} + \phi_{ai}/2) \cdot \vec{s}_i / \vec{s}_i \cdot \vec{n}_{i+1} \quad (\text{kontrola})$$

$$\vec{p}_i = (c_{nom} + \phi_{str} + \phi_{ai}/2) \cdot ((\vec{n}_i + \vec{n}_{i+1}) / |\vec{n}_i + \vec{n}_{i+1}|) / ((\vec{n}_i \cdot \vec{n}_i + \vec{n}_i \cdot \vec{n}_{i+1}) / |\vec{n}_i + \vec{n}_{i+1}|)$$

$$\vec{p}_i = (c_{nom} + \phi_{str} + \phi_{ai}/2) \cdot (\vec{n}_i + \vec{n}_{i+1}) / (\vec{n}_i \cdot \vec{n}_i + \vec{n}_i \cdot \vec{n}_{i+1})$$

$$\vec{p}_i = (c_{nom} + \phi_{str} + \phi_{ai}/2) \cdot (\vec{n}_i + \vec{n}_{i+1}) / (1 + \vec{n}_i \cdot \vec{n}_{i+1})$$

$$\vec{p}_i = (c_{nom} + \phi_{str} + \phi_{ai}/2) \cdot (\Delta z_i + \Delta z_{i+1}, -\Delta y_i - \Delta y_{i+1}) / (1 + \Delta z_i \Delta z_{i+1} + \Delta y_i \Delta y_{i+1}) \quad (42)$$

Prerez armaturne palice ϕ_{ai} se sproti preračunava s spreminjanjem količine armature.

2.18 Račun komponent vektorja projektne odpornosti v prerezu

Za račun sil v prerezu so izračunane vse potrebne količine, sila v betonu in njen položaj, napetosti v palicah, položaj palic in prerez. Povzetek vseh enačb:

$$N_{Rd} = N_{c,Rd} + \sum A_{si} \sigma_{si}$$

$$M_{Rdy} = N_{c,Rd} z_c + \sum A_{si} \sigma_{si} z_{si}$$

$$M_{Rdz} = -N_{c,Rd} y_c - \sum A_{si} \sigma_{si} y_{si} \quad (43)$$

To so izračunane sile in momenti v delovnem koordinatnem sistemu (x, y, z) , v katerem so enačbe za račun geometrijskih in mehanskih karakteristik po odsekih mnogokotnika veliko bolj enostavne. Za preračun notranjih sil in momentov v lokalni koordinatni sistem (X_L, Y_L, Z_L) , sem uporabil te tri enostavne enačbe za sukanje:

$$M_{Rdz}^O = M_{Rdz} \cos \varphi - M_{Rdy} \sin \varphi \quad \dots \quad \text{moment okoli osi } z \text{ v osnovnem K.S.}$$

$$M_{Rdy}^O = M_{Rdz} \sin \varphi + M_{Rdy} \cos \varphi \quad \dots \quad \text{moment okoli osi } y \text{ v osnovnem K.S.}$$

$$N_{Rd}^O = N_{Rd} \quad \dots \quad \text{osna sila v osnovnem K.S.}$$

3 NELINEARNO PROGRAMIRANJE

Ko sem pripravil vse potrebne enačbe in je program uspešno računal projektno odpornost prereza, sem začel reševati drugi del problema - optimizacijo prereza. Za reševanje optimizacijskih problemov rabim dobro definiran problem, delujoč robusten program ki računa odpornost prereza in metodo reševanja – nelinearno programiranje.

Nelinearno programiranje je proces reševanja optimizacijskega problema, ki je definiran s sistemom enačb in neenačb, ki se skupnim imenom imenujejo robni pogoji. Sistem enačb in neenačb deluje na nizu spremenljivk skupaj z namensko funkcijo, ki jo želim maksimizirati ali minimizirati. Vsak proces reševanja se da v splošnem zapisati takole:

optimiziraj $f(x)$

pri tem je treba zadostiti naslednjim robnim pogojem:

$g_i(x) \leq 0$ za vsak $i \in (1, \dots, m)$,

$h_j(x) = 0$ za vsak $j \in (1, \dots, p)$,

$x \in X$.

3.1 Spremenljivke

- | | | | |
|---------------------------------|---|-----------------|---------------------------------|
| 1. geometrije prereza | (y_i, z_i) | $i = 1 \dots n$ | $(n - \text{število oglišč})$ |
| 2. položaj in količina armature | (y_{ai}, z_{ai}, A_i) | $i = 1 \dots m$ | $(m - \text{število palic})$ |
| 3. deformacijske ravnine | $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varphi)$ | | |
| 4. sile v prerezu | $(N_{Edi}, M_{yEdi}, M_{zEdi})$ | $i = 1 \dots l$ | $(l - \text{število obt. Pr.})$ |

3.2 3.2 Robni pogoji:

Ravnotežni pogoj:

$$(N_{Edi}, M_{yEdi}, M_{zEdi}) = (N_{Rd}, M_{yRd}, M_{zRd})_i \quad i \in (1 \dots l) \quad l \dots \text{število obtežnih primerov}$$

Še drugače lahko zapišem ravnotežni pogoj:

F je enačba, ki iz geometrije prereza, položaja in količine armature ter deformacijske ravnine izračuna odpornost, torej notranje sile v prerezu. To je tudi v svojem bistvu produkt te diplomske naloge. Algoritem, ki ima za rezultat funkcijo F , ki je najbolj pomemben robni pogoj. Vsi ostali pogoji so precej enostavni, tudi analitično rešljivi.

Kontrola ustreznosti lege deformacijske ravnine:

$$\varepsilon_{sj} \leq \varepsilon_{ud} \quad j \in (1, \dots, m) \quad m \dots \text{število pozicij palic}$$

$$\varepsilon_c(z) \geq \varepsilon_{c2} \quad z \in (3h/7, 4h/7) \text{ kontrola pri mali ekscentričnosti}$$

$$\varepsilon_c(z) \geq \varepsilon_{cu2} \quad z \in (0, h) \quad \text{kontrola pri veliki ekscentričnosti}$$

Dodatni robni pogoji:

Ponavadi je določena geometrija, torej:

$$(y_i, z_i) = \text{konst.} \quad i \in (1 \dots n) \quad l \dots \text{število ogljišč}$$

In še dodatno vezana armatura, na primer pri stebrih zahtevam da je količina zgornje in spodnje armature enaka.

$$\Sigma A_i = \Sigma A'_j$$

3.3 Namenska funkcija

Nekaj običajnih primerov namenske funkcije sem opisal v naslednjih poglavjih.

3.3.1 Iskanje minimalne potrebne armature

V tem primeru reševanja iščem najmanjšo potrebno količino armature, torej namenska funkcija izgleda takole:

$$\sum_{i=0}^m A_{si} \rightarrow \min \quad (m - \text{število palic})$$

Iščem tako razporeditev in količino armature, ki zadosti vsem robnim pogojem, torej da vsak obtežni primer rezultira v deformacijski ravnini ki ne presega mejnih deformacij, obenem pa je skupna količina armature najmanjša.

Bolj sofisticirana oblika zgornje namenske funkcije je minimizacija cene celotnega prereza:

$$C = c_{bet}A_c + c_{arm}\sum_{i=0}^m A_{si} \rightarrow \min$$

3.3.2 Odziv prereza

Najbližje temu kar se dejansko dogaja v prerezu pridem, če želim izračunati kako se deformira prerez pri dani obtežbi. V tem primeru postavim še dodatne robne pogoje:

$$(y_i, z_i) = \text{konst.} \quad i = 1 \dots n \quad (n - \text{število ogljišč})$$

$$(y_{si}, z_{si}, A_{si}) = \text{konst} \quad i = 1 \dots m \quad (m - \text{število palic})$$

$$(N_{Edi}, M_{Edyi}, M_{Edzi}) = \text{konst} \quad i = 1 \quad (\text{en sam obt. prim.})$$

Sedaj je namenska funkcija trivialna in iščem samo ničlo funkcije:

$$F((y_i, z_i), (y_{si}, z_{si}, A_{si}), (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varphi)) - (N, M_y, M_z) = 0$$

Ta problem je enolično rešljiv. Rešuje se z numeričimi metodami iskanja ničel.

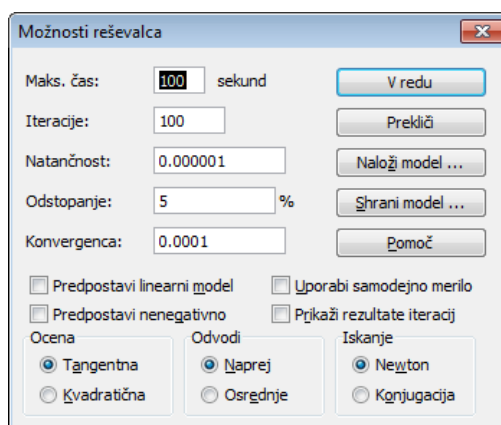
3.4 Metode reševanja

Reševanje sistema enačb in iskanje minimuma namenske funkcije se izvaja v programu Excel s podprogramom Solver. Solver ima vgrajenih več različnih algoritmov iskanja optimalnih rešitev:

GRG metoda za nelinearno optimizacijo uporablja Generalized Reduced Gradient (posplošena reducirana metoda gradientov) ali GRG2 algoritem. V grobem, spremeni robne pogoje ki so zapisani v obliki neenačbe v enačbe s tem da neenačbi prišteje dodatno spremenljivko. S tem se poveča število spremenljivk ampak zmanjša število neodvisnih spremenljivk.

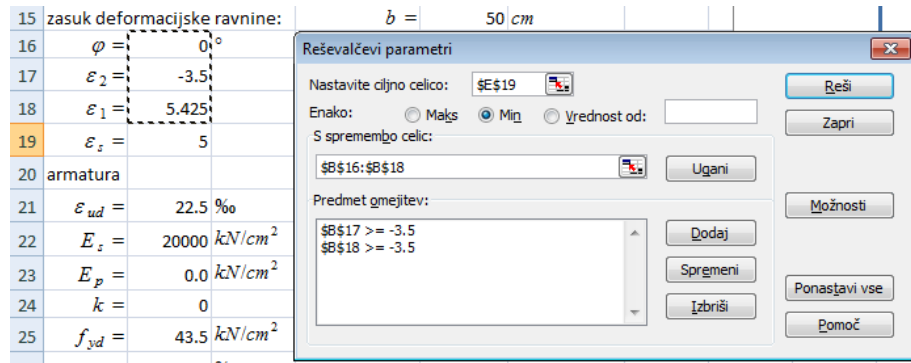
Simplex LP metoda za linearno programiranje uporablja Simplex in dvojno Simplex metodo. Za več informacij glej [2], [3].

Načeloma je bilo v okviru te diplomske naloge dovolj pognati podprogram s pravilno vnešenimi robnimi pogoji in namensko funkcijo ter bo Solver prišel do rešitve. Če se lotim kakšne težje naloge, na primer veliko število spremenljivk, zapleteni pogoji, se da v nastavitvah povečati dovoljeni čas delovanja, število iteracij, natančnost itd.



Slika 3.1 Pogovorno okno z naprednimi možnostmi v podprogramu Solver

V pogovornem oknu programa Solver vstavim namensko funkcijo v okence *Nastavite ciljno celico*, spremenljivke dam v okence *Spremembo celic*, robne pogoje pa v okence *Predmet omejitev*.



Slika 3.1 Pogovorno okno podprograma Solver z namensko funkcijo, spremenljivkami in robnimi pogoji

Na zgornji sliki sta vneseni omejitvi za deformaciji ε_1 in ε_2 , s spreminjanjem deformacijske ravnine pa iščem najmanjšo potrebno armaturo.

4 PRIMERI

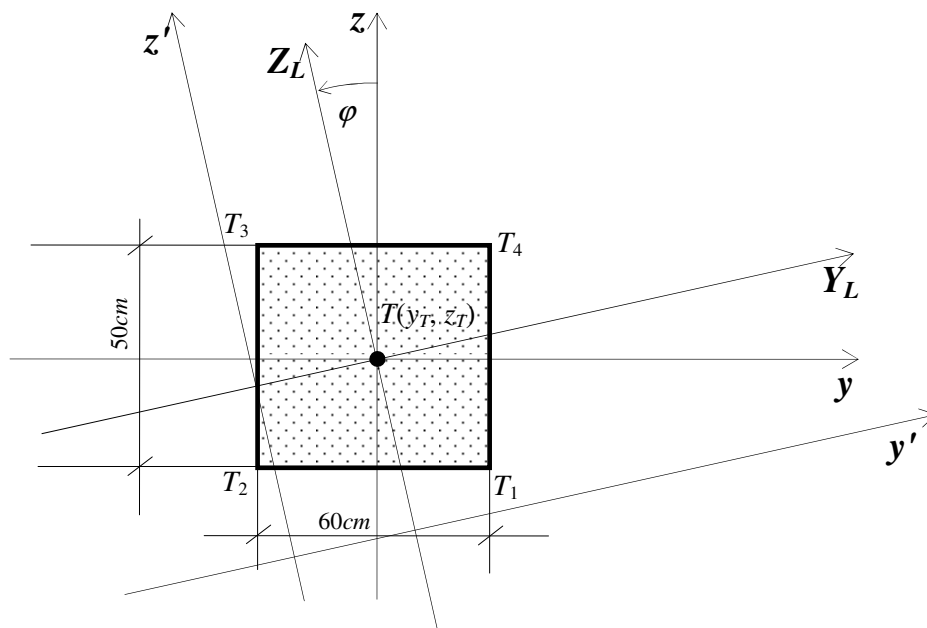
S prvimi primeri sem potrdil pravilnost postavljenih enačb. Pri enostavnih primerih sem tudi najlažje ujamel napake ki so se pojavile. Največkrat se napake pojavijo, ko so stranice mnogokotnika vzporedne z koordinatnimi osmi in se pojavi deljenje z nič. Prav tako se podobno zgodi, ko je deformacijska ravnina v čistem tlaku ali nategu. V drugem delu poglavja sem rešil nekaj težjih primerov nestandardnih prerezov.

4.1 Potrditev geometrijskih karakteristik

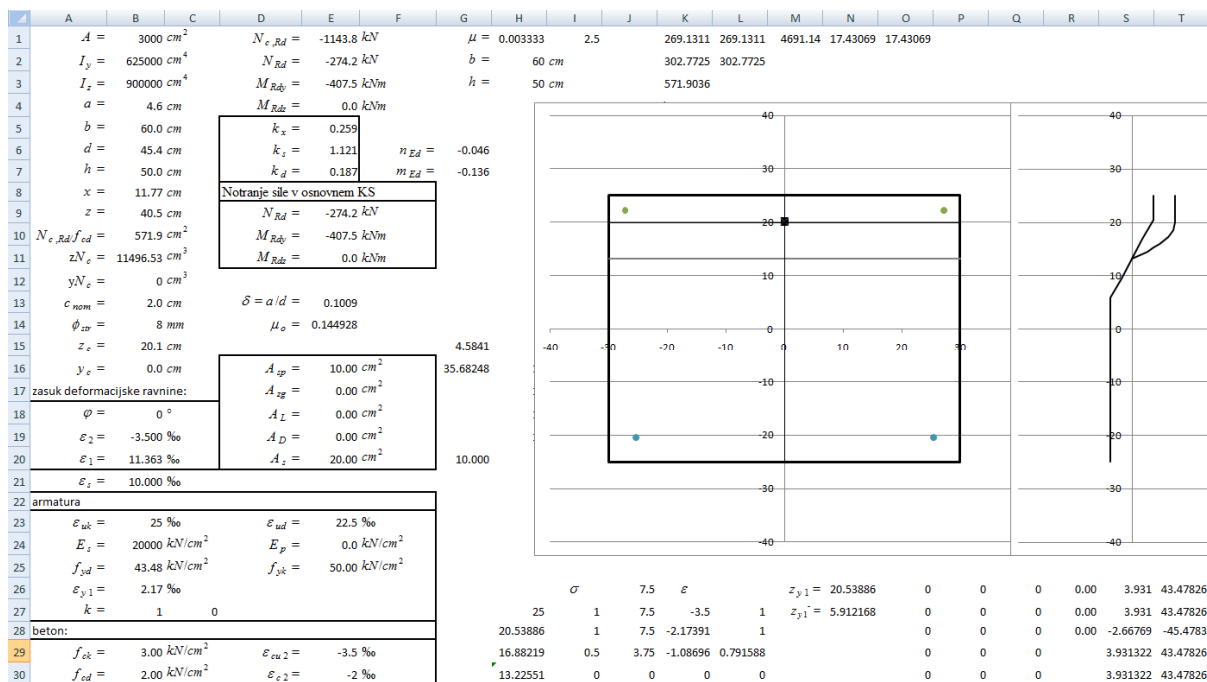
V naslednjih primerih sem potrdil veljavnost izračuna geometrijskih karakteristik prereza. Pri vrtenju prereza okoli težišča se takoj pokažejo napake pri vnesenih enačbah in možne pomankljivosti. Prav tako se pogosto izkaže da so enačbe veljavne samo za nekatere primere, ne pa za vse. V takih primerih je treba pametno uporabljati pogojne ukaze. IF, ABS, SIGN. Nekatere geometrijske karakteristike so neodvisne od vrtenja koordinatnega sistema. To so: A in $I_y + I_z$.

4.1.1 Primer A1, pravokotni prerez (60 × 50 cm):

To je prvi in najbolj enostaven primer. Za pravokotni prerez sem izračunal geometrijske karakteristike, postopek sem ponovil še trikrat, za različno zavrten prererez. Vsota $I_y + I_z$ mora ostati ista ne glede na spremembo φ . $\varphi \in (0^\circ, 15^\circ, 45^\circ, 55^\circ)$



Slika 4.1 Primer A 1 pravokotni prerez 60x50 cm

Slika 4.2 Rezultat računa za primer A1 pri zasuku $\varphi = 0^\circ$

Program izračuna površino in statična momenta armiranobetonskega prereza v petih stolpcih. V prvih dveh stolpcih sta koordinati oglišča podani v začetnem koordinatnem sistemu (x' , y' , z'), prispevki k ploščini pa se računajo po enačbi (10), v naslednjih dveh stolpcih se računajo prispevki k statičnim momentom po enačbah (15) in (18). Prerez je podan z dvanajstimi točkami, v 13. vrstici sta koordinati prvega oglišča.

$$A_i = (z'_{i+1} + z'_i) \cdot (y'_{i+1} - y'_i) / 2 = \int z' dy' = - \int y' dz' \quad (10)$$

$$S_{zi} = (2y_{i+1} + y_i)(y_{i+1} - y_i)z_{i+1}/6 + (y_{i+1} + 2y_i)(y_{i+1} - y_i)z_i/6 = \int zy dy = S_{zi} \quad (15)$$

$$S_{yi} = - (2z_{i+1} + z_i)(z_{i+1} - z_i)y_{i+1}/6 - (z_{i+1} + 2z_i)(z_{i+1} - z_i)y_i/6 = \int yz dz \quad (18)$$

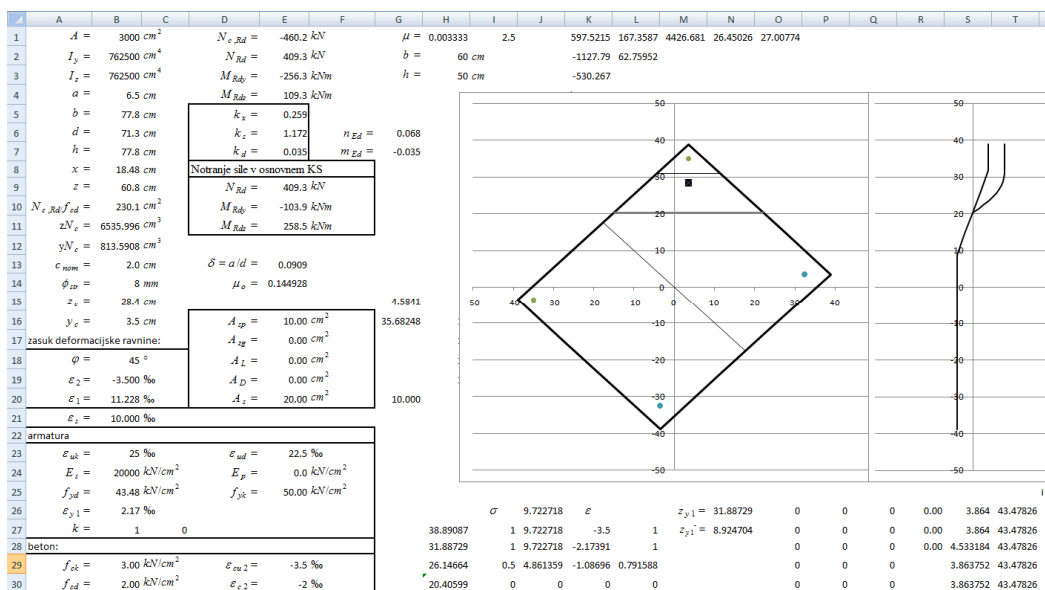
Delne vsote za površino prereza so v prvih dveh stolpcih nič, saj velja $y'_{i+1} = y'_i$, v petem stolpcu je delna vsota enaka $(50 + 50)(60 - 16)/2 = 100 \cdot 44/2 = 2200$. Delne vsote za statični moment okoli osi y' se integrirajo po z' , zato so v prvih petih stolpcih enake 0. Geometrijsko težišče prereza izračunam v začetnem koordinatnem sistemu:

$$y'_T = \sum S_{zi} / A = 90000 / 3000 = 30 \text{ cm}, \quad z'_T = \sum S_{yi} / A = 75000 / 3000 = 25 \text{ cm}$$

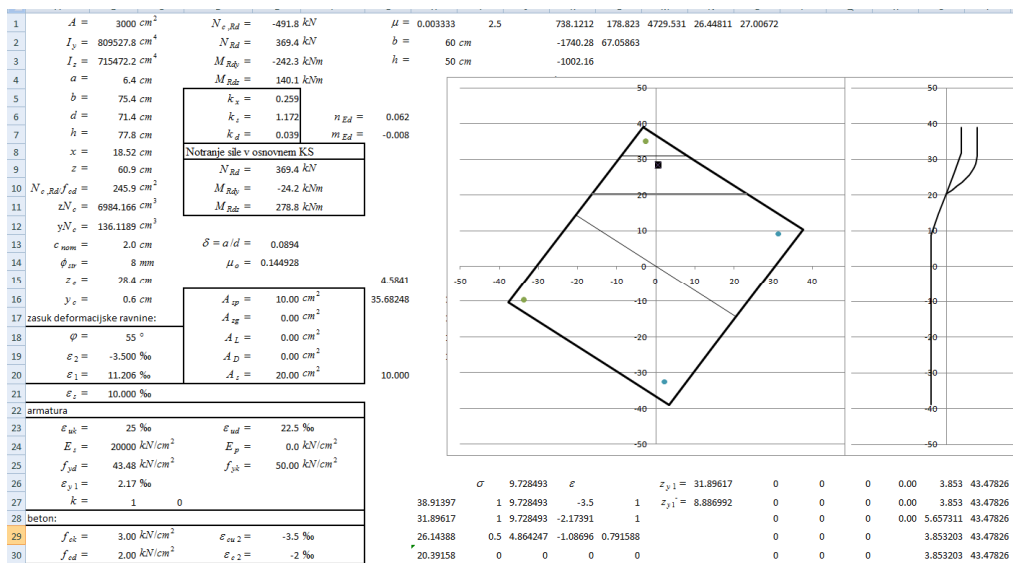
Potem postavi izhodišče lokalnega koordinatnega sistema in delovnega koordinatnega sistema v geometrijsko težišče armiranobetonskega prereza. Na sliki 4.2 je viden del računa v programu Excel in skica prereza z geometrijskim težiščem v izhodišču koordinatnega sistema.

Preglednica 4.1 Pregled poteka računa za ploščino prereza in statična momenta

i	y'_i	z'_i	A_i	S_{yi}	S_{zi}		i	y'_i	z'_i	A_i	S_{yi}	S_{zi}
1	0	17	0	0	0		7	60	33	0	-24000	0
2	0	33	0	0	0		8	60	17	0	-8670	0
3	0	50	450	0	2025		9	60	0	0	0	0
4	9	50	350	0	4375		10	16	0	0	0	0
5	16	50	2200	0	83600		11	9	0	0	0	0
6	60	50	0	-42330	0		12	0	0	0	0	0
							13	0	17			



Slika 4.3 Račun za primer A1, zasuk $\varphi = 45^\circ$

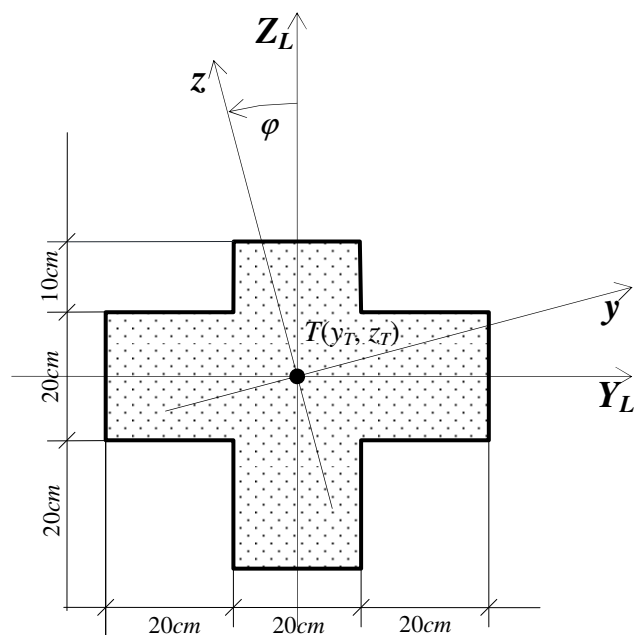


Slika 4.4 Račun za primer A1, zasuk $\varphi = 55^\circ$

Statični moment se računa v koordinatnem sistemu vnosa, ko izračunam koordinati težišča, premaknem težišče prereza v izhodišče koordinatnega sistema. Vsota $S_y + S_z$ je tako vedno enaka nič. Na sliki je vsota v koordinatnem sistemu vnosa.

4.1.2 Primer A2

Primer A2 je križ iz štirih kvadratov $20\text{ cm} \times 20\text{ cm}$ in enega pravokotnika $10\text{ cm} \times 20\text{ cm}$, sukan za naslednje vrednosti $\varphi \in (7^\circ, 23^\circ, 181^\circ, 190^\circ)$

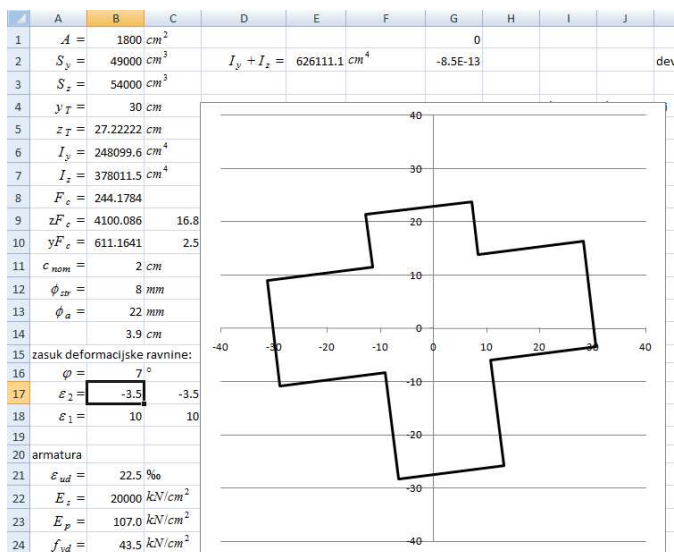


Slika 4.5 Primer A2, križ iz štirih kvadratov $20\text{ cm} \times 20\text{ cm}$ in enega pravokotnika $10\text{ cm} \times 20\text{ cm}$

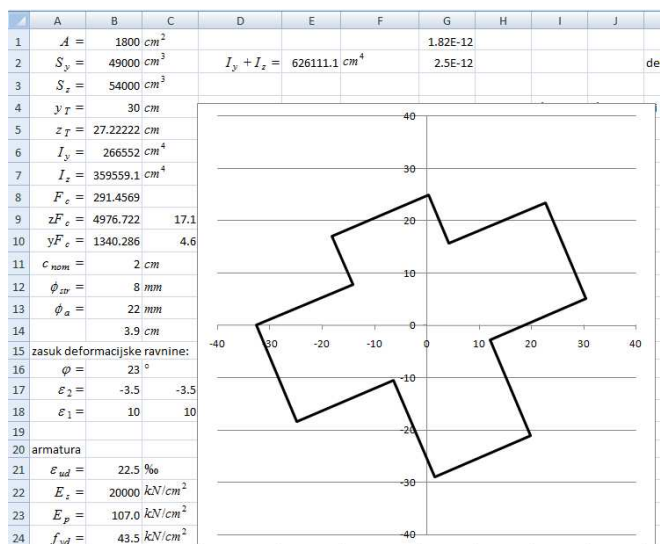
Vsota $I_y + I_z$ ostaja nespremenjena saj velja:

$$\begin{aligned}
 I_{y'} + I_{z'} &= \iint_D (y'^2 + z'^2) dydz = \iint_D (y \cos \varphi - z \sin \varphi)^2 + (y \sin \varphi + z \cos \varphi)^2 dydz = \\
 &= \iint_D (y^2 \cos^2 \varphi - yz \sin 2\varphi + z^2 \sin^2 \varphi) + (y^2 \sin^2 \varphi + yz \sin 2\varphi + z^2 \cos^2 \varphi) dydz = \\
 &= \iint_D (y^2 \cos^2 \varphi + y^2 \sin^2 \varphi) + (z^2 \sin^2 \varphi + z^2 \cos^2 \varphi) dydz = \iint_D (y^2 + z^2) dydz = I_y + I_z
 \end{aligned}$$

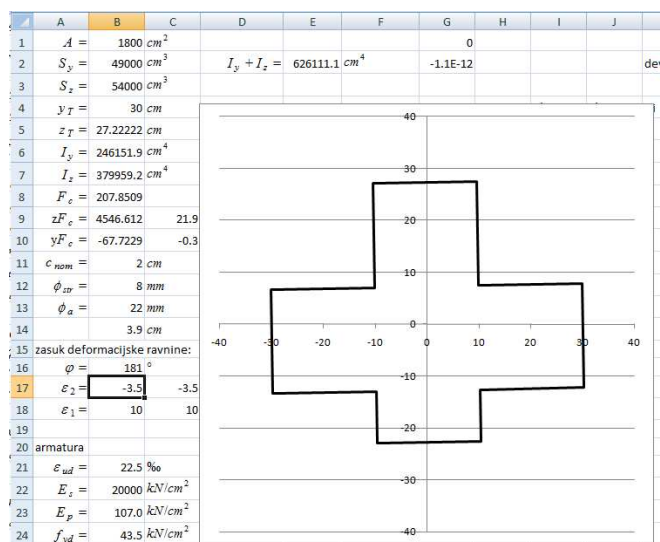
Rezultati za različno obrnjen lik križa se ujemajo.



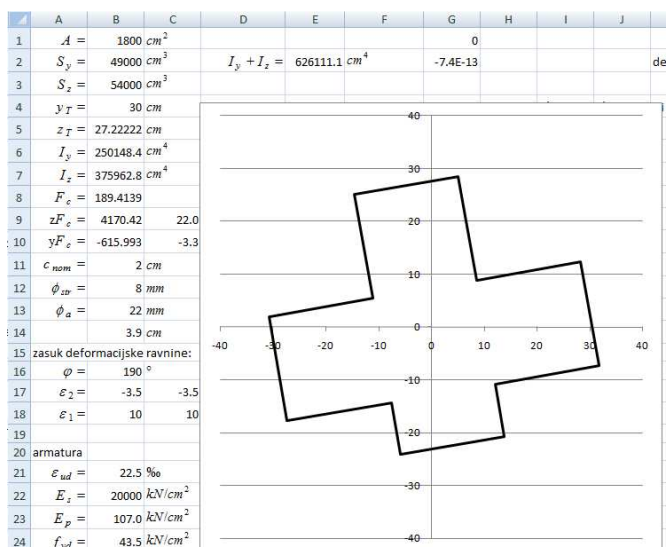
Slika 4.6 Račun za primer A2, zasuk $\varphi = 7^\circ$



Slika 4.7 Račun za primer A2, zasuk $\varphi = 23^\circ$

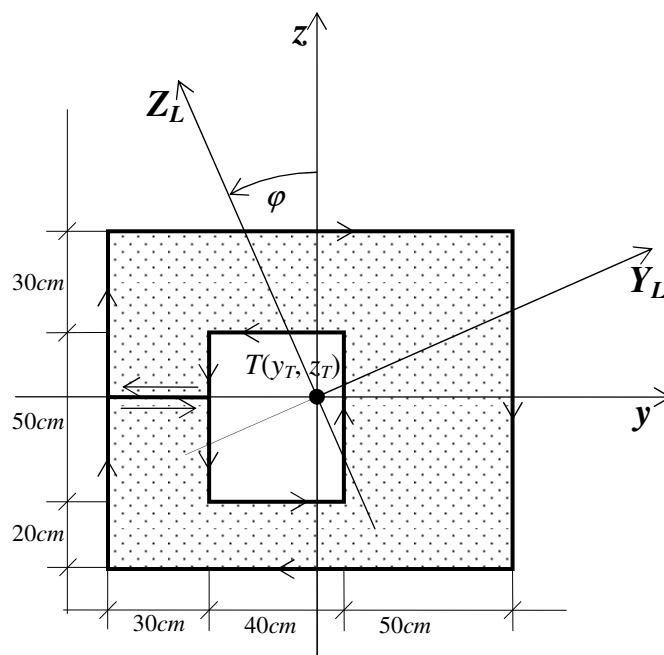


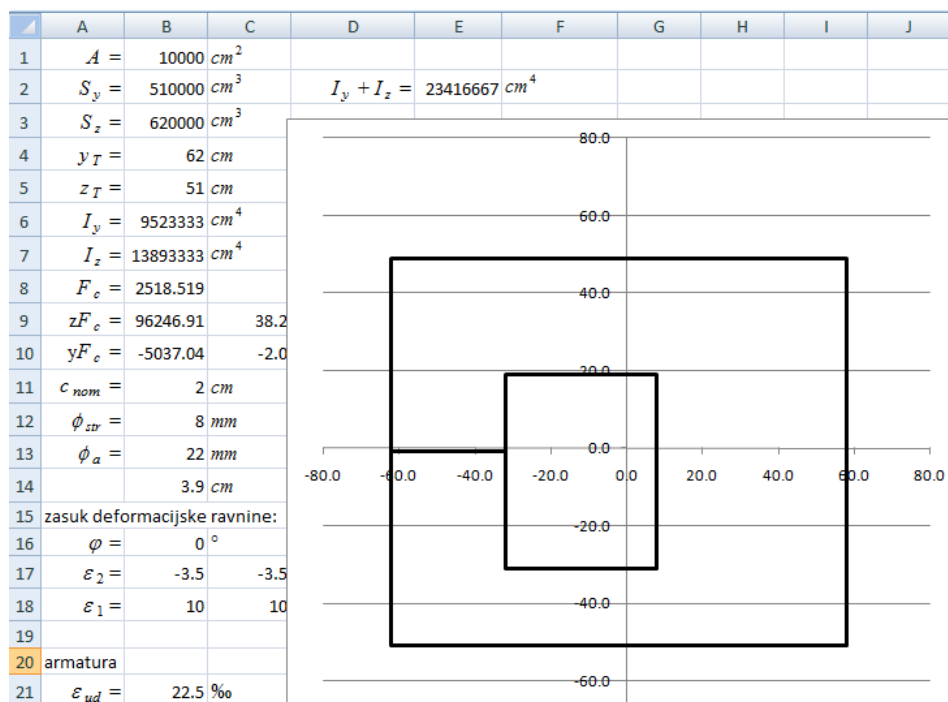
Slika 4.8 Račun za primer A2, zasuk $\varphi = 181^\circ$

Slika 4.9 Račun za primer A2, zasuk $\varphi = 190^\circ$

4.1.3 Primer A3

Primer A3 je kontrola notranjih odprtin. Izračunal sem pravokotnik dimenzij $120 \times 100 \text{ cm}$ s pravokotno odprtino dimenzij $40 \times 50 \text{ cm}$. Točke je treba podajati v smeri urinega kazalca, odprtino pa v nasprotni smeri urinega kazalca.

Slika 4.10 Primer A3 pravokotnik dimenzij $120 \times 100 \text{ cm}$ s pravokotno odprtino $40 \times 50 \text{ cm}$



Slika 4.11 Račun geometrijskih karakteristik za primer A3, zasuk $\varphi = 0^\circ$

$$A = 120 \cdot 100 - 40 \cdot 50 = 10000 \text{ cm}^2$$

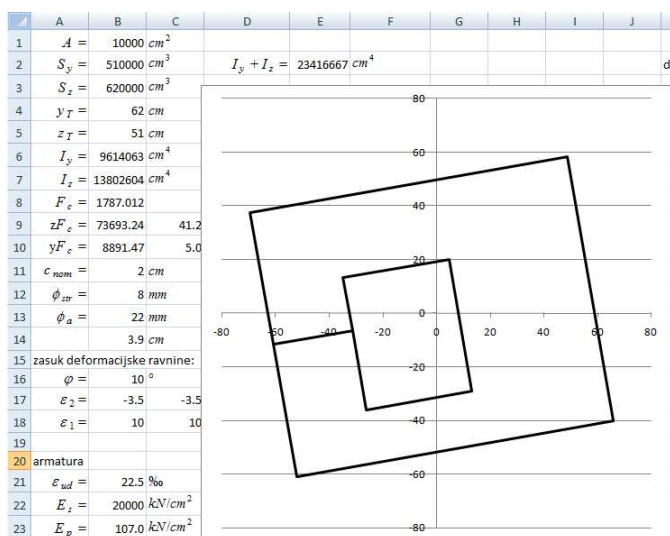
$$y_T = (120 \cdot 100 \cdot 60 - 40 \cdot 50 \cdot 50) / 10000 = 62 \text{ cm} \quad (\text{slika 4.11, celica B4})$$

$$z_T = (120 \cdot 100 \cdot 50 - 40 \cdot 50 \cdot 45) / 10000 = 51 \text{ cm} \quad (\text{slika 4.11, celica B5})$$

Računalniški program pravilno izračuna površino in geometrijsko težišče prereza z odprtino.

Preglednica 4.2 Pregled poteka računa za vztrajnostna momenta pri zasuku $\varphi = 0^\circ$

i	y'_i	z'_i	I_y	I_z		i	y'_i	z'_i	I_y	I_z
1	58	-51	0	0		7	8	19	0	-210773
2	-62	-51	0	0		8	-32	19	-73173.3	0
3	-62	-1	450	0		9	-32	-1	0	68520
4	-32	-1	350	0		10	-62	-1	2431433	0
5	-32	-31	2200	0		11	-62	49	0	7079520
6	8	-31	0	-42330		12	58	49	4839133	0
						13	58	-51		

Slika 4.12 Račun za geometrijskih karakteristik za primer A3, zasuk $\varphi = 10^\circ$ Preglednica 4.3 Pregled poteka računa za vztrajnostna momenta pri zasuku $\varphi = 10^\circ$

i	y'_i	z'_i	I_y	I_z		i	y'_i	z'_i	I_y	I_z
1	66.0	-40.2	-60313	6904959		7	4.6	20.1	-24186	-207226
2	-52.2	-61.0	4118072	976625		8	-34.8	13.2	-28927	13885
3	-60.9	-11.8	21861	-629182		9	-31.3	-6.5	-21861	629182
4	-31.3	-6.5	-431262	-88094		10	-60.9	-11.8	1226004	-516421
5	-26.1	-36.1	58047	-230878		11	-69.6	37.5	99322	6702521
6	13.3	-29.1	-113579	8888		12	48.6	58.3	4770885	238345
						13	66.0	-40.2		

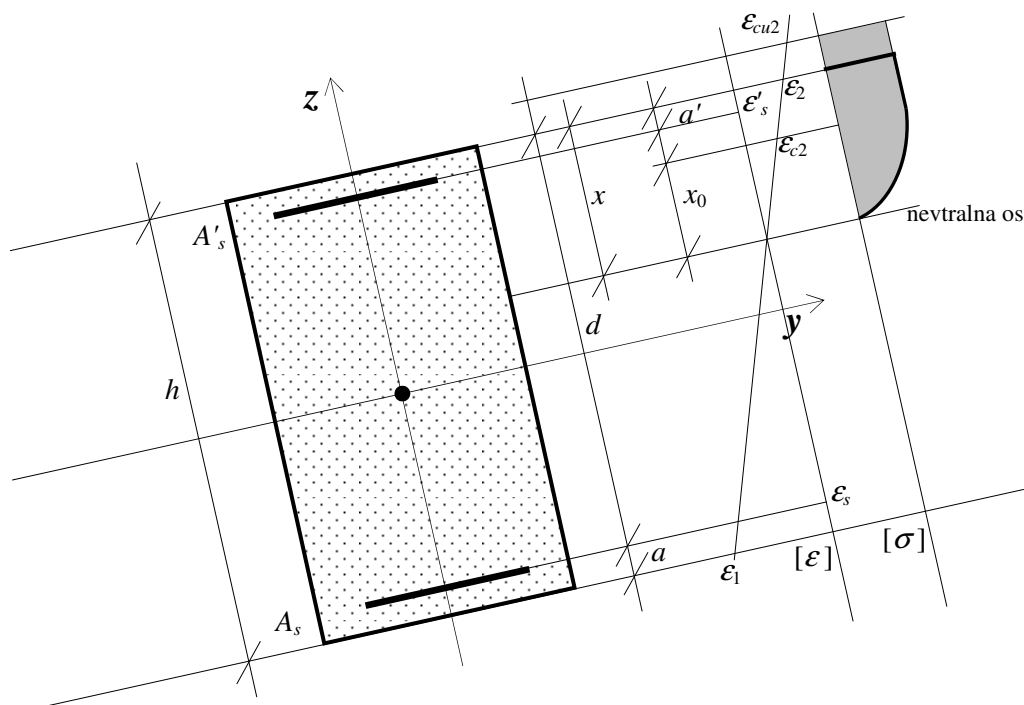
4.2 Enosni upogib

Preverim račun napetosti v betonu tako da primerjam brezdimezionalne koeficiente: k_x koeficient globine nevtralne osi, k_s koeficient natezne armature, k_d koeficient statične višine z objavljenimi vrednostmi. Za primerjavo vzamem tabele iz diplomske naloge [4] Horvat M., Izdelava preglednic in grafikonov za dimenzioniranje in [5] Priročnika za projektiranje gradbenih konstrukcij po evrokod standardih. Pri enostavnih primerih preverim račune tudi analitično.

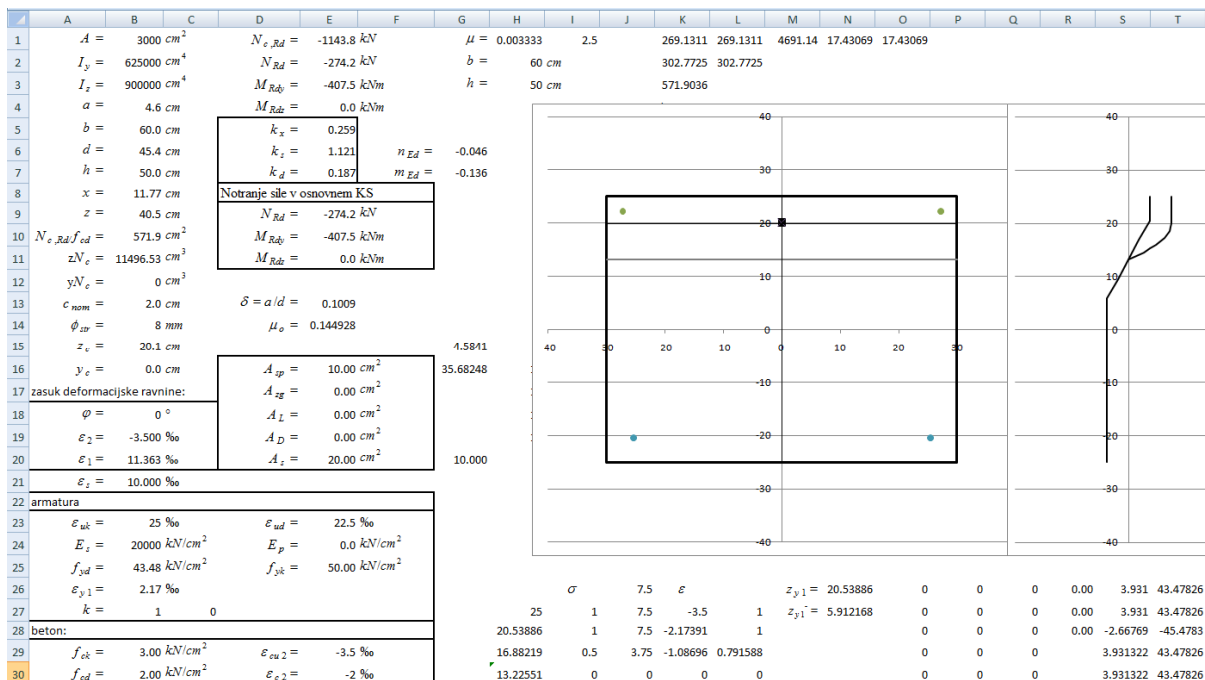
4.2.1 Primer B1

pravokotni prerez enojna armatura, velika ekscentričnost

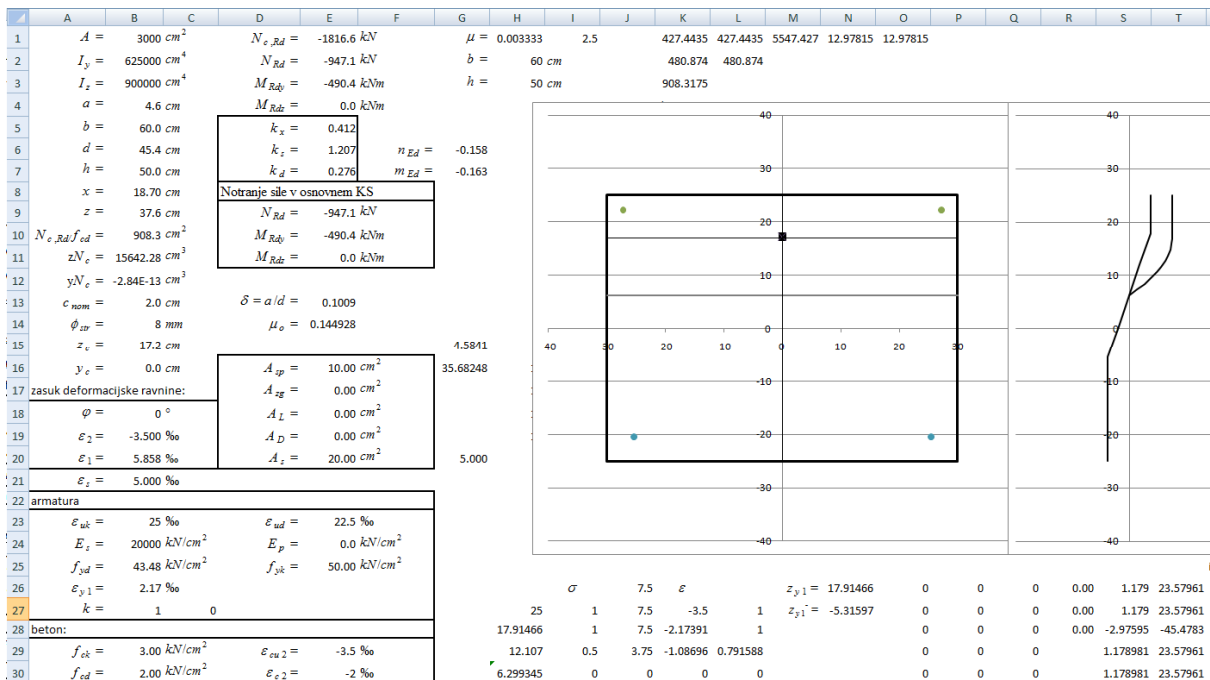
Preveril sem če se ujemajo izračunani brezdimezionalni koeficienti s podatki iz preglednice P1-1 iz EC priročnika IZS [5]



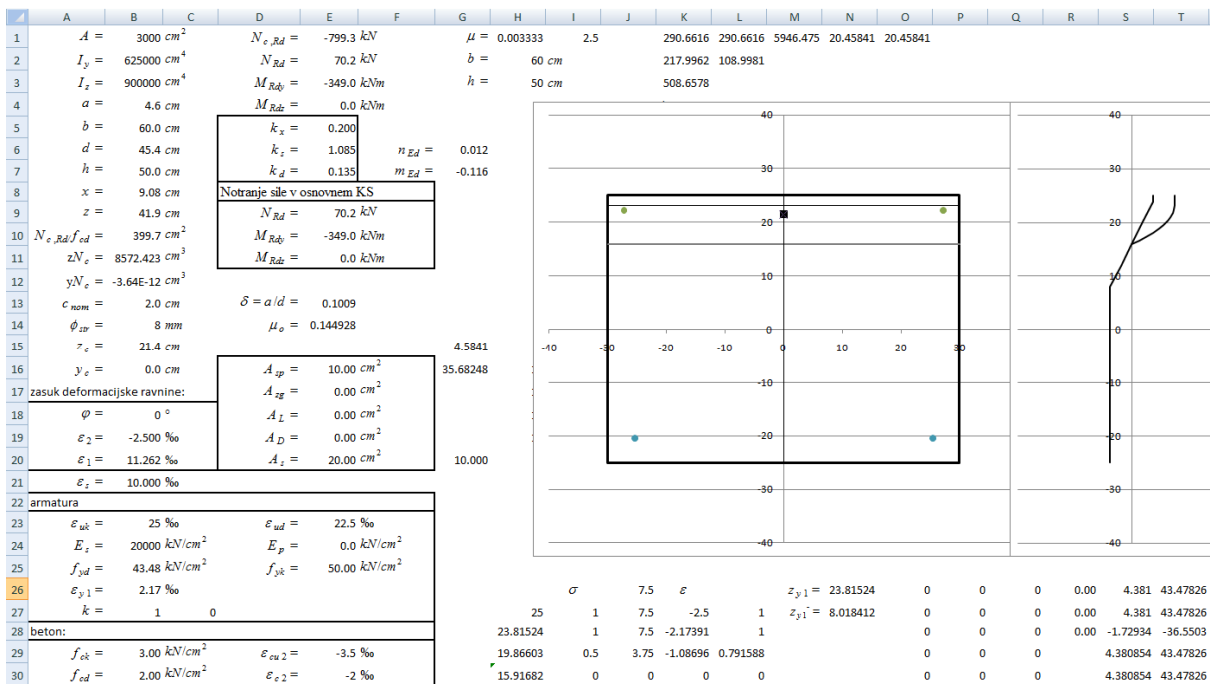
Slika 4.10 pregled uporabljenih oznak pri računu



Slika 4.13 Račun za primer B1, pravokotni prerez, enosni upogib, enojna armatura, def. ravnina – 3.5/10



Slika 4.14 Račun za primer B1, pravokotni prerez, enosni upogib, enojna armatura, def. ravnina – 3.5/5



Slika 4.15 Račun za primer B1, pravokotni prerez, enosni upogib, enojna armatura, def. ravnina – 2.5/10

Pravilnost računa sem preveril sem še analitično. Če velja $\epsilon_{c0} > \epsilon_{c1}$, torej je polinomski del napetosti v celoti v prerezu.

$$k_x = -\epsilon_2 / (-\epsilon_2 + \epsilon_s) = 2.5 / 12.5 = 0.2$$

V REDU (isti rezultat kot v celici E5 slika 4.14)

$$x = d \cdot k_x = (60 - 3.9) \cdot 0.2 = 11.22 \text{ cm} \quad \text{V REDU (isti rezultat kot v celici B8 slika 4.14)}$$

$$x_0 = -d \varepsilon_{c2} / (-\varepsilon_2 + \varepsilon_s) = (60 - 3.9) \cdot 2 / 12.5 = 8.976 \text{ cm}$$

$$x_0 = z_p - z_0 = 34.488 - 27.756 = 8.976 \text{ cm} \quad \text{V REDU (} z_p \text{ in } z_0 \text{ sta v celicah O1 in O2 slika 4.14)}$$

$$-N_{cRd} / b f_{cd} = 2x_0 / 3 + (x - x_0) = x - x_0 / 3 = -d \varepsilon_2 / (-\varepsilon_2 + \varepsilon_s) + d \varepsilon_{c2} / (-\varepsilon_2 + \varepsilon_s) / 3 = d(\varepsilon_{c2} / 3 - \varepsilon_2) / (-\varepsilon_2 + \varepsilon_s)$$

$$-N_{cRd} / f_{cd} = b d (\varepsilon_{c0} / 3 - \varepsilon_{c1}) / (-\varepsilon_{c1} + \varepsilon_s) = 50 \cdot 56.1 \cdot (2.5 - 2/3) / 12.5 = 411.4 \text{ cm}^2$$

$$-N_{cRd} / f_{cd} = 411.4 \text{ cm}^2 \quad \text{V REDU (isti rezultat kot v celici B10 slika 4.14)}$$

$$A_{pol} = 2b x_0 / 3 = 2 \cdot 50 \cdot 8.976 / 3 = 299.2 \text{ cm}^2$$

$$A_{kon} = b(x - x_0) = 50(11.22 - 8.976) = 112.2 \text{ cm}^2$$

$$h_{pol} = 5x_0 / 8 = 5 \cdot 8.976 / 8 = 5.61 \text{ cm}$$

$$h_{kon} = x_0 + (x - x_0) / 2 = (x + x_0) / 2 = (11.22 + 8.976) / 2 = 10.098 \text{ cm}^2$$

$$z = (d - x) + (h_{pol} \cdot A_{pol} + h_{kon} \cdot A_{kon}) / (-N_{cRd} / f_{cd}) = (56.1 - 11.22) + (5.61 \cdot 299.2 + 10.098 \cdot 112.2) / 411.4 =$$

$$z = 51.714 \text{ cm} \quad \text{V REDU (isti rezultat kot v celici B9 slika 4.14)}$$

$$k_d = -z \cdot N_{cRd} / f_{cd} b d^2 = 51.714 \cdot 411.4 / (50 \cdot 56.1^2) = 0.1352$$

$$k_d = 0.1352 \quad \text{V REDU (isti rezultat kot v celici E7 slika 4.14)}$$

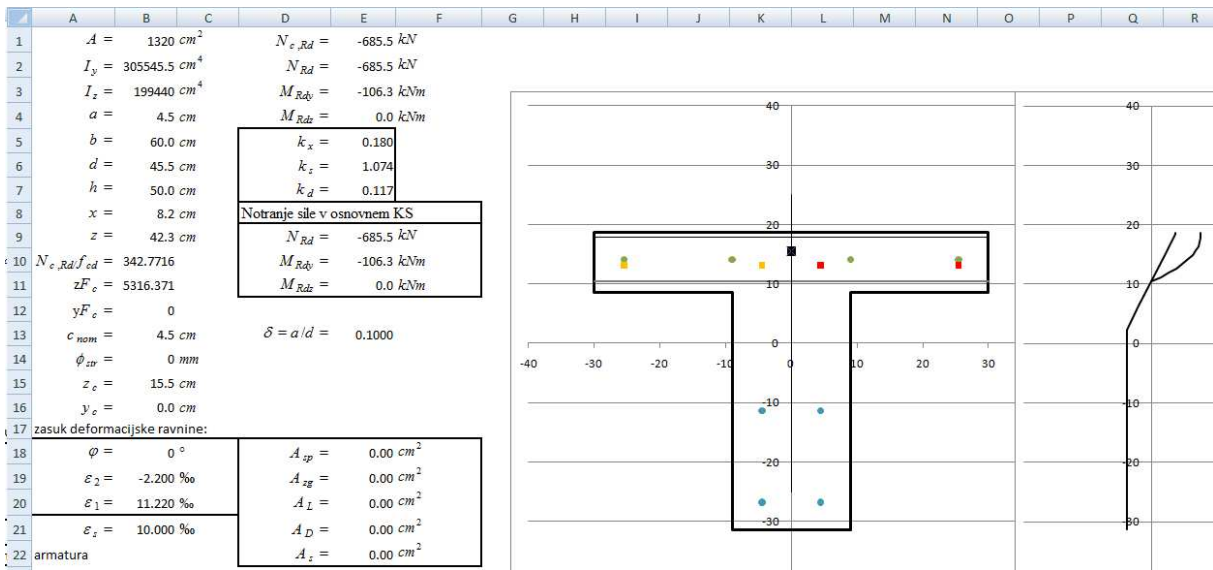
$$k_s = d / z = 56.1 / 51.714 = 1.085 \quad \text{V REDU (isti rezultat kot v celici E6 slika 4.14)}$$

Preglednica 4.4 primerjava s preglednico P1-1 iz EC priročnika IZS [5]

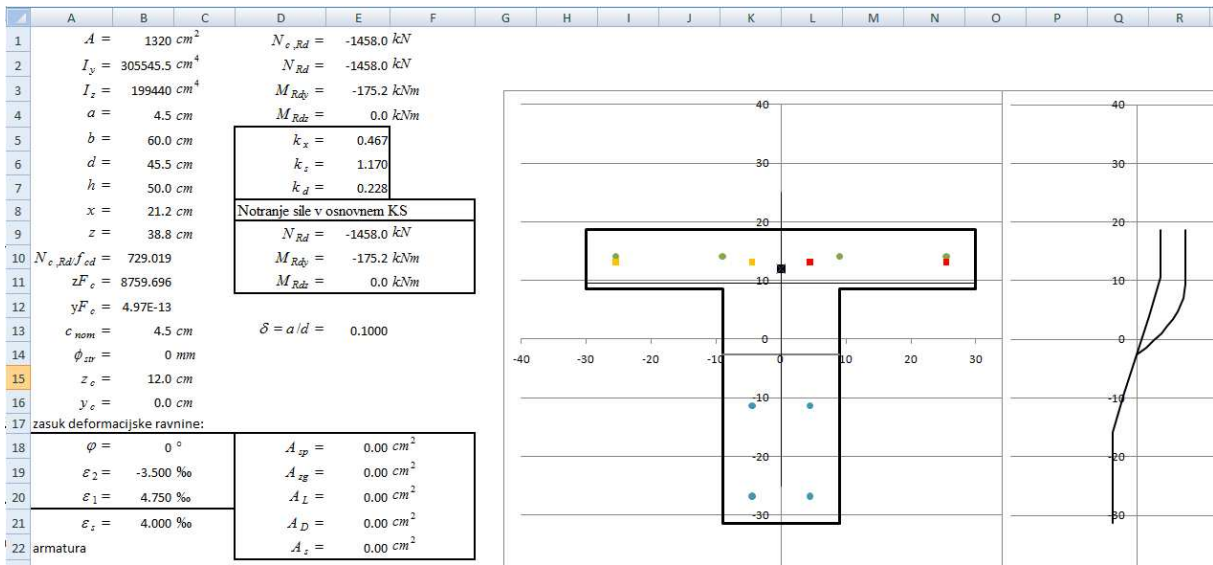
	-3.5/10		-3.5/5		-2.5/10	
$k_x = x/d$	0.259	0.259	0.412	0.412	0.200	0.200
$k_s = d/z$	1.121	1.121	1.207	1.207	1.085	1.085
$k_d = -F_c z / b d^2$	0.187	0.187	0.276	0.276	0.135	0.135

4.2.2 Primer B2:

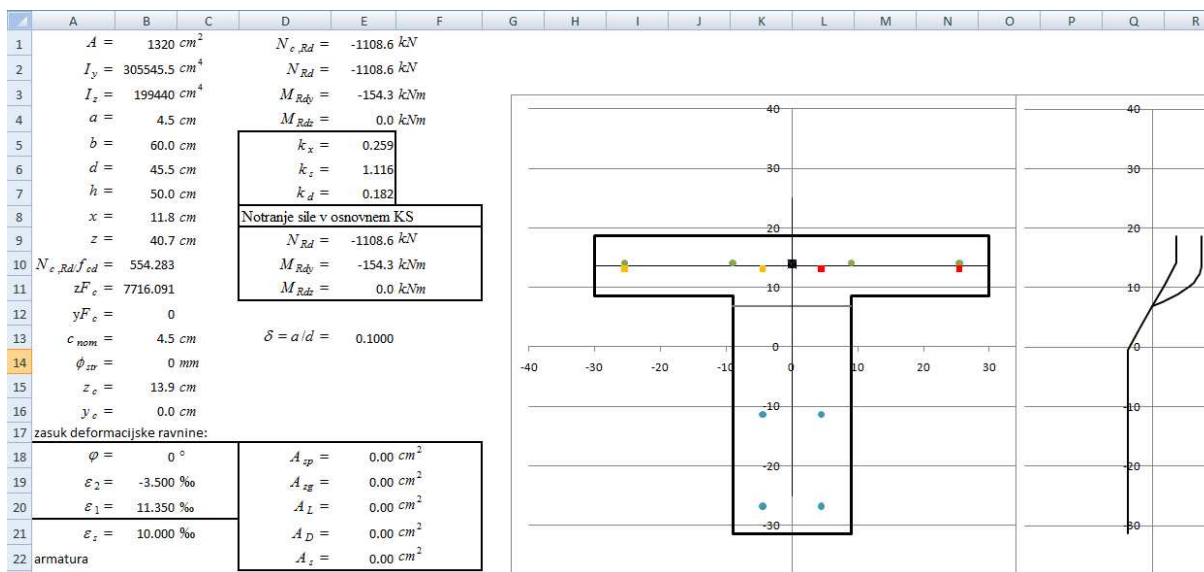
T prerez, $b_0/b = 0.3$, $h_0/h = 0.2$, enojna armatura VE. Rezultate sem primerjal s preglednico 3 v Diplomski nalogi Horvat [4]. Pokažejo se manjše razlike, ki jih lahko pripišem numeričim napakam pri seštevanju lamel.



Slika 4.16 Račun za T prerez enoosni upogib, enojna armatura, def. ravnina -2.2/10



Slika 4.17 Račun za T prerez enoosni upogib, enojna armatura, def. ravnina -3.5/4



Slika 4.18 Račun za T prerez enosni upogib, enojna armatura, def. ravnina -3.5/10

Preglednica 4.5 Primerjava izračunanih rezultatov z rezultati iz preglednice 3, Diplomaska Naloga Horvat [4]

Deformacijska ravnina $\varepsilon_1 / \varepsilon_s$	-2.2/10‰			-3.5/4‰			-3.5/10‰		
	Rezultati programa		Horvat P-3	Rezultati programa		Horvat P-3	Rezultati programa		Horvat P-3
$\delta = a/d$	$\delta = 0.1$	$\delta = 0.0$		$\delta = 0.1$	$\delta = 0.0$		$\delta = 0.1$	$\delta = 0.0$	
$k_x = x/d$	0.180	0.180	0.180	0.467	0.467	0.467	0.259	0.259	0.259
$k_s = d/z$	1.074	1.074	1.074	1.170	1.166	1.167	1.116	1.111	1.110
$k_d = F_{cz}/bd^2$	0.117	0.117	0.117	0.228	0.217	0.217	0.182	0.176	0.177

4.2.3 Primer B3:

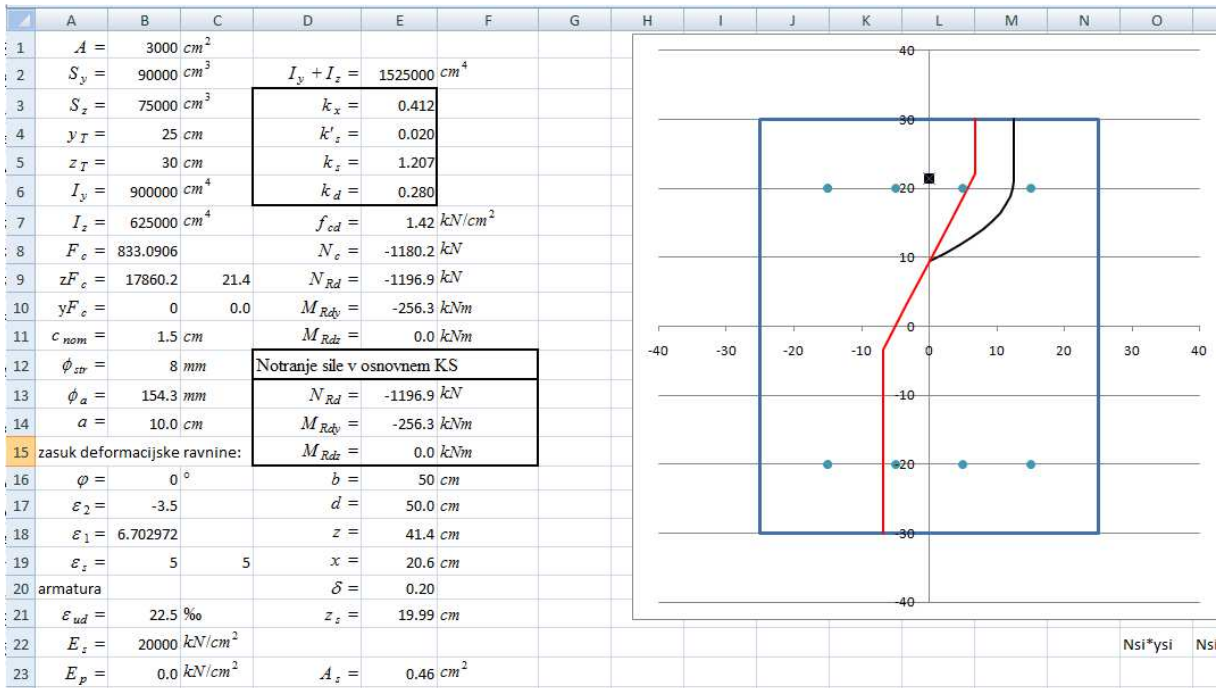
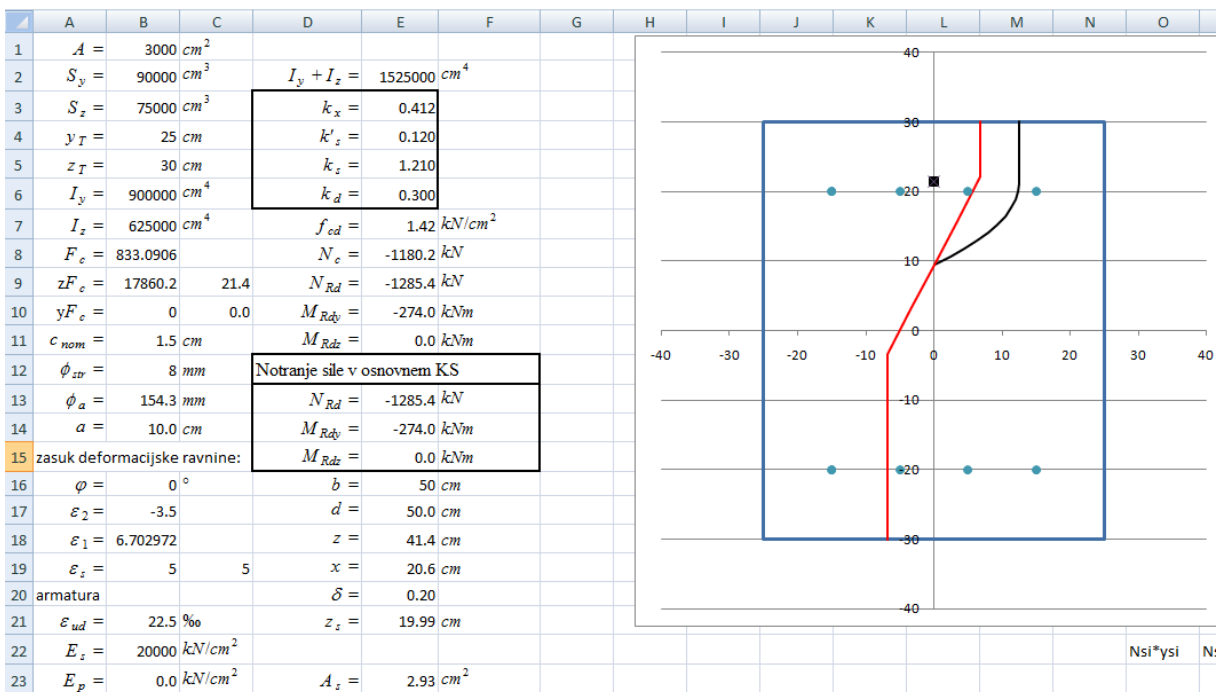
pravokotni prerez dvojna armatura VE, rezultate sem primerjal s preglednico Pr. P1-9 iz EC priručnika IZS [5], $\delta = 0.20$, tlačna armatura ni v plastičnem območju, deformacijska ravnina -3.5/10‰

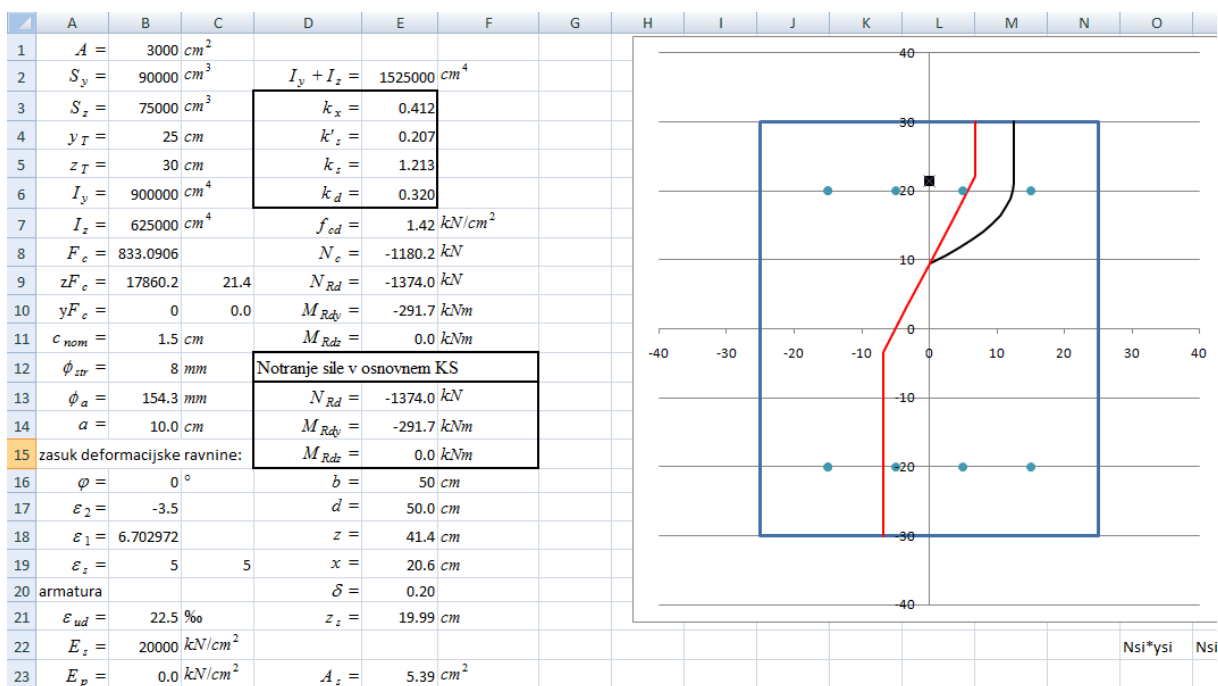
$$k_d = M_{Eds} / (f_{cd} \cdot b \cdot d^2) = (M_{Ed} + N_{Ed} \cdot z_s) / (f_{cd} \cdot b \cdot d^2)$$

$$k_s = (A_s \cdot f_{yd} + N_{Ed}) / (k_d \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d)$$

$$k'_s = A'_s \cdot f_{yd} / (k_d \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d)$$

$$k_x = -\varepsilon_2 / (-\varepsilon_2 + \varepsilon_s) = 3.5 / 8.5 = 0.41176 = 0.412 \quad (44)$$

Slika 4.19 Račun za primer B3, deformacijska ravnina $-3.5/5$, $\delta = 0.20$, $k_d = 0.28$ Slika 4.20 Račun za primer B3, deformacijska ravnina $-3.5/5$, $\delta = 0.20$, $k_d = 0.30$



Slika 4.21 Račun za primer B3, deformacijska ravnina $-3.5/5$, $\delta = 0.20$, $k_d = 0.32$

Rezultati se ujemajo, razlika na zadnji decimalni pri k'_s je najbrž natala pri zaokroževanju.

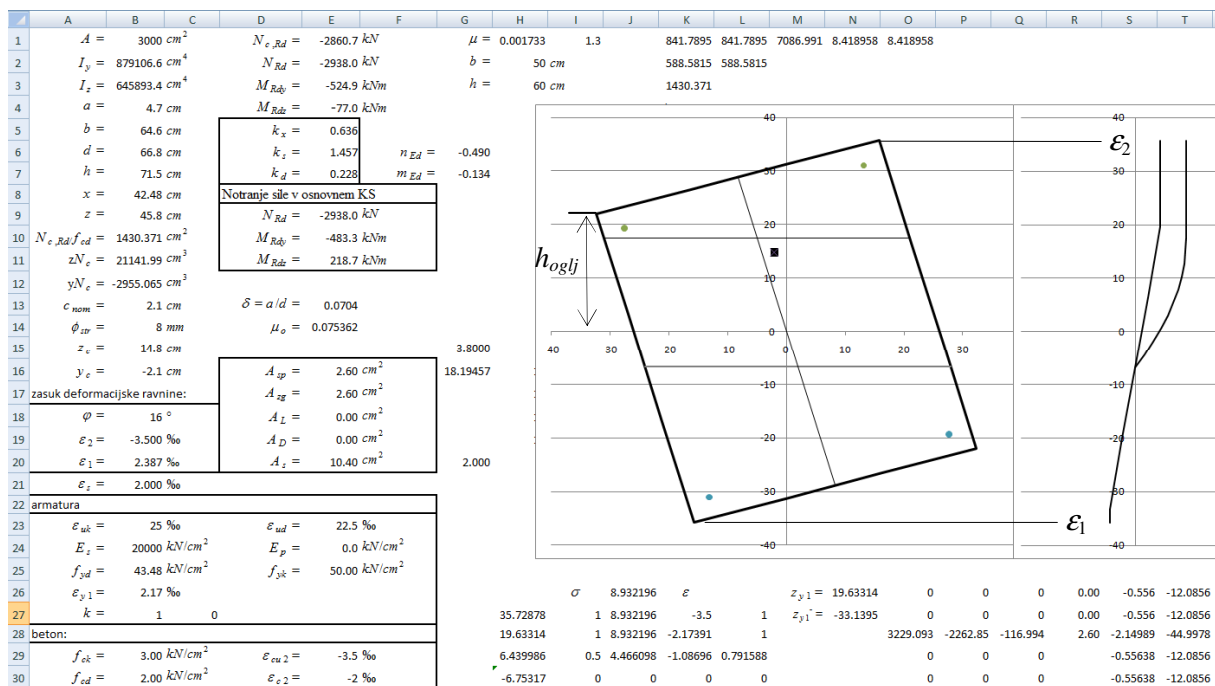
Preglednica 4.6 Primerjava dobljenih rezultatov z rezultati preglednice Pr. P1–9 , priručnik EC IZS [5]

	$k_d = 0.28$		$k_d = 0.30$		$k_d = 0.32$	
	račun	P1-9	račun	P1-9	račun	P1-9
$k'_s = A'_s \cdot f_{yd} / (k_d \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d)$	0.020	0.020	0.120	0.120	0.207	0.206
$k_s = (A_s \cdot f_{yd} + N_{Ed}) / (k_d \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d)$	1.207	1.207	1.210	1.210	1.213	1.213
$k_d = (M_{Ed} + N_{Ed} \cdot z_s) / (f_{cd} \cdot b \cdot d^2)$	0.280	0.280	0.300	0.300	0.320	0.320

4.3 Dvoosni upogib

4.3.1 Primer C1

Prvi primer je kontrola računskih postopkov. Oblika prereza je pravokotnik ki ima v vsakem vogalu eno palico. Položaj deformacijske ravnine izberem tako, da velja: zgornji dve oglišči sta nad z_k , spodnji dve oglišči pa sta nad z_0 , torej leži polinomski del napetosti na območju oblike romba. Tako lahko s hitrim računom kontroliram rezultate integriranja napetosti v betonu.



Slika 4.22 Račun sile v betonu, primer C1, kontrola enačb in postopka

V celici K1 izračunam integral napetosti po polinomskem območju prereza. Integral napetosti je kar površina romba pomnožena z 2/3.

$$\int_0^1 (2x - x^2) dx = [x^2 - x^3/3]_0^1 = 1 - 1/3 = 2/3 \quad (45)$$

Integral napetosti v betonu po polinomskem območju je torej:

$$K1 = 2(z_p - z_0)b/(3\cos(\varphi)) \quad (46)$$

V celici L1 je izračunana vsota delnih rezultatov za N_{cRd} ki se nahaja v stolpcih AC do AE. V stolpcih AB je račun za konstantni del, v stolpcih AC do AE pa za polinomski del območja. Enačbe ki jih uprabljam so iz poglavja 2.13 in sicer (36). V celici K2 je izračunan integral po napetostih v betonu na območju konstantne vrednosti napetosti. Tako je integral enak ploščini lika nad premico $z = z_p$. Ta lik je sestavljen iz trikotnika in romba.

$$K2 = (z_k - h_{oglj})b/(2\cos(\varphi)) + (h_{oglj} - z_p)b/\cos(\varphi) \quad (47)$$

Pri čemer velja: h_{oglj} ... višina ogljjišča tik nad premico $z = z_p$

V celici L2 je izračunana vsota delnih rezultatov za F_c ki se nahaja v stolpcu AB. Rezultat računalniškega programa in analitične rešitve se ujemata.

T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE
		$S_y = 90000 \text{ cm}^3$			$y_T = 25 \text{ cm}$						
		$S_z = 75000 \text{ cm}^3$			$z_T = 30 \text{ cm}$						
						1	2	3	4	1	2
y_{0i}	z_{0i}	y_{pi}	z_{pi}	y_{ki}	z_{ki}	F_c	F_c				z
-24.071	-6.75317	-26.7879	2.721683	-26.7879	2.721683	83.15353		0	115.4081	-27.6736	-4.58097
-26.7879	2.721683	-31.0319	17.52223	-32.3007	21.94692	516.9233		140.1133	204.9515	262.1656	-90.3071
-32.3007	21.94692	-32.3007	21.94692	-16.2796	26.54087	111.5879		111.5879	0	0	0
-16.2796	26.54087	-16.2796	26.54087	-0.25861	31.13483	37.98798		37.98798	0	0	0
-0.25861	31.13483	-0.25861	31.13483	15.76242	35.72878	-35.6119		-35.6119	0	0	0
21.27517	16.50355	20.98307	17.52223	15.76242	35.72878	356.0155		334.5043	10.30972	21.77486	-10.5734
26.78792	-2.72168	21.27517	16.50355	21.27517	16.50355	343.1253		0	221.2991	179.2318	-57.4056
27.94393	-6.75317	26.78792	-2.72168	26.78792	-2.72168	17.18948		0	52.8447	-31.1748	-4.48046
32.30066	-21.9469	32.30066	-21.9469	32.30066	-21.9469	0		0	0	0	0
16.27963	-26.5409	16.27963	-26.5409	16.27963	-26.5409	0		0	0	0	0
0.258607	-31.1348	0.258607	-31.1348	0.258607	-31.1348	0		0	0	0	0
-21.2752	-16.5036	-21.2752	-16.5036	-21.2752	-16.5036	0		0	0	0	0

Slika 4.23 Preglednica delnih rezultatov za račun integrala po napetostih v betonu primer C1

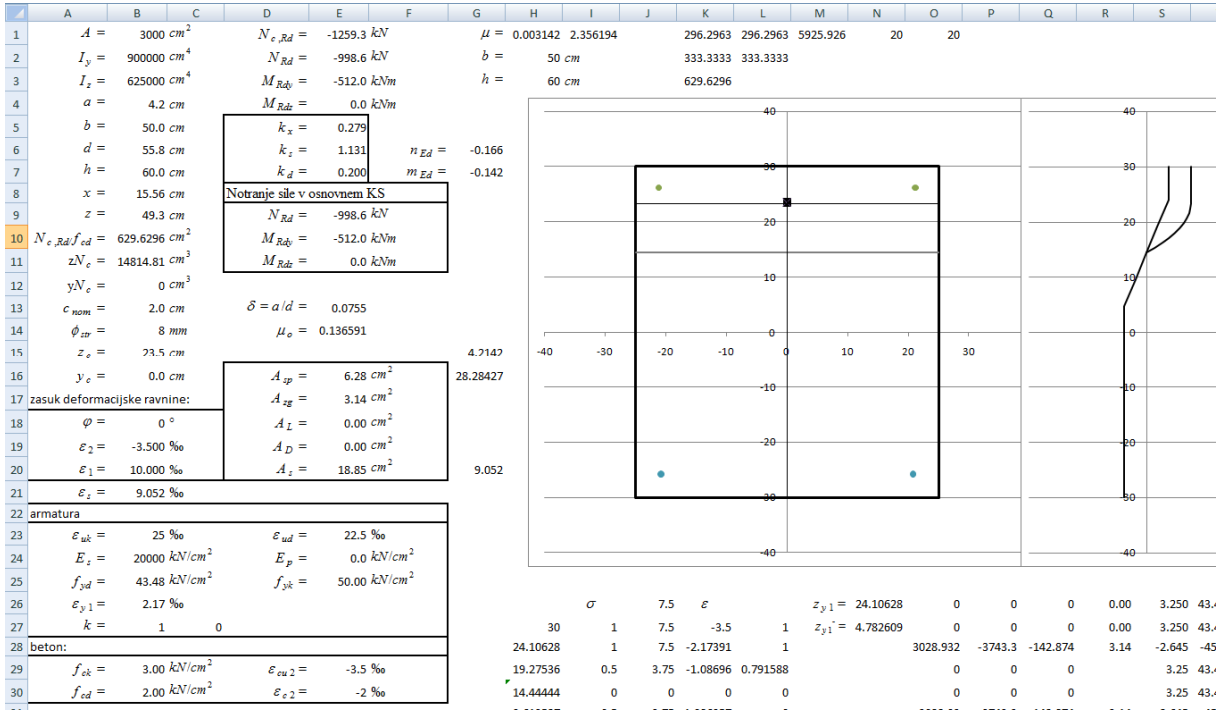
4.3.2 Primer C2

V primeru C2 sem vzел prerez iz primera C1 in izračunal projektno odpornost pravokotnega prereza $b/h = 50/60 \text{ cm}$ za nekaj različnih deformacijskih ravnin.

Beton kvalitete C30/37, $f_{ck} = 3.0 \text{ kN/cm}^2$, $f_{cd} = 2.0 \text{ kN/cm}^2$

Armatura kvalitete S500, $f_{yk} = 50 \text{ kN/cm}^2$, $f_{yd} = 43.5 \text{ kN/cm}^2$, $A_{zg} = 2 \times 3.14 \text{ cm}^2$, $A_{sp} = 2 \times 6.28 \text{ cm}^2$, brez utrjevanja, upoštevan neto prerez

Zaščitni sloj betona je $c_{nom} = 2.0 \text{ cm}$, $\phi_{str} = 8 \text{ mm}$, iz teh dveh podatkov in premera palice program izračuna oddaljenost središča armaturne palice od roba betona.



Slika 4.24 Račun projektne odpornosti prereza C2, $-3.5/10 \varphi = 0^\circ$

Preglednica 4.7a Račun sile v betonu za primer C2, $\varphi = 0^\circ$

Y _{0i}	Z _{0i}	Y _{pi}	Z _{pi}	Y _{ki}	Z _{ki}	F _c			
-26.3567	5.506873	-26.3567	5.506873	-26.3567	5.506873	0	0	0	0
-28.2625	16.31521	-29.8296	25.20303	-29.8296	25.20303	0	-1520.7	2807.673	-1124.73
-29.8296	25.20303	-23.2946	26.35534	-13.4162	28.09716	31.97183	-180.299	412.2145	-201.45
-13.4162	28.09716	-13.4162	28.09716	2.997286	30.9913	15.07684	0	0	0
2.997286	30.9913	2.997286	30.9913	19.41075	33.88544	-32.426	0	0	0
22.50885	16.31521	20.73851	26.35534	19.41075	33.88544	151.1639	-1278.88	2414.296	-992.16
22.88371	14.18928	22.88371	14.18928	22.88371	14.18928	0	0	0	0
26.35668	-5.50687	26.35668	-5.50687	26.35668	-5.50687	0	0	0	0
29.82964	-25.203	29.82964	-25.203	29.82964	-25.203	0	0	0	0
13.41618	-28.0972	13.41618	-28.0972	13.41618	-28.0972	0	0	0	0
-2.99729	-30.9913	-2.99729	-30.9913	-2.99729	-30.9913	0	0	0	0
-22.8837	-14.1893	-22.8837	-14.1893	-22.8837	-14.1893	0	0	0	0

Preglednica 4.7b Račun prijemališča sile v betonu za primer C2, $\varphi = 0^\circ$

zF_c				yF_c			
0	0	0	0	0	0	0	0
0	-31629.2	59285.4	-24093.7	0	-44181.1	81728.25	-32800.4
867.9754	-4643.71	10618.58	-5190.19	601.0188	-4813.28	10994.52	-5368.16
433.9772	0	0	0	143.5158	0	0	0
-1063.3	0	0	0	428.2747	0	0	0
4546.841	-27197.7	52297.41	-21870.6	-3035.67	27669.57	-52067.1	21330.25
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Preglednica 4.7c Račun sil v armaturi za primer C2, $\varphi = 0^\circ$

$N_{si} \cdot y_{si}$	$N_{si} \cdot z_{si}$	N_{si}	A_{si}	ϵ	σ	y_{si}	z_{si}
-1716.25	1493.052	67.49594	3.14	-1.15644	-21.4846	-25.4275	22.12062
2127.71	3841.905	130.3078	3.14	-2.62309	-41.4783	16.32834	29.4833
-6815.25	5951.168	-273.182	6.28	7.589511	43.4783	24.94766	-21.7846
4368.821	7923.221	-273.182	6.28	9.027506	43.4783	-15.9923	-29.0035

Kontrola, računam silo v betonu po analitični metodi:

Če velja $\epsilon_{c0} > \epsilon_{c1}$, torej je polinomski del napetosti v celoti v prerezu.

$$k_x = -\epsilon_2 / (-\epsilon_2 + \epsilon_s) = 3.5 / 12.55 = 0.279 \quad \text{V REDU (isti rezultat kot v celici E5 slika 4.24)}$$

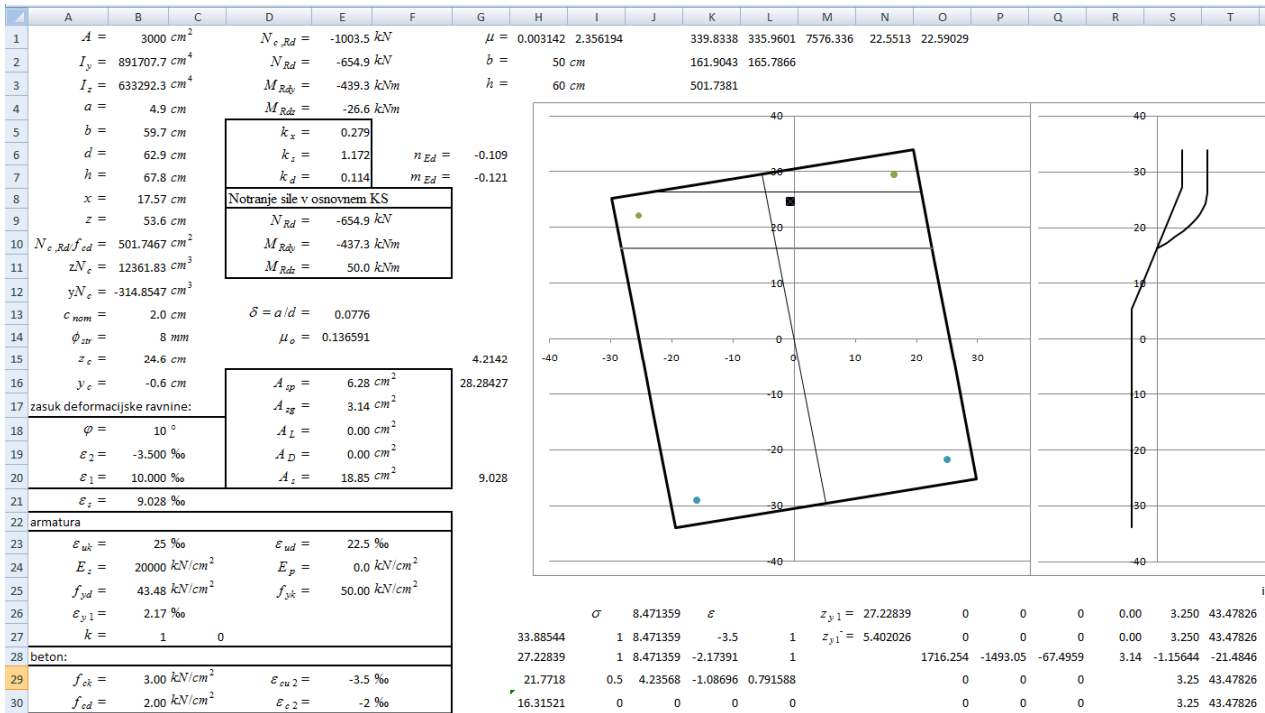
$$x = d \cdot k_x = 55.8 \cdot 0.279 = 15.56 \text{ cm} \quad \text{V REDU (isti rezultat kot v celici B8 slika 4.24)}$$

$$x_0 = -d\epsilon_{c2} / (-\epsilon_2 + \epsilon_s) = 55.8 \cdot 2 / 12.55 = 8.89 \text{ cm}$$

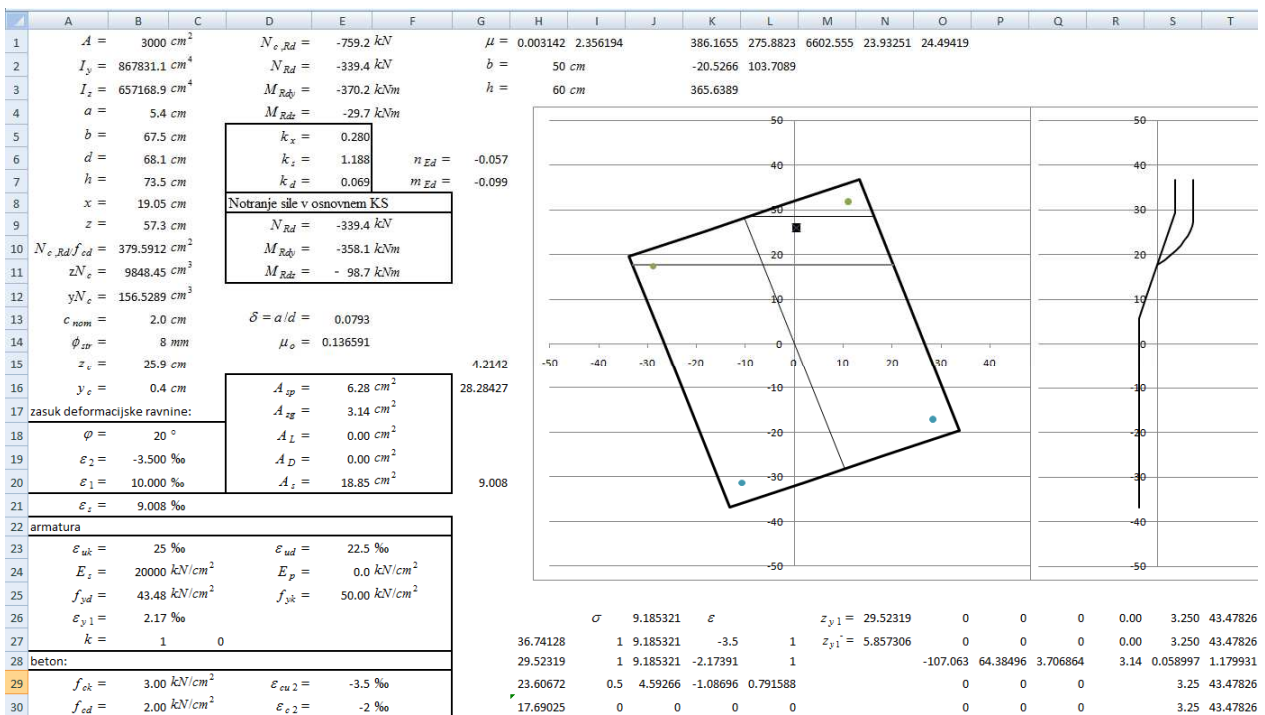
$$-N_{cRd} / b f_{cd} = 2x_0 / 3 + (x - x_0) = x - x_0 / 3 = -d\epsilon_2 / (-\epsilon_2 + \epsilon_s) + d\epsilon_{c2} / (-\epsilon_2 + \epsilon_s) / 3 = d(\epsilon_{c2} / 3 - \epsilon_2) / (-\epsilon_2 + \epsilon_s)$$

$$-N_{cRd} / b f_{cd} = bd(\epsilon_{c0} / 3 - \epsilon_{c1}) / (-\epsilon_{c1} + \epsilon_s) = 50 \cdot 55.8 \cdot (3.5 - 2/3) / 12.55 = 629.8 \text{ cm}^2$$

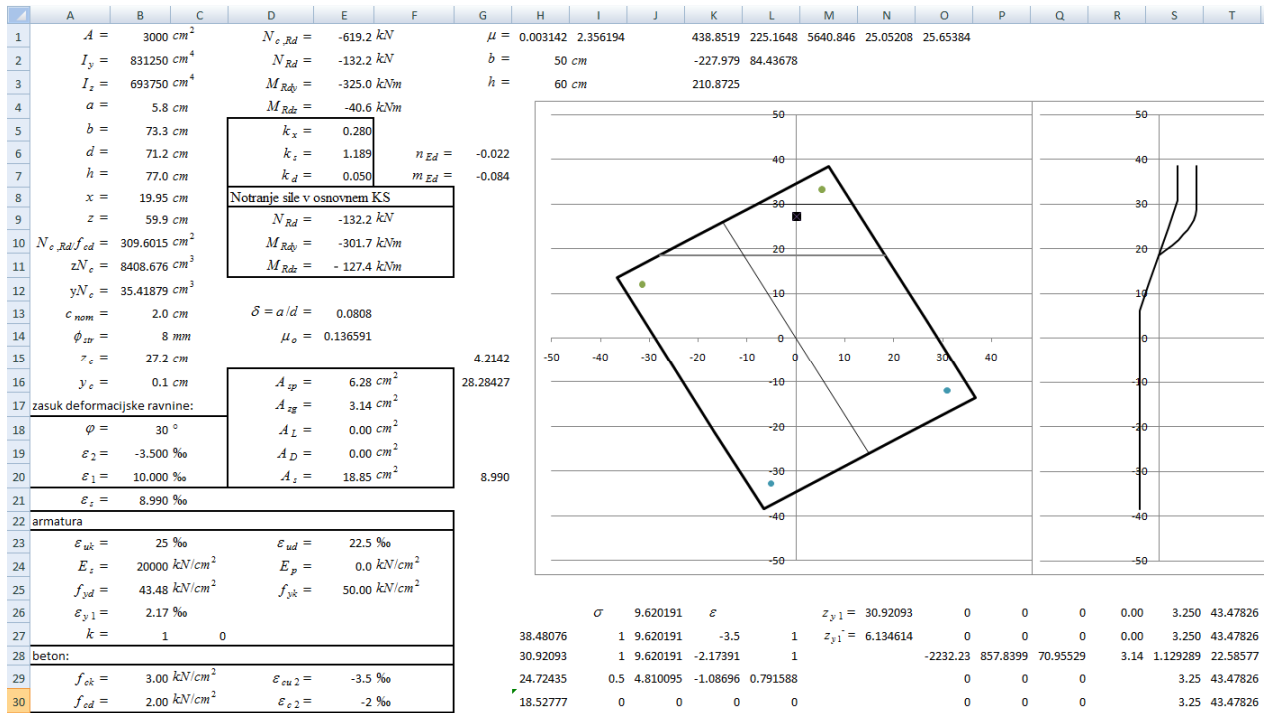
$$-N_{cRd} / b f_{cd} = 629.8 \text{ cm}^2 \quad \text{V REDU (isti rezultat kot v celici B10 slika 4.24)}$$



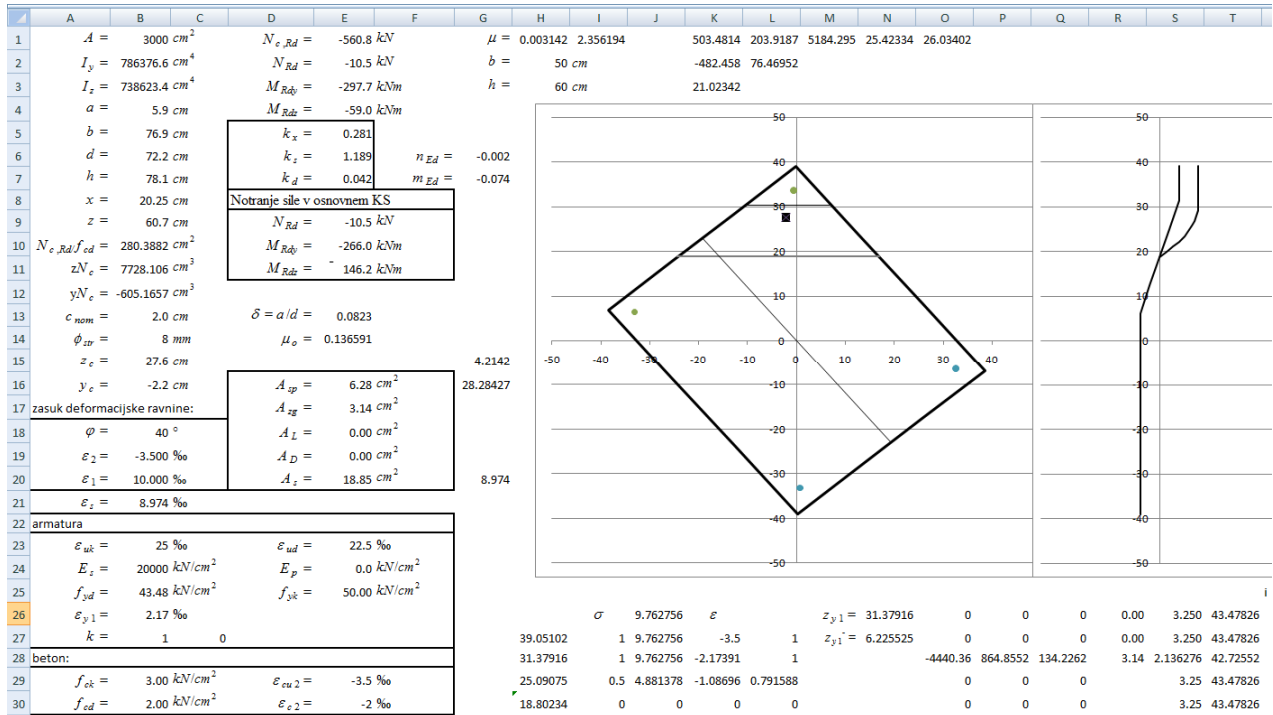
Slika 4.25 Račun projektne odpornosti prereza C2, $-3.5/10 \varphi = 10^\circ$



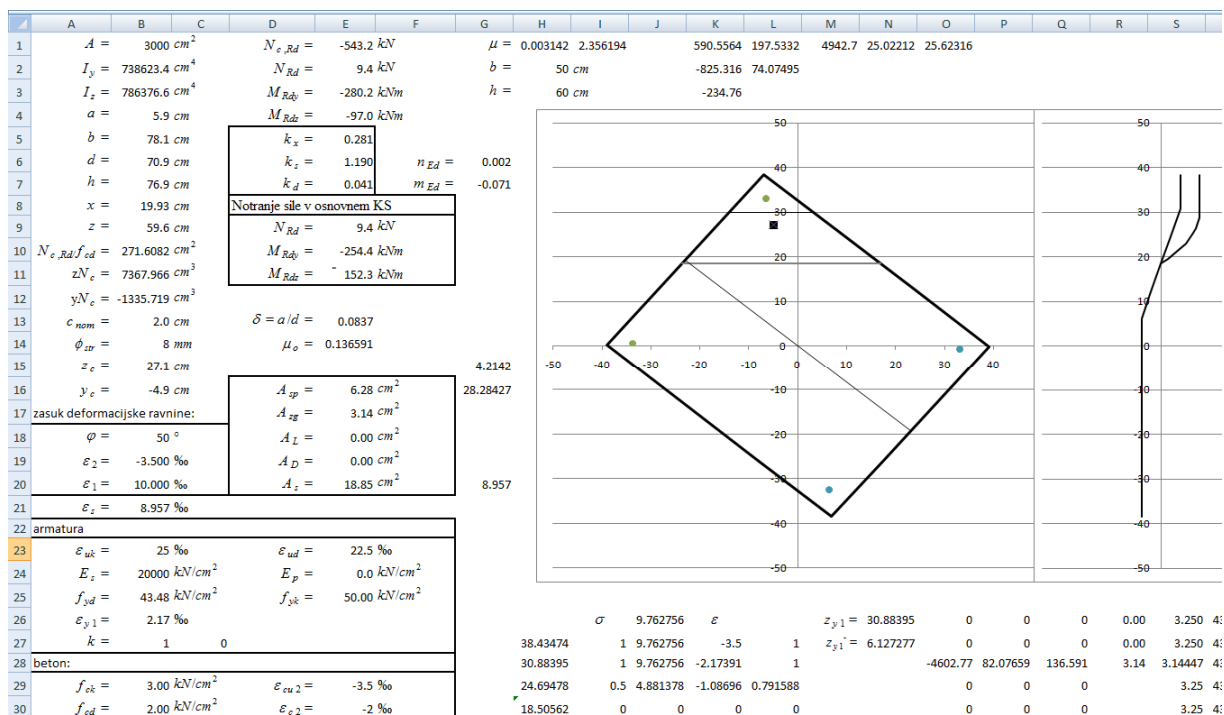
Slika 4.26 Račun projektne odpornosti prereza C2, $-3.5/10 \varphi = 20^\circ$



Slika 4.27 Račun projektne odpornosti prereza C2, -3.5/10 φ = 30°



Slika 4.28 Račun projektne odpornosti prereza C2, -3.5/10 φ = 40°

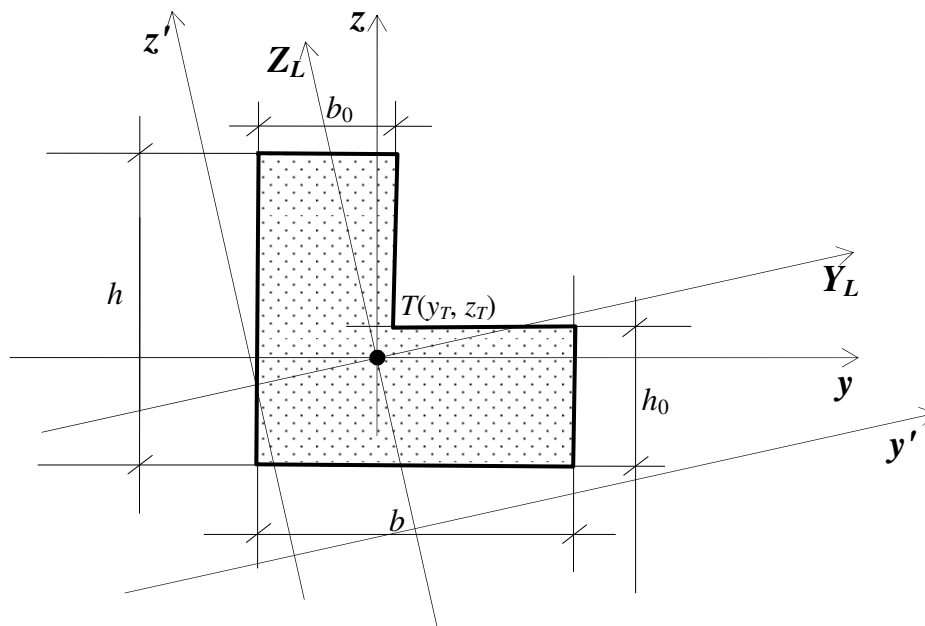
Slika 4.29 Račun projektne odpornosti prereza C2, $-3.5/10$ $\varphi = 50^\circ$

4.3.3 Primer C3 – L prerez

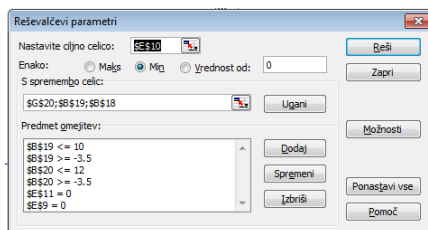
Račun projektne odpornosti prereza L oblike. V primeru C4 sem vzela prerez L oblike in izračunal deformacijsko ravnino za dvoosni upogib. Geometrija L prereza je $b/b_0 = 50 \text{ cm} / 16.7 \text{ cm}$, $h/h_0 = 60 \text{ cm} / 20 \text{ cm}$, Zaščitni sloj betona je $c_{nom} = 2.1 \text{ cm}$, $\phi_{str} = 8 \text{ mm}$, iz teh dveh podatkov in premera palice program izračuna oddaljenost središča armaturne palice od roba betona.

Beton kvalitete C30/37, $f_{ck} = 3.0 \text{ kN/cm}^2$, $f_{cd} = 2.0 \text{ kN/cm}^2$

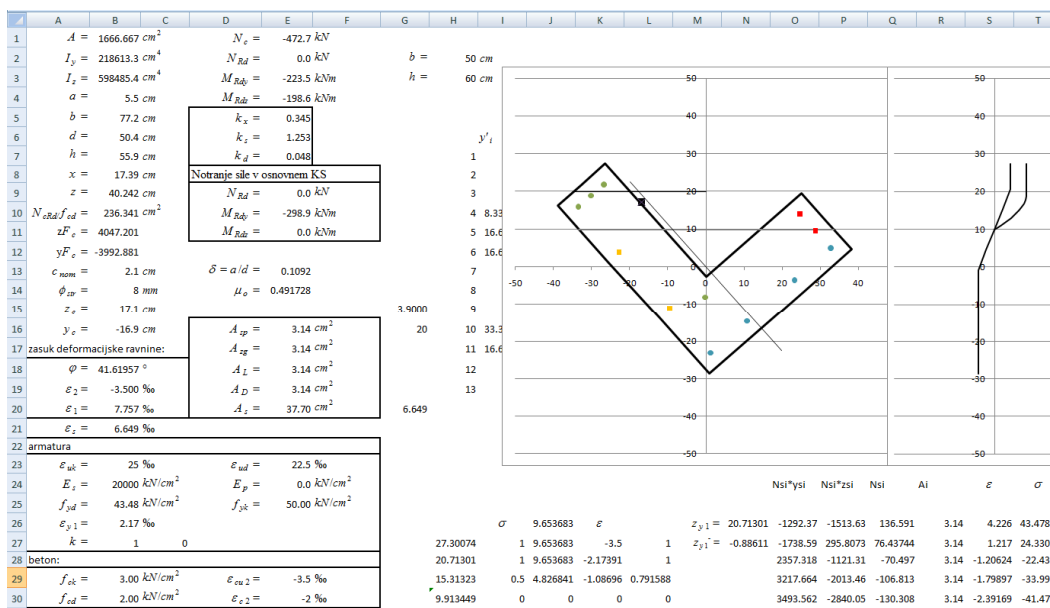
Armatura kvalitete S500, $f_{yk} = 50 \text{ kN/cm}^2$, $f_{yd} = 43.5 \text{ kN/cm}^2$, vse palice imajo prerez $A_{si} = 3.14 \text{ cm}^2$, brez utrjevanja, upoštevan neto prerez.



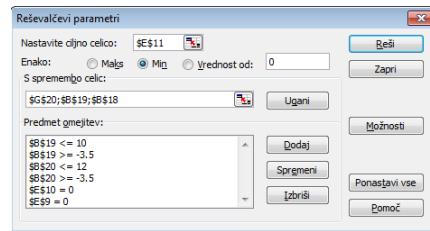
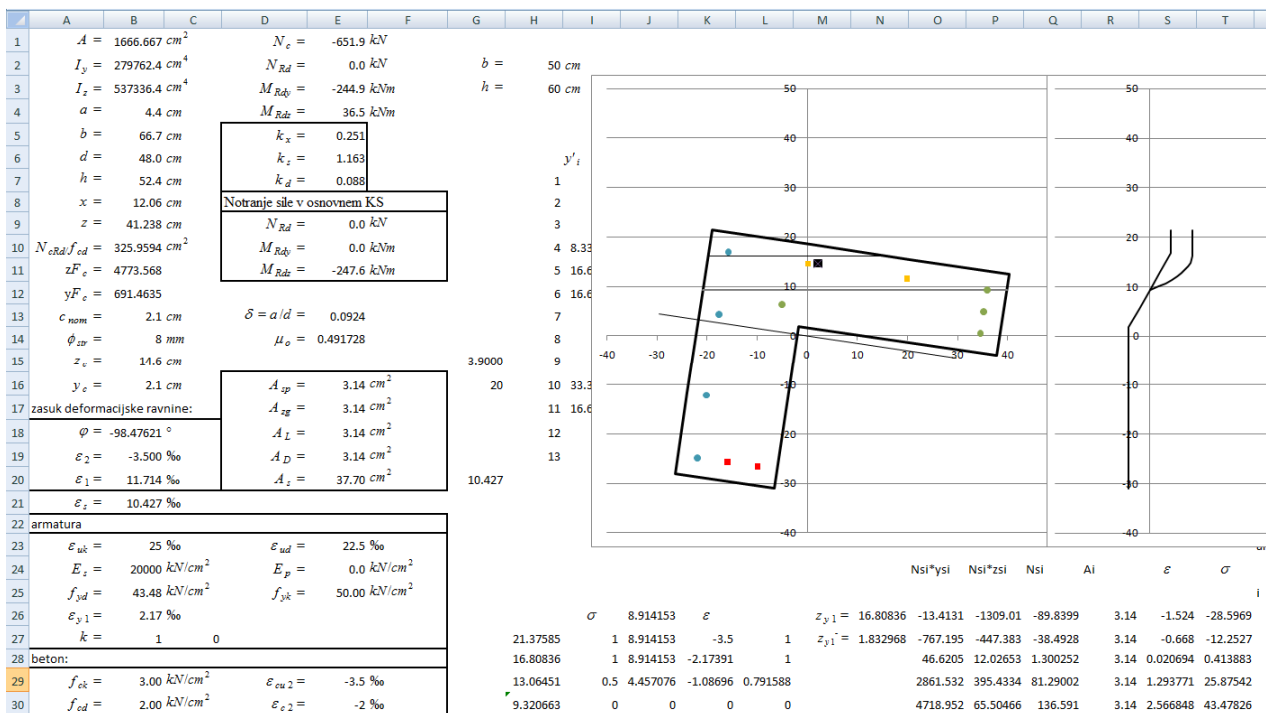
Slika 4.30 Primer C4 L prerez 60x50 cm



Slika 4.31 Parametri za račun minimalne upogibne odpornosti okoli osi y $M_{y,Rdy}$



Slika 4.32 Račun deformacijske ravnine za min. M_{Rdy}

Slika 4.33 Parametri za račun minimalne upogibne odpornosti okoli osi z $M_{z,Rdy}$ Slika 4.34 Račun deformacijske ravnine za min. M_{Rdz}

4.3.4 Primer C 4

Pri dani geometriji in položaju armaturnih palic iščem minimalno količino armature, ki pokrije 2 obtežna primera. Najprej sem določil optimalne vrednosti vseh štirih armaturnih palic, v naslednjem primeru sem vezal armatura še z dodatnim robnim pogojem, $A_I = A_{II}$ in $A_{III} = A_{IV}$. Na koncu sem izračunal minimalno armaturo še ob robnem pogoju da imajo vse palice enak prerez. V zavihku imam v vrsticah 1 do 48 vse enačbe za prvi obtežni primer, v vrsticah od 101 do 148 pa vse enačbe za drugi primer. Oba sistema enačb si delita isto geometrijo, iste položaje palic, iste karakteristike materialov in iste prereze palic. Različne pa so tri spremenljivke, ki določajo deformacijsko ravnino in prerezi palic.

1.obtežni primer:

$$N_{Ed} = -1000 \text{ kN}$$

$$M_{yEd} = -100 \text{ kNm}$$

$$M_{zEd} = 500 \text{ kNm}$$

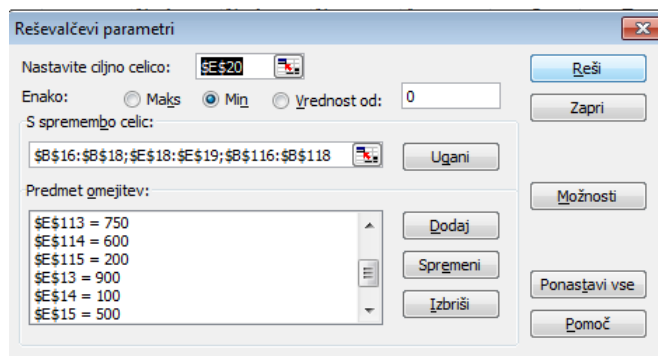
2.obtežni primer:

$$N_{Ed} = -800 \text{ kN}$$

$$M_{yEd} = 400 \text{ kNm}$$

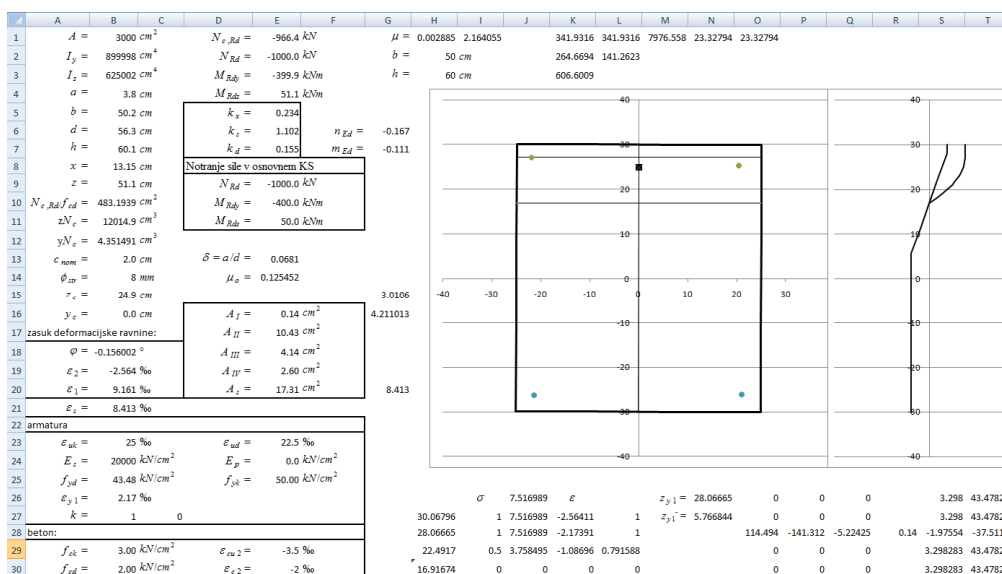
$$M_{zEd} = -200 \text{ kNm}$$

Geometrija prereza: pravokotni prerez $b/h = 50/60$ cm, beton kvalitete C30/37, $f_{ck} = 3.0$ kN/cm², $f_{cd} = 2.0$ kN/cm², armatura kvalitete S500, $f_{yk} = 50$ kN/cm², $f_{yd} = 43.5$ kN/cm², brez utrjevanja, upoštevan neto prerez. Zaščitni sloj betona je $c_{nom} = 2.0$ cm, $\phi_{str} = 8$ mm.

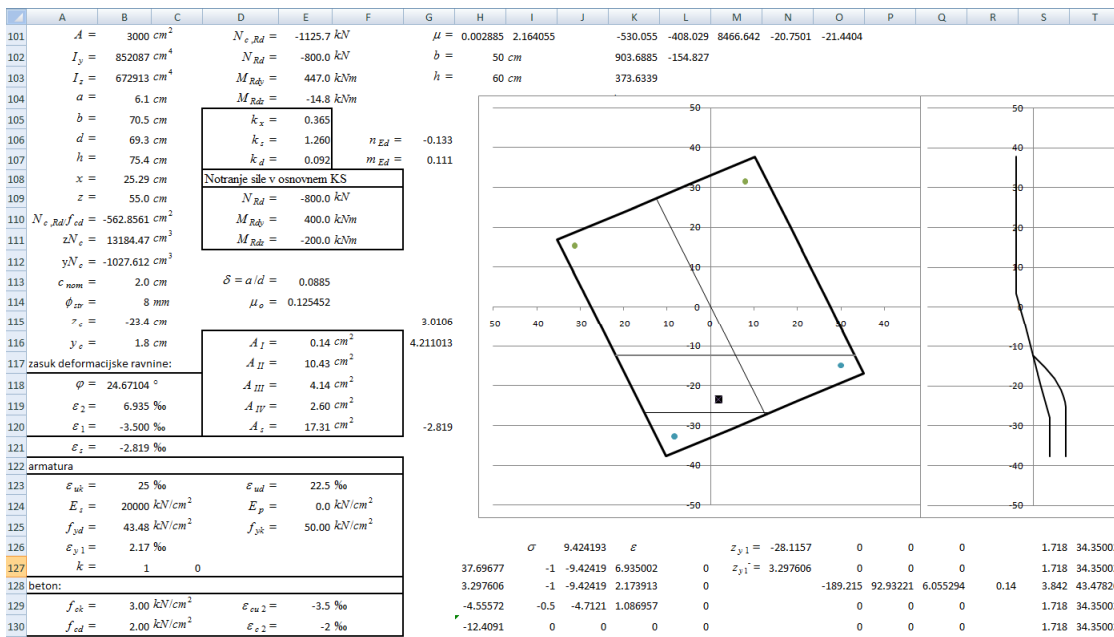


Slika 4.35 Pogovorno okno Reševalca

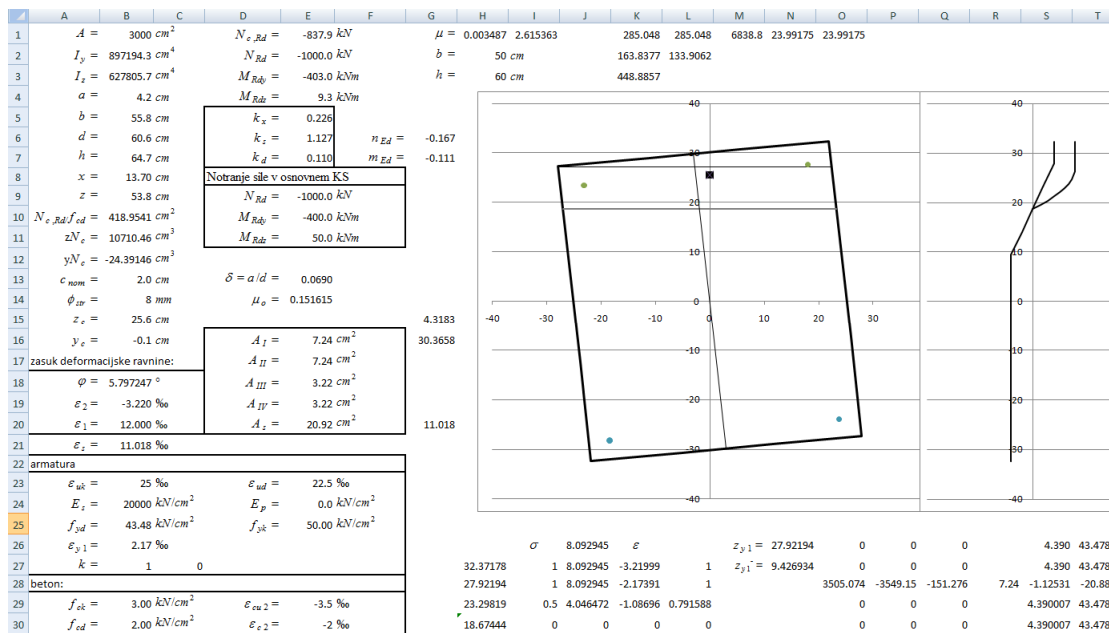
Za namensko funkcijo (okence *Nastavite ciljno celico:*) sem nastavlil formulo v polju E20 za vsoto vseh prerezov armaturnih palic. Spreminjal sem (okence *S spremembo celic:*) deformacijsko ravnino v poljih B18, B19 in G20 za prvi obtežni primer, deformacijsko ravnino v poljih B118, B119 in G120 za drugi obtežni primer in prereze armaturnih palic v poljih E16:E19. Za robne pogoje (okence *Predmet omejitev:*) zahtevam da so izračunane sile (odpornost) v prerezu enake silam, ki predstavljajo obremenitev, da morajo biti prerezi armaturnih palic večji od nič in da deformacijska ravnina ne presega mejnih vrednosti. V drugem delu sem dodal še dva robna pogoja, $A_I = A_{II}$ in $A_{III} = A_{IV}$, v tretjem delu pa še $A_{II} = A_{III}$.



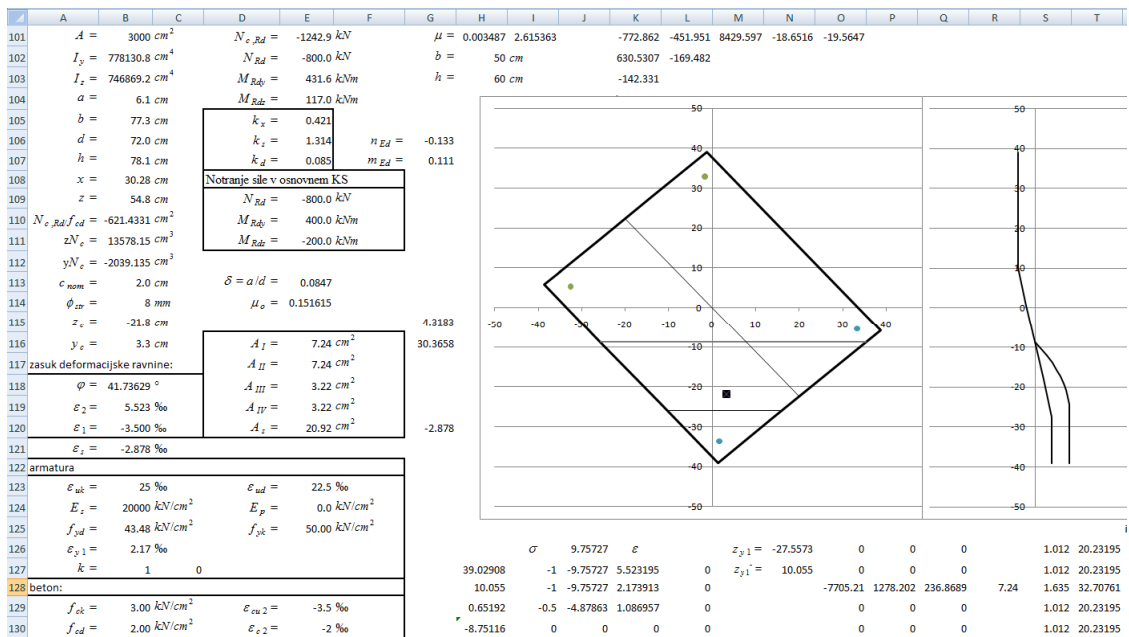
Slika 4.36 Račun minimalne armature za 1. OP, palice niso vezane



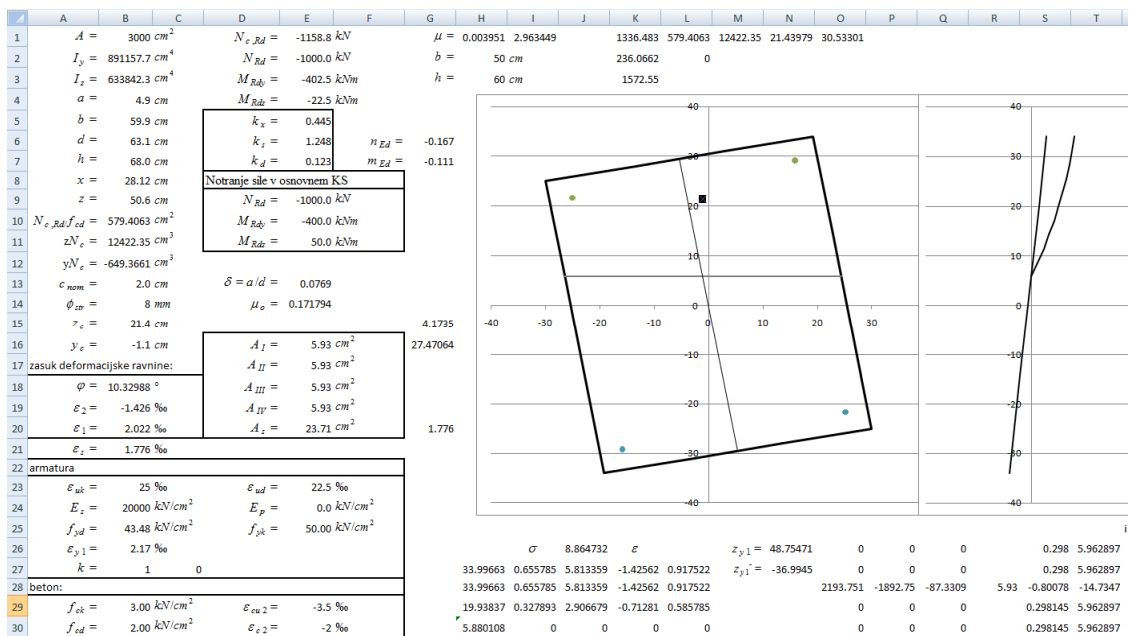
Slika 4.37 Račun minimalne armature za 2. OP, palice niso vezane



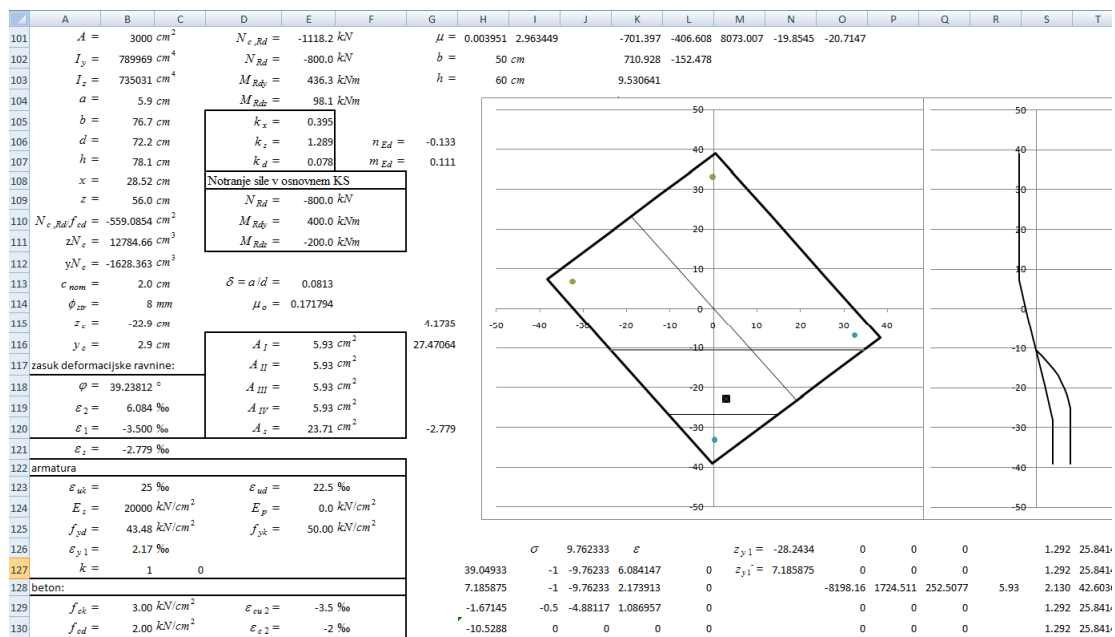
Slika 4.38 Račun minimalne armature za 1. OP, palice so v dveh skupinah



Slika 4.39 Račun minimalne armature za 2. OP, palice so v dveh skupinah



Slika 4.40 Račun minimalne armature za 1. OP, palice imajo enak prerez



Slika 4.41 Račun minimalne armature za 2. OP, palice imajo enak prerez

Preglednica 4.8 Pregled rezultatov

	Armatura				A [cm ²]	Deformacijski ravnini	
	A _I [cm ²]	A _{II} [cm ²]	A _{III} [cm ²]	A _{IV} [cm ²]		φ/ε ₁ /ε ₂ (1OP)	φ/ε ₁ /ε ₂ (2OP)
1	0.14	10.43	4.14	2.60	17.31	0.15/9/-2.6	25/-3.5/6.9
2	7.24	7.24	3.22	3.22	20.92	5.8/12/-3.2	41/-3.5/5.5
3	5.93	5.93	5.93	5.93	23.71	10/2/-1.4	39/-3.5/6

I – levo zgoraj, II – desno zgoraj, III – desno spodaj, IV – levo spodaj

5 ZAKLJUČEK

V diplomski nalogi sem predstavil računalniški program v okolju Excel za dimenzioniranje prečnih armiranobetonskih prerezov poljubne oblike obremenjenih z dvojno ekscentrično osno silo. S pomočjo Greenovega izreka sem izpeljal teoretične osnove, ki so intuitivno lahko razumljive, vendar se je pri višjih stopnjah polinomske integracije precej lažje zanesti na zanesljivo teoretično podlago.

Posebnost programa je določanje območja integracije po tlačnem območju prereza, kjer poteka integracija normalnih napetosti v prerezu. Postopek računa ne potrebuje ustvarjanja dodatnega podprereza ampak se vso integracijo izvede po celem prerezu ob upoštevanju integracijskih mej, ki so določene za vsak odsek mnogokotnika posebej. Postopek je tako enostaven, da se ga da izvesti v Excelu brez pomoči VBA ali človeške intervencije.

Optimizacijo prerezov sem izvedel s pomočjo podprograma Solver. Solver je robusten dodatek za reševanje linearnih in nelinearnih optimizacijskih problemov, ki pokriva zelo širok spekter uporabe. Zato je razumljivo, da ne more doseči učinkovitosti specializiranih programov, vendar pa pri pravilni uporabi najde rešitev.

Na koncu sem predstavil še računske primere, s katerimi sem potrdil pravilnost računskega postopka.

V morebitnem nadaljevanju naloge bi bilo smiselno predstaviti odsekoma zvezni funkciji delovnih diagramov z zveznim približkom, morda z razvojem v Fourierovo vrsto. Tako bi se izognil kljub vsemu precej zapletenemu postopku določanja integracijskih področij, z zveznim približkom bi se dalo integracijo izvesti brez omejitev.

VIRI

[1] SIST EN 1992-1-1:2005. Evrokod 2: Projektiranje betonskih konstrukcij. Del 1-1: Splošna pravila in pravila za stavbe.

[2] Excel Solver - GRG Nonlinear Solving Method Stopping Conditions

www.solver.com/excel-solver-grg-nonlinear-solving-method-stopping-conditions (Pridobljeno 8.8.2016.)

[3] Excel solver algorithms and methods used. 2016.

www.solver.com/excel-solver-algorithms-and-methods-used (Pridobljeno 8.8.2016.)

[4] Horvat M. 2006, Izdelava preglednic in grafikonov za dimenzioniranje. Diplomski Naloga UNI. Ljubljana, UL FGG, Oddelek za gradbeništvo, Konstrukcijska smer (samozaložba M. Horvat)

[5] Priročnik za projektiranje gradbenih konstrukcij po evrokod standardih / urednika Darko Beg, Andrej Pogačnik. Ljubljana: Inženirska zbornica Slovenije, 2009

OSTALI VIRI

Rogač, R., Saje, F., Lozej, M. 1989. Priročnik za dimenzioniranje armiranobetonskih konstrukcij po metodi mejnih stanj. Ljubljana, Univerza Edvarda Kardelja v Ljubljani, Fakulteta za arhitekturo, gradbeništvo in geodezijo.

Najdanović, D., Alendar, V., Ješić, D. 1989. Dijagrami za dimenzionisanje armiranobetonskih preseka prema graničnoj nosivosti. Beograd, Gradzevinska knjiga: 154 str.

Markovič, M. 2006. Mejna nosilnost AB prečnih prerezov pri dvojno ekscentrični osni obremenitvi. Dipl. nal.- UNI. Ljubljana, UL, FGG, Odd. za gradbeništvo, Konstrukcijska smer.

www.wolfram.com/mathematica/resources/ (Pridobljeno 8.8.2016.)