

Univerza
v Ljubljani
Fakulteta
*za gradbeništvo
in geodezijo*



Jamova cesta 2
1000 Ljubljana, Slovenija
<http://www3.fgg.uni-lj.si/>

DRUGG – Digitalni repozitorij UL FGG
<http://drugg.fgg.uni-lj.si/>

V zbirki je izvirna različica izdajatelja.

Prosimo, da se pri navajanju sklicujete na bibliografske podatke, kot je navedeno:

University
of Ljubljana
Faculty of
*Civil and Geodetic
Engineering*



Jamova cesta 2
SI – 1000 Ljubljana, Slovenia
<http://www3.fgg.uni-lj.si/en/>

DRUGG – The Digital Repository
<http://drugg.fgg.uni-lj.si/>

This is a publisher's version PDF file.

When citing, please refer to the publisher's bibliographic information as follows:

Bogatin, S., Kogoj, D. 2006. Uporaba Kalmanovega filtra v terestrični geodeziji = Use of Kalman filter in terrestrial geodesy. Geodetski vestnik 50, 2: 211-223.

DOI: <http://dx.doi.org/10.15292/geodetski-vestnik.2006.02.211-223>
<http://drugg.fgg.uni-lj.si/5207/>

Datum arhiviranja / Archiving Date: 10-7-2015

UPORABA KALMANOVEGA FILTRA V TERESTRIČNI GEODEZIJI

USE OF KALMAN FILTER IN TERRESTRIAL GEODESY

Sonja Bogatin, Dušan Kogoj

UDK: 528.2:621.3969

IZVLEČEK

Predmet prispevka je predstavitev modela Kalmanovega filtra kot alternativne metode za vrednotenje kinematičnih geodetskih meritev. Na osnovi simulacije kinematičnega procesa je podan model linearnega Kalmanovega filtra. Kinematična opazovanja so izvedena z elektronskim tahimetrom, ki omogoča samodejno sledenje reflektorja in izvajanje meritev. V računskem primeru je prikazan pomen ustrezne določitve začetnih parametrov filtra, s poudarkom na določitvi procesne napake.

Klasifikacija prispevka po COBISS-u: 1.02

ABSTRACT

The objective of the article is to introduce the model of Kalman filter as an alternative method for estimation of kinematic geodetic measurements. On the basis of kinematic process simulation the model of linear Kalman filter is given. Kinematic observations are done with electronic tachymeter, which enables automatic tracking of reflector and measuring. In numerical example the importance of initial filter's parameters definition, with emphasis on defining the process noise, is given.

KLJUČNE BESEDE

Kalmanov filter, kinematične meritve, linearni model, merska napaka, procesna napaka

KEY WORDS

Kalman filter, kinematic measurements, linear model, measurement noise, process noise

1 UVOD

V geodeziji se že od nekdaj pojavljajo naloge, pri katerih se meritve nanašajo na premikajoče ali navidezno premikajoče se objekte. V preteklosti se je obravnava kinematičnih nalog izvajala na osnovi transformacije kinematičnega problema v zaporedje statičnih meritev. Rezultat naknadno obdelanih statičnih opazovanj, izvedenih v različnih časovnih trenutkih, so spremembe položaja opazovanih točk objekta v času med izbranimi časovnimi trenutki opazovanj. Z razvojem kinematičnih merskih sistemov – globalnega in terestričnega položajnega sistema (GPS – angl. Global Positioning System in TPS – angl. Terrestrial Positioning System) – pa se je na trgu pojavil instrumentarij najrazličnejših proizvajalcev, ki omogoča samodejno, kontinuirano spremljanje premikajočih se objektov in določitev položaja v skoraj realnem času.

Klasični postopki obravnave deformacijskih procesov so v preteklosti temeljili na statičnih oz. kvazistatičnih modelih. Razvoj računalništva ter razvoj novih merskih tehnik in algoritmov

vrednotenja je v sredini 60-ih bistveno spremenil metodiko deformacijske analize. Poleg čisto osnovne določitve geometrijskega stanja je vključen časovni potek sprememb in premikov; razvili so se t.i. kinematični modeli. Kinematična obravnava koordinat točk kot funkcij časa poskuša opisati spremembe s koordinatami, hitrostjo in pospeškom (Bogatin, Kogoj, 2006). Da bi lahko opisali gibanje točke, je potrebno opisati tirnico gibanja v odvisnosti od časa, kakor tudi spremljati geodetski datum izbranega koordinatnega sistema.

V kinematični merski tehniki imamo opravka s časovnimi analizami in tehnikami filtriranja, ki temeljijo na izravnavi opazovanj ter podajajo zvezo med opazovanji in neznankami v stohastičnem in funkcionalnem modelu. Ker je položaj (x, y, z) pri kinematičnih meritvah funkcija časa $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, naknadna obdelava na osnovi nadštevilnih opazovanj ni možna, zato so potrebni posebni postopki, ki omogočajo vrednotenje opazovanj v skoraj realnem času. Vrednotenje temelji na napovedovanju vnaprej pričakovanega obnašanja sistema, ob dobrem poznavanju in razumevanju njegovega preteklega obnašanja. V realnih časovnih vrstah je velikokrat prisoten tudi šum, ki otežuje modeliranje in pridobitev optimalnih rezultatov. Med standardne tehnike za odstranjevanje šuma iz časovne vrste sodijo postopki filtriranja in glajenja. V smislu obravnavanja najmanjše kvadratne napake je odstranjevanje šuma iz časovne vrste optimalno s Kalmanovim filtrom, ki ga lahko uporabimo le, če poznamo enačbe procesa (Lotrič, 2000).

V nadaljevanju je predstavljen model linearnega Kalmanovega filtra in enostaven primer uporabe le-tega za vrednotenje kinematičnih meritev, izvedenih s tahimetrom TCRA1105plus *Leica Geosystems*.

2 KALMANOV FILTER

Teorija Kalmanovega filtra je bila izpeljana na delih Gaussa, Kolmogorova in izsledkih Wienerjevega filtra v začetku 60-ih let 20. stoletja. V splošnem je namen filtriranja ločiti en predmet od drugega. Problem filtriranja v inženirskih nalogah izhaja iz področja elektrotehnike: določitev signala v določenem frekvenčnem območju in izločitev frekvenc izven definiranega območja. Problem lahko v osnovi rešujemo na dva načina:

- z izbiro ustreznega instrumentarija ali
- z modeliranjem ustreznega matematičnega algoritma za ovrednotenje iskanih in merjenih količin.

V 40-ih letih 20. stoletja je Norbert Wiener pristopil k problemu z matematičnega vidika in si zadal nalogo odgovoriti na vprašanje, kakšna naj bo vrednost filtrirane frekvence, da bo zagotavljala optimalno ločitev signala od motečih vplivov - šuma. Rezultat je Wienerjev filter, ki je definiran z naslednjimi lastnostmi:

- predpostavka, da sta signal in šum slučajna procesa,
- kriterij pridobitve optimalne rešitve je minimum srednje vrednosti kvadratov popravkov,
- rešitev temelji na določitvi optimalne utežne funkcije filtra.

Končni rezultat Wienerjevega filtra je utežna funkcija filtra, ki določa uteži vhodnih količin tako, da je rezultat optimalna ocena izhodnih količin v danem trenutku. Z algoritmom je lahko

izvedena ocena signala za predhodni trenutek – glajenje, ocena signala za dani trenutek – filtriranje ali pa je izvedeno napovedovanje vrednosti signala za prihodnji trenutek – napoved (tabela 1).

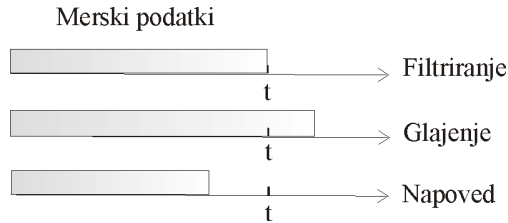


Tabela 1: Postopki ocenjevanja merskih podatkov kot funkcija časa (Gelb, 1974)

Wienerjev pristop k filtriranju po metodi najmanjših kvadratov je uporabljen tudi v Kalmanovem filtru. Oba modela temeljita na določitvi utežne funkcije: kako naj bodo uteženi vhodni podatki, da bo zagotovljena najboljša ocena iskanih količin v sedanjem trenutku (tabela 2).



Tabela 2: Diagram sistema, meritev in filtra (Gelb, 1974)

Začetki praktične uporabe Kalmanovega filtra segajo na področje navigacije in določanja tirnice gibanja telesa v prostoru in času.

Kalmanov filter je optimalni rekurzivni linearni algoritem za obdelavo podatkov opazovanj. Za pridobitev ocene stanja sistema ali iskanih količin algoritem obdelava vsako opazovanje ne glede na natančnost. Pri tem vključuje vsa razpoložljiva znanja o:

- dinamiki sistema in merskih naprav,
- statističnih lastnosti merskih napak, napak sistema in dinamiki modela ter
- začetnih vrednostih iskanih količin.

Pri rekurzivni obdelavi podatkov algoritem Kalmanovega filtriranja ne zahteva shranjevanje vseh meritev in stanj sistema, saj so za izračun iskanih količin potrebni le podatki iz predhodnega koraka. Ta lastnost utemeljuje prednost algoritma pri velikih sistemih, z veliko količino podatkov. Model je linearen. V primeru, da nastopijo nelinearne zveze, jih lineariziramo z razvojem funkcij v Taylorjevo vrsto. Kalmanov filter predpostavlja, da so šumi sistema in meritev beli in Gaussovi. Beli šum je slučajni proces e_t , kjer so spremenljivke nekorelirane $E(e_t, e_j) = 0, t \neq j$, s srednjo

vrednostjo nič $\mu_e(t) = E(\mathbf{e}_t) = 0$ in varianco $E(\mathbf{e}_t^2) = s^2$. V primeru, da so šumi porazdeljeni z normalno porazdelitvijo, govorimo o Gaussovem šumu.

Oglejmo si model Kalmanovega filtra. Kalmanov filter obravnava slučajni proces, ki je opisan z linearno procesno enačbo (Welsch, Bishop, 2004):

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \quad (1)$$

in enačbo meritev:

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \quad (2)$$

kjer so (Pavlovčič Prešeren, 2000):

\mathbf{A} ... prehodna matrika sistema

\mathbf{x}_k ... vektor neznank za trenutek t_k

\mathbf{w}_k ... procesni beli šum

\mathbf{H} ... matrika idealne povezave med opazovanji in vektorjem neznank

\mathbf{z}_k ... vektor opazovanj v času t_k

\mathbf{v}_k ... trenutni beli šum opazovanj.

Matrika $\mathbf{A}_{[n,n]}$ v enačbi procesa (1) povezuje trenutno vrednost vektorja neznank \mathbf{x}_k v časovnem trenutku t_k in napovedano vrednost \mathbf{x}_{k+1} za časovni trenutek t_{k+1} . Matrika $\mathbf{H}_{[m,n]}$ v enačbi meritev (2) povezuje vektor neznank \mathbf{x}_k z opazovanji \mathbf{z}_k . Matriki \mathbf{A} in \mathbf{H} sta lahko funkciji časa, vendar sta za večino procesov konstantni. Algoritem oceni vektor iskanih količin $\mathbf{x}_k \in \mathfrak{R}^n$ (n je število neznank za časovni korak k) na osnovi diskretnih opazovanj $\mathbf{z}_k \in \mathfrak{R}^m$ (m je število meritev za časovni korak k), za trenutek t_k . Vektorja \mathbf{w}_k in \mathbf{v}_k predstavljata napako sistema in slučajne napake meritev. Za spremenljivki se predpostavlja, da sta beli, z normalno verjetnostno porazdelitvijo:

$$p(\mathbf{w}_k) \sim N(0, \mathbf{Q}_k)$$

$$p(\mathbf{v}_k) \sim N(0, \mathbf{R}_k)$$

Pripadajoči kovariančni matriki \mathbf{Q}_k in \mathbf{R}_k vektorjev \mathbf{w}_k in \mathbf{v}_k sta dani z:

$$R[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_i^T] = \begin{cases} \mathbf{Q}_k, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

$$R[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_i^T] = \begin{cases} \mathbf{R}_k, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

$$R[\mathbf{w}_k \mathbf{v}_i^T] = 0, \text{ za vse } k \text{ in } i,$$

in sta lahko tekom procesa konstantni ali pa sta funkciji časa ter se spreminjata z vsakim časovnim trenutkom meritev t_k . Kovariančna matrika opazovanj $\mathbf{R}_{[m,m]}$ je določena na osnovi poznane

natančnosti merskih sistemov ali pa je določena na osnovi predhodnih meritev. Določitev kovariančne matrike sistema $\mathbf{Q}_{[n,n]}$ je bistveno težja, saj procesa, ki ga ocenjujemo, običajno ne moremo opazovati direktno.

Cilj izpeljave Kalmanovega filtra je pridobiti enačbe za izračun aposteriori ocene vektorja neznank $\hat{\mathbf{x}}_k$ kot linearno kombinacijo apriori ocene $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ ter utežene razlike med dejanskimi meritvami \mathbf{z}_k in predikcijo meritev $\mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{x}}_k^-$:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K} \cdot (\mathbf{z}_k - \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{x}}_k^-). \quad (3)$$

Razlika $\mathbf{d}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{x}}_k^-$ predstavlja izboljšavo ali popravek meritev in odraža odstopanje med napovedanimi vrednostmi meritev $\mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{x}}_k^-$ in dejanskimi meritvami \mathbf{z}_k . Vrednost popravka $\mathbf{d}_k = 0$ pomeni popolno skladnost napovedanih in dejanskih vrednosti meritev. Postavi se vprašanje, kako določiti matriko $\mathbf{K}_{k[n,m]}$, Kalmanovo matriko ojačenja, ki bo zagotavljala najboljšo – optimalno aposteriori oceno vektorja neznank. Kot kriterij ocene je izbrana minimalna vsota kvadratov popravkov, ki nam da rešitev optimalne Kalmanove matrike ojačenja \mathbf{K}_k :

$$\mathbf{K}_k = \frac{\mathbf{P}_k^- \cdot \mathbf{H}_k^T}{\mathbf{H}_k \cdot \mathbf{P}_k^- \cdot \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k}. \quad (4)$$

V primeru, ko se kovariančna matrika opazovanj \mathbf{R}_k (diagonalni elementi podajajo natančnost opazovanj in sicer variance opazovanj) približuje nič, vrednost \mathbf{K}_k konvergira k $1/\mathbf{H}_k$. Dejansko opazovanje \mathbf{z}_k dobiva vedno večje zaupanje, napovedana vrednost $\mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{x}}_k^-$ pa čedalje manjše. V obratnem primeru, ko se apriori kovarianca ocene vektorja neznank \mathbf{P}_k^- približuje 0, dobiva vektor opazovanj \mathbf{z}_k manjše zaupanje, napovedana vrednost opazovanja $\mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{x}}_k^-$ pa vedno večje. Celotna Kalmanova zanka je podana v tabeli 3.

Kalmanov filter oceni proces na osnovi povratne kontrole. Filter oceni procesno neznanko za nek časovni trenutek, za katerega so izvedena diskretna opazovanja s prisotnimi motnjami. Filter je sestavljen iz časovnih enačb napovedi in enačb opazovanj – enačb popravkov. Časovne enačbe podajajo apriori oceno stanja sistema za naslednji časovni korak, na osnovi trenutne ocene neznank in pripadajoče kovariančne matrike. Sledi povratna kontrola in korekcija apriori ocenjenih vrednosti na osnovi izvedenih opazovanj. Izračunana je aposteriori ocena vektorja neznank in pripadajoča kovariančna matrika. Kalmanov filter je torej algoritem za reševanje numeričnih problemov, ki temelji na napovedih in popravkih napovedi.

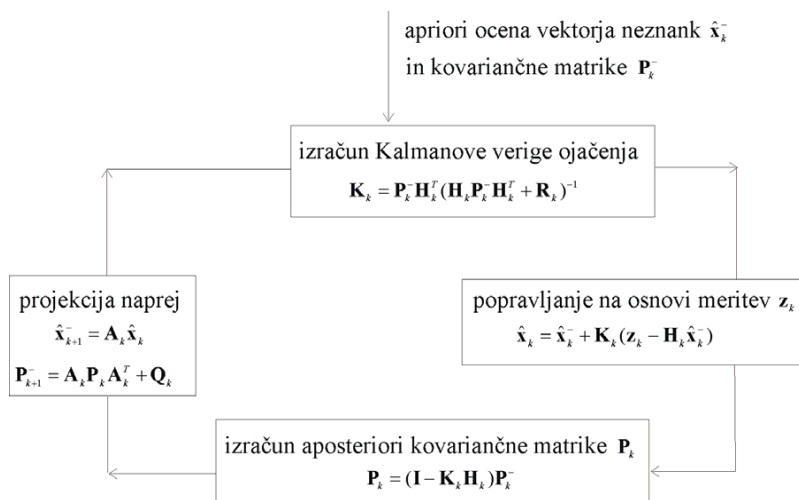
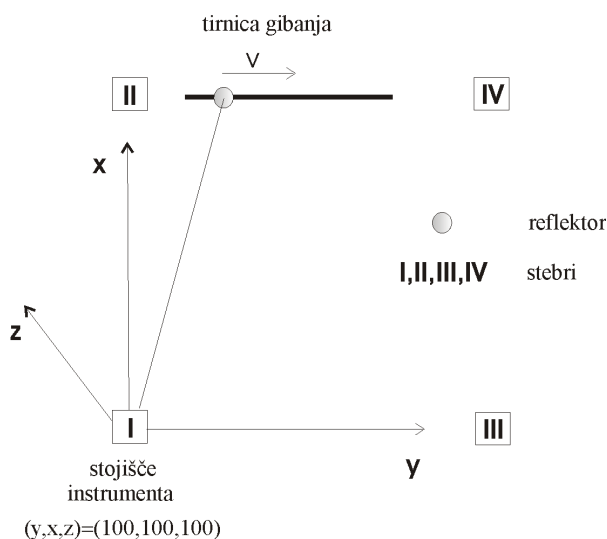


Tabela 3: Kalmanova zanka (Brown, Hwang, 1992)

3 RAČUNSKI PRIMER LINEARNEGA KALMANOVEGA FILTRA

3.1 Instrumentarij in vzpostavitev koordinatnega sistema

V učilnici zimskih vaj na Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo je bil vzpostavljen testni lokalni koordinatni sistem s tirnico za simuliranje gibanja reflektorja (slika 1).



Slika 1: Lokalni koordinatni sistem

Opazovanja so bila izvedena s tahimetrom TCRA1105plus (*Leica Geosystems*) v modulu LOCK, kar pomeni, da instrument sam sledi gibajoči reflektor. TCRA označuje avtomatski tahimeter s samodejnim viziranjem in sledenjem prizme z vgrajenim IR in laserskim RL razdaljmerom, ki omogoča merjenje dolžin brez reflektorja (<http://www.geoservis.si/>). Z uporabo programa *AutoRecord* (*Leica Geosystems*), nameščenega v instrumentu, se meritve izvajajo samodejno, glede na izbran kriterij registracije meritev: časovni interval, sprememba dolžine ali čas mirovanja reflektorja. Program je narejen posebej za instrumente z možnostjo avtomatskega prepoznavanja reflektorja (ATR) (Kogoj et al., 2004). Za izvedbo meritev je bil izbran časovni kriterij registracije meritev (poševna dolžina, horizontalni kot, zenitna razdalja) in sicer za časovni interval $dt = 1$ s. Simulacija gibanja 360° reflektorja je bila izvedena ročno. Instrument je v času meritev postavljen na stebru *I* z danimi prostorskimi koordinatami v lokalnem koordinatnem sistemu $(y, x, z) = (100, 100, 100)$. Izhodiščna smer - smer *x* - je definirana s smerjo proti stebru *II*. Koordinatni sistem je levosučen; *y*-os je usmerjena proti stebru *III*. Os gibanja reflektorja je približno vzporedna z osjo *y*. Opazovanja so bila shranjena na notranjo pomnilno kartico instrumenta. Datoteka *.gsi je bila prenešena na zunanji računalnik s programom *Leica SurveyOffice*. Podatki blokov opazovanj so bili nato iz *.gsi tekstovne datoteke formata 16 prevedeni v *.txt tekstovno datoteko, ki je vhodna datoteka v algoritmu Kalmanovega filtra.

3.2 Model linearnega Kalmanovega filtra

V tekstovni datoteki so shranjene prostorske koordinate, kot jih izračuna instrument za vsak trenutek meritev. V linearnem Kalmanovem filtru predstavljajo prostorske koordinate hkrati meritve $\mathbf{z} = [x \ y \ z]^T$ in komponente vektorja stanja sistema - iskanih količin $\mathbf{x} = [x \ v_x \ y \ v_y \ z \ v_z]^T$ (prostorske koordinate položaja reflektorja v danem trenutku in hitrost v posamezni smeri).

V izračunu Kalmanovega filtra je predpostavljeno enakomerno gibanje, $a_x = a_y = a_z = 0 \text{ m/s}^2$. Iz poznane enačbe gibanja $s = s_0 + v \cdot dt$ lahko zapišemo procesno enačbo (1) v matrični obliki $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}_k$:

$$\begin{bmatrix} x \\ v_x \\ y \\ v_y \\ z \\ v_z \end{bmatrix}_{[6,1]} = \begin{bmatrix} 1 & dt & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & dt \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{[6,6]} \cdot \begin{bmatrix} x \\ v_x \\ y \\ v_y \\ z \\ v_z \end{bmatrix}_{[6,1]} \quad (5)$$

Enačba meritev $\mathbf{z}_k = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}_k$ se glasi:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{[3,1]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{[3,6]} \cdot \begin{bmatrix} x \\ v_x \\ y \\ v_y \\ z \\ v_z \end{bmatrix}_{[6,1]} \quad (6)$$

Za izračun algoritma Kalmanovega filtra s časovnimi enačbami napovedi in enačbami popravkov je potrebno določiti:

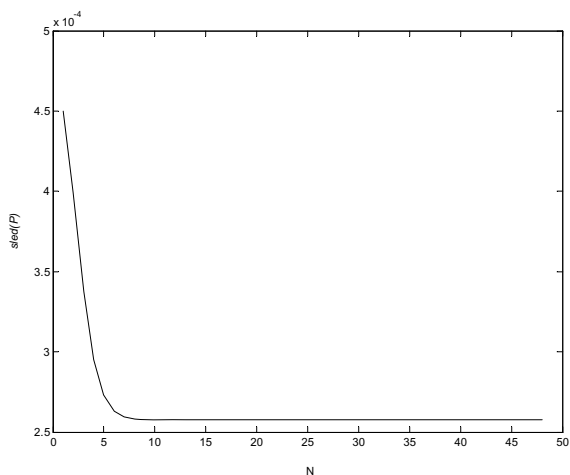
- začetni približek vektorja neznan \mathbf{x}_0 $_{[6,1]}$ in pripadajočo kovariančno matriko \mathbf{P}_0 $_{[6,6]}$
- kovariančno matriko opazovanj \mathbf{R} $_{[3,3]}$ in
- kovariančno matriko procesne napake \mathbf{Q} $_{[6,6]}$.

Apriori vektor začetnih približkov prostorskega položaja reflektorja in komponent hitrosti v posamezni smeri je določen na osnovi predhodnih meritev. Začetne vrednosti komponent vektorja hitrosti so določene kot povprečne hitrosti v posamezni smeri. Za določitev apriori kovariančne matrike začetne vrednosti vektorja neznan \mathbf{P} je privzeta natančnost določitve začetnega položaja 0.01 m in komponent hitrosti 0.01m/s. Kovariančna matrika opazovanj \mathbf{R} je določena glede na zmogljivosti instrumenta pri kinematičnih meritvah in znaša $\mathbf{R}_{[3,3]} = \text{diag}(0.0001 \text{ m}^2)$ in je časovno neodvisna. Kovariančna matrika procesne napake \mathbf{Q} je diagonalna matrika $\mathbf{Q}_{[6,6]} = q \cdot \text{diag}(1)$, kjer je q ustrezen skalar.

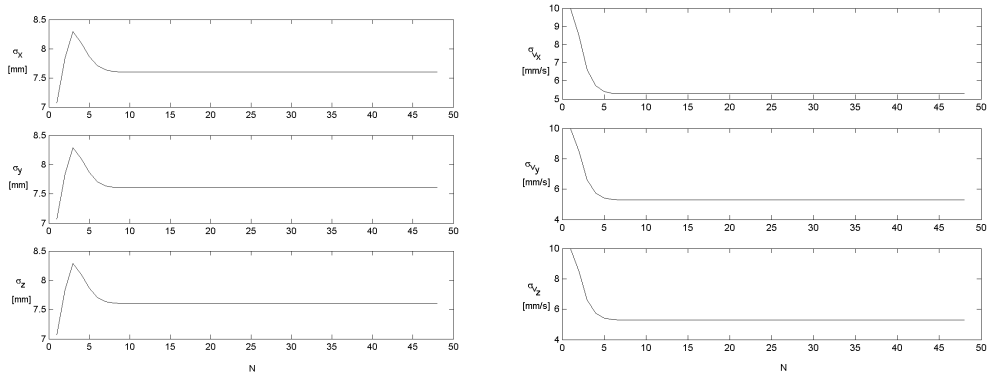
3.3 Interpretacija rezultatov

Računski primer pokaže odvisnost rezultatov od razmerja med procesno napako (matrika \mathbf{Q}) in mersko napako (matrika \mathbf{R}). Natančnost opazovanj – matrika \mathbf{R} – je ves čas konstantna. Rezultati so podani za dve različni vrednosti parametra q kovariančne matrike procesne napake \mathbf{Q} . Število vseh merskih trenutkov v obeh primerih je $N=48$.

Na spodnjih slikah so podani rezultati za vrednost $q=0.00001$. Na sliki 2 je predstavljena konvergenca sledi matrike \mathbf{P} , katere diagonalni elementi so variance iskanih količin – komponent položaja in hitrosti. Standardna deviacija posamezne komponente položaja konvergira k vrednosti 7.5 mm in komponent hitrosti k vrednosti 5mm/s (slika 3).

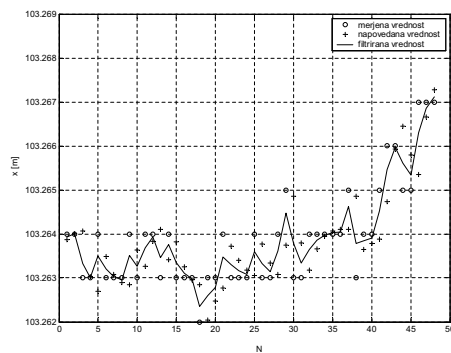
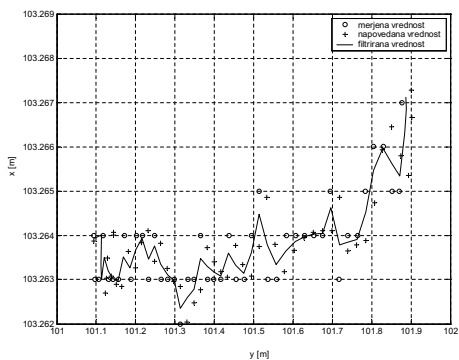


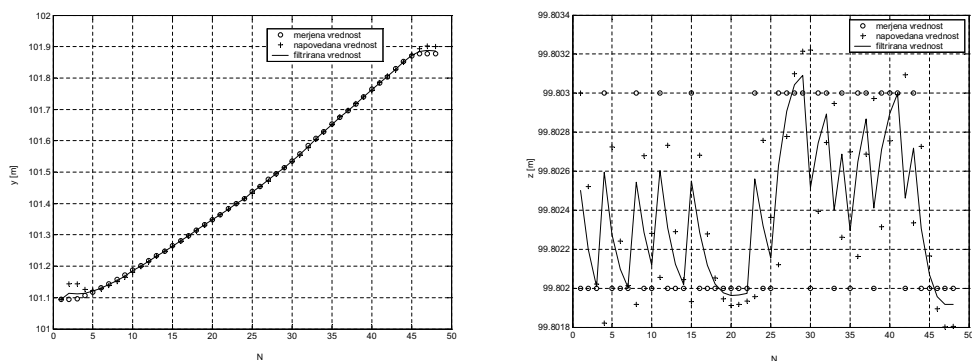
Slika 2: Sled matrike P za $q=0.00001$



Slika 3: Standardne deviacije komponent položaja in hitrosti za $q=0.00001$

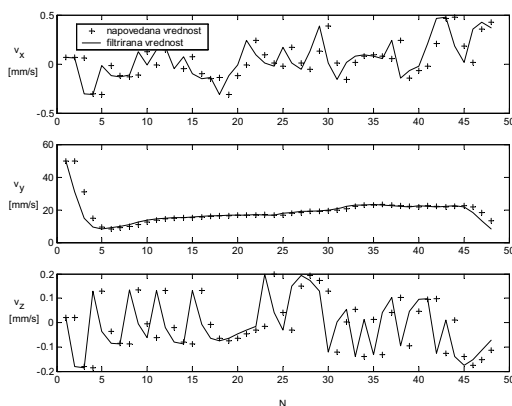
Na slikah 4 je izris komponent položaja: merjenih, napovedanih in filtriranih vrednosti.





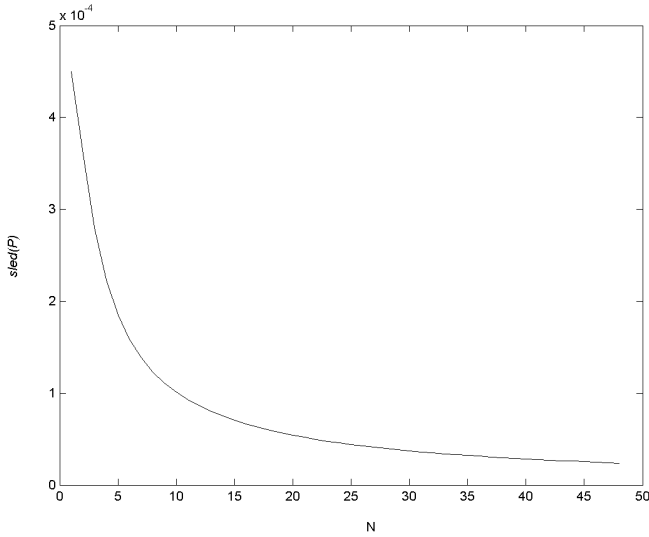
Slika 4: Merjene, napovedane in filtrirane vrednosti komponent položaja reflektorja za $q=0.00001$

Iz grafov hitrosti (slika 5) je razvidno, da je bila hitrost v smeri x in smeri z približno nič, v smeri y pa je znašala približno $v_y = 2$ cm/s.

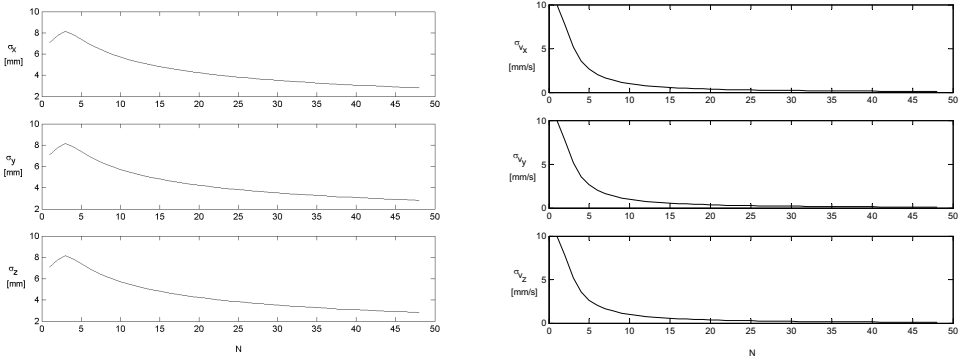


Slika 5: Komponente hitrosti za $q=0.00001$

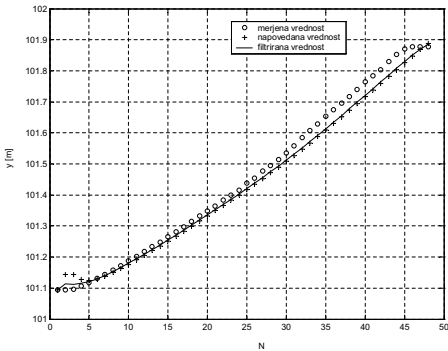
V nadaljevanju je podan primer slabe izbire procesne napake in posledično divergence filtra. Izbrana je mejna vrednost $q=0$, ki pomeni popolno zaupanje v matematični model. Na slikah 6 in 7 vidimo, da je dosežena konvergenca sledi in standardnih deviacij komponent prostorskega položaja in hitrosti. Standardna deviacija pri določitvi položaja je celo trikrat boljša kot v primeru $q=0.00001$. Na osnovi teh rezultatov bi lahko zaključili, da je model popolnoma primeren za vrednotenje kinematičnih meritev. Ko pogledamo komponento y (slika 8), vidimo, da nastopi divergenca filtra. Divergenca nastopi, ko je vrednost kovariančne matrike \mathbf{P} , natančneje diagonalnih elementov, ki je določena s procesom filtriranja, nesprijemljivo majhna glede na dejansko oceno neznan (Sorenson, 1970). Odstopanje med filtriranimi in merjenimi vrednostmi po komponenti y (slika 8) znaša tudi do 5 cm, kar je glede na zmogljivost instrumenta in hitrost gibanja bistveno preveč.



Slika 6: Sled matrike P za $q=0$

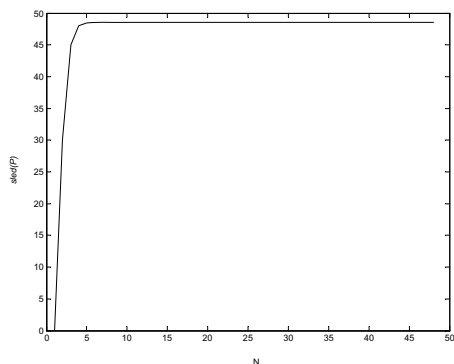


Slika 7: Standardne deviacije komponent položaja in hitrosti za $q=0$

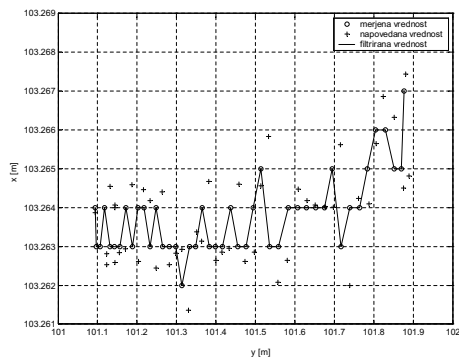


Slika 8: Komponenta y za $q=0$

V primeru, da izberemo prevelik q , lahko nastopi slučaj, ko sled matrike P konvergira k veliki vrednosti (slika 9) in so posledično tudi standardne deviacije neznank bistveno prevelike glede na natančnost meritev. Filtrirane vrednosti v tem primeru sledijo merjenim (slika 10), saj je v primeru velikega q večje zaupanje v opazovanja.



Slika 9: Sled matrike P za $q=10$



Slika 10: Merjene, napovedane in filtrirane vrednosti položaja reflektorja za $q=10$

4 ZAKLJUČEK

V terestrični geodeziji smo priča hitremu razvoju geodetskega instrumentarija kot posledici vedno večjih zmogljivosti merskih senzorjev in programske opreme. Ob predpogoju znanja o geodetskih metodah in postopkih lahko s poznavanjem delovanja in zmogljivosti merskih senzorjev ter programske opreme bistveno razširimo možnosti uporabe terestričnega geodetskega instrumentarija. Ena od možnosti je zajem kinematičnih procesov.

Pri kinematičnih meritvah zaradi gibanja reflektorja ni mogoče izvajati nadštevilnih meritev, s katerimi bi zmanjšali ali odstranili vplive delovnega okolja, instrumentalne pogreške in negativne vplive matematičnega modela. V splošnem so zahteve pri kinematičnih meritvah obsežnejše. Izbira instrumenta je pri zajemu kinematičnih (dinamičnih) procesov ključnega pomena. Prav tako je potrebno izbrati ustrezne postopke vrednotenja, ki nam poleg določitve neznank omogočajo tudi oceno natančnosti. V kinematični merski tehniki imamo opravka s časovnimi analizami in tehnikami filtriranja.

Učinkovitost matematičnega algoritma Kalmanovega filtra je danes razširjena na številna področja: geodezija, elektrotehnika, medicina, ... povsod v nalogah, kjer je potrebno ovrednotiti neznane količine kot funkcijo časa na osnovi pogrešenih opazovanj. Učinkovitost matematičnega algoritma Kalmanovega filtra v geodeziji pa se izkaže predvsem v nalogah, kjer ni mogoče zagotoviti nadštevilnih opazovanj, torej v nalogah navigacije, kontinuiranih meritvah premikajočega objekta (spremljanje premikov in deformacij).

Glede na izkušnje lahko zaključimo, da je pri kinematičnih meritvah potrebno posvetiti pozornost:

a) zmogljivosti instrumenta pri kinematičnih meritvah:

Pri seriji tahimetrov TPS1100 *Leica Geosystems* se namreč pokaže še precejšnja odvisnost natančnosti določitve položaja od hitrosti gibanja reflektorja. Odstopanje v položaju lahko znaša tudi do nekaj centimetrov, odvisno od hitrosti, in je posledica časovnega zamika med merjenjem kotov in dolžin. Z decembrom 2005 pa je izvedena izboljšava sinhronizacije, kjer časovna razlika med merjenju kotov in dolžine znaša nekaj mili sekund.

b) ustreznosti modela za vrednotenje:

V prihodnje bi bilo potrebno vzpostaviti ustrezni kalibracijski sistem z znano tirnico gibanja za vrednotenje primernosti matematičnega modela in zagotoviti zunanjo mero zanesljivosti. Na takšnem sistemu bi bilo mogoče testirati tudi zmogljivost instrumenta za kinematične meritve v odvisnosti od merjenih vrednosti in hitrosti gibanja.

Literatura in viri:

Bogatin, S., Kogoj, D. (2006). Pregled modelov vrednotenja geodetskih kontronih meritev. Geodetski vestnik. 2006-50/2. Ljubljana.

Brown, R. G., Hwang, P. Y. C. (1992). Introduction to random signals and applied Kalman filtering. Second edition. Electrical Engineering Department, Iowa State University, Rockwell International Corporation. Copyright © 1983, 1992 by John Wiley & Sons, Inc. Reprinted with permission of John Wiley & Sons, Inc.

Gelb, A. (1974). Applied Optimal Estimation. Massachusetts: Institute of Technology.

Kogoj, D., Bilban G., Bogatin S. (2004). Tehnične latnosti tahimetrov Leica Geosystems. Geodetski vestnik. 2004-48/1. Ljubljana.

Lotrič, U. (2000). Glajenje vhodnih vzorcev pri napovedovanju časovnih vrst. Ljubljana: Fakulteta za računalništvo in informatiko, Univerza v Ljubljani.

Pavlovič Prešeren, P. (2000). Vpliv troposfere na GPS opazovanja. Magistrska naloga. Ljubljana: Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.

Sorenson, H. W. (1970). Least-squares estimation: from Gauss to Kalman. San Diego: University of California. Copyright (c) 2004 IEEE. Reprinted from IEEE Spectrum, vol.7, 63-68.

Welsch, G., Bishop, G. (2004). An Introduction to the Kalman Filter. Updated: 5.4.2004 http://www.cs.unc.edu/~welch/media/pdf/kalman_intro.pdf

<http://www.geoservis.si/>

asist. Sonja Bogatin, univ. dipl. inž. geod., inž. mat.

FGG - Oddelek za geodezijo, Jamova 2, SI-1000 Ljubljana

E-pošta: sbogatin@fgg.uni-lj.si

izr. prof. dr. Dušan Kogoj, univ. dipl. inž. geod.

FGG - Oddelek za geodezijo, Jamova 2, SI-1000 Ljubljana

E-pošta: dkogoj@fgg.uni-lj.si

Prispelo v objavo: 6. marec 2006

Sprejeto: 23. maj 2006