

Univerza
v Ljubljani
Fakulteta
za gradbeništvo
in geodezijo



Jamova 2
1000 Ljubljana, Slovenija
<http://www3.fgg.uni-lj.si/>

DRUGG – Digitalni repozitorij UL FGG
<http://drugg.fgg.uni-lj.si/>

Ta članek je avtorjeva zadnja recenzirana različica, kot je bila sprejeta po opravljeni recenziji.

Prosimo, da se pri navajanju sklicujete na bibliografske podatke, kot je navedeno:

University
of Ljubljana
Faculty of
Civil and Geodetic
Engineering



Jamova 2
SI – 1000 Ljubljana, Slovenia
<http://www3.fgg.uni-lj.si/>

DRUGG – The Digital Repository
<http://drugg.fgg.uni-lj.si/>

This version of the article is author's manuscript as accepted for publishing after the review process.

When citing, please refer to the publisher's bibliographic information as follows:

Dujc, J., Brank, B. 2006. Račun mejne nosilnosti jeklenih plošč = Limit load analysis of steel plates. *Gradbeni vestnik* 55, 11: 288-299.

<http://www.zveza-dgits.si/arhiv-gradbenega-vestnika>

RAČUN MEJNE NOSILNOSTI JEKLENIH PLOŠČ

LIMIT LOAD ANALYSIS OF STEEL PLATES

Jaka Dujc in Boštjan Brank

POVZETEK

V tem delu je prikazana analiza nosilnosti jeklenih plošč z materialno nelinearno metodo končnih elementov. Obnašanje jekla je opisano z elastoplastičnim konstitutivnim modelom z izotropnim utrjevanjem, ki je definiran z rezultantami napetosti, t.j. z upogibnimi momenti in prečnima silama na enotsko dolžino. Podani so rezultati več numeričnih primerov.

SUMMARY

Limit load analysis of steel plates by materially nonlinear finite element method is presented in this work. Steel behavior is described by an elastoplastic constitutive model with isotropic hardening, which is defined in terms of stress resultants, i.e. bending moments and shear forces per unit length. Results of several numerical examples are presented.

1 UVOD

Evrokod 3 [EC 3, 2005] zahteva pri projektiranju jeklenih ploskovnih konstrukcij (to so npr. plošče, cilindrični rezervoarji, tlačne posode in podobno) preverjanje štirih mejnih stanj (plastičnega mejnega stanja, mejnega stanja zaradi cikličnega obremenjevanja, mejnega stanja stabilnosti in mejnega stanja zaradi utrujanja). Osnovno med njimi (v [EC 3, 2005] imenovano tudi mejno stanje 1) je plastično mejno stanje, ki nastopi pri izčrpani nosilnosti konstrukcije zaradi plastifikacije jekla. To se zgodi, ko se precejšen dela ploskovne jeklene konstrukcije plastificira in se vzpostavi mehanizem, ki vodi k poružitvi. Plastično mejno stanje je torej povezano z mejno (imenovano tudi porušno) nosilnostjo ploskovne jeklene konstrukcije.

Pri statičnem, monotonem, upogibnem obremenjevanju jeklenih plošč, ki ga obravnavamo v tem delu, nas (od omenjenih štirih stanj) zanima le plastično mejno stanje, ki nam pove, kolikšna je mejna nosilnost plošče. Mejo plastične porušitve izdelanih plastičnih plošč se lahko oceni z metodo plastičnih linij, ki je razložena npr. v [Lubliner, 1990, poglavje 6.4.] in v knjigah o porušni analizi, ki so omenjene v [Dujc, 2006]. Rešitve, dobljene z metodo plastičnih linij, predstavljajo zgornjo mejo mejne obtežbe – dejanska mejna obtežba je ali manjša ali kvečjemu njej enaka. Za krožne, osnosimetrično obremenjene in podprte elastoplastične plošče pa obstajajo tudi točne analitične rešitve za mejno obtežbo, npr. [Lubliner, 1990, poglavje 5.2.3.] in [Sawczuk, 1989]. Izraze za mejno obtežbo osnosimetričnih plošč podaja tudi Evrokod 3 [EC3, 2005] v dodatku B.

Zelo učinkovit način za določitev mejne nosilnosti jeklenih ploskovnih konstrukcij je materialno nelinearna analiza z metodo končnih elementov. V [Dujc, 2006] je prikazana materialno nelinearna analiza armiranobetonskih plošč, v tem delu pa prikažemo materialno nelinearno analizo jeklenih plošč. Osnova za analizo sta: (i) štirivozliščni končni element za plošče, ki je predstavljen v [Bohinc, 2005] in tamkajšnjih referencah, ter (ii) enačbe snovi za elastoplastični material z izotropnim utrjevanjem.

V nadaljevanju članka se posvetimo predvsem predstavitvi elastoplastičnih enačb snovi za jeklene plošče in njihovi numerični implementaciji. Omenimo naj, da uporabimo kriterij plastičnega

tečenja, ki temelji na von Misesovi funkciji tečenja, ki daje odlične približke dejanskemu stanju za metale, glej npr. [Kojić, 2005]. V našem primeru von Misesovo funkcijo tečenja po zgledu [Ibrahimbegović, 1993], [Simo, 1992] preoblikujemo tako, da je izražena z rezultantami napetosti. S tem dobimo kriterij plastičnega tečenja, ki ga v literaturi imenujejo tudi (posplošeni) Ilyušinov ali (posplošeni) Ilyušin-Šapirova, npr. [Simo, 1992], in ki se včasih uporablja pri elastoplastični analizi ploskovnih konstrukcij. Z njegovo uporabo predpostavimo, da je prerez plošče lahko samo v dveh stanjih; ali je popolnoma elastičen ali pa popolnoma plastičen. Tako po eni strani izgubimo informacijo o razporeditvi plastičnih deformacij po debelini plošče, npr. [Brank, 1997], po drugi strani pa pridobimo na robustnosti in hitrosti izračuna. Slednje se nam zdi pri analizi jeklenih plošč, ki se uporabljajo v gradbeništvu, pomembnejše od prvega. Za materialne modele, ki v Ilyušinov kriterij plastičnega tečenja vnesejo še nekaj informacij o razporeditvi plastičnih deformacij po debelini plošče, glej npr. [Auricchio, 1994] in [Voyiadjis, 2006].

Članek je organiziran na naslednji način: V drugem poglavju predstavimo osnovne enačbe teorije plošč, elastoplastični konstitutivni model z izotropnim utrjevanjem za jeklene plošče ter (na kratko) algoritme, ki jih uporabimo, ko takšen model implementiramo v program za numerično analizo po metodi končnih elementov. V tretjem poglavju nato predstavimo več numeričnih primerov, članek pa končamo s sklepom.

2 ELASTOPLASTIČNA ANALIZA JEKLENIH PLOŠČ

2.1 Osnovne enačbe teorije plošč

Po Reissner-Mindlinovi teoriji geometrijo plošče idealiziramo z njeno središčno ploskvijo. V naši obravnavi postavimo središčno ploskev plošče v ravnino x_1x_2 kartezičevega koordinatnega sistema, kjer zavzema območje A . Študiramo statično deformiranje ploskve v (kvazi)časovnem intervalu $[0, T]$, v katerem na ploščo nanese površinsko obtežbo p . Za količine, ki jih uvedemo v nadaljevanju in jih pišemo brez argumentov, velja, da so iz vrednotene v točki $\mathbf{x} \in A$ in pri času $t \in [0, T]$.

Predpostavimo, da so deformacije znane, če poznamo pomik w v smeri x_3 in zasuka normale na ploskev okoli osi x_1 in x_2 , ki ju označimo s θ_1 in θ_2 (slika 1). Vektor ukrivljenosti središčne ploskve $\boldsymbol{\kappa}$ in vektor prečnih strižnih deformacij $\boldsymbol{\gamma}$ pišemo kot

$$\boldsymbol{\kappa} = \left[-\frac{\partial \theta_2}{\partial x_1}, \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2}, \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} \right]^T = [\kappa_{11}, \kappa_{22}, 2\kappa_{12}]^T \quad (1)$$

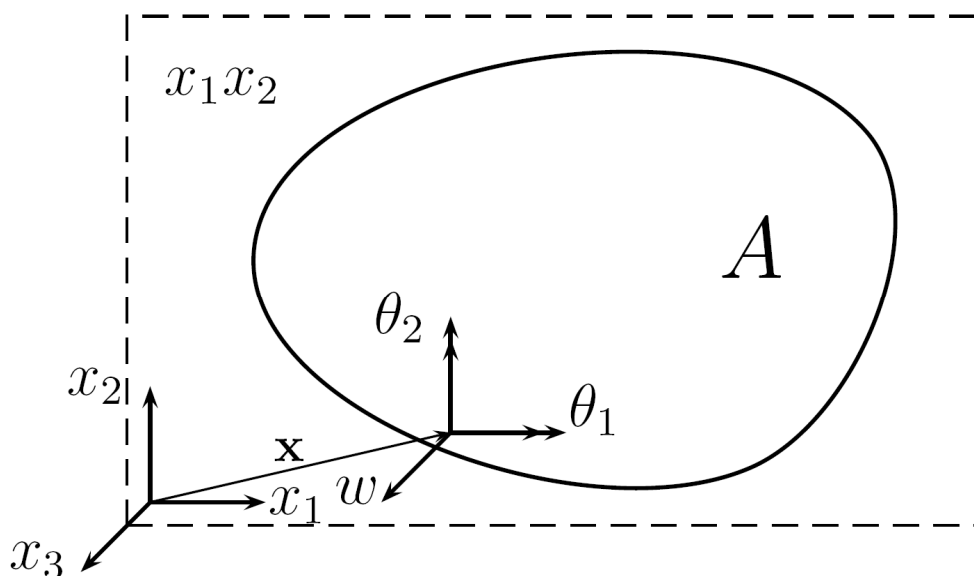
$$\boldsymbol{\gamma} = \left[\frac{\partial w}{\partial x_1} + \theta_2, \frac{\partial w}{\partial x_2} - \theta_1 \right]^T = [\gamma_1, \gamma_2]^T \quad (2)$$

Komponente vektorjev $\boldsymbol{\kappa}$ in $\boldsymbol{\gamma}$ bomo v nadaljevanju imenovali deformacije. Rezultante napetosti, ki so preko elastoplastičnih enačb snovi povezane z deformacijami (1) in (2), so upogibni momenti $m_{\alpha\beta}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}^p, \boldsymbol{\varepsilon}^p)$ in prečni strižni sili $q_\alpha(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}^p, \boldsymbol{\varepsilon}^p)$ na dolžinsko enoto ($\alpha, \beta = 1, 2$). Odvisni so od celotnih deformacij $\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\gamma}$, plastičnih deformacij $\boldsymbol{\kappa}^p, \boldsymbol{\gamma}^p$ in notranje spremenljivke $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ povezane z izotropnim utrjevanjem, ki se jim bomo posvetili kasneje pri obravnavi elastoplastičnih enačb.

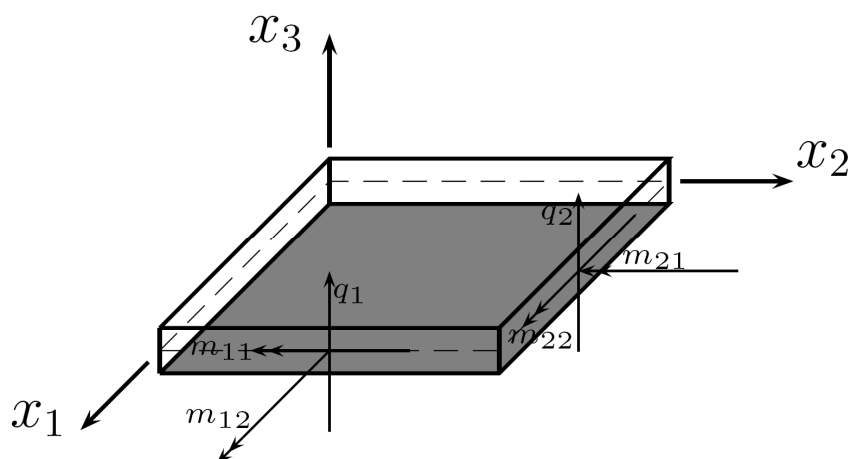
Momente in prečne sile zberemo v vektor upogibnih momentov \mathbf{m} in vektor prečnih sil \mathbf{q}

$$\mathbf{m} = [m_{11}, m_{22}, m_{12}]^T, \quad \mathbf{q} = [q_1, q_2]^T \quad (3)$$

Njihove pozitivne smeri so prikazane na sliki 2; pozitivni momenti $m_{\alpha\alpha}$ npr. povzročajo natezne napetosti na spodnjem delu plošče, t.j. pri $0 \geq x_3 \geq -h/2$, kjer je h debelina plošče.



Slika 1: Uporabljeni koordinatni sistem. Pozitivne smeri pomika središčne ploskve in obeh zasukov normale na središčno ploskev.



Slika 2: Pozitivne smeri notranjih sil v plošči.

Poleg kinematičnih enačb (1) in (2) in elastoplastičnih enačb snovi, ki so predstavljene v naslednjem poglavju, določajo teorijo plošč še ravnotežne enačbe. Predstavimo jih v šibki obliki, ki je osnova za numerično reševanje upogiba plošč po metodi končnih elementov. Šibko obliko (princip virtualnega dela) pri času $t \in [0, T]$ lahko napišemo kot

$$\int_A [m_{11} \hat{\kappa}_{11} + m_{22} \hat{\kappa}_{22} + m_{12} (2\hat{\kappa}_{12}) + q_1 \hat{\gamma}_1 + q_2 \hat{\gamma}_2] dA = \int_A p \hat{w} dA, \quad (4)$$

kjer so

$$\hat{\kappa}_{11} = \frac{-\partial \hat{\theta}_2}{\partial x_1}, \quad \hat{\kappa}_{22} = \frac{\partial \hat{\theta}_1}{\partial x_2}, \quad 2\hat{\kappa}_{12} = \frac{\partial \hat{\theta}_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \hat{\theta}_2}{\partial x_2}, \quad \gamma_1 = \frac{\partial \hat{w}}{\partial x_1} + \theta_2, \quad \gamma_2 = \frac{\partial \hat{w}}{\partial x_2} - \theta_1 \quad (5)$$

virtualne ukrivljenosti središčne ploskve in virtualne prečne strižne deformacije, izražene z odvodi poljubnega virtualnega pomika \hat{w} in odvodi poljubnih virtualnih zasukov $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$. K funkcionalu (4) spadajo še elastoplastične enačbe snovi, ki so zbrane v preglednici 1 in ki določajo rezultante napetosti pri času t .

Ko funkcional (4) aproksimiramo z metodo končnih elementov, se izkaže, da je potrebno definirati rezultante napetosti le v numeričnih integracijskih točkah vsakega končnega elementa, glej npr. [Ibrahimbegović, 2006] ali [Simo, 1998]. Zaradi tega lahko reševanje funkcionala (4) razdelimo na

dve zaporedni fazi: (i) na (lokalno) določevanje elastoplastičnih resultant napetosti v integracijskih točkah in (ii) na (globalno) reševanje nelinearnega sistema enačb, kjer so neznanke pomiki in zasuki v vozliščih mreže končnih elementov s katero diskretiziramo A . Lokalno določevanje elastoplastičnih resultant napetosti (ki sledijo iz teorije, predstavljene v naslednjem poglavju) je prikazano v poglavju 2.3; globalnega reševanja nelinearnega sistema enačb pa se lotimo z iteracijsko Newtonovo metodo, ki je predstavljena v knjigah o nelinearni metodi končnih elementov, npr. [Kojić, 2005], [Ibrahimbegović, 2006].

2.2 Elastoplastične enačbe snovi z izotropnim utrjevanjem

Splošno je sprejeto (glej npr. [Lubliner, 1990], [Kojić, 2005], [Simo, 1998], [Ibrahimbegović, 2006]), da so pri elastoplastičnih materialih, ko imamo opravka z malimi deformacijami, celotne deformacije vsota (povratnih) elastičnih deformacij in (nepovratnih) plastičnih deformacij in da so napetosti v materialu odvisne le od elastičnega dela deformacij. Ko to upoštevamo pri elastoplastičnih ploščah, lahko zapišemo

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p, \quad \mathbf{e} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{e}^e = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\kappa}^e \\ \boldsymbol{\gamma}^e \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{e}^p = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\kappa}^p \\ \boldsymbol{\gamma}^p \end{Bmatrix} \quad (6)$$

in

$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{e}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\kappa}^e \\ \boldsymbol{\gamma}^e \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

kjer je

$$\mathbf{C}_S = c \frac{Eh}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_B = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

V (8) je E elastični modul, ν Poissonov količnik in c strižni korekcijski faktor, ki je običajno nastavljen na $5/6$. Iz (6) in (7) vidimo, da nam za določitev resultant napetosti v elastoplastični plošči informacija o celotni deformaciji \mathbf{e} ne zadošča več (v nasprotju z elastično ploščo).

Potrebujemo še dodatne enačbe, s katerimi opišemo nepovratno plastično deformacijo.

Najprej uvedemo kriterij plastičnega tečenja, s katerim preverimo, če je odziv materiala pri nekem

nivoju obtežbe (pri nekem času $t \in [0, T]$) elastičen ali plastičen. Pri modeliranju kovin se pogosto uporablja von Misesov kriterij plastičnega tečenja, ki se je izkazal kot odličen približek eksperimentalnim preizkusom (glej npr. [Kojić, 2005], 3. poglavje). Za 3d napetostno stanje ga lahko napišemo v naslednji obliki

$$\frac{3}{2} dev(\boldsymbol{\sigma}) : dev(\boldsymbol{\sigma}) - (\sigma_y + q_{izo})^2 \leq 0, \quad (9)$$

kjer je $\boldsymbol{\sigma}$ simetrična matrika napetosti s komponentami napetosti glede na koordinate x_1, x_2, x_3 , $dev(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} - 1/3 sled(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}_3$ je preoblikovalni del matrike napetosti (imenovan tudi deviator napetosti), $sled(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ je vsota diagonalnih členov $\boldsymbol{\sigma}$, \mathbf{I}_3 je enotska matrika reda 3, znak »:« stoji za matrični skalarni produkt, σ_y je začetna meja plastičnega tečenja pri enoosnem preizkusu, q_{izo} pa je napetosti podobna količina, povezana z izotropnim utrjevanjem. Kriterij tečenja (9) sledi iz primerjave deviatorja napetosti pri 3d napetostnem stanju z deviatorjem napetosti pri enoosnem preizkusu. Podan je v odvisnosti od vseh šestih neodvisnih napetosti simetrične matrike $\boldsymbol{\sigma}$. Kriterij (9) pravi, da so napetosti v snovi lahko manjše ali enake določeni vrednosti.

Za model plošč, ki smo ga na kratko predstavili v prejšnjem poglavju, velja, da se napetost v smeri debeline plošče zanemari ($\sigma_{33} = 0$); to je že upoštevano v enačbah (7) in (8). Zato tudi von Misesov kriterij (9), ki velja za 3d napetostno stanje, preuredimo v skladu s teorijo plošč. Najprej ga napišemo za primer ravninskega napetostnega stanja ($\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$). Če nenične napetosti ravninskega napetostnega stanja združimo v tričlenski vektor $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, ima von Misesov kriterij za ravninsko napetostno stanje naslednjo obliko, npr. [Brank, 1997]

$$\frac{1}{\sigma_y^2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{P} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \left(1 + \frac{q_{izo}}{\sigma_y}\right)^2 \leq 0, \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}]^T, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Nadalje napišemo kriterij plastičnega tečenja (9) za primer čistega prečnega striga ($\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{33} = 0$). Če nenični prečni strižni napetosti združimo v dvočlenski vektor $\boldsymbol{\tau}$,

lahko napišemo von Misesov kriterij za čisti prečni strig kot, glej npr. [Brank, 1997]

$$\frac{1}{\sigma_y^2} \boldsymbol{\tau}^T (3\mathbf{I}_2) \boldsymbol{\tau} - \left(1 + \frac{q_{izo}}{\sigma_y}\right)^2 \leq 0, \quad \boldsymbol{\tau} = [\sigma_{13}, \sigma_{23}]^T, \quad \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Nato se odločimo, da razmerja med napetostmi $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}/\sigma_y$ in $\boldsymbol{\tau}/\sigma_y$ v (10) in (11) nadomestimo z razmerji med momenti in prečnimi silami

$$\frac{-\int_{-h/2}^{h/2} \tilde{\boldsymbol{\sigma}} x_3 dx_3}{\sigma_y h^2 / 4} = \frac{\mathbf{m}}{m_0}, \quad \frac{\int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\tau} dx_3}{\sigma_y h / \sqrt{3}} = \frac{\mathbf{q}}{q_0}, \quad (12)$$

kjer je m_0 polnoplastični moment, q_0 pa polnoplastična prečna sila prereza plošče. Tako dobljena izraza združimo, s čimer dobimo kriterij plastičnega tečenja za plošče, izražen z rezultantami napetosti

$$f(\mathbf{s}, \mathbf{e}^p, q_{izo}) = \mathbf{s}^T \mathbf{A} \mathbf{s} - \left(1 + \frac{q_{izo}}{\sigma_y}\right)^2 \leq 0, \quad (13)$$

kjer je $\mathbf{s} = [\mathbf{m}^T, \mathbf{q}^T]^T$, matrika \mathbf{A} pa ima obliko

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_0^2} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{1}{q_0^2} \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Funkcijo tečenja (13) (če se utrjevanja ne upošteva) v literaturi imenujejo tudi Ilyušinova ali Ilyušin-Šapirova funkcija tečenja, npr. [Simo, 1992], [Lubliner, 1990].

Izrazimo zdaj še q_{izo} , ki je napetosti podobna količina, povezana z izotropnim utrjevanjem, z deformacijsko količino. Enoosni eksperimenti kažejo, da je napetost na meji tečenja pri nekem nivoju obtežbe odvisna od zgodovine obremenjevanja. Najpreprostejši način za modeliranje tega fenomena je t.i. izotropno utrjevanje, ko začetni meji plastičnega tečenja pri enoosnem preizkusu σ_y prištejemo vrednost q_{izo} pri obravnavanem času t in tako dobimo novo mejo plastičnega tečenja $\sigma_y + q_{izo}$. Pri metalih se pogosto predpostavi q_{izo} kot linearno funkcijo norme plastičnih deformacij ε^p

$$q_{izo} = H\varepsilon^p, \quad (15)$$

kjer je H modul linearnega izotropnega utrjevanja (imenovan tudi plastični modul). Če v (13) upoštevamo (15), dobimo obliko funkcije tečenja (13), ki jo uporabimo v nadaljevanju

$$f(\mathbf{s}, \mathbf{e}^p, \varepsilon^p) = \mathbf{s}^T \mathbf{A} \mathbf{s} - \left(1 + \frac{H\varepsilon^p}{\sigma_y} \right)^2 \leq 0. \quad (16)$$

Omenimo naj, da je izotropno utrjevanje primerno za analizo primerov, pri katerih se smer obtežbe med obremenjevanjem ne spreminja. Če pa se smer obtežbe ciklično spreminja, pride do t.i. Bauschingerjevega efekta, ki ga lahko opišemo s kinematičnim utrjevanjem. Omenimo naj še, da z izbrano funkcijo tečenja ne zajamemo vpliva postopnega razvoja plastičnih deformacij po debelini plošče (kot npr. v [Brank, 1997]), saj smo z uvedbo (12) predpostavili, da do plastifikacije celotnega prereza pride hipoma.

Po uvedbi kriterija plastičnega tečenja predstavimo še evolucijski enačbi za plastične deformacije \mathbf{e}^p in ε^p ter pogoje obremenjevanja in razbremenjevanja. Evolucijska enačba za plastične deformacije se pri jeklu zelo pogosto predpostavi kot

$$\dot{\mathbf{e}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} = \dot{\gamma} 2 \mathbf{A} \mathbf{s}, \quad \dot{\mathbf{e}}^p = \left[\dot{\kappa}_{11}^p, \dot{\kappa}_{22}^p, \dot{\kappa}_{12}^p, \dot{\gamma}_1^p, \dot{\gamma}_2^p \right]^T. \quad (17)$$

kjer je $\dot{\mathbf{e}}^p = \partial \mathbf{e}^p / \partial t$, $\dot{\gamma}$ pa je t.i. plastični množitelj ali konsistentni prameter. Pogoji obremenjevanja in razbremenjevanja, ki jih poznamo pod imenom Kuhn-Tuckerjevi pogoji, so naslednji

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad f \leq 0, \quad \dot{\gamma} f = 0, \quad (18)$$

Poleg pogojev (18), $\dot{\gamma} \geq 0$ zadošča tudi pogoju konsistence $\dot{\gamma} \dot{f} = 0$.

Evolucijsko enačbo za normo plastičnih deformacij ε^p določimo iz pogoja, da je akumulirano plastično delo enako akumuliranemu plastičnemu delu pri enoosnem preizkusu

$$W^p = \int_0^t \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{e}}^p d\tau \equiv \int_0^t \sigma \dot{\varepsilon}^p d\tau \Rightarrow \dot{\varepsilon}^p = \frac{1}{\sigma} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{e}}^p = \frac{\mathbf{s}^T \dot{\mathbf{e}}^p}{\sigma_y \sqrt{\mathbf{s}^T \mathbf{A} \mathbf{s}}} = 2 \dot{\gamma} \frac{\sqrt{\mathbf{s}^T \mathbf{A} \mathbf{s}}}{\sigma_y}. \quad (19)$$

kjer je $\sigma = \sigma_y + q_{izo}$ napetost pri enoosnem preizkusu.

Na koncu poglavja podajamo obravnavane elastooplastične enačbe snovi v preglednici 1.

i Aditivni razcep deformacij

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p$$

ii Izračun notranjih sil

$$\mathbf{s} = \mathbf{C}\mathbf{e}^e, \quad q_{izo} = H\varepsilon^p$$

iii Funkcija tečenja

$$f(\mathbf{s}, q_{izo}) \leq 0$$

iv Pravili tečenja in utrjevanja. Pogoji obremenjevanja in razbremenjevanja. Pogoj konsistence

$$\dot{\mathbf{e}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}}, \quad \dot{\varepsilon}^p = \frac{1}{\sigma} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{e}}^p, \quad \dot{\gamma} \geq 0, \quad f \leq 0, \quad \dot{\gamma} f = 0, \quad \dot{\gamma} \dot{f} = 0$$

Preglednica 1: Elastooplastične enačbe snovi z linearnim izotropnim utrjevanjem za plošče

2.3 Numerična integracija enačb snovi

V razdelku 2.2 smo predstavili osnove elastooplastičnega modela snovi, sedaj pa si pogledjmo, kako numerično izračunamo rezultante napetosti pri $t \in [0, T]$. V ta namen razdelimo celoten interval $[0, T]$ na podintervale $[0, T] = \bigcup_{n=0}^{\text{šitint}} [t_n, t_{n+1}]$ in iščemo rešitev v diskretnih časovnih točkah.

V tipičnem podintervalu rešujemo naslednji problem: Ob znanih

$$\mathbf{e}^p(t_n) = \mathbf{e}_n^p, \quad \varepsilon^p(t_n) = \varepsilon_n^p, \quad \mathbf{e}(t_{n+1}) = \mathbf{e}_{n+1} \quad (20)$$

iščemo takšne vrednosti plastičnih deformacij in notranje spremenljivke za utrjevanje v t_{n+1}

$$\mathbf{e}^p(t_{n+1}) = \mathbf{e}_{n+1}^p, \quad \varepsilon^p(t_{n+1}) = \varepsilon_{n+1}^p. \quad (21)$$

ter takšne notranje sile $\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{C}(\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_{n+1}^p)$ in $q_{izo, n+1} = H\varepsilon_{n+1}^p$, da bodo pri t_{n+1} zadoščene enačbe obremenjevanja in razbremenjevanja (18).

Opisani problem rešujemo v dveh delih, kar je standardni postopek pri numerični obravnavi elastooplastičnih enačb za majhne deformacije, npr. [Simo, 1998]. Najprej testiramo, če je časovni inkrement $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ elastičen, torej če se je spremenil le elastični del deformacij. Testno

vrednost notranjih sil izračunamo z notranjimi spremenljivkami iz predhodnega koraka

$$\mathbf{s}_{n+1}^{test} = \mathbf{C}(\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_n^p). \quad (22)$$

V kolikor velja $f_{n+1}^{test} = f(\mathbf{s}_{n+1}^{test}, \mathbf{e}_n^p, \varepsilon_n^p) < 0$, so testne vrednosti kar enake iskanim

$$\mathbf{e}_{n+1}^p = \mathbf{e}_n^p, \quad \varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p, \quad \mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_{n+1}^{test}. \quad (23)$$

Iz (18) sledi, da v tem primeru, ko je $f_{n+1}^{test} < 0$, velja $\dot{\gamma}_{n+1} = 0$.

Če pa je funkcija tečenja, iz vrednotena s testnimi vrednostmi, $f_{n+1}^{test} = f(\mathbf{s}_{n+1}^{test}, \mathbf{e}_n^p, \varepsilon_n^p) > 0$, je časovni inkrement plastičen, zato je potrebno določiti nove vrednosti notranjih spremenljivk in rezultat napetosti v t_{n+1} . V ta namen integriramo evolutijsko enačbo (17) in (19) ter pri tem uporabimo povratno implicitno Eulerjevo integracijsko shemo. Dobimo

$$\mathbf{e}_{n+1}^p = \mathbf{e}_n^p + \Delta t \dot{\gamma}_{n+1} (\partial f / \partial \mathbf{s})_{n+1} = \mathbf{e}_n^p + \gamma_{n+1} 2\mathbf{A}\mathbf{s}_{n+1} \equiv \mathbf{e}_{n+1}^p(\mathbf{s}_{n+1}, \gamma_{n+1}) \quad (24)$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + 2\Delta t \dot{\gamma}_{n+1} \frac{\sqrt{\mathbf{s}_{n+1}^T \mathbf{A} \mathbf{s}_{n+1}}}{\sigma_y} = \varepsilon_n^p + 2\gamma_{n+1} \frac{\sqrt{\mathbf{s}_{n+1}^T \mathbf{A} \mathbf{s}_{n+1}}}{\sigma_y} \equiv \varepsilon_{n+1}^p(\mathbf{s}_{n+1}, \gamma_{n+1}) \quad (25)$$

kjer smo označili $\gamma_{n+1} = \Delta t \dot{\gamma}_{n+1}$. Zdaj se potrudimo izraziti še \mathbf{s}_{n+1} kot funkcijo γ_{n+1} . Z uporabo (22)

najprej napišemo notranje sile pri t_{n+1} kot

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{C}(\mathbf{e}_{n+1} - \mathbf{e}_{n+1}^p) = \mathbf{s}_{n+1}^{test} - \mathbf{C}(\mathbf{e}_{n+1}^p - \mathbf{e}_n^p). \quad (26)$$

Če nesemo (24) v (26), dobimo izraz, ki povezuje iskane vrednosti rezultat napetosti z njihovimi testnimi vrednostmi

$$\mathbf{s}_{n+1} = [\mathbf{I}_5 + 2\gamma_{n+1} \mathbf{C}\mathbf{A}]^{-1} \mathbf{s}_{n+1}^{test}. \quad (27)$$

Ker potrebujemo zaključeno obliko enačbe (27), eksplicitno določimo inverz matrike v oglatih oklepajih. To naredimo v prostoru lastnih vektorjev, kjer je matrika v oglatih oklepajih diagonalna.

Enačbo (27) tako lahko zapišemo tudi kot, glej npr. [Ibrahimbegović, 1993], [Simo, 1998]

$$\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{Q}[\mathbf{I}_5 + 2\gamma_{n+1} \mathbf{\Lambda}]^{-1} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{s}_{n+1}^{test} \equiv \mathbf{s}_{n+1}(\gamma_{n+1}), \quad (28)$$

kjer je

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}_C \mathbf{\Lambda}_A, \quad (29)$$

$$\mathbf{\Lambda}_A = \text{diag} \left(\frac{1}{2m_0^2}, \frac{3}{2m_0^2}, \frac{3}{2m_0^2}, \frac{1}{q_0^2}, \frac{1}{q_0^2} \right), \quad (30)$$

$$\mathbf{\Lambda}_A = \text{diag} \left(\frac{h^3 E}{12(1-\nu)}, \frac{h^3 E}{12(1+\nu)}, \frac{h^3 E}{24(1+\nu)}, \frac{hEc}{2(1+\nu)}, \frac{hEc}{2(1+\nu)} \right), \quad (31)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Z (29) do (32) torej pridemo do takšnega izraza za rezultante napetosti v t_{n+1} , glej enačbo (28), da je v njem edina neznanka γ_{n+1} . Če (28) nesemo v (24) in (25), dobimo tudi izraza za plastične deformacije in normo plastičnih deformacij pri t_{n+1} v odvisnosti od γ_{n+1} .

Vrednost γ_{n+1} v plastičnem časovnem inkrementu izračunamo iz pogojev (18). V plastičnem časovnem inkrementu je $f_{n+1} = 0$ in $\dot{\gamma}_{n+1} > 0$. Če vstavimo (24), (25) in (28) v funkcijo tečenja (16), pridemo do nelinearne funkcije γ_{n+1}

$$f(\mathbf{s}_{n+1}(\gamma_{n+1}), \mathbf{e}_{n+1}^p(\gamma_{n+1}), \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p(\gamma_{n+1})) = f(\gamma_{n+1}) = 0. \quad (33)$$

Celoten problem določitve notranjih spremenljivk v plastičnem inkrementu se tako prevede na iskanje ničle nelinearne skalarne funkcije. Z rešitvijo enačbe (33) dobimo vrednost plastičnega množitelja $\bar{\gamma}_{n+1}$ v plastičnem inkrementu, s pomočjo katerega iz enačb (24), (25) in (28) dobimo vrednosti notranjih spremenljivk in rezultat napetosti v t_{n+1} .

2.4 Algoritem za analizo plošč iz elastoplastičnega materiala

Kot že omenjeno v poglavju 2.1, nam metoda končnih elementov omogoča, da reševanje diskretiziranega funkcionala (4) razdelimo na dve zaporedni fazi: (i) na (lokalno) določevanje elastoplastičnih rezultat napetosti v integracijskih točkah in (ii) na (globalno) reševanje nelinearnega sistema enačb, kjer so neznanke pomiki in zasuki v vozliščih mreže končnih elementov. Ravnotežne enačbe so namreč globalne narave in se nanašajo na vse končne elemente in na vsa vozlišča, enačbe, s katerimi zajamemo evolucijo notranjih spremenljivk, pa so lokalne narave, saj se nanašajo na integracijske točke. Faza (i) je pojasnjena v poglavju 2.3, faza (ii) pa

rešujemo z Newtonovo metodo, katere bistveni del je linearizacija diskretiziranega funkcionala (4), ki vsebuje tudi tangentni elastoplastični operator. Zaporedni pristop lahko opišemo po naslednjih točkah:

1. Naj bo (i) števec iteracije Newtonove metode v časovnem koraku $[t_n, t_{n+1}]$ in naj bodo

$\mathbf{u}_{n+1}^{(i)} = [w_{n+1}^{(i)}, \theta_{1n+1}^{(i)}, \theta_{2n+1}^{(i)}]^T$ znani celotni pomiki v iteraciji (i) . Celotna deformacija v tej iteraciji je

$$\mathbf{e}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{e}(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}). \quad (35)$$

2. Lokalni algoritem: V vsaki integracijski točki določimo z algoritmom, ki je pojasnjen v poglavju 2.3., vrednosti notranjih spremenljivk in notranjih sil

$$\mathbf{e}_{n+1}^p = \mathbf{e}^p(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}^p(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}), \quad \mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}(\mathbf{u}_{n+1}^{(i)}). \quad (36)$$

3. Globalni algoritem: Uporabimo rezultante (36) pri novi iteraciji Newtonove metode s katero določimo nov celotni pomik

$$\mathbf{u}_{n+1}^{(i+1)} = [w_{n+1}^{(i+1)}, \theta_{1n+1}^{(i+1)}, \theta_{2n+1}^{(i+1)}]^T. \quad (37)$$

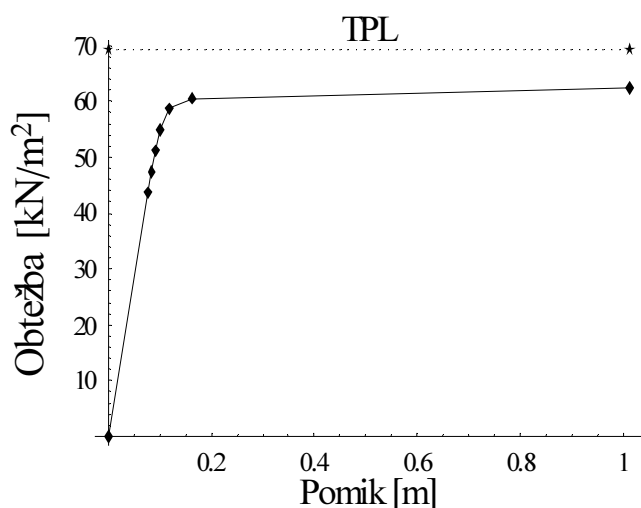
4. Preverimo konvergenco Newtonove metode v časovnem koraku pri iteraciji $(i+1)$. Če ni zadoščena, gremo na korak 1 in postavimo (i) na $(i+1)$. Če je zadoščena, postavimo $n+1$ na n ter nadaljujemo postopek v naslednjem časovnem intervalu.

3 NUMERIČNI PRIMERI

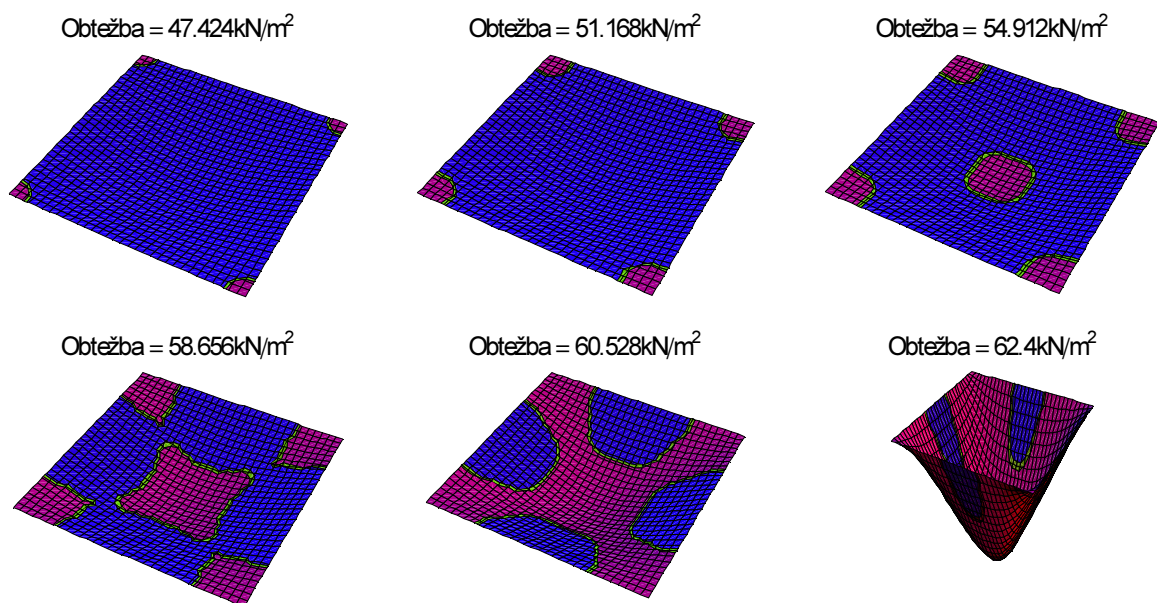
Predstavljeni konstitutivni model in pripadajoči algoritmi so bili povezani s 4-vozliščnim končnim elementom za plošče s kvadratično interpolacijo pomika w in linearno interpolacijo zasukov θ_1 in θ_2 , ki je predstavljen v [Bohinc, 2005] in tamkajšnjih referencah. Za generacijo programske kode za elastoplastični končni element za plošče smo uporabili programsko okolje AceGen, ki ga je razvil Korelc, npr. [Korelc, 2004, 2005]. Prav tako so bili tudi vsi numerični primeri izračunani v okolju AceGen, saj ima vgrajen modul za analizo po metodi končnih elementov (CDriver). V nadaljevanju tega poglavja prikazujemo rezultate nekaj ilustrativnih primerov.

3.1 Prostoležeča kvadratna plošča s ploskovno obtežbo

Najprej obravnavamo prostoležečo kvadratno ploščo, ki je obremenjena z enakomerno ploskovno obtežbo p , ki deluje v negativni smeri koordinate x_3 . Robovi plošče so podprti tako, da so preprečeni pomiki w in zasuki okoli tiste koordinate, ki je pravokotna na rob. Plošča je debeline $h = 0,005\text{ m}$, stranica plošče pa ima dimenzijo $a = 1\text{ m}$. Predpostavimo idealen elastoplastični material z naslednjimi karakteristikami: $E = 2 \cdot 10^8\text{ kN/m}^2$, $\nu = 0,3$, $\sigma_y = 4 \cdot 10^5\text{ kN/m}^2$ ter $H = 0\text{ kN/m}^2$. Celotno ploščo modeliramo z mrežo 32×32 končnih elementov. Rezultati analize so prikazani na slikah 3 in 4. Na sliki 3 je prikazan vertikalni pomik sredine plošče v odvisnosti od obtežbe. Vidi se, da je izračunana mejna nosilnost nižja za 10% od mejne obtežbe določene po teoriji plastičnih linij (TPL), ki jo povzemamo po [Lubliner, 1990]. Širjenje plastificiranega območja pri različnih vrednostih obtežbe je prikazano na sliki 4 hkrati z deformiranimi mrežami končnih elementov. Vidi se, da se najprej plastificirajo vogali, nato sredina plošče, na koncu pa dobimo podobno križno obliko plastičnih linij, kot se predpostavi pri teoriji plastičnih linij, le da linije v našem primeru niso infinitizemalno tanke.



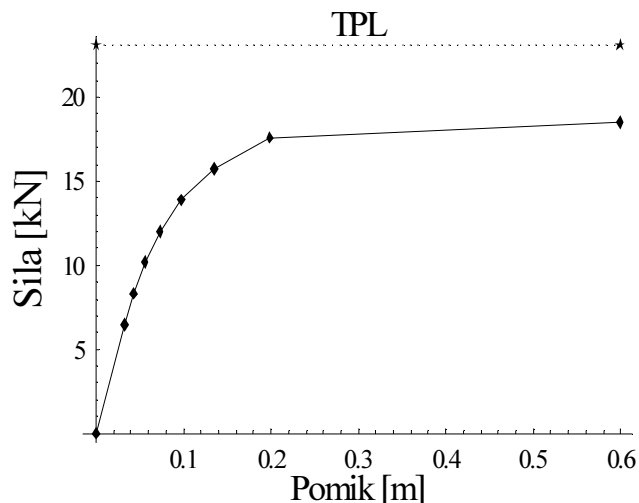
Slika 3: Diagram obtežba - pomik pri prostoležeči kvadratni plošči pod ploskovno obtežbo. Primerjava z mejno nosilnostjo po teoriji plastičnih linij (TPL).



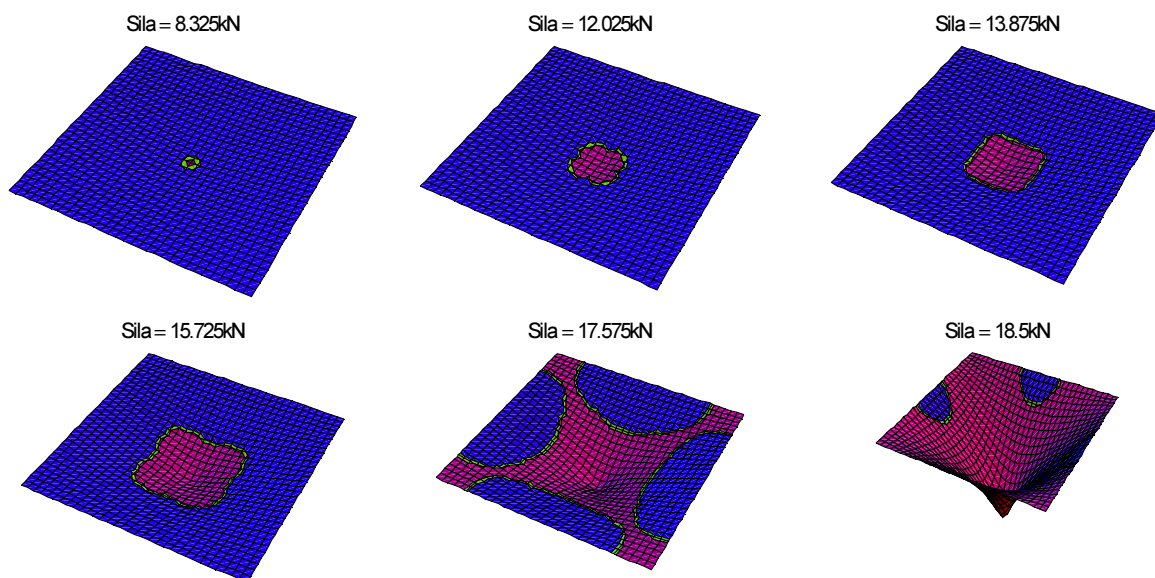
Slika 4: Širjenje plastificiranega območja pri prostoležeči kvadratni plošči pod ploskovno obtežbo. Prikazano je na deformirani plošči.

3.2 Prostoležeča kvadratna plošča s točkovno silo

Drugi primer je podoben prvemu, le da prostoležečo kvadratno ploščo obremenimo s točkovno silo na sredini plošče, ki deluje v negativni smeri koordinate x_3 . Material je enak kot v prvem primeru. Rezultati analize so prikazani na slikah 5 in 6. V tem primeru je numerično določena mejna nosilnost za 20% nižja od mejne obtežbe po metodi plastičnih linij (slika 5), ki jo povzemamo po [Lubliner, 1990]. Še enkrat naj omenimo, da nam da teorija plastičnih linij zgornjo mejo mejne obtežbe. Širjenje plastičnega območja pri različnih vrednostih točkovne sile je prikazano na sliki 6, hkrati z deformiranimi mrežami končnih elementov. Tokrat se plastično območje postopoma širi od sredine plošče proti vogalom. Iz slike 6 se vidi, da pri velikih vrednostih sile postane deformirana oblika plošče podobna piramidi.



Slika 5: Diagram obtežba - pomik pri prostoležeči kvadratni plošči pod točkovo obtežbo.

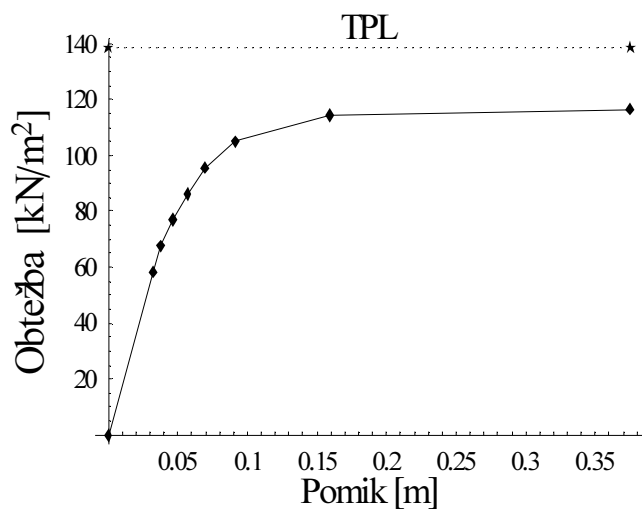


Slika 6: Širjenje plastificiranega območja pri prostoležeči kvadratni plošči pod točkovo obtežbo

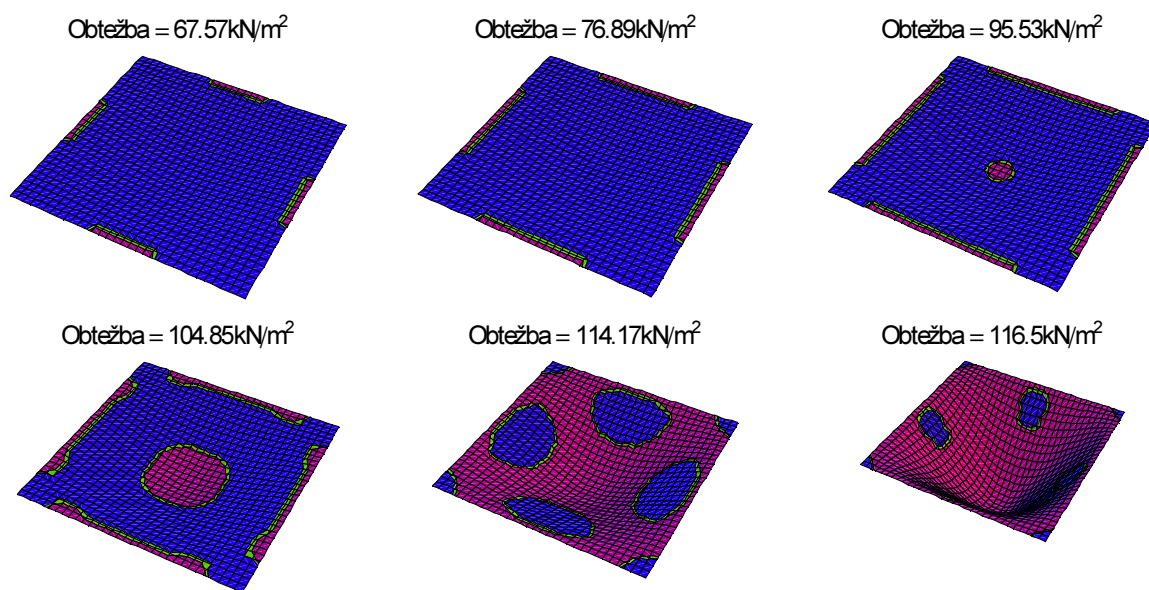
3.3 Vpeta kvadratna plošča s ploskovno obtežbo

V tretjem primeru obravnavamo enako kvadratno ploščo, kot v prvem primeru, le da jo modeliramo kot vpeto (preprečeni so vertikalni pomik in oba zasuka) po vseh štirih robovih. Rezultati so prikazani na slikah 7 in 8. Pomik središča plošče v odvisnosti od obtežbe je prikazan na sliki 7, širjenje plastificiranega območja pa na sliki 8. Vrednost mejne obtežbe po teoriji plastičnih linij je povzeta po [Lubliner, 1990]. Numerična rešitev za 16% odstopa od rešitve po teoriji plastičnih linij. Plastifikacija materiala se začne po sredinah robov in se nadaljuje v sredini plošče. Omenimo naj,

da se vzorec plastifikacije pri visokem nivoju obtežbe (npr. pri $114,17 \text{ kN/m}^2$) razlikuje od tistega pri prostoležeči plošči, ki je predstavljen na sliki 4.



Slika 7: Diagram obtežba - pomik pri vpeti kvadratni plošči pod ploskovno obtežbo



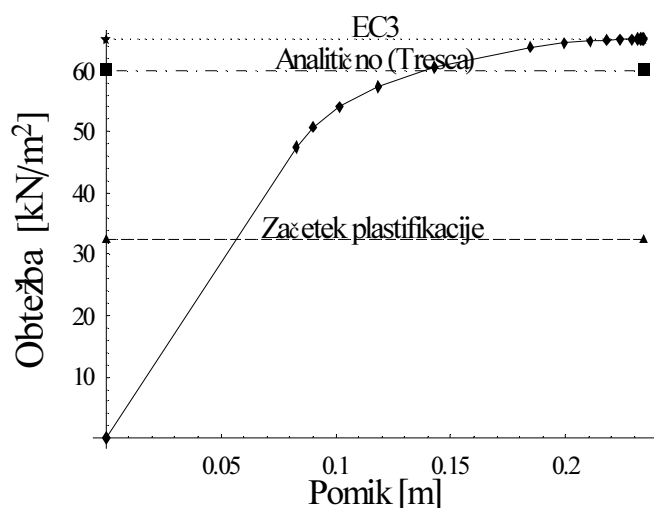
Slika 8: Širjenje plastificiranega območja pri vpeti kvadratni plošči pod ploskovno obtežbo

3.4 Prostoležeča krožna plošča s ploskovno obtežbo

Obravnavamo krožno prostoležečo ploščo debeline $h = 0,005 \text{ m}$, s polmerom $R = 0,5 \text{ m}$, ki je obremenjena z enakomerno ploskovno obtežbo p . Na robu plošče je preprečen vertikalni pomik w .

Materialne karakteristike so enake kot v prvih treh primerih ($E = 2 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0,3$,

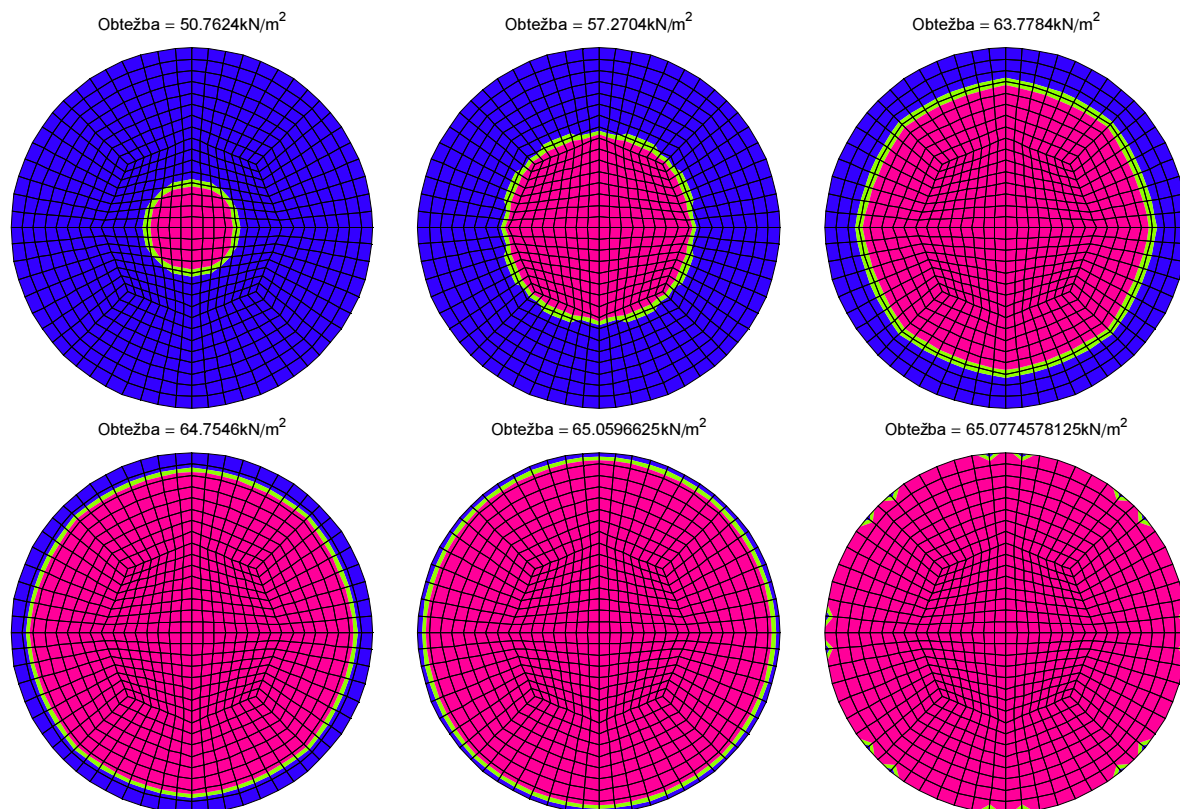
$\sigma_y = 4 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^2$, $H = 0 \text{ kN/m}^2$). Rezultati analize so predstavljeni na slikah 9 in 10 ter preglednici 2. Mreža končnih elementov je razvidna iz slike 10. Na sliki 9 je prikazan vertikalni pomik središča plošče v odvisnosti od obtežbe. Izračunana mejna obtežba je na sliki 9 primerjana s plastično mejno obtežbo, ki jo navaja Evrokod 3 [EC3, 2005] in analitično rešitvijo [Lubliner, 1990, poglavje 5.2.3.] za Trescin pogoj plastičnega tečenja. Na sliki 9 je podana tudi obtežba pri začetku plastifikacije. V preglednici 2 primerjamo izraze za določitev mejene obtežbe, ki jih lahko najdemo v literaturi ([EC3, 2005], [Lubliner, 1990] in [Sawczuk, 1989]), z rezultati naše analize. Dobljeni numerični rezultat za mejno nosilnost se zelo dobro ujema z mejno obtežbo po EC3 in analitično rešitvijo s Von Misesovim kriterijem, nekoliko pa preseže analitično rešitev s Trescinim kriterijem. Omenimo naj, da je Trescin pogoj plastičnega tečenja nekoliko strožji od von Misesovega. Začetka plastifikacije materiala (na zgornjem in spodnjem robu plošče) se z uporabljenim konstitutivnim modelom ne zajame, vendar ga je mogoče na enostaven način izračunati že z elastično analizo plošče. Kot je pričakovati, se plastično območje koncentrično širi od središča plošče proti robu (slika 10).



Slika 9: Diagram obtežba - pomik pri prostoležeči krožni plošči pod ploskovno obtežbo

Mejna obtežba	Kriterij tečenja	Referenca
$p = 1,627 \frac{h^2}{R^2} \sigma_y$	Ilyušin-Šapiro (numerična rešitev)	Naša analiza
$p = 1,625 \frac{h^2}{R^2} \sigma_y$?	[EC3, 2005]
$p = 1,5 \frac{h^2}{R^2} \sigma_y$	Tresca (analitična rešitev)	[Lubliner, 1990]
$p = 1,5 \frac{h^2}{R^2} \sigma_y$	Tresca (analitična rešitev)	[Sawczuk, 1989]
$p = 1,629 \frac{h^2}{R^2} \sigma_y$	Von Mises (analitična rešitev)	[Sawczuk, 1989]
$p = 2 \frac{h^2}{R^2} \sigma_y$	Von Mises (zgornja meja)	[Sawczuk, 1989]
$p = 1,5 \frac{h^2}{R^2} \sigma_y$	Von Mises (spodnja meja)	[Sawczuk, 1989]

Preglednica 2: Primerjav izrazov za mejno obtežbo pri prostoležeči krožni plošči pod ploskovno obtežbo

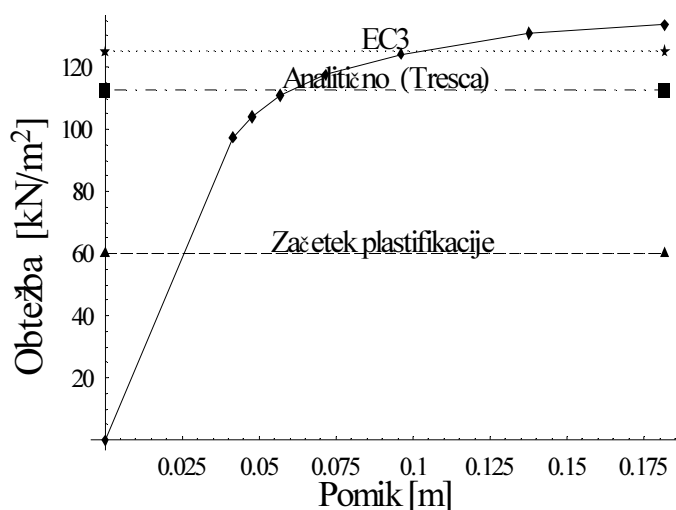


Slika 10: Širjenje plastificiranega območja pri prostoležeči krožni plošči pod ploskovno obtežbo

3.5 Vpeta krožna plošča s ploskovno obtežbo

Obravnavamo enako ploščo, kot v predhodnem primeru, le da spremenimo robne pogoje, in sicer je sedaj plošča pa celem robu vpeta (preprečeni so vertikalni pomik in oba zasuka). Rezultati analize

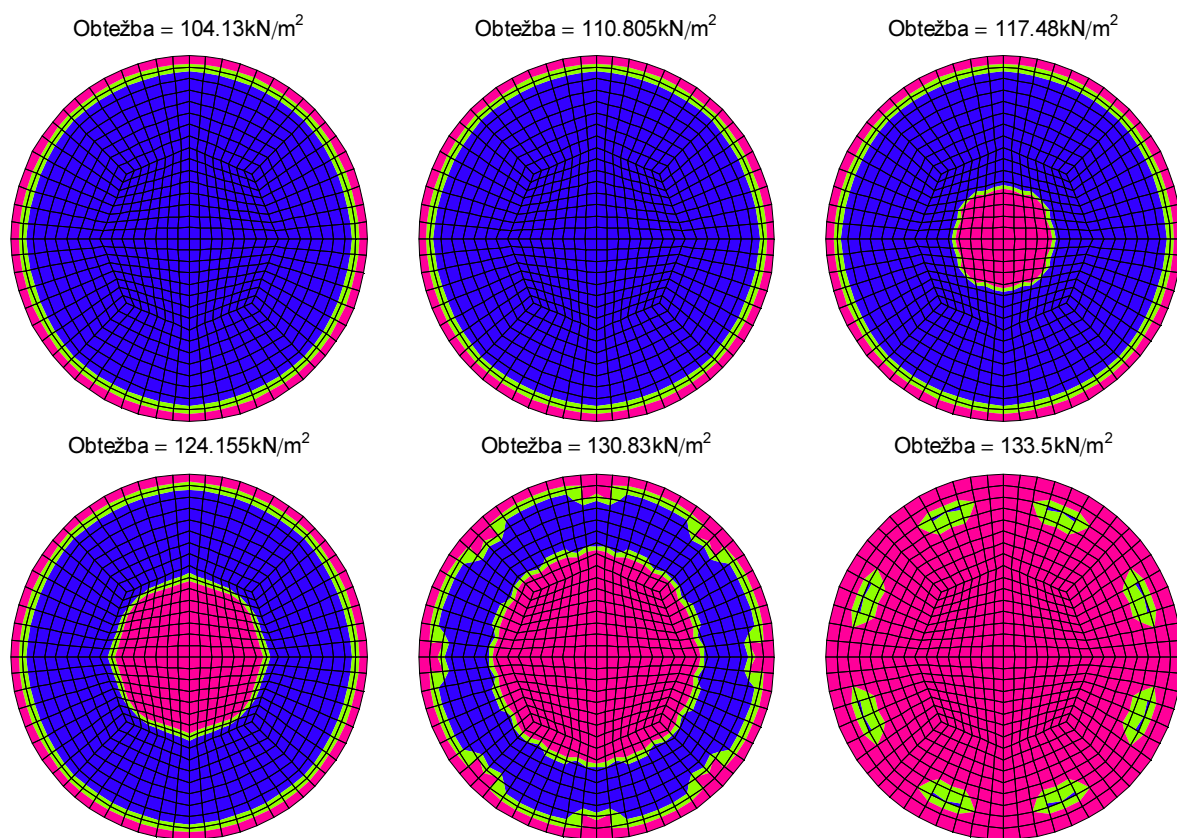
so podani na slikah 11 in 12 ter preglednici 3. Na sliki 11 je prikazan vertikalni pomik središča ploče v odvisnosti od obtežbe, širjenje plastičnosti glede na nivo obtežbe je prikazano na sliki 12. V preglednici 3 primerjamo rezultate naše analize s točnimi izrazi za določitev mejne obtežbe, ki jih povzamemo po [EC3, 2005], [Lubliner, 1990] in [Sawczuk,1989]. Numerična rešitev preseže analitično rešitev za Trescin kriterij, nekoliko pa preseže tudi analitično rešitev za von Misesov kriterij in mejno obtežbo, ki jo podaja EC3. Širjenje plastifikacije materiala plošče je prikazano na sliki 12. Začne se z vzpostavitvijo plastičnega členka na zunanem robu. Ko pa se ta pojavi, je širjenje plastifikacije podobno, kot pri prostoležeči plošči; t.j. od sredine proti zunajemu robu. Rahlo popačenje osne simetrije, ki je vidna pri zadnjih dveh obtežnih nivojih, je posledica tega, da mreža končnih elementov ni popolnoma osnosimetrična.



Slika 11: Diagram obtežba - pomik pri vpeti krožni plošči pod ploskovno obtežbo

Mejna obtežba	Kriterij tečenja	Referenca
$p = 3,338 \frac{h^2}{R^2} \sigma_y$	Ilyušin-Šapirova (numerična rešitev)	Naša analiza
$p = 3,125 \frac{h^2}{R^2} \sigma_y$?	[EC3, 2005]
$p = 2,815 \frac{h^2}{R^2} \sigma_y$	Tresca (točna rešitev)	[Lubliner, 1990]
$p = 2,815 \frac{h^2}{R^2} \sigma_y$	Tresca (točna rešitev)	[Sawczuk, 1989]
$p = 3,138 \frac{h^2}{R^2} \sigma_y$	Von Mises (točna rešitev)	[Sawczuk, 1989]

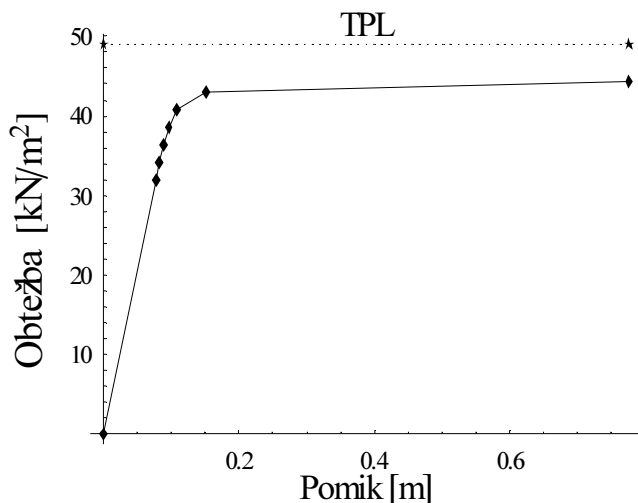
Preglednica 3: Primerjav izrazov za mejno obtežbo pri vpeti krožni plošči pod ploskovno obtežbo



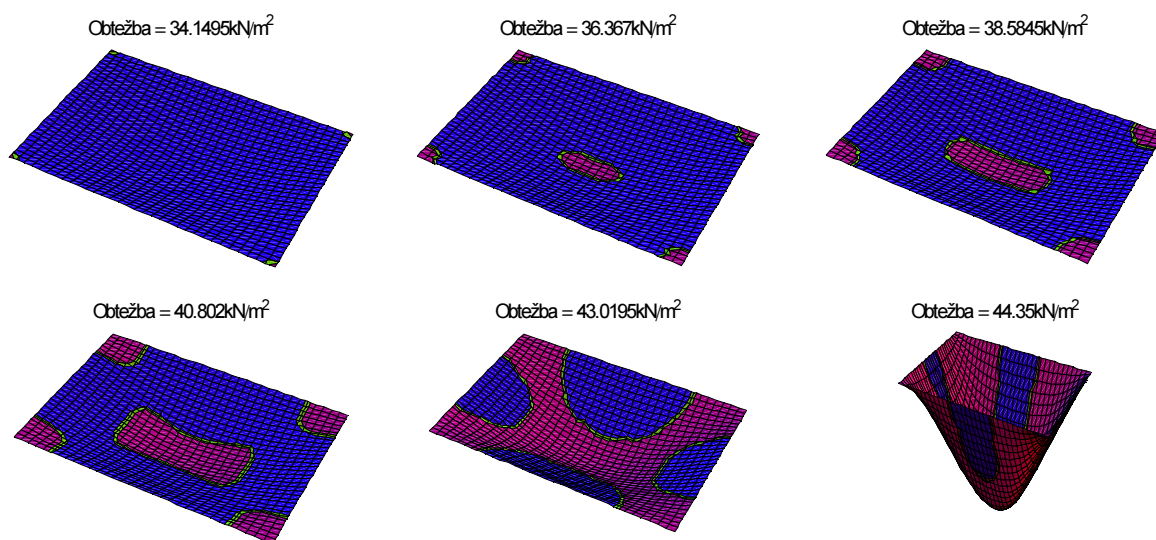
Slika 12: Širjenje plastificiranega območja pri vpeti krožni plošči pod ploskovno obtežbo

3.6 Prostoležeča pravokotna plošča s ploskovno obtežbo

Obravnavamo prostoležečo pravokotno ploščo obremenjeno s ploskovno obtežbo p . Robovi plošče so podprti tako, da so preprečeni pomiki w in zasuki okoli tiste koordinate, ki je pravokotna na rob. Plošča je debeline $h = 0,005 m$, krajša stranica plošče ima dimenzijo $a = 1 m$, daljša pa $b = 1.5 m$. Material je enak kot v prvem primeru. Celotno ploščo modeliramo z mrežo 32×32 končnih elementov. Rezultati analize so prikazani na slikah 13 in 14. Podobno, kot pri kvadratni plošči v prvem primeru, je tudi v tem izračunana mejna nosilnost nižja od mejne obtežbe določene po teoriji plastičnih linij (slika 13), ki jo povzemamo po [Lubliner, 1990], za 9%. Plastifikacija plošče se začne v vogalih, nato se plastificira sredina plošče, na koncu pa ima plastificirano območje obliko črke X raztegnjene v smeri daljše stranice (slika 14).



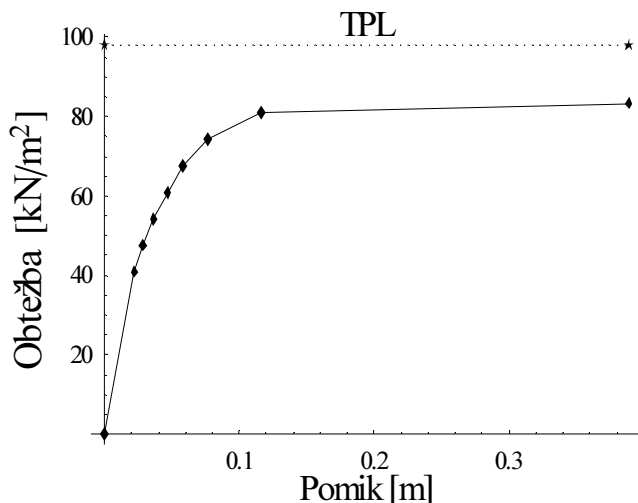
Slika 13: Diagram obtežba - pomik pri prostoležeči pravokotni plošči pod ploskovno obtežbo



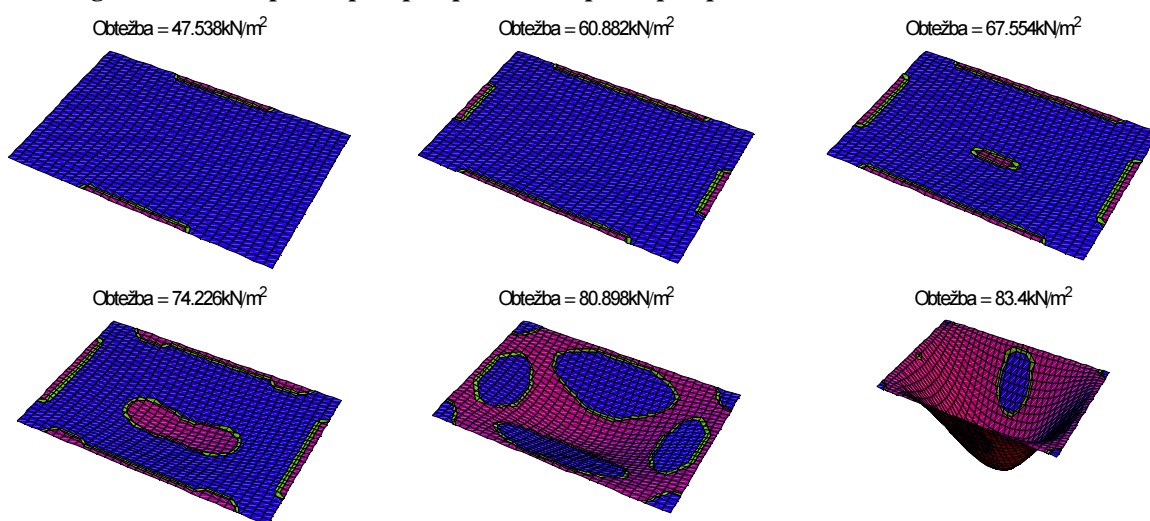
Slika 14: Širjenje plastificiranega območja pri prostoležeči pravokotni plošči pod ploskovno obtežbo

3.7 Vpeta pravokotna plošča s ploskovno obtežbo

V tem primeru obravnavamo enako ploščo kot v predhodnem primeru, le da je vpeta (preprečeni so vertikalni pomik in oba zasuka) po robovih. Rezultati so prikazani na slikah 15 in 16. Tudi v tem primeru je numerično določena mejna nosilnost nižja od mejne obtežbe po metodi plastičnih linij, ki jo povzamemo po [Lubliner, 1990], za 15%. Plastifikacija materiala se najprej pojavi po sredinah daljših robov, nato ob krajših robovih in končno na sredini plošče (slika 16). Končni vzorec plastifikacije je podoben tistemu iz tretjega primera, le da je bolj raztegnjen v smereh daljših robov.



Slika 15: Diagram obtežba - pomik pri vpeti pravokotni plošči pod ploskovno obtežbo



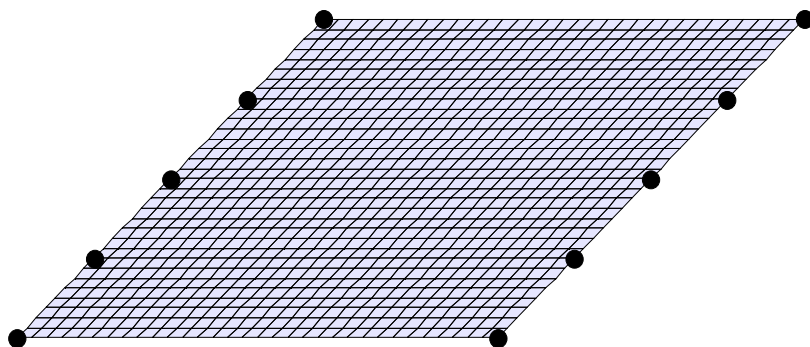
Slika 16: Širjenje plastificiranega območja pri vpeti pravokotni plošči pod ploskovno obtežbo

3.8 Točkovno podprta romboidna plošča s ploskovno obtežbo

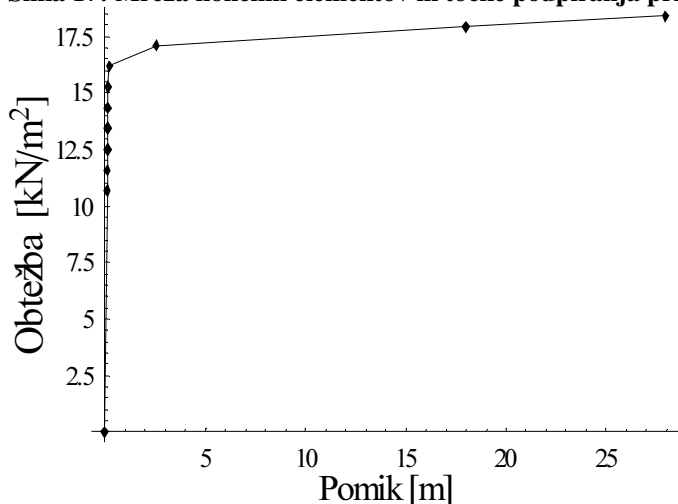
(izotropno utrjevanje)

Obravnavamo romboidno ploščo obremenjeno s ploskovno obtežbo p . Krajša stranica plošče je dimenzije $a = 1,35\text{ m}$, daljša $b = 1,5\text{ m}$, kot med njima pa je $\alpha = 45^\circ$. Na krajših robovih je plošča točkovno podprta tako, da so preprečeni vertikalni pomiki w (slika 17). Materialne karakteristike so enake kot v predhodnih primerih ($E = 2 \cdot 10^8\text{ kN/m}^2$, $\nu = 0,3$, $\sigma_y = 4 \cdot 10^5\text{ kN/m}^2$), le da tu upoštevamo tudi utrjevanje materiala $H = 2 \cdot 10^7\text{ kN/m}^2$. V tem primeru ne moremo govoriti o mejni nosilnosti, ampak o elastoplastični analizi plošče. Mejna nosilnost se namreč pri elastoplastični analizi z malimi deformacijami določi tako, da se utrjevanja ne upošteva, kot smo to

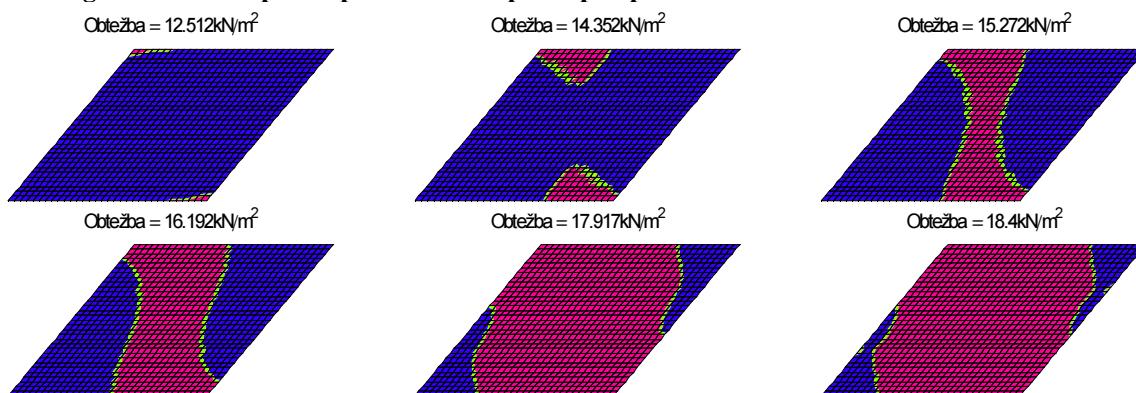
naredili v prvih sedmih numeričnih primerih. Mreža končnih elementov in točke podpiranja so prikazani na sliki 17. Rezultati analize so prikazani na slikah 18 in 19. Iz slike 18 je razvidno, da se po pojavu plastifikacije togost plošče znatno zmanjša, a zaradi utrjevanja materiala nikoli ne pade na nič. Plastificirano območje se najprej pojavi v vogalih krajše diagonale, nato se plastificira celotna diagonala, širjenje pa se nadaljuje v smeri vogalov daljše diagonale (slika 19).



Slika 17: Mreža končnih elementov in točke podpiranja pri romboidni plošči



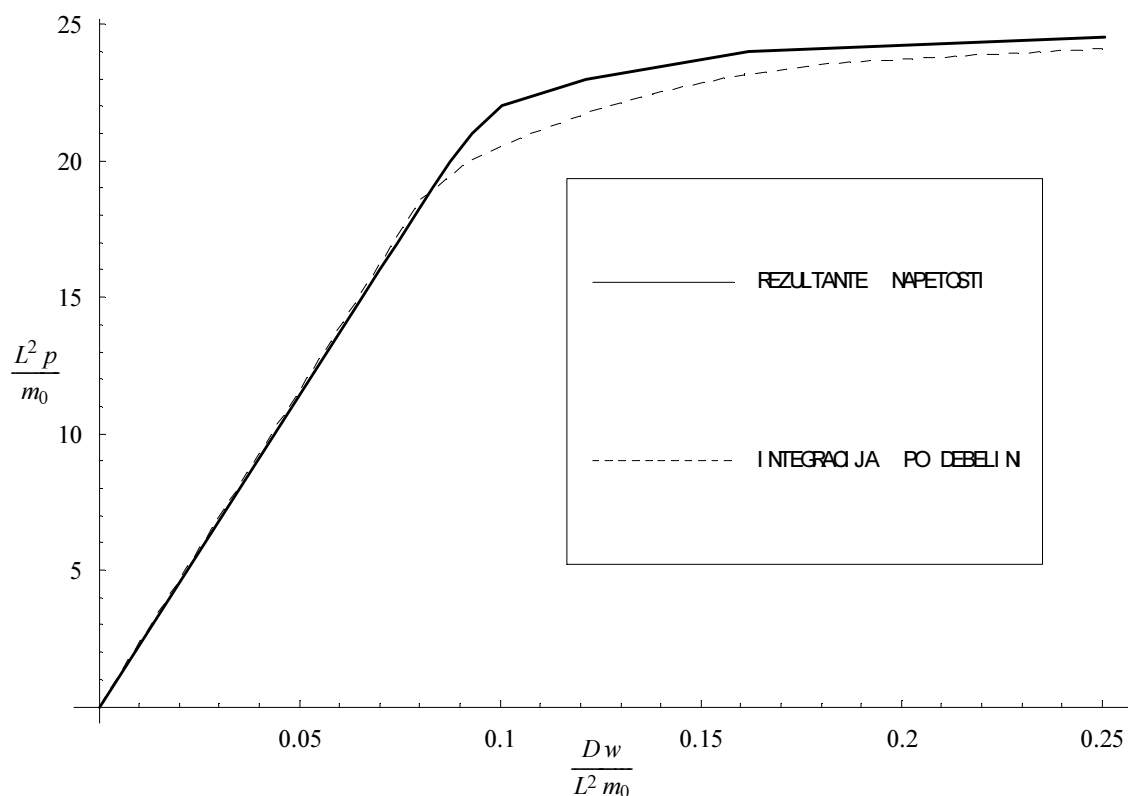
Slika 18: Diagram obtežba - pomik pri romboidni plošči pod ploskovno obtežbo



Slika 19: Širjenje plastificiranega območja pri romboidni plošči pod ploskovno obtežbo

3.9 Kvadratna plošča s ploskovno obtežbo (primerjava dveh formulacij)

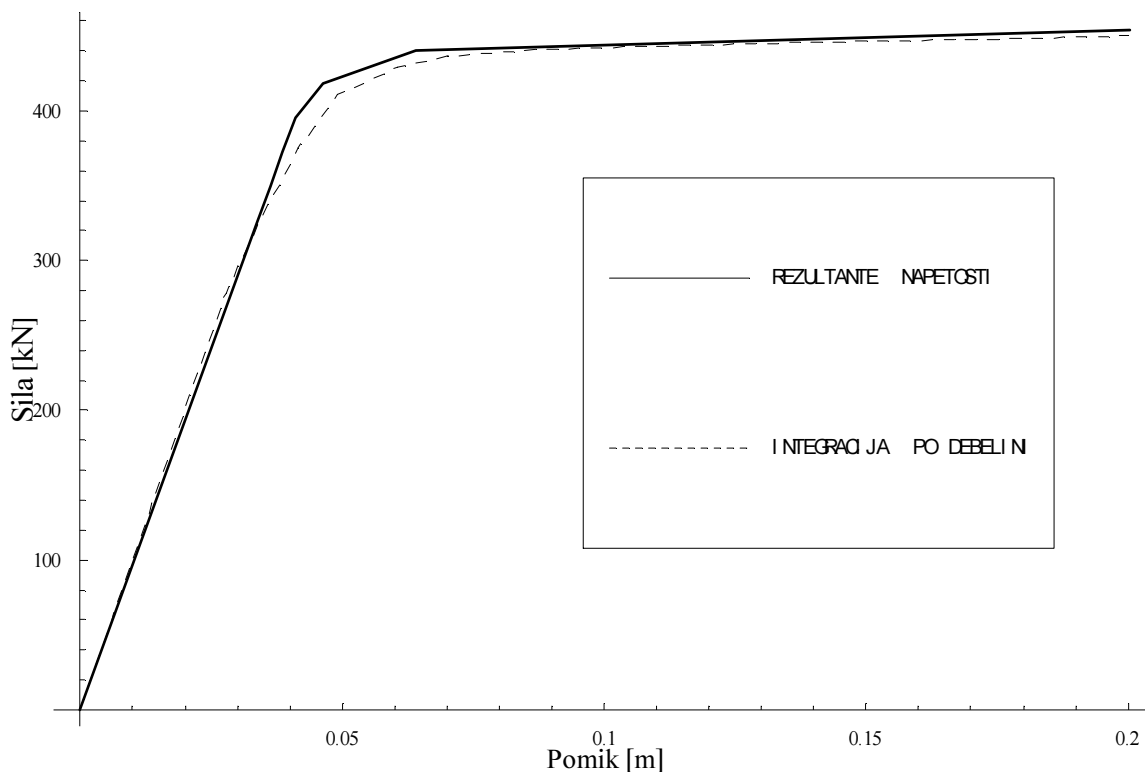
Obravnavamo kvadratno ploščo obremenjeno s ploskovno obtežbo, ki je enako podprta kot plošča v prvem primeru. Stranica plošče je $L = 1\text{ m}$, debelina pa $h = 0,01\text{ m}$. Materialne karakteristike so: $E = 10.92\text{ kN/m}^2$, $\nu = 0,3$, $\sigma_y = 1600\text{ kN/m}^2$ ter $H = 0\text{ kN/m}^2$. Ploščo modeliramo z grobo mrežo 4×4 končnih elementov. Rezultate analize primerjamo z rezultati iz [Owen, 1980], ki so jih dobili s von Misesovim kriterijem tečenja in numerično integracijo napetosti po debelini plošče. Na sliki 20 sta prikazana diagrama obtežba – pomik v brezdimenzionalni obliki ($D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$) za našo analizo ter za omenjeno analizo iz [Owen, 1980]. Razvidno je, da so rezultati enaki, ko je plošča v elastičnem območju, nekoliko pa se razlikujejo, ko nastopi plastifikacija materiala. Pri analizi z integracijo po debelini plošče se upošteva, da se plastifikacija začne, ko se plastificira prvo vlakno v plošči, medtem ko se v našem primeru, ko ploščo analiziramo z resultantami napetosti, material plastično odzove, ko se plastificira prvi celoten prerez. Iz slike 20 je očitno tudi to, da se mejni nosilnosti razlikujeta zanemarljivo malo.



Slika 20: Primerjava rezultatov dveh formulacij za kvadratno ploščo.

3.10 Prostoležec nosilec (primerjava dveh formulacij)

Obravnavamo prostoležec nosilec obremenjen s silo na sredini. Dolžina nosilca je $L = 2,5 m$, širina $b = 0,75 m$ ter debelina $h = 0,05 m$. Materialne karakteristike so: $E = 2 \cdot 10^8 kN/m^2$, $\nu = 0,3$, $\sigma_y = 4 \cdot 10^5 kN/m^2$ ter $H = 0 kN/m^2$. Ploščo modeliramo z mrežo 16×6 končnih elementov, silo pa razporedimo na sredino nosilca kot linijsko obtežbo. Na sliki 21 je prikazan vertikalni pomik središča plošče v odvisnosti od sile za našo analizo ter za analizo, ki je bila izvedena z numerično integracijo po debelini plošče, ki jo povzeta po [Skallerud, 2001]. Podobno kot v predhodnem primeru, so rezultati praktično identični, dokler je odziv plošče elastičen, nekoliko se rezultati razhajajo v območju, ko se začne plastifikacija plošče. Razlika med mejnima nosilnostima je zanemarljiva.



Slika 21: Primerjava rezultatov dveh formulacij za nosilec.

4 SKLEP

V prispevku je predstavljena analiza jeklenih plošč z materialno nelinearno metodo končnih elementov. Za konstitutivni model so uporabljene enačbe klasične teorije plastičnosti s von Misesovim kriterijem tečenja, ki so modificirane tako, da namesto z napetostmi operiramo z resultantami napetosti, ki se pojavijo v plošči, t.j. z upogibnimi momenti in prečnimi silami na dolžinsko enoto. Ker je konstitutivni model definiran z resultantami napetosti, je analiza robustna in hitra (numerična integracija po debelini plošče ni potrebna) pa tudi prikaz rezultatov (npr. širjenje plastičnega območja) je bolj pregledno, kot pri konstitutivnem modelu definiranem z napetostmi. Enačbe, ki sledijo iz aproksimacije šibke oblike ravnotežnih enačb z metodo končnih elementov, so konsistentno linearizirane, kar vodi h kvadratični konvergenci pri reševanju sistema nelinearnih enačb z iterativno Newtonovo metodo.

Večina numeričnih primerov se nanaša na izračun mejne nosilnosti jeklenih plošč (ko predpostavimo idealen elastoplastični material), v enem primeru pa naredimo tudi elastoplastično analizo jeklene plošče z izotropnim utrjevanjem. Rezultanti numeričnih primerov kažejo, da so izračunane mejne nosilnosti idealnih elastičnoplastičnih plošč nižje od tistih, ki so določene po

teoriji plastičnih linij za kvadratne in pravokotne plošče in da zelo malo odstopajo od analitično dobljenih vrednosti za osnosimetrične krožne plošče. Primerjava rezultatov numeričnih primerov z rezultati dobljenimi s von Misesovim kriterijem tečenja in z numerično integracijo napetosti po debelini plošče tudi kaže, da se na oba načina izračunani mejni nosilnosti plošč skoraj ne razlikujeta; pričakovana (majhna) odstopanja pa nastopijo v območju prve plastifikacije materiala. Po drugi strani pa numerični primeri kažejo, da izračunana mejna nosilnost plošče po teoriji plastičnih linij lahko tudi za 20% preseže numerično dobljene rezultate.

Prednosti predstavljenega pristopa, glede na teorijo plastičnih linij, je informacija o pomikih, ki je zanimiva za študij mejnega stanja deformacij. Največja odlika izračuna mejne nosilnosti plošč z materialno nelinearno analizo po metodi končnih elementov plošč pa je dejstvo, da lahko naredimo analizo plošče poljubne oblike, ki je poljubno podprta in poljubno obremenjena. Poleg tega lahko upoštevamo izotropno utrjevanje, z uvedbo kinematičnega utrjevanja lahko izračunamo elastoplastični odziv ciklično obremenjenih plošč, z modifikacijo uporabljenega pristopa pa lahko analiziramo tudi elastoviskoplastični odziv jeklenih plošč pri dolgotrajnih obremenitvah.

ZAHVALA

Avtorja se zahvaljujeta izr. prof. dr. Jožetu Korelcu za pomoč pri pripravi programske kode v programskem okolju AceGen ter Urošu Bohincu, univ. dipl. inž. fizike, ki je sprogramiral elastične končne elemente za plošče, ki predstavljajo štartno točko za v tem članku prikazano delo.

LITERATURA

- [1] Eurocode 3: Design of shell structures – Part 1-6: General rules – Supplementary rules for the shell structures, 2005.
- [2] J. Lubliner, Plasticity theory, Macmillian, 1990.
- [3] J. Dujc, B. Brank, Račun mejne nosilnosti armiranobetonskih plošč, Gradbeni vestnik, 55, 126-132, 2006.

- [4] U. Bohinc, A. Ibrahimbegović, Robustni končni elementi za plošče, Zbornik Kuhljevi dnevi 2005, 33-40, 2005.
- [5] A. Ibrahimbegović, F. Frey, An efficient implementation of stress resultant plasticity in analysis of Reissner-Mindlin plates, International J. for Numerical Methods in Engineering, 36, 303-320, 1993.
- [6] A. Ibrahimbegovic, A., Mécanique non linéaire des solides déformables : Formulation théorique et résolution numérique par éléments finis, Hermes-Science - Lavoisier, 2006.
- [7] F. Auricchio, R.L. Taylor, A generalized elastoplastic plate theory and its algorithmic implementation, International J. for Numerical Methods in Engineering, 37, 2583-2608, 1994.
- [8] J.C. Simo, J.G. Kennedy, On a stress resultant geometrically exact shell model. Part V. Nonlinear plasticity: formulation and integration algorithms, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 96, 133-171, 1992.
- [9] G.Z. Voyiadjis, P. Woelke, General non-linear finite element analysis of thick plates and shells, International Journal of Solids and Structures, 43, 2209-2242, 2006.
- [10] J. Korelc, Symbolic formulation and automatic derivation of complex material models, Multi-physics and multi-scale computer models in non-linear analysis and optimal design of engineering structures under extreme conditions (A. Ibrahimbegović, B. Brank, urednika), FGG, 517-526, 2004.
- [11] J. Korelc, <http://www.fgg.uni-lj.si/Symech>, 2005.
- [12] M. Kojić, K.-J. Bathe, Inelastic analysis of solids and structures, Springer, 2005.
- [13] B. Brank, D. Perić, F.B. Damjanić, On large deformation of thin elasto-plastic shells: implementation of a finite rotation model for quadrilateral shell elements, International J. for Numerical Methods in Engineering , 40, 689-726, 1997.
- [14] J.C. Simo, T.J.R. Hughes, Computational inelasticity, Springer, 1998.
- [15] A. Sawczuk, Mechanics and plasticity of structures, Ellis Horwood, 1989.

- [16] B. Skallerud, L.I. Myklebust, B. Haugen, Nonlinear response of shell structures: effects of plasticity modelling and large rotations, *Thin-Walled Structures*, 39, 463-482, 2001.
- [17] D.R.J. Owen, E. Hinton, *Finite elements in plasticity: Theory and practice*, Pineridge Press, 1980.