

Univerza
v Ljubljani

Fakulteta
za gradbeništvo
in geodezijo



Jamova cesta 2
1000 Ljubljana, Slovenija
<http://www3.fgg.uni-lj.si/>

DRUGG – Digitalni repozitorij UL FGG
<http://drugg.fgg.uni-lj.si/>

To je izvirna različica zaključnega dela.

Prosimo, da se pri navajanju sklicujete na bibliografske podatke, kot je navedeno:

Božiček, D., 2013. Geometrija lupinastih konstrukcij. Diplomski naloga. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo. (mentor Brank, B., somentor Cerovšek, T.): 41 str.

University
of Ljubljana

Faculty of
Civil and Geodetic
Engineering



Jamova cesta 2
SI – 1000 Ljubljana, Slovenia
<http://www3.fgg.uni-lj.si/en/>

DRUGG – The Digital Repository
<http://drugg.fgg.uni-lj.si/>

This is original version of final thesis.

When citing, please refer to the publisher's bibliographic information as follows:

Božiček, D., 2013. Geometrija lupinastih konstrukcij. B.Sc. Thesis. Ljubljana, University of Ljubljana, Faculty of civil and geodetic engineering. (supervisor Brank, B., co-supervisor Cerovšek, T.): 35 pp.

Univerza
v Ljubljani

Fakulteta za
*gradbeništvo in
geodezijo*



Jamova 2
1000 Ljubljana, Slovenija
telefon (01) 47 68 500
faks (01) 42 50 681
fgg@fgg.uni-lj.si

UNIVERZITETNI ŠTUDIJ
PRVE STOPNJE
GRADBENIŠTVA

MODUL KONSTRUKCIJE

Kandidat:

DAVID BOŽIČEK

GEOMETRIJA LUPINASTIH KONSTRUKCIJ

Diplomska naloga št.: 34/B-GR

GEOMETRY OF SHELL STRUCTURES

Graduation thesis No.: 34/B-GR

Mentor:

prof. dr. Boštjan Brank

Predsednik komisije:

izr. prof. dr. Janko Logar

Somentor:

doc. dr. Tomo Cerovšek

Ljubljana, 12. 09. 2013

IZJAVE

Podpisani DAVID BOŽIČEK izjavljam, da sem avtor diplomske naloge z naslovom »Geometrija lupinastih konstrukcij«.

Izjavljam, da je elektronska različica v vsem enaka tiskani različici.

Izjavljam, da dovoljujem objavo elektronske različice v repozitoriju UL FGG.

Črna na Koroškem, 18.08.2013

David Božiček

BIBLIOGRAFSKO – DOKUMENTACIJSKA STRAN IN IZVLEČEK

UDK:	624.074.43(043.2)
Avtor:	David Božiček
Mentor:	prof. dr. Boštjan Brank, univ. dipl. inž. grad.
Somentor:	doc. dr. Tomo Cerovšek
Naslov:	Geometrija lupinastih konstrukcij
Tip dokumenta:	diplomsko delo - univerzitetni študij
Obseg in oprema:	41 str., 2 pregl., 58 sl., 28 en.
Ključne besede:	analiza ploskev, prva osnovna forma, druga osnovna forma, Gaussova ukrivljenost, povprečna ukrivljenost, glavna radija ukrivljenosti

Izveček:

V prvem delu diplomske naloge predstavim in tudi deloma izpeljem pomembne pojme v diferencialni geometriji ploskev: parametrizacijo ploskve, prvo in drugo osnovno formo, glavna radija ukrivljenosti, Gaussovo in povprečno ukrivljenost. V drugem delu naloge predstavim in uporabim kratek program v *Mathematici*, s katerim izrišem nekaj ploskev (sfero, elipsoid, sferično kupolo, sferični elipsoid, paraboloid, eliptični paraboloid, hiperbolični paraboloid, valj, stožec, torus, hiperboloid in katenoid) in prikažem, kako se spreminjajo Gaussova in povprečna ukrivljenost ter glavna radija ukrivljenosti po ploskvi. Na koncu diplomske naloge uporabim program *Rhinoceros* za izris in analizo nekaj bolj zapletenih ploskev.

BIBLIOGRAPHIC – DOCUMENTALISTIC INFORMATION AND ABSTRACT

UDC:	624.074.43(043.2)
Author:	David Božiček
Supervisor:	prof. Boštjan Brank, Ph.D.
Cosupervisor:	assistant Professor Tomo Cerovšek, Ph.D.
Title:	Geometry of shell structures
Document type:	Graduation Thesis – University studies
Scope and tools:	41 p., 2 tab., 58 fig., 28 eq.
Keywords:	surface analysis, first fundamental form, second fundamental form, Gaussian curvature, mean curvature, principal radiuses of curvature

Abstract:

In the first part of the thesis, I describe and partly derive some important concepts in differential geometry of surfaces: surface parameterization, the first and the second fundamental form, the principal radiuses of curvature, Gaussian and mean curvature. In the second part of the thesis I use a short program in *Mathematica*, in order to plot some surfaces (sphere, ellipsoid, spherical dome, spherical ellipsoid, paraboloid, elliptic paraboloid, hyperbolic paraboloid, cylinder, cone, torus, hiperboloid, catenoid) and show how Gaussian and mean curvature and principale radiuses of curvatures change on these surfaces. At the end of the thesis I use a program named *Rhinoceros*, for drawing and analysing some more complex surfaces.

ZAHVALA

Kot prvo bi se rad zahvalil svojim staršema Ireni in Zorkotu, ki sta me skozi vsa študentska leta podpirala in skrbela, da sem lahko nemoteno študiral.

Posebej hvaležen sem vsem prijateljem zaradi katerih so bila zadnja leta nekaj posebnega.

Zahvala vsem sošolkam in sošolcem, ki ste mi pomagali in olajšali pot do te diplome. Brez vas bi bil moj študij neprimerljivo težji.

Zahvala tudi prijaznemu osebju knjižnice za pomoč pri urejanju diplomske naloge.

Posebna zahvala mentorju prof. dr.Boštjanu Branku in somentorju doc.dr. Tomo Cerovšku za vso posredovano znanje in pomoč pri izdelavi diplomske naloge.

Hvala!

KAZALO VSEBINE

1 UVOD	1
1.1 Motivacija	1
1.2 Lupinaste konstrukcije in geometrija ploskev	1
1.3 Enačba ukrivljene ploskve	2
2 DIFERENCIALNA GEOMETRIJA PLOSKEV	2
2.1 Parametrizacija ploskve	2
2.2 Tangentna vektorja, tangenta ravnina in normalni vektor na ploskev	3
2.3 Prva osnovna forma ploskve	4
2.4 Normalni prerez, druga osnovna forma ploskve	5
2.5 Gaussova ukrivljenost, povprečna ukrivljenost, glavni ukrivljenosti in glavna radija ukrivljenosti	6
2.6 Parametrizacija v smeri glavnih ukrivljenosti	8
3 RISANJE IN ANALIZA PLOSKEV S PROGRAMOM MATHEMATICA	9
3.1 Sfera	10
3.2 Elipsoid	12
3.3 Sferična kupola in sferični elipsoid	14
3.4 Paraboloid	16
3.5 Eliptični paraboloid	18
3.6 Hiperbolični paraboloid	20
3.7 Valj	21
3.8 Stožec	23
3.9 Torus	25
3.10 Hiperboloid	27
3.11 Katenoid	29
4 POGOSTE SKUPINE PLOSKEV	31
5 PROGRAM RHINOCEROS	32
5.1 NURBS modeliranje s programom <i>Rhinoceros</i>	32
5.2 Vizualna analiza ploskev v programu <i>Rhinoceros</i>	32

5.3 Risanje 3D rotacijskih ploskev v programu <i>Rhinoceros</i> s pomočjo programskega pripomočka <i>Grasshopper</i>	35
6 ZAKLJUČEK	39
VIRI	41

KAZALO PREGLEDNIC

Preglednica 1: Program v <i>Mathematici</i> za izračun koeficientov prve in druge osnovne forme, Gaussove ukrivljenosti, povprečne ukrivljenosti ter glavnih radijev ukrivljenosti.	9
Preglednica 2: Spreminjanje polmera in premera z višino. (Čakš, 2013)	37

KAZALO SLIK

Slika 2.1: Parametrizacija ploskve in krajevni vektor točke P na ploskvi.	3
Slika 2.2: Tangenti in normalni vektor na ploskev v točki P ter pripadajoča tangentsna ravnina.	4
Slika 2.3 : Vektor N_T in normalni prerez ploskve.	5
Slika 2.4: Pritisnjena (oskulacijska) krožnica.	7
Slika 2.5: Posebna parametrizacija.	8
Slika 3.1: Sfera z radijem 1.	11
Slika 3.2: Gaussova in povprečna ukrivljenost sfere	11
Slika 3.3: Glavna radija ukrivljenosti R_1 in R_2 sfere v odvisnosti od u in v	12
Slika 3.4: Elipsoid.	13
Slika 3.5: Gaussova in povprečna ukrivljenost elipsoida	13
Slika 3.6: Glavna radija ukrivljenosti R_1 in R_2 elipsoida v odvisnosti od u in v	13
Slika 3.7: Sferična kupola.	14
Slika 3.8: Sferični elipsoid.	14
Slika 3.9: Gaussova ukrivljenost sferične kupole	15
Slika 3.10: Povprečna ukrivljenost sferičnega elipsoida	15
Slika 3.11: Glavni radij ukrivljenosti R_1 sferične kupole	15
Slika 3.12: Glavni radij ukrivljenosti R_2 sferičnega elipsoida	15
Slika 3.13: Pomen parametrov u in v pri paraboloidu.	16
Slika 3.14: Paraboloid.	17
Slika 3.15: Gaussova in povprečna ukrivljenost paraboloida	17
Slika 3.16: Glavna radija ukrivljenosti R_1 in R_2 paraboloida	18
Slika 3.17: Eliptični paraboloid.	18
Slika 3.18: Gaussova in povprečna ukrivljenost eliptičnega paraboloida	19
Slika 3.19: Glavna radija ukrivljenosti R_1 in R_2 eliptičnega paraboloida	19
Slika 3.20: Hiperbolični paraboloid.	20
Slika 3.21: Gaussova in povprečna ukrivljenost hiperboličnega paraboloida	20
Slika 3.22: Glavna radija ukrivljenosti R_1 in R_2 hiperboličnega paraboloida	21
Slika 3.23: Višina (h) in radij (r) valja.	21
Slika 3.24: Valj.	22

Slika 3.25: Gaussova in povprečna ukrivljenost valja	22
Slika 3.26: Glavni radij ukrivljenosti R_2 valja, za $r = 2$	23
Slika 3.27: Stožec.	24
Slika 3.28: Gaussova in povprečna ukrivljenost stožca	24
Slika 3.29: Glavni radij ukrivljenosti R_2 stožca	25
Slika 3.30: Pomen konstant a in b , ter parametrov u in v pri torusu.	25
Slika 3.31: Torus.	26
Slika 3.32: Gaussova in povprečna ukrivljenost torusa	26
Slika 3.33: Glavna radija ukrivljenosti R_1 in R_2 torusa	27
Slika 3.34: Pomen parametrov u in v pri hiperboloidu.	27
Slika 3.35: Hiperboloid.	28
Slika 3.36: Gaussova in povprečna ukrivljenost hiperboloida	28
Slika 3.36: Glavna radija ukrivljenosti R_1 in R_2 hiperboloida	29
Slika 3.37: Katenoid.	29
Slika 3.38: Gaussova in povprečna ukrivljenost katenoida	30
Slika 3.39: Glavna radija ukrivljenosti R_1 in R_2 katenoida	30
Slika 4.1: Primer katenoida v naravi, dva obroča potopljena v film milnice.	31
Slika 5.1: Ukazi za vizualno analizo ploskev.	32
Slika 5.2: Prikaz Gaussove ukrivljenosti z barvno mapo.	33
Slika 5.3: Ukaz <i>Emap</i> .	33
Slika 5.4: Ukaz <i>Zebra</i> . Stik telesa in glave ročne svetilke, vidi se situacija »G0«.	34
Slika 5.5: Ukaz <i>Draft Angle Analysis</i> .	34
Slika 5.6: Prikaz parametrizacije zapisa rotacijske ploskve s tremi kontrolnimi točkami v programu <i>Grasshopper</i> .	35
Slika 5.7: Program v <i>Grasshopper</i> -ju za risanje poljubne rotacijske ploskve	36
Slika 5.8: Poljubne rotacijske ploskve v <i>Rhinoceros</i> -u.	36
Slika 5.9: Analiza poljubnih rotacijskih ploskev.	37
Slika 5.10: Program v <i>Grasshopper</i> -ju za hladilni stolp Teš 6.	38
Slika 5.10: Analiza vrednosti minimalnega radija ukrivljenosti hladilnega stolpa Teš 6 v programu <i>Rhinoceros</i> .	38
Slika 5.11: Hiperboloidi sestavljeni iz ravnih daljic.	39

1 UVOD

1.1 Motivacija

Ker mi je bil predmet Ploskovne konstrukcije I zanimiv, in ker sem si želel, preden končam prvostopenjski študij gradbeništva nekaj več izvedeti o konstrukcijah, ki s svojimi elegantnimi oblikami vzbujajo pozornost in puščajo pečat v grajenem okolju, sem se odločil v okviru svojega diplomskega dela obravnavati lupinaste konstrukcije (oziroma na kratko lupine). Med študijem smo imeli pri konstrukcijskih predmetih opravka z ravnimi konstrukcijskimi elementi, zato sem si želel spoznati še osnovne principe po katerih se klasificira in opisuje ukrivljene (lupinaste) konstrukcije.

Tako mi je predstavljala diplomska tema z naslovom *Geometrija lupinastih konstrukcij* zanimiv izziv, hkrati pa sem si s študiranjem geometrije ukrivljenih ploskev pripravil dobro podlago za kasnejše podrobnejše študije lupinastih konstrukcij na drugi stopnji študija na Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani.

1.2 Lupinaste konstrukcije in geometrija ploskev

Oblika lupinaste konstrukcije je povezana z arhitektonskimi zahtevami (estetika, simbolika, ...) in z gradbenimi zahtevami (nosilnost, deformabilnost in stabilnost, ...). Na obnašanje lupinastih konstrukcij njihova oblika zelo močno vpliva.

K lupinam štejemo ukrivljene ploskovne konstrukcije (monolitne lupine, membrane, palične lupine) in ravne ploskovne konstrukcije (sestavljene iz ravnih, monolitnih ploskovnih elementov, ki so med seboj sestavljeni tako, da tvorijo nagubano ploskev), ki nosijo tako z osnimi silami, kot tudi z upogibom.

Lupinaste konstrukcije so razmeroma tanke, zato jih (poenostavljeno) opisujemo s srednjo ploskvijo lupine. Srednja ploskev določa obliko lupine (ta bistveno vpliva na obnašanje). Ločimo različne vrste srednjih ploskev, in sicer:

- Srednje ploskve, ki so (relativno enostavno) matematično opisljive z enačbo ploskve. Takšne ploskve so npr. plašči dobro znanih geometrijskih teles sfere, elipsoida, valja, stožca, ...
- Eksperimentalno dobljene srednje ploskve. Takšne ploskve se dobijo z eksperimenti, na primer z obešanjem tkanine, z uporabo milnice, ...
- Računalniško dobljene srednje ploskve. Z računalniškimi orodji za risanje ploskev (npr. s programom *Rhinoceros*) lahko oblikujemo zelo zapletene ploskve, ki se opišejo na precej kompleksen način.

V 2. in 3. poglavju se skoncentriram na lupine, katerih srednje ploskve so opisljive z enačbo ploskve, v 5. poglavju pa na lupine z računalniško opisljivimi srednjimi ploskvami.

1.3 Enačba ukrivljene ploskve

Enačbo ploskve lahko napšemo v eni od naslednjih oblik:

- Implicitna oblika : $F(x, y, z) = 0$
- Eksplicitna oblika : $z = f(x, y)$
- Parametrična oblika : $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$
- Vektorska oblika : $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v) \mathbf{i} + y(u, v) \mathbf{j} + z(u, v) \mathbf{k}$

Ko parametra u in v pretečeta vse možne vrednosti, dobimo koordinate x, y, z (pri parametrični obliki) in krajevne vektorje $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ (pri vektorski obliki) vseh točk na ploskvi. Z eliminacijo parametrov u in v iz parametrične oblike, dobimo implicitno obliko. Eksplicitna oblika je poseben primer parametrične oblike za parametra $u = x$ in $v = y$. (Bronštejn, I. N., Šemendajev, K. A., Musiol, G., Muhlig, H. 2009.)

Kot primer si pogledjmo sfero:

- Implicitna oblika enačbe sfere: $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$
- Eksplicitna oblika enačbe sfere: $z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$
- Parametrična oblika enačbe sfere:
 $x = R \sin(u) \cos(v)$, $y = R \sin(u) \sin(v)$, $z = R \cos(u)$
- Vektorska oblika enačbe sfere: $\mathbf{r} = R (\cos(v) \sin(u) \mathbf{i} + \sin(v) \sin(u) \mathbf{j} + \cos(u) \mathbf{k})$

2 DIFERENCIALNA GEOMETRIJA PLOSKEV

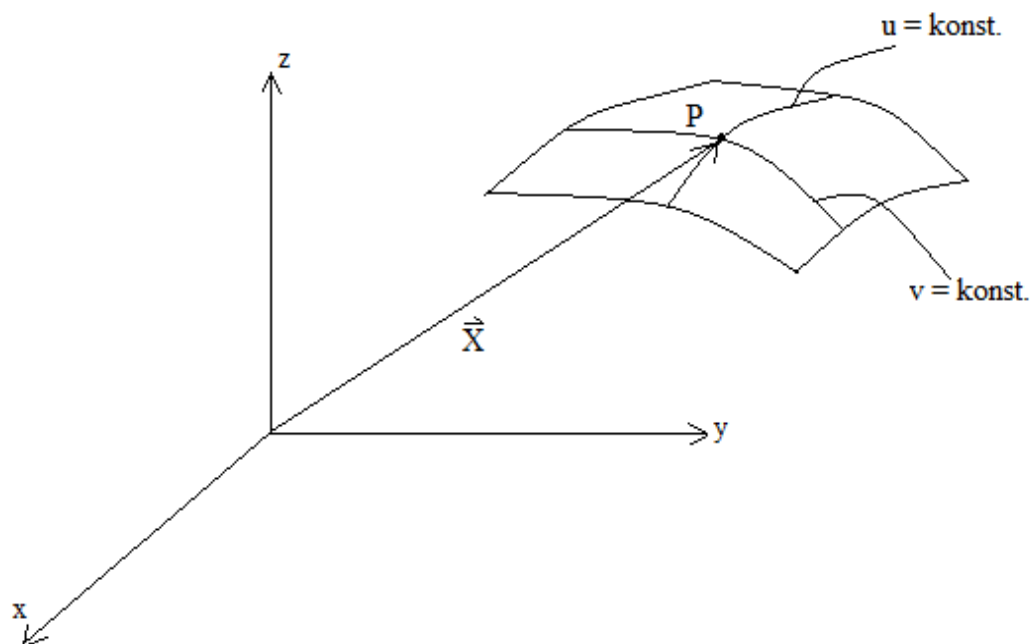
2.1 Parametrizacija ploskve

Predpostavimo, da ploskev ali del ploskve lahko parametriziramo, t.j. opišemo z dvema parametroma u in v . Za vsako točko na ploskvi imata parametra določeni vrednosti.

Parametra določata dve družini krivulj na ploskvi.

Parametra u in v sta lahko kota, ki ju oklepa krajevni vektor z dvema izbranimi ravninama v prostoru. Lahko sta ti ravnini kar dve osnovni ravnini kartezijskega koordinatnega sistema (podrobneje to ponazorimo kasneje).

Krajevni vektor točke na ploskvi označimo z $\mathbf{X} = \mathbf{X}(u, v)$. Krajevni vektor natančno pove, kje je točka v prostoru, glede na koordinatno izhodišče kartezijskega koordinatnega sistema (slika 2.1), za določeni vrednosti parametrov u in v .



Slika 2.1: Parametrizacija ploskve in krajevni vektor točke P na ploskvi.

2.2 Tangentna vektorja, tangentna ravnina in normalni vektor na ploskev

Naj bo $\mathbf{X} = \mathbf{X}(u, v)$ krajevno vektor točke P .

Tangentni vektor na ploskev v točki P , dobimo tako, da krajevni vektor parcialno odvajamo po u ali po v .

$$\text{Tangenta na ploskev v smeri krivulje } v=\text{konst.: } \mathbf{T}_u = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u} \quad (2.1)$$

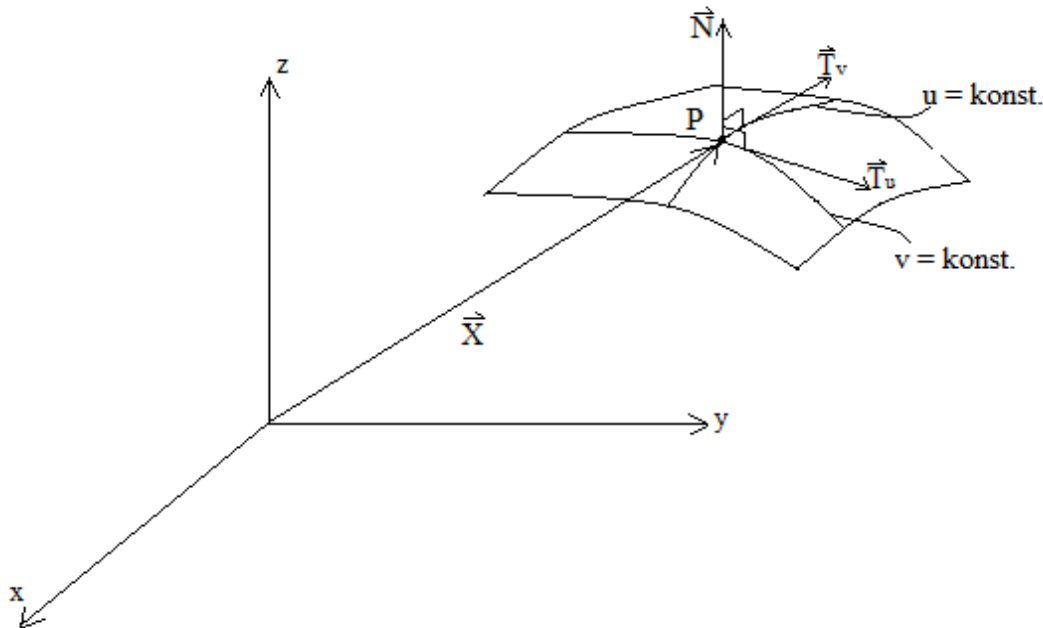
$$\text{Tangenta na ploskev v smeri krivulje } u=\text{konst.: } \mathbf{T}_v = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial v} \quad (2.2)$$

Tangentna vektorja napenjata tangentno ravnino na ploskev v točki P (slika 2.2). Če bi izbrali druga parametra \bar{u} in \bar{v} za parametrizacijo ploskve, bi v točki P dobili drugače usmerjena tangentna vektorja $\mathbf{T}_{\bar{u}}$ in $\mathbf{T}_{\bar{v}}$, tangentna ravnina pa bi bila ista. Tangentna ravnina na ploskev v točki P je ravnina, v kateri ležijo vse tangente na ploskev v tej točki. Tangente na ploskev v točki P so hkrati tudi tangente vseh možnih krivulj na ploskvi, ki potekajo skozi točko P . Izjema so singularne točke, v katerih tangentna ravnina ne obstaja (npr. vrh stožca).

Premico, ki poteka skozi točko P in je pravokotna na tangentno ravnino v tej točki, in s tem tudi vzporedna normalni na tangentno ravnino, imenujemo normala ploskve. Njeno smer v prostoru določa vektorski produkt dveh tangentnih vektorjev. Enotskemu vektorju \mathbf{N} , ki leži na normalni, pravimo normalni vektor.

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v}{\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|} \quad (2.3)$$

Normalni vektor \mathbf{N} na ploskev v točki P je pravokoten na tangentno ravnino ploskve v točki P (slika 2.2). Njegova smer je odvisna od zaporedja vektorjev v vektorskem produktu (2.3)

Slika 2.2: Tangenti in normalni vektor na ploskev v točki P ter pripadajoča tangenta ravnina.

2.3 Prva osnovna forma ploskve

Sestavimo tangenti vektor na ploskev v točki P z linearno kombinacijo tangentnih vektorjev T_u in T_v , pomnoženih z infinitezimalno majhnima deloma krivulj $v=\text{konst.}$ in $u=\text{konst.}$ du in dv .

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_u du + \mathbf{T}_v dv \quad (2.4)$$

Dolžino loka na ploskvi v okolici P lahko izračunamo s pomočjo izraza za infinitezimalno majhno dolžino ločnega elementa.

$$\begin{aligned} ds^2 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} &= (\mathbf{T}_u du + \mathbf{T}_v dv) \cdot (\mathbf{T}_u du + \mathbf{T}_v dv) \\ &= \mathbf{T}_u \cdot \mathbf{T}_u du^2 + 2 \mathbf{T}_u \cdot \mathbf{T}_v du dv + \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{T}_v dv^2 \\ &= E du^2 + 2 F du dv + G dv^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Zapišimo enačbo (2.5) v matrični obliki.

$$ds^2 = \{du, dv\} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

Desno stran enačbe (2.6) imenujemo prva osnovna ali fundamentalna forma ploskve, njene člene E , F in G pa koeficiente prve osnovne forme. Koeficienti prve osnovne forme se spreminjajo od točke do točke na ploskvi. Če je koeficient F enak nič, sta krivulji $v=\text{konst.}$ in $u=\text{konst.}$ v obravnavani točki pravokotni med seboj.

S pomočjo prve osnovne forme lahko izračunamo dolžino dela (ali cele) krivulje na ploskvi, kot med krivuljama, ki se sekata v neki točki ploskve in površino dela (ali celotne) ploskve. Prva osnovna forma torej določa metriko na ploskvi.

Površina elementarne ploskvice je:

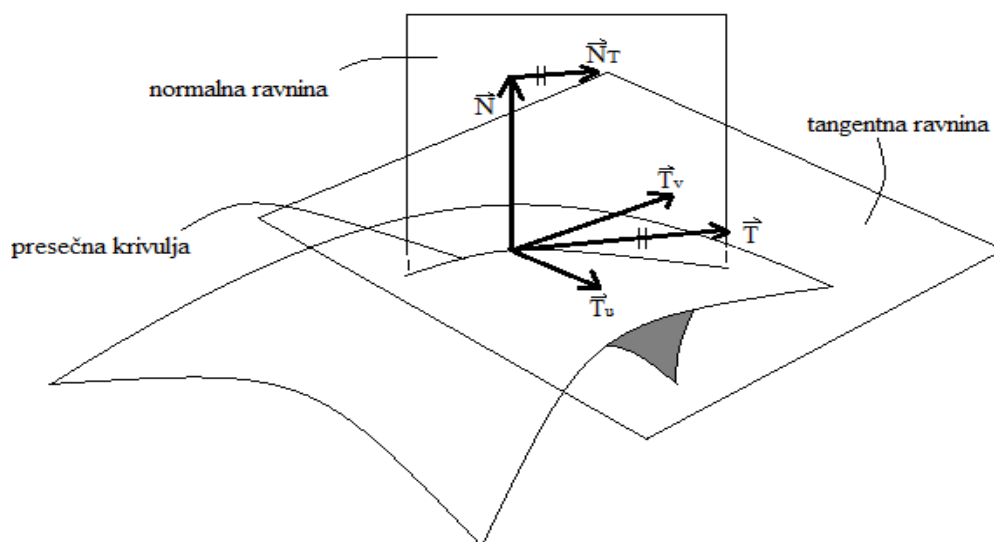
$$dA = \sqrt{(\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v) \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)} du dv = \sqrt{EG - F^2} du dv \quad (2.7)$$

Kot vidimo, predstavlja člen pod korenem v enačbi (2.7) determinanto prve osnovne forme iz (2.6).

2.4 Normalni prerez, druga osnovna forma ploskve

Krivuljo na ploskvi v točki P lahko dobimo s presekom ploskve in ravnine, ki je pravokotna na to tangentno ravnino v točki P (na sliki 2.3 je označena kot normalna ravnina). Normalna ravnina vsebuje normalni vektor N , in se razteza v smeri tangentnega vektorja, npr. T . Tako dobljena krivulja je na sliki 2.3 označena kot presečna krivulja. Presek ploskve in normalne ravnine imenujemo tudi normalni prerez ploskve.

Ukrivljenost (κ) krivulje na ploskvi, ki jo določa normalni prerez ploskve v točki P , je enaka recipročni vrednosti polmera (R) pritisknjene krožnice na krivuljo v točki P (pri čemer krožnica leži v normalni ravnini).



Slika 2.3 : Vektor N_T in normalni prerez ploskve.

(povzeto po Smith, J., Sequin, C. Differential geometry of surfaces. Članek z Berkeleyja.)

Skonstruirajmo vektor N_T , ki ima prijemališče na koncu normalnega vektorja N ter smer tangentnega vektorja T . Leži v normalni ravnini. Vektor N_T je linearna kombinacija vektorjev N_u in N_v , pomnoženih z infinitezimalno majhnima deloma krivulj $v=\text{konst.}$ in $u=\text{konst.}$, du in dv .

$$N_u = \frac{\partial N}{\partial u}, N_v = \frac{\partial N}{\partial v} \quad (2.8), (2.9)$$

$$N_T = N_u du + N_v dv \quad (2.10)$$

Vektor N_T pove, za koliko se spremeni normalni vektor, če se nekoliko premaknemo po ploskvi od točke P v smeri T . Ko vnesemo (2.3) v (2.8) in (2.9), dobimo:

$$N_u = \frac{T_{u,u} \times T_v}{\|T_u \times T_v\|} + \frac{T_u \times T_{v,u}}{\|T_u \times T_v\|} + \frac{\partial}{\partial u} [\|T_u \times T_v\|^{-1}] (T_u \times T_v) \quad (2.11)$$

$$N_v = \frac{T_{u,v} \times T_v}{\|T_u \times T_v\|} + \frac{T_u \times T_{v,v}}{\|T_u \times T_v\|} + \frac{\partial}{\partial v} [\|T_u \times T_v\|^{-1}] (T_u \times T_v) \quad (2.12)$$

kjer je $T_{u,u} = \frac{\partial T_u}{\partial u} = \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}$, $T_{v,v} = \frac{\partial T_v}{\partial v} = \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}$, $T_{v,u} = \frac{\partial T_v}{\partial u} = \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u}$ in $T_{u,v} = \frac{\partial T_u}{\partial v} = \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}$. S pomočjo vektorja N_T lahko dobimo ukrivljenost (κ) normalnega prereza v točki P .

$$\kappa = -\mathbf{T} \cdot \mathbf{N}_T \quad (2.13)$$

Skalarni produkt (2.13) definira drugo osnovno formo, ki vsebuje podatke o ukrivljenosti ploskve v obravnavani točki!

$$\begin{aligned} -\mathbf{T} \cdot \mathbf{N}_T &= -(\mathbf{T}_u du + \mathbf{T}_v dv) \cdot (\mathbf{N}_u du + \mathbf{N}_v dv) \\ &= -(\mathbf{T}_u \cdot \mathbf{N}_u) du^2 - (\mathbf{T}_u \cdot \mathbf{N}_v) du dv - (\mathbf{T}_v \cdot \mathbf{N}_u) dv du - (\mathbf{T}_v \cdot \mathbf{N}_v) dv^2 \\ &= \begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{T}_u \cdot \mathbf{N}_u & -\mathbf{T}_u \cdot \mathbf{N}_v \\ -\mathbf{T}_v \cdot \mathbf{N}_u & -\mathbf{T}_v \cdot \mathbf{N}_v \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Desna stran enačbe (2.14) predstavlja drugo osnovno formo.

Če upoštevamo naslednje zveze (\mathbf{a} , \mathbf{b} in \mathbf{c} so poljubni vektorji):

$$\mathbf{a} (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \mathbf{c} = \mathbf{b} (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \quad (2.15)$$

$$\mathbf{a} (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{a}) \mathbf{c} = 0 \quad \text{in} \quad \mathbf{a} (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = \mathbf{b} (\mathbf{a} \times \mathbf{a}) = 0 \quad (2.16)$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (2.17)$$

lahko komponente matrike iz (2.14) napšemo kot:

$$\mathbf{N}_u \cdot \mathbf{T}_u = \frac{(\mathbf{T}_{u,u} \times \mathbf{T}_v)}{\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|} \mathbf{T}_u = \frac{\mathbf{T}_{u,u} (\mathbf{T}_v \times \mathbf{T}_u)}{\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|} = -\frac{\mathbf{T}_{u,u} (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)}{\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|} = -\mathbf{T}_{u,u} \cdot \mathbf{N} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{N}_u \cdot \mathbf{T}_v = \frac{(\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_{v,u})}{\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|} \mathbf{T}_v = \frac{\mathbf{T}_{v,u} (\mathbf{T}_v \times \mathbf{T}_u)}{\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|} = -\mathbf{T}_{v,u} \cdot \mathbf{N} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{N}_v \cdot \mathbf{T}_u = \frac{(\mathbf{T}_{u,v} \times \mathbf{T}_v)}{\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|} \mathbf{T}_u = \frac{\mathbf{T}_{u,v} (\mathbf{T}_v \times \mathbf{T}_u)}{\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|} = -\mathbf{T}_{u,v} \cdot \mathbf{N} \quad (2.20)$$

$$\mathbf{N}_v \cdot \mathbf{T}_v = \frac{(\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_{v,v})}{\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|} \mathbf{T}_v = \frac{\mathbf{T}_{v,v} (\mathbf{T}_v \times \mathbf{T}_u)}{\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|} = -\mathbf{T}_{v,v} \cdot \mathbf{N} \quad (2.21)$$

Ker je $\mathbf{T}_{u,v} = \mathbf{T}_{v,u}$ dobimo $\mathbf{T}_u \cdot \mathbf{N}_v = \mathbf{T}_v \cdot \mathbf{N}_u$. Matrika v (2.14) je torej simetrična. Tako lahko sedaj zapišemo (3.14) kot:

$$-\mathbf{T} \cdot \mathbf{N}_T = \begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{uu} \cdot \mathbf{N} & \mathbf{T}_{uv} \cdot \mathbf{N} \\ \mathbf{T}_{uv} \cdot \mathbf{N} & \mathbf{T}_{vv} \cdot \mathbf{N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

kjer so L , M in N koeficienti druge osnovne forme. Podobno kot koeficienti prve osnovne forme, se spreminjajo od točke do točke na ploskvi. Koeficienti druge osnovne forme vsebujejo informacijo o ukrivljenosti ploskve v obravnavani točki.

2.5 Gaussova ukrivljenost, povprečna ukrivljenost, glavni ukrivljenosti in glavna radija ukrivljenosti

V točki P na ploskvi obstaja množica krivulj, ki so presek neke normalne ravnine in ploskve. Od teh krivulj sta nam pa najbolj zanimivi dve tisti, ki imata od vseh najmanjšo in največjo ukrivljenost (2.13)

v točki P . Ukrivljenosti teh dveh krivulj v točki P označimo s κ_1 in s κ_2 in ju poimenujemo glavni ukrivljenosti ploskve.

Pri določitvi izrazov za glavni ukrivljenosti, se pojavita dva pomembna izraza v diferencialni geometriji ploskev in sicer Gaussova ukrivljenost in povprečna ukrivljenost.

Gaussova ukrivljenost je enaka razmerju determinant druge in prve osnovne forme oziroma produktu glavnih ukrivljenosti. Označimo jo s črko K .

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \kappa_1 \kappa_2 \quad (2.23)$$

Povprečno ukrivljenost označimo s črko H , zapišemo pa jo takole.

$$H = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)} = \frac{1}{2} (\kappa_1 + \kappa_2) \quad (2.24)$$

Sedaj lahko zapišemo tudi izraza za glavni ukrivljenosti, v odvisnosti od Gaussove in povprečne ukrivljenosti!

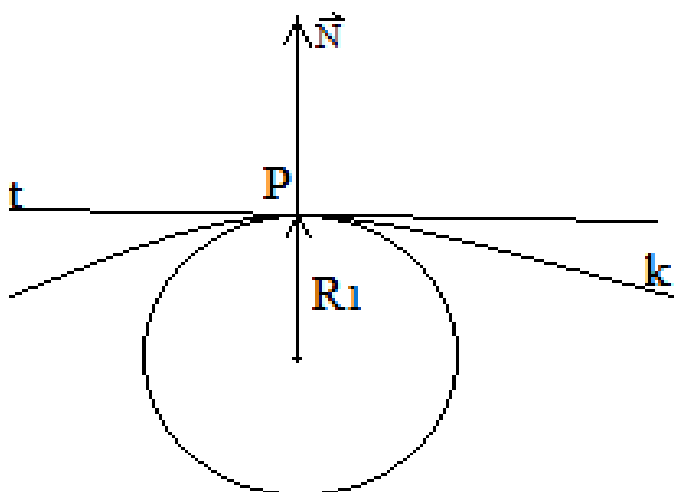
$$\kappa_1 = H + \sqrt{H^2 - K} \quad (2.25)$$

$$\kappa_2 = H - \sqrt{H^2 - K} \quad (2.26)$$

Glavni ukrivljenosti ploskve v točki P sta povezani z glavnima radijema ukrivljenosti ploskve v tej točki. Določimo ju kot recipročni vrednosti glavnih ukrivljenosti.

$$R_1 = \frac{1}{\kappa_1} \quad , \quad R_2 = \frac{1}{\kappa_2} \quad (2.27), (2.28)$$

Radij ukrivljenosti krivulje na ploskvi, ki sovpada z normalnim prerezom, predstavlja radij krožnice (krožnica leži v pripadajoči normalni ravnini), pritisnjene ob krivuljo v točki, kjer merimo ukrivljenost (npr. točki P). Takšno krožnico imenujemo pritisnjena (oskulacijska) krožnica in ima v točki prileganja isto tangento kot krivulja (slika 2.4).



Slika 2.4: Pritisnjena (oskulacijska) krožnica.

2.6 Parametrizacija v smeri glavnih ukrivljenosti

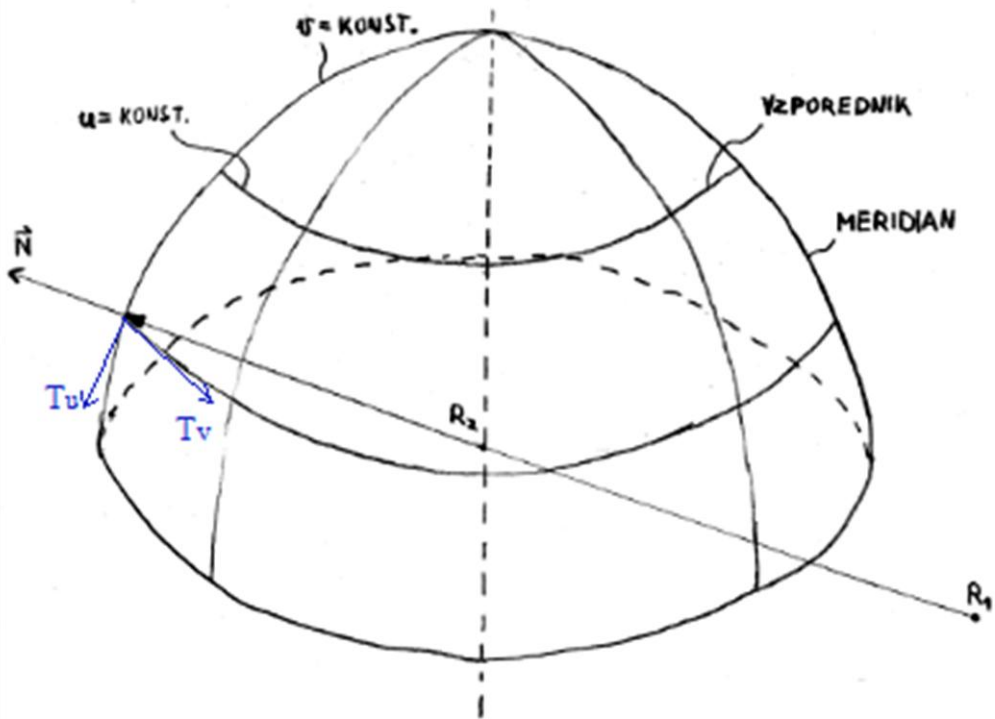
Včasih lahko izberemo parametra u in v tako, da kažeta v vsaki točki ploskve tangentna vektorja T_u in T_v v smeri glavnih ukrivljenosti (družini krivulj, ki ju določata u in v sta med seboj pravokotni)

Takšno parametrizacijo lahko dobimo pri rotacijskih ploskvah (vrteninah), če ploskev parametriziramo na način, da parametra u in v opišeta poldnevnik (meridiane) in vzporednike (slika 2.5). Tu je potrebno omeniti, da je meridian krivulja, ki ima v izbrani točki največji radij ukrivljenosti (R_1 , slika 2.5). Nasprotno pa vzporednik ni krivulja, povezana z najmanjšim radijem ukrivljenosti (R_2 , slika 2.5).

Za rotacijske ploskve potem velja:

- $R_1(v)$ je radij meridiana (krivulje $v=\text{konst.}$)
- $R_2(u)$ je razdalja med ploskvijo in rotacijsko osjo v smeri normale.

Pri analizi rotacijskih lupinastih konstrukcij (valjev, stožcev, kupol, hiperboloidov, ...) je navadno privzeto, da gleda N pri rotacijskih ploskvah proti rotacijski osi, ter da sta R_1 in R_2 večja od nič takrat, ko sta njuni daljici (t.j. razdalji med središčema pripadajočih krožnic in točko na ploskvi) usmerjeni v nasprotni smeri kot N (pri čemer je konec obeh daljic na ploskvi).



Slika 2.5: Posebna parametrizacija, smer normale na sliki je v skladu z enačbo (2.3).

3 RISANJE IN ANALIZA PLOSKEV S PROGRAMOM MATHEMATICA

Cilj tega dela naloge je, da se seznanim s programom *Mathematica*, kot orodjem za risanje in analizo ploskev. Za ploskve sem, poleg oblike ploskve, narisal tudi razpored Gaussovih in povprečnih ukrivljenosti ter glavnih radijev ukrivljenosti po ploskvi. Tako sem dobil boljšo predstavo o dejanskem pomenu teh koeficientov, kar je pomembno, saj se, na primer, pogosto klasificira lupinaste konstrukcije na podlagi Gaussove ukrivljenosti.

V programu *Mathematica* sem pripravil krajši program (Preglednica 1) za računanje glavnih ukrivljenosti, glavnih radijev ukrivljenosti, Gaussove ukrivljenosti in povprečne ukrivljenosti nekaterih ploskev, ki se pogosto pojavljajo v gradbeništvu ali pa so zanimive iz drugih razlogov. Program je uporaben za vsako ploskev, ki se jo lahko opiše z dvema parametroma; takšnih ploskev pa je zelo veliko.

Kot obliko zapisa enačb sem uporabil vektorsko obliko, ki je uporabljena tudi v gornjem poglavju o diferencialni geometriji ploskev. Za risanje ploskev sem uporabljal ukaz *ParametricPlot3D*.

Pri pisanju programa sem si pomagal s spletno stranjo Wolfram MathWorld, kjer je veliko napisanega o matematično opisljivih ploskvah.

Ploskve, ki sem jih analiziral so: sfera, elipsoid, sferična kupola, sferični elipsoid, paraboloid, eliptični paraboloid, hiperbolični paraboloid, valj, stožec, torus, hiperboloid in katenoid. Program iz preglednice 1 je bil enak za vsako ploskev, spreminjala se je le oblika vektorske funkcije $\mathbf{X} = \mathbf{X}(u, v)$ in definicijski območji u in v . V nadaljevanju bom za vsako ploskev prikazal dobljene enačbe za prvo in drugo osnovno formo ter sliko ploskve in slike spreminjanja Gaussove in povprečne ukrivljenosti ter glavnih radijev ukrivljenosti po ploskvi.

Preglednica 1: Program v *Mathematici* za izračun koeficientov prve in druge osnovne forme, Gaussove ukrivljenosti, povprečne ukrivljenosti ter glavnih radijev ukrivljenosti.

Parametrizacija ploskve:
$\mathbf{X}[u_, v_] =$ poljubna funkcija parametrov u in v (krajevni vektor)
Tangenti na ploskev (enačbi 2.1 in 2.2):
$\mathbf{X}_u = D[\mathbf{X}[u, v], u]; \quad \mathbf{X}_v = D[\mathbf{X}[u, v], v];$
Koeficienti prve osnovne forme (enačba (2.14)):
$e = \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_u; \quad f = \mathbf{X}_u \cdot \mathbf{X}_v; \quad g = \mathbf{X}_v \cdot \mathbf{X}_v;$
Normala na ploskev (enačba (2.3)):
$\mathbf{N}_0 = \text{Cross}[\mathbf{X}_v, \mathbf{X}_u]; \quad \mathbf{N}_n = \mathbf{N}_0 / \text{Sqrt}[\mathbf{N}_0 \cdot \mathbf{N}_0];$ (*normala ima obratno smer, kot je določena z enačbo (3.3)*)
Drugi odvodi krajevnega vektorja:

se nadaljuje...

....nadaljevanje preglednice 1

$X_{uu} = D[X[u, v], u, u]; \quad X_{uv} = D[X[u, v], u, v]; \quad X_{vv} = D[X[u, v], v, v];$
Koeficienti druge osnovne forme (enačba (2.22)):
$l = X_{uu}.No; \quad m = X_{uv}.No; \quad n = X_{vv}.No;$
Povprečna ukrivljenost (enačba (2.24)):
$h = (l g - 2 m f + n e)/(2 (e g - f^2));$
Gaussova ukrivljenost (enačba (2.23)):
$k = (l n - m^2)/(e g - f^2);$
Glavni ukrivljenosti (enačbi (2.25) in (2.26)):
$K1 = h + \text{Sqrt}[h^2 - k]; \quad K2 = h - \text{Sqrt}[h^2 - k];$
Glavna radija ukrivljenosti (enačbi (2.27) in (2.28)):
$R1 = 1/K1; \quad R2 = 1/K2;$

3.1 Sfera

Sfero predstavlja množica vseh točk v tri- dimenzionalnem Evklidskem prostoru, ki so od neke točke oddaljena za razdaljo R (polmer, radij sfere).

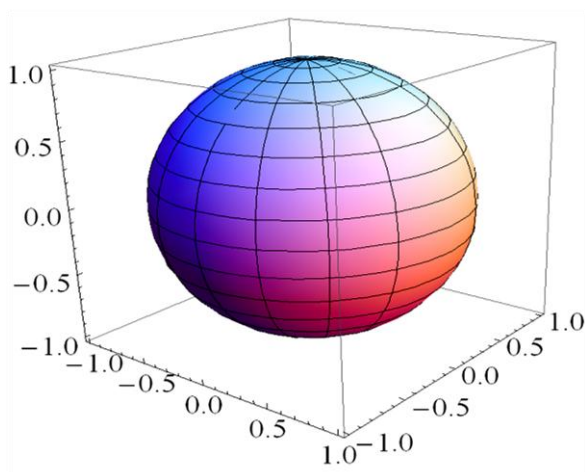
Enačba sfere z radijem R , postavljene v izhodišče koordinatnega sistema je podana z enačbo

$$x^2 + y^2 + z^2 = R.$$

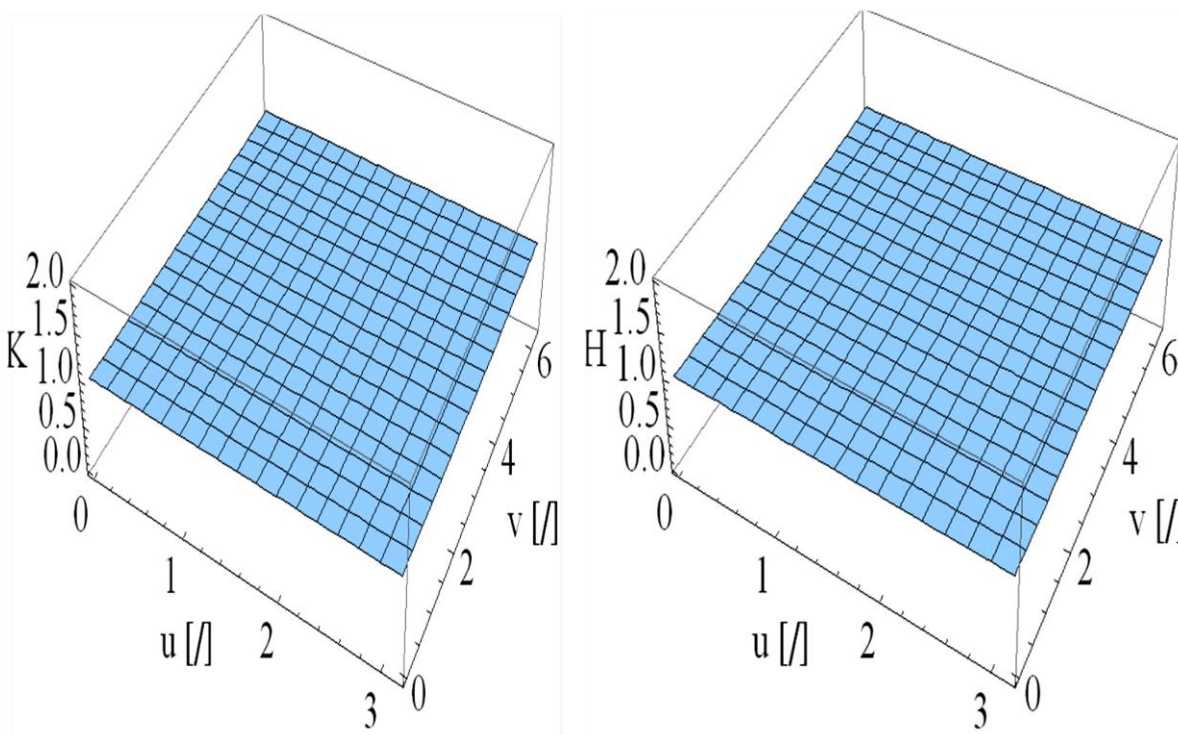
Parametrični zapis sfere se glasi $x = R \sin(u) \cos(v), y = R \sin(u) \sin(v)$ in $z = R \cos(u)$, pri čemer velja $u \in [0, \pi]$ in $v \in [0, 2\pi]$, kjer sta u in v kota.

Koeficienti prve osnovne forme so $E = R^2, F = 0, G = R^2 \sin^2 u$. Koeficienti druge osnovne forme pa $L = R, M = 0$ in $N = R \sin^2 u$.

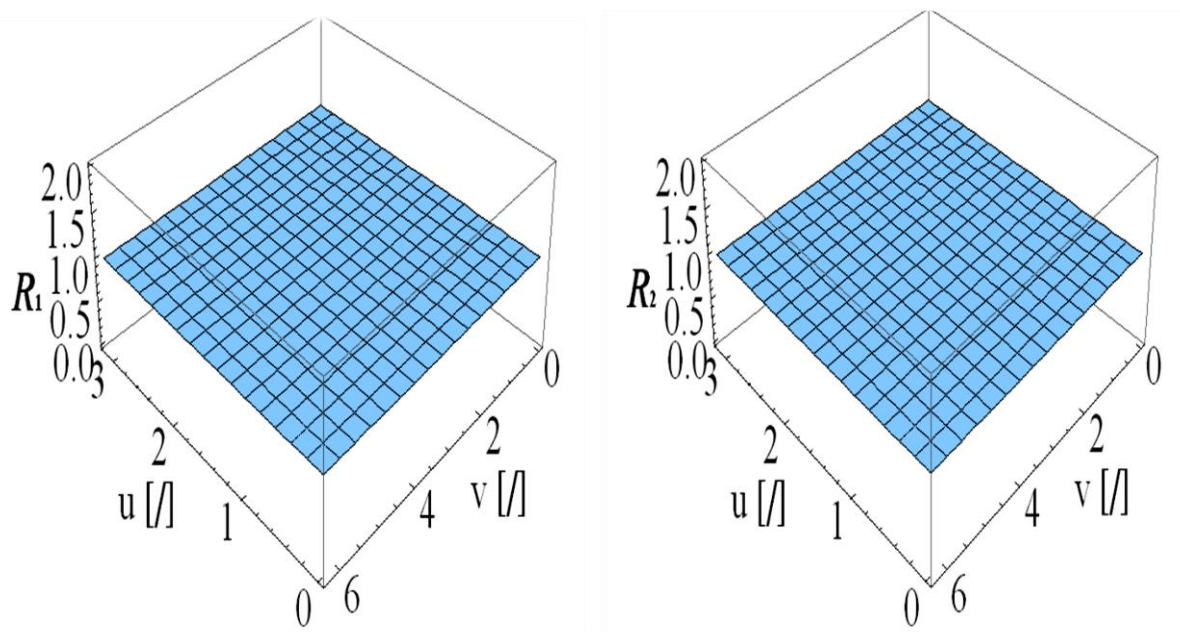
Slike 3.1 do 3.3 so narisane za $R = 1$.



Slika 3.1: Sfera z radijem 1.



Slika 3.2: Gaussova in povprečna ukrivljenost sfere: vidimo, da sta vrednosti pozitivni in konstantni po celem območju sfere.



Slika 3.3: Glavna radija ukrivljenosti R_1 in R_2 sfere v odvisnosti od u in v : sta enaka $R = 1$ po celem območju sfere.

3.2 Elipsoid

Obravnavam splošni elipsoid imenovan tudi triaksialni elipsoid. Implicitna enačba elipsoida podanega v kartezijskem koordinatnem sistemu, je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Sfera je posebna oblika elipsoida pri katerem velja $a = b = c$. Parametrični zapis elipsoida je

$$x = a \sin(u) \cos(v), y = b \sin(u) \sin(v) \text{ in } z = c \cos(u),$$

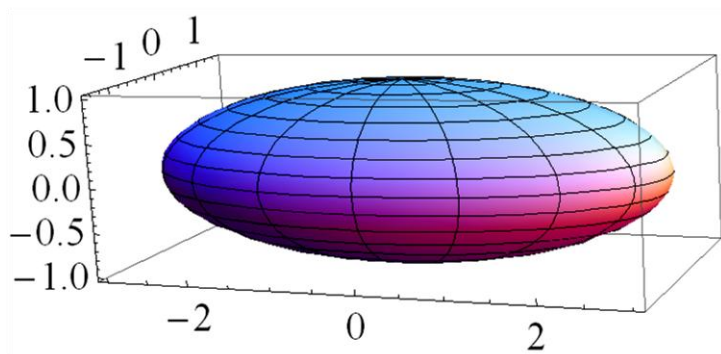
pri čemer velja $u \in [0, \pi]$ in $v \in [0, 2\pi]$.

Koeficienti prve osnovne forme so: $E = (a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u) \cos^2 v + c^2 \sin^2 v$,
 $F = (b^2 - a^2) \cos u \sin u \cos v \sin v$ in $G = (b^2 \cos^2 v + a^2 \sin^2 v) \sin^2 u$.

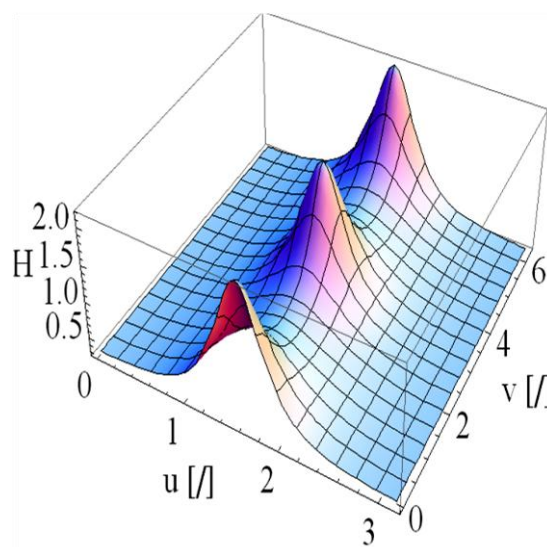
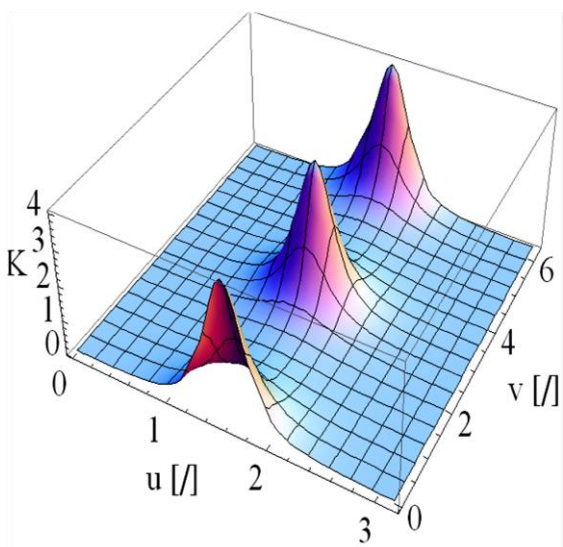
Koeficienti druge osnovne forme pa so:

$$L = \frac{a b c}{\sqrt{a^2 b^2 \cos^2 u + c^2 (b^2 \cos^2 v + a^2 \sin^2 v) \sin^2 u}}, F = 0 \text{ in } G = \frac{a b c \sin^2 u}{\sqrt{a^2 b^2 \cos^2 u + c^2 (b^2 \cos^2 v + a^2 \sin^2 v) \sin^2 u}}.$$

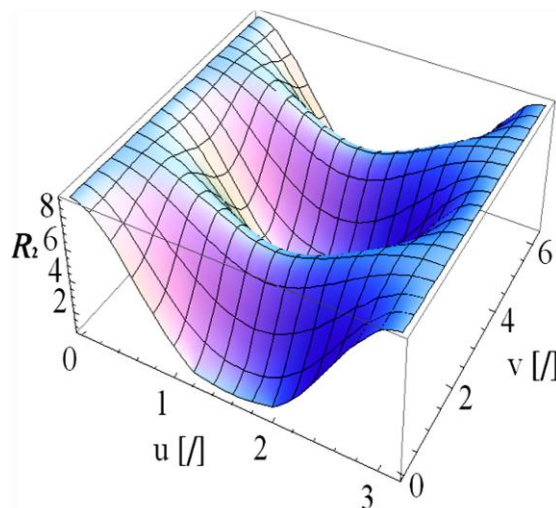
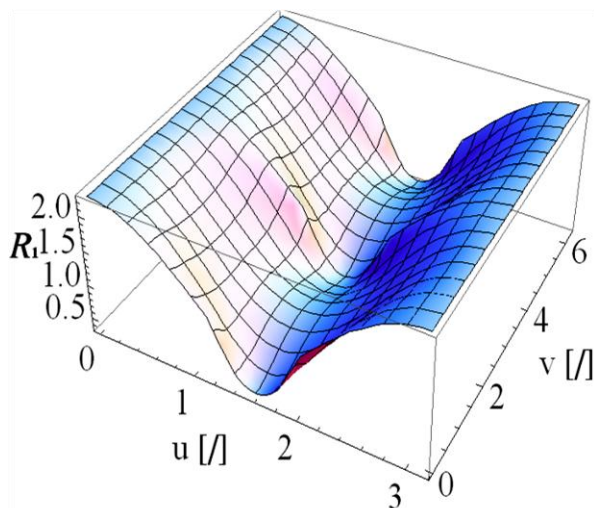
Slike od 3.4 do 3.6 so za $a = 1, b = 2, c = 2,5$.



Slika 3.4: Elipsoid.



Slika 3.5:Gaussova in povprečna ukrivljenost elipsoida: vrednosti za K in H so pozitivne za celotno območje parametrov u in v .



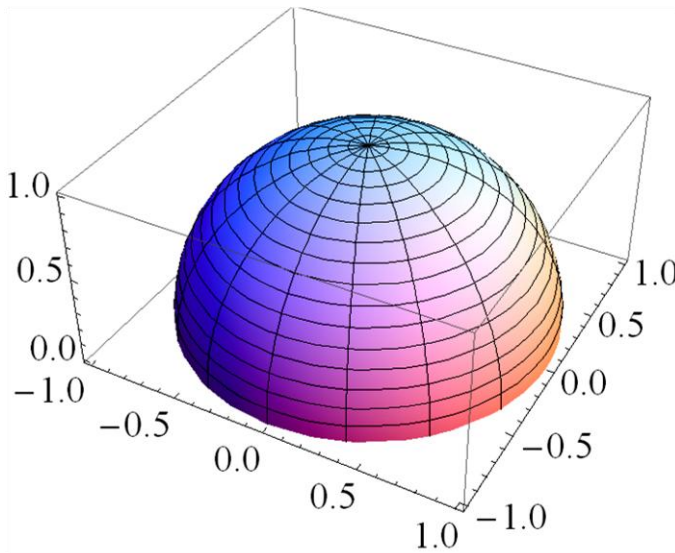
Slika 3.6: Glavna radija ukrivljenosti R_1 in R_2 elipsoida v odvisnosti od u in v : oba sta pozitivna po celotnem območju elipsoida.

3.3 Sferična kupola in sferični elipsoid

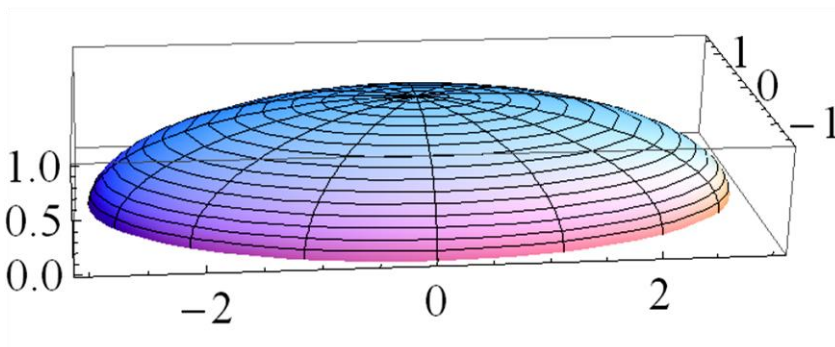
Sferično kupolo in sferični elipsoid bom obravnaval skupaj, saj za njiju veljajo enake opazke. Parametrično ju zapišemo identično, kot smo že zapisali sfero in elipsoid, razlika leži le v definicijskem območju parametra u , sfero in elipsoid se namreč »odreže« z ravnino. Tako so koeficienti prve in druge osnovne forme za sferično kupolo enaki kot pri sferi in koeficienti prve in druge osnovne forme sferičnega elipsoida enaki kot pri elipsoidu.

Za sferično kupolo in sferični elipsoid sem izbral enake konstante kot pri sferi in elipsoidu, za parameter u pa sem izbral pol manjše definicijsko območje $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ker sem pri sferi in elipsoidu izbral $u \in [0, \pi]$ so slike Gaussove ukrivljenosti, povprečne ukrivljenosti ter glavnih radijev ukrivljenosti odrezane pri vrednosti $\pi/2$, na u osi.

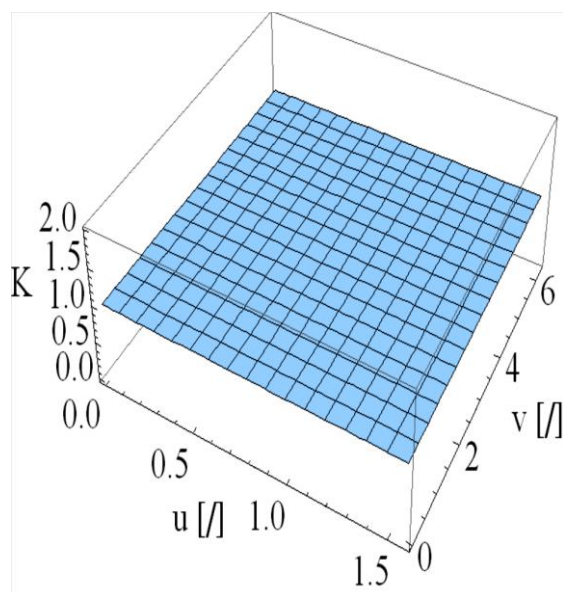
Za vrednosti Gaussove in povprečne ukrivljenosti in glavnih radijev ukrivljenosti veljajo enake opazke kot za sfero in elipsoid.



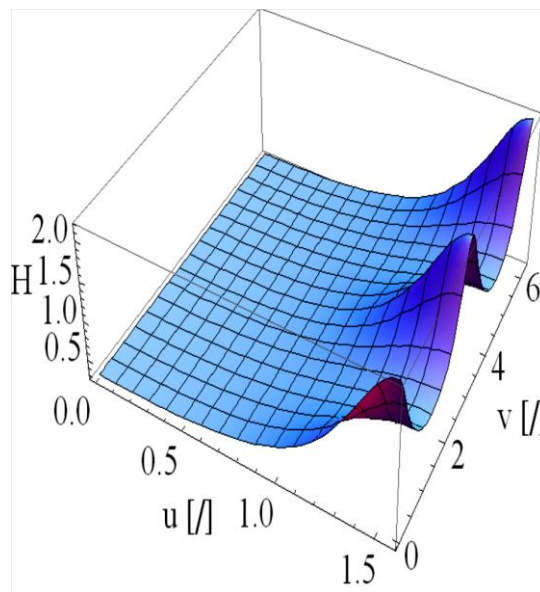
Slika 3.7: Sferična kupola.



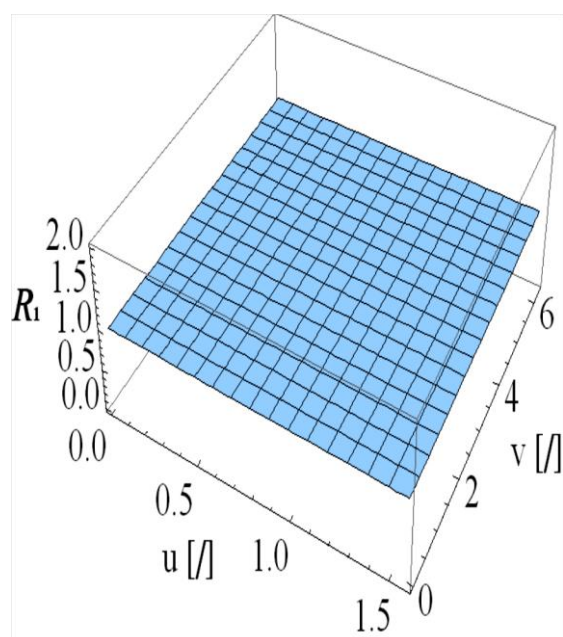
Slika 3.8: Sferični elipsoid.



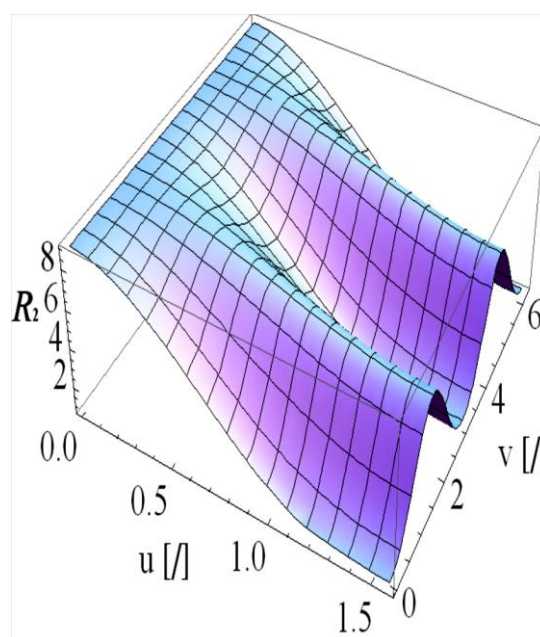
Slika 3.9: Gaussova ukrivljenost sferične kupole.



Slika 3.10: Povprečna ukrivljenost sferičnega elipsoida.



Slika 3.11: R_1 sferične kupole.

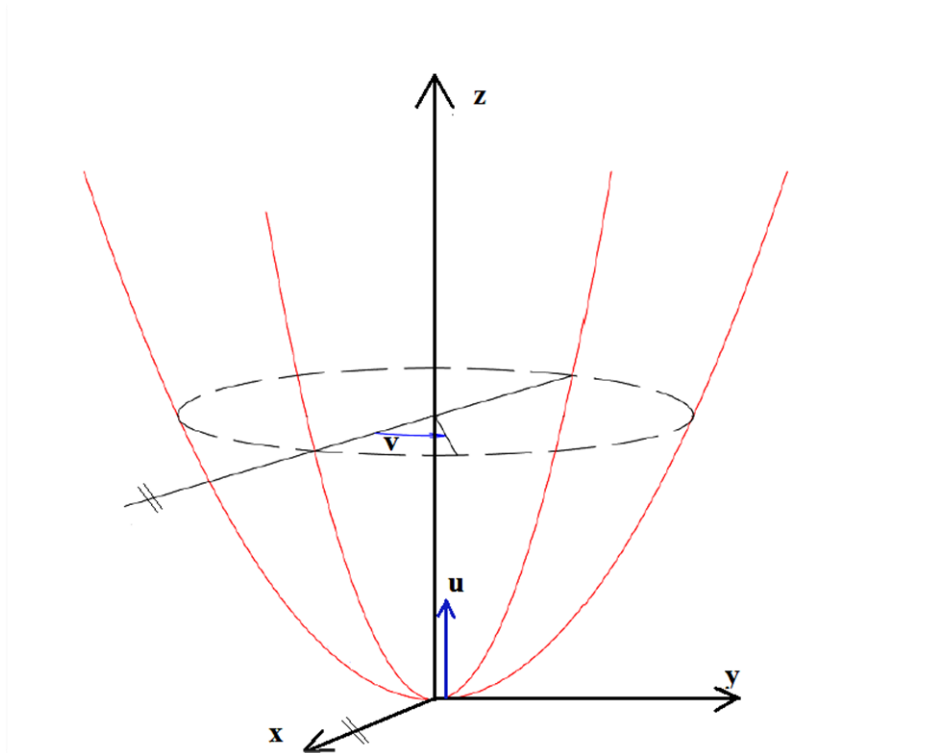


Slika 3.12: R_2 sferičnega elipsoida.

3.4 Paraboloid

Paraboloid dobimo, če vrtimo parabolo okoli neke osi, v našem primeru je ta os z . Eksplicitna enačba paraboloida je $z = a(x^2 + y^2)$.

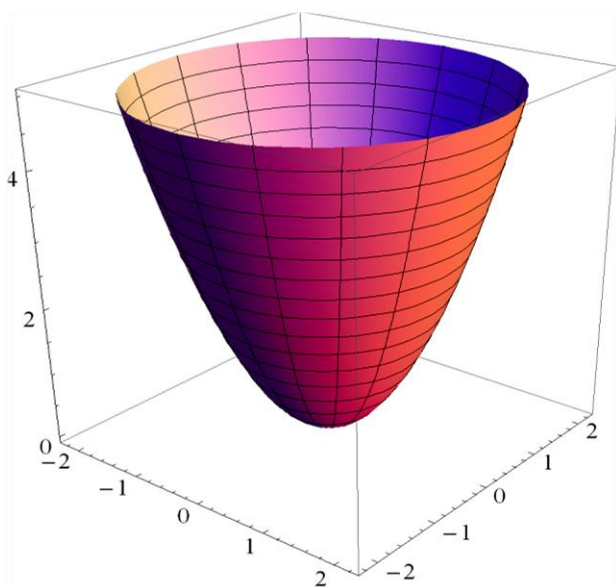
Paraboloid z radijem a in višino h podamo parametrično z enačbami $x(u, v) = \frac{a\sqrt{u}\cos v}{2}$,
 $y(u, v) = \frac{a\sqrt{u}\sin v}{2}$ in $z(u, v) = u$, pri tem je $u \in [0, h]$ in $v \in [0, 2\pi]$.



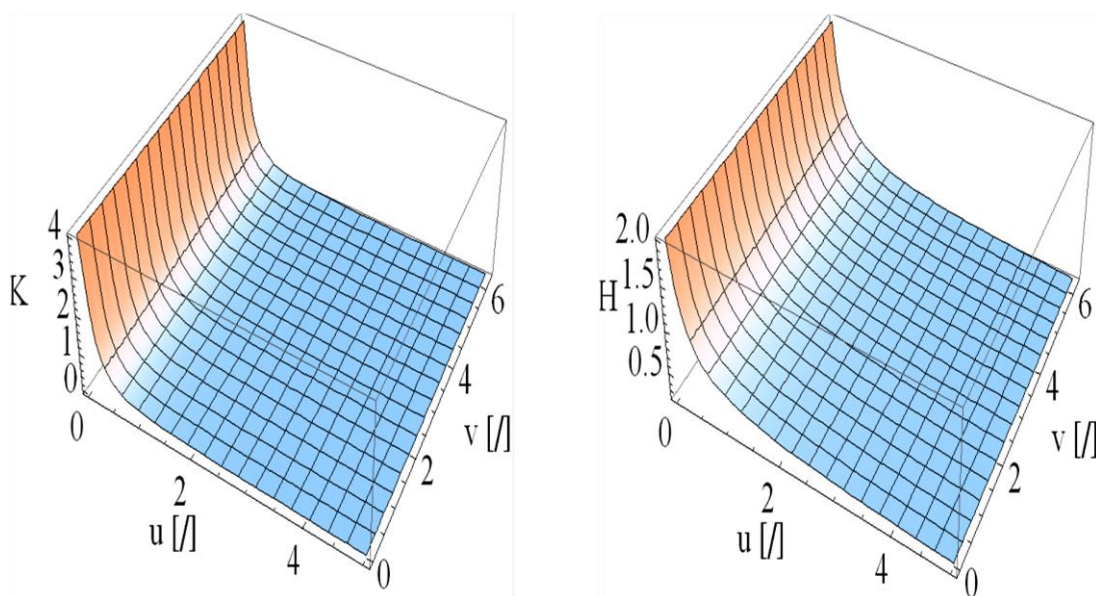
Slika 3.13: Pomen parametrov u in v pri paraboloidu.

Koeficienti prve osnovne forme so $E = 1 + \frac{a^2}{16u}$, $F = 0$ in $G = \frac{a^2 u}{4}$, druge osnovne forme pa $L = \frac{a^2}{2u\sqrt{a^4 + 16a^2u}}$, $M = 0$ in $N = \frac{2a^2 u}{\sqrt{a^4 + 16a^2u}}$.

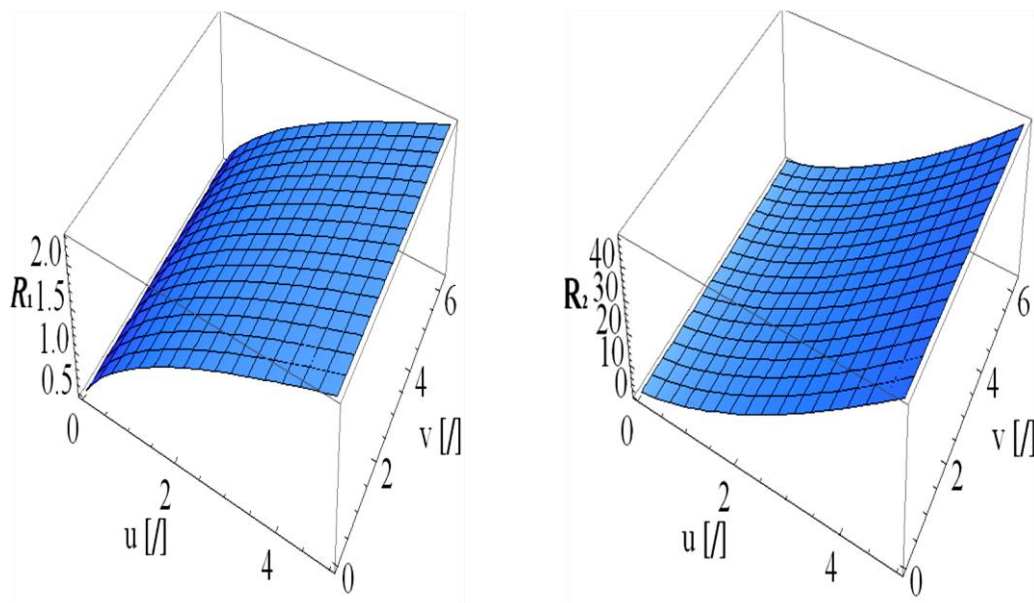
Za primer na slikah 3.14 do 3.16 privzamemo $a = 2$ in $h = 5$.



Slika 3.14: Paraboloid.



Slika 3.15: Gaussova in povprečna ukrivljenost paraboloida: vidimo, da sta obe vrednosti pozitivni, pri čemer gre Gaussova ukrivljenost pri $u = 0$ proti vrednosti 4, povprečna ukrivljenost pa proti 2. To je razumljivo, saj sta vrednosti R_1 in R_2 pri $u = 0$ enaki 0,5 (slika 3.16).



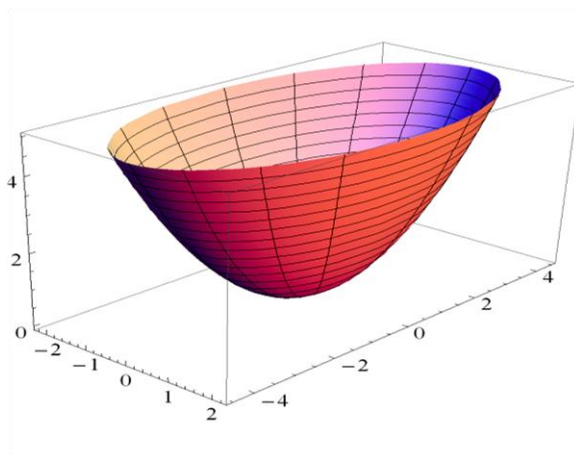
Slika 3.16: Glavna radija ukrivljenosti R_1 in R_2 paraboloida: obe vrednosti sta pozitivni in naraščata z u . Pri tem R_1 narašča konkavno, R_2 pa konveksno.

3.5 Eliptični paraboloid

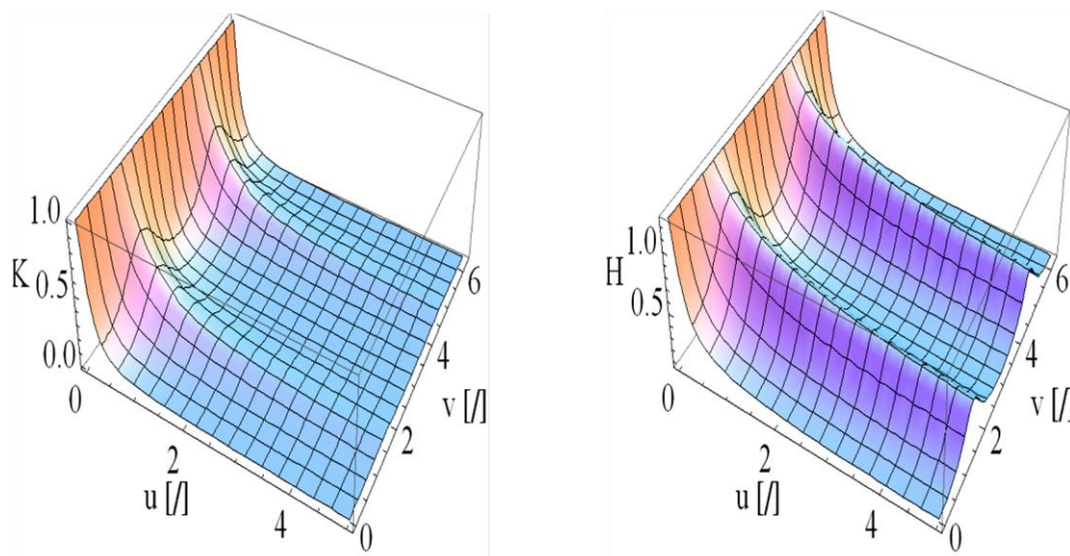
Za razliko od navadnega paraboloida, katerega zgornji rob je krožnica, je pri eliptičnem paraboloidu zgornji rob elipsa. Parametrizacija je skoraj identična, le da je pri členu $y(u, v)$ namesto a , konstanta $b \neq a$. To ima za posledico drugačno obliko in drugačne koeficiente prve in druge osnovne forme.

$$\begin{aligned} \text{Koeficienti prve osnovne forme so } E &= 1 + \frac{a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v}{16u}, F = \frac{1}{4} (b^2 - a^2) \sin 2v \text{ in} \\ G &= \frac{1}{4} u (b^2 \cos^2 v + a^2 \sin^2 v), \text{ druge pa } L = \frac{ab}{2u \sqrt{16b^2 u \cos^2 v + a^2 (b^2 + 16u \sin^2 v)}}, M = 0 \text{ in} \\ N &= \frac{2abu}{\sqrt{16b^2 u \cos^2 v + a^2 (b^2 + 16u \sin^2 v)}}. \end{aligned}$$

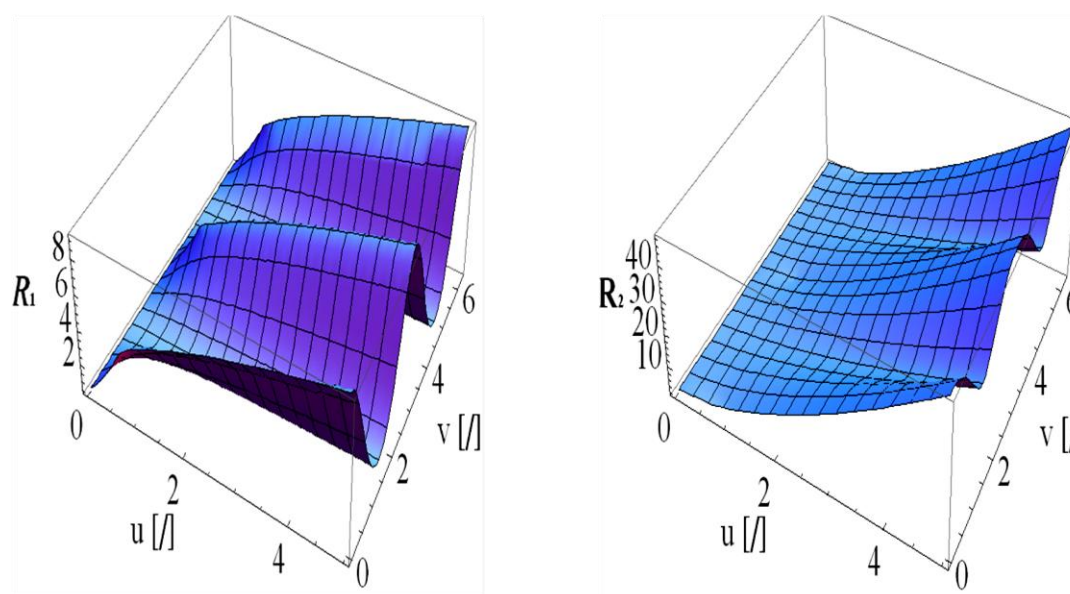
Konstante za primere na slikah 3.17 do 3.19 so $a = 2$, $b = 4$, $h = 5$.



Slika 3.17: Eliptični paraboloid.



Slika 3.18: Gaussova in povprečna ukrivljenost eliptičnega paraboloida: podobno kot pri paraboloidu sta obe vrednosti pozitivni in vidimo, da se za razliko od paraboloida, vrednost spreminja tudi po osi v .



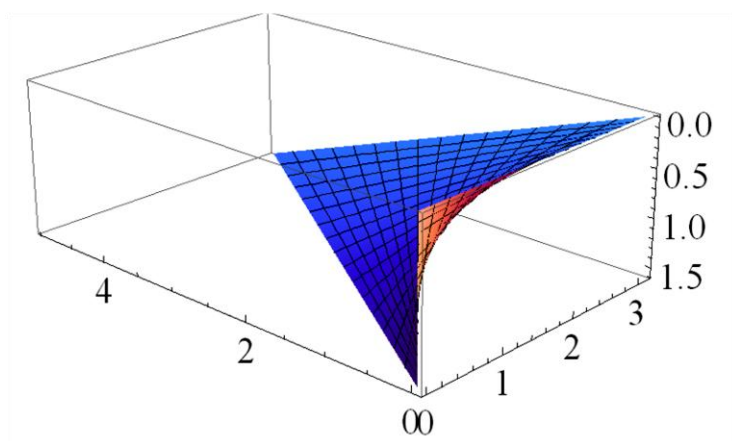
Slika 3.19: Glavna radija ukrivljenosti R_1 in R_2 eliptičnega paraboloida: obe vrednosti sta pozitivni, poleg tega se za razliko od paraboloida vrednosti spreminjata tudi po osi v . Pri vrednosti $u = 0$ je $R_1 = 0,5$ in $R_2 = 2$.

3.6 Hiperbolični paraboloid

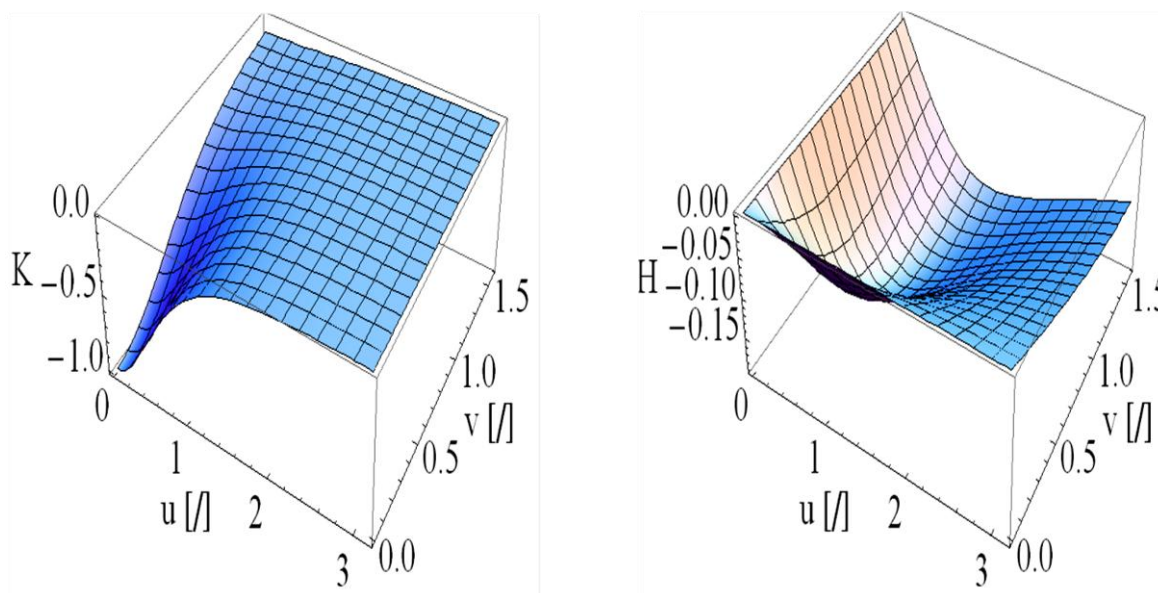
Hiperbolični paraboloid je sedlasta ploskev. Eksplicitno zapišemo enačbo v kartezijskih koordinatah kot $z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$. Parametrični zapis enačb hiperboličnega paraboloida je $x = u$, $y = v$ in $z = u v$, pri čemer sta u in v elementa množice realnih števil.

Koeficienti prve osnovne forme so $E = 1 + v^2$, $F = u v$ in $G = 1 + u^2$, druge pa $L = 0$, $M = \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}$ in $N = 0$.

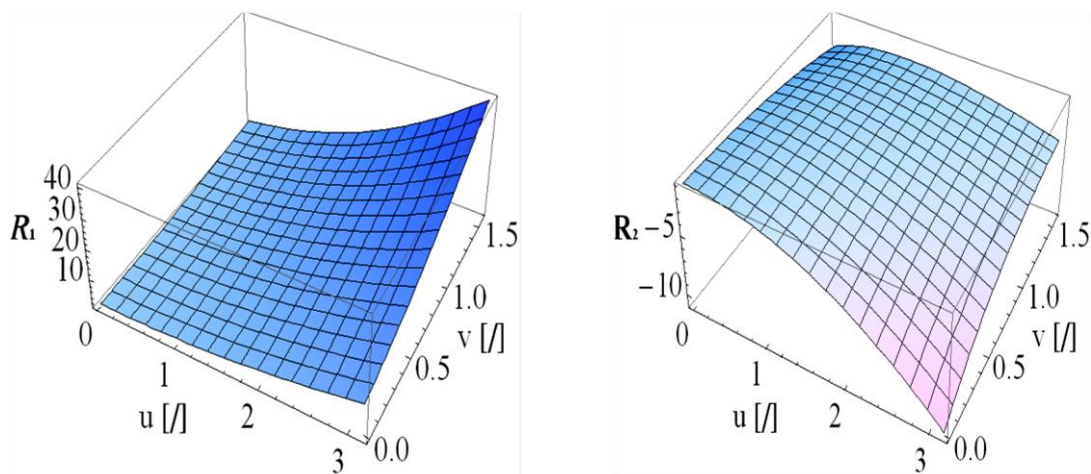
Za primer na slikah 3.20 do 3.22 sem izbral $u \in [0, \pi]$ in $v \in [0, \frac{\pi}{2}]$.



Slika 3.20: Hiperbolični paraboloid.



Slika 3.21: Gaussova in povprečna ukrivljenost hiperboličnega paraboloida: opazimo, da sta vrednosti Gaussove in povprečne ukrivljenost manjši ali enaki nič ($K \leq 0, H \leq 0$).



Slika 3.22: Glavna radija ukrivljenosti R_1 in R_2 hiperboličnega paraboloida: Vidimo, da velja $R_1 \geq 0$ in $R_2 \leq 0$ za vse vrednosti parametrov u in v .

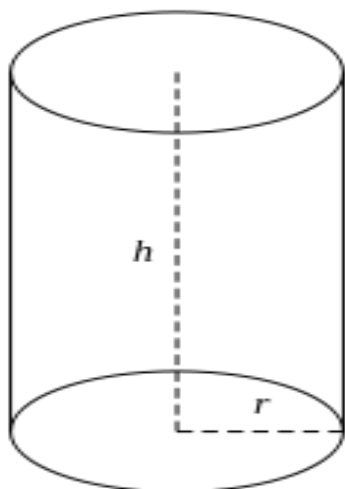
3.7 Valj

Beseda valj običajno označuje pokončni krožni valj - to je telo, ki je omejeno z dvema skladnima in vzporednima krogoma in plaščem. Plašč je kriva ploskev, ki povezuje krožnici obeh krogov. Če plašč razgrnemo v ravnino, dobimo pravokotnik. Pokončni krožni valj je rotacijsko simetričen glede na premico, ki jo imenujemo os valja.

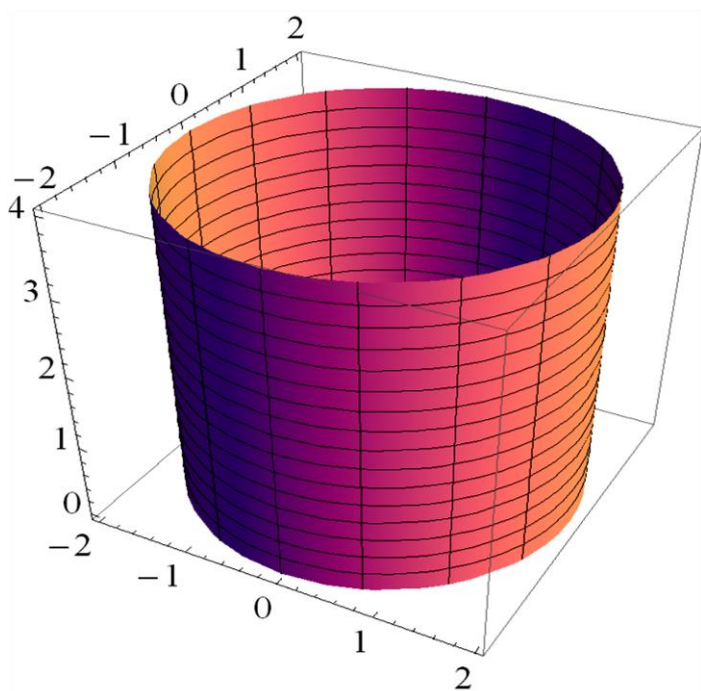
Parametrično opišemo valj z $x = r \cos u$, $y = r \sin u$ in $z = v$, pri tem velja $u \in [0, 2\pi]$ in $v \in [0, h]$. Koeficienti prve osnovne forme valja so $E = a^2$, $F = 0$ in $G = 1$, druge pa $L = a$, $M = 0$ in $N = 0$.

Pri valju zamenjam κ_1 in κ_2 iz (2.25) in (2.26) z $\kappa_1 = H - \sqrt{H^2 - K}$ in $\kappa_2 = H + \sqrt{H^2 - K}$.

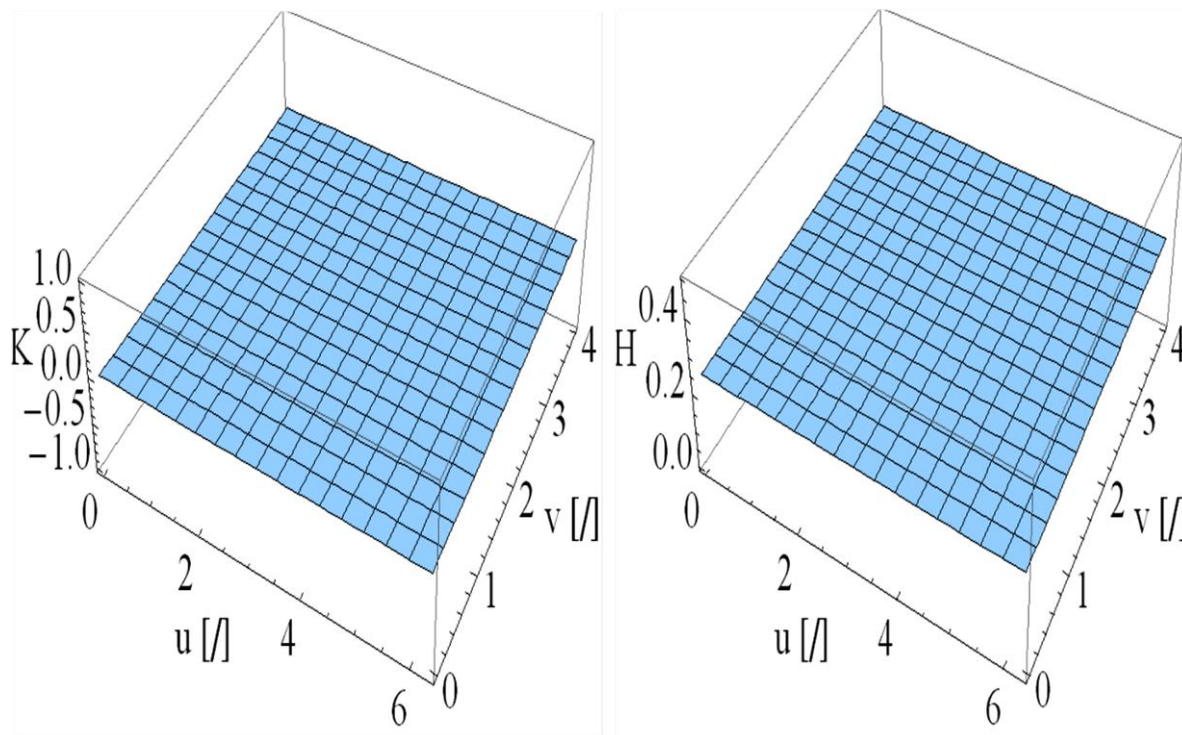
Za primer na slikah 3.24 do 3.26 velja $r = 2$ in $h = 4$.

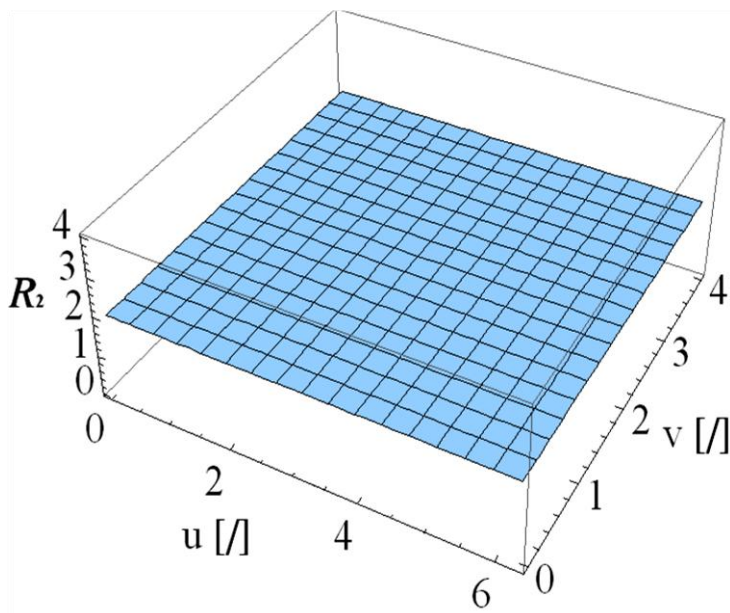


Slika 3.23: Višina (h) in radij (r) valja.
(<http://mathworld.wolfram.com/Cylinder.html> (Pridobljeno 5. 8. 2013.))



Slika 3.24: Valj.

Slika 3.25: Gaussova in povprečna ukrivljenost valja: opazimo, da sta vrednosti konstantni po celotnem območju parametrov u in v , in sicer $K = 0$ ter $H > 0$.



Slika 3.26: Glavni radij ukrivljenosti R_2 valja, za $r = 2$: vidimo, da je R_2 konstanten po celotnem območju parametrov u in v , in sicer velja $R_2 = r$. Vrednost glavnega radija ukrivljenosti R_1 pa gre proti neskončnosti.

3.8 Stožec

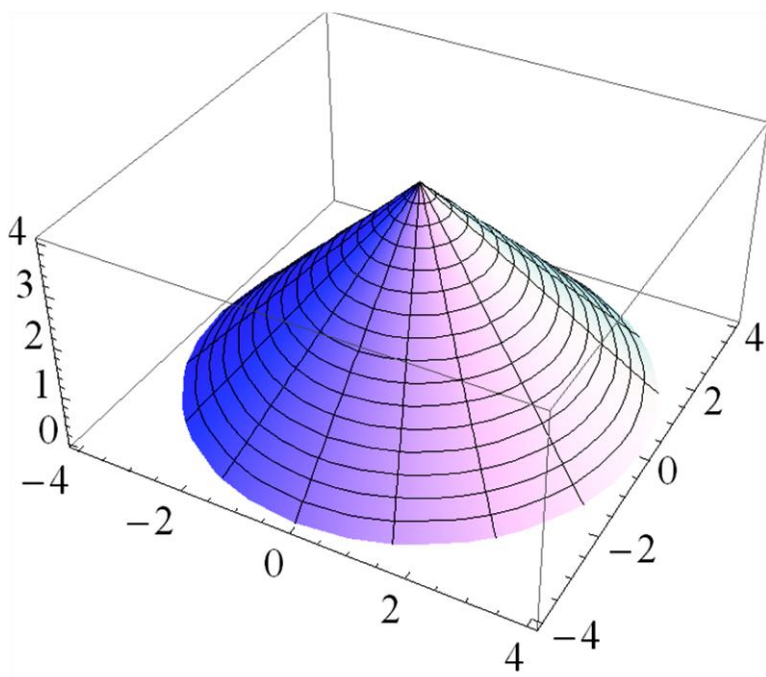
Beseda stožec običajno označuje pokončni krožni stožec – to je telo, ki je omejeno s krogom (osnovna ploskev) in krivo ploskvijo v obliki krožnega izseka (plašč). Pokončni krožni stožec je rotacijsko simetričen glede na premico, ki jo imenujemo os stožca, in ima enako dolge stranice (stranske robove).

Stožec z višino h in radijem r , ki je orientiran v smeri z osi in ima osnovno ploskev v x - y ravnini, lahko parametrično opišemo z enačbami $x = \frac{h-v}{h} r \cos u$, $y = \frac{h-v}{h} r \sin u$ in $z = v$, pri čemer je $u \in [0, h]$ in $v \in [0, 2\pi]$.

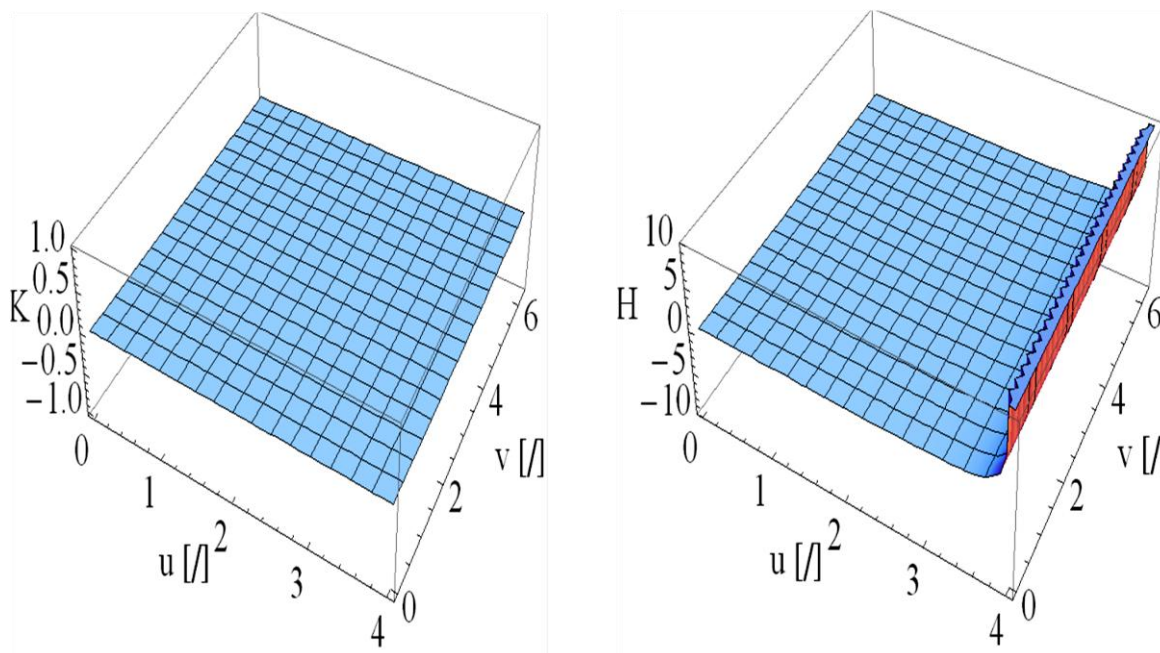
Koeficienti prve osnovne forme stožca so $E = \frac{a^2 (h-v)^2}{h^2}$, $F = 0$ in $G = 1 + \frac{a^2}{h^2}$, druge pa $L = \frac{h^2 \sqrt{\frac{a^2 (a^2 + h^2)(h-v)^2}{h^4}}}{a^2 + h^2}$, $M = 0$ in $N = 0$.

Znova zamenjam κ_1 in κ_2 iz (2.25) in (2.26) z $\kappa_1 = H - \sqrt{H^2 - K}$ in $\kappa_2 = H + \sqrt{H^2 - K}$.

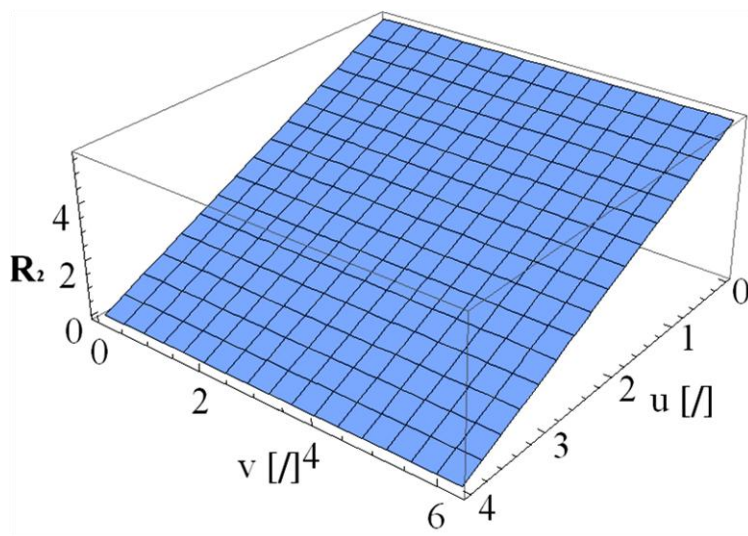
Za primer na slikah 3.27 do 3.29 velja $r = 4$ in $h = 4$.



Slika 3.27: Stožec.



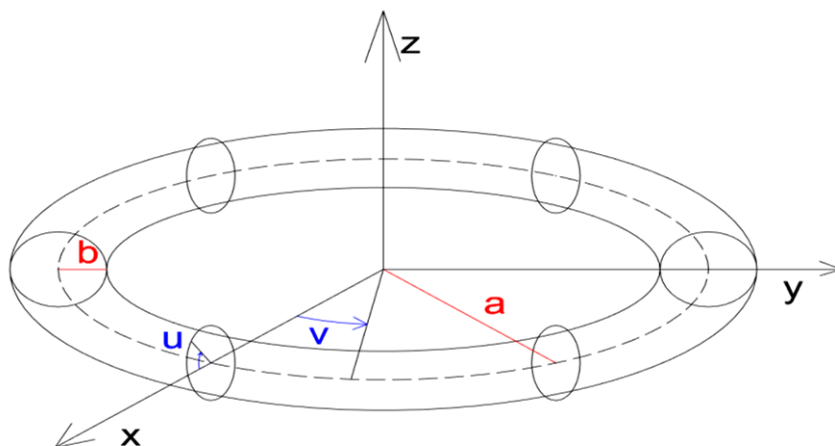
Slika 3.28: Gaussova in povprečna ukrivljenost stožca: Vrednost K je po celotnem območju parametrov u in v enaka nič. Ker je pri $u = 4$ vrednost $R_2 = 0$ (slika 3.29), gre vrednost povprečne ukrivljenosti pri $u = 4$ proti neskončnosti, zato sem maksimalno vrednost povprečne ukrivljenosti omejil na 10.



Slika 3.29: Glavni radij ukrivljenosti R_2 stožca: opazimo, da je $R_2 \geq 0$. Podobno kot pri valju, gre vrednost glavnega radija ukrivljenosti R_1 proti neskončnosti.

3.9 Torus

Torus dobimo z vrtenjem krožnice s polmerom b oddaljene za razdaljo a od neke osi. V našem primeru je to z os. Za lažjo predstavo si pogledjmo sliko 3.30.

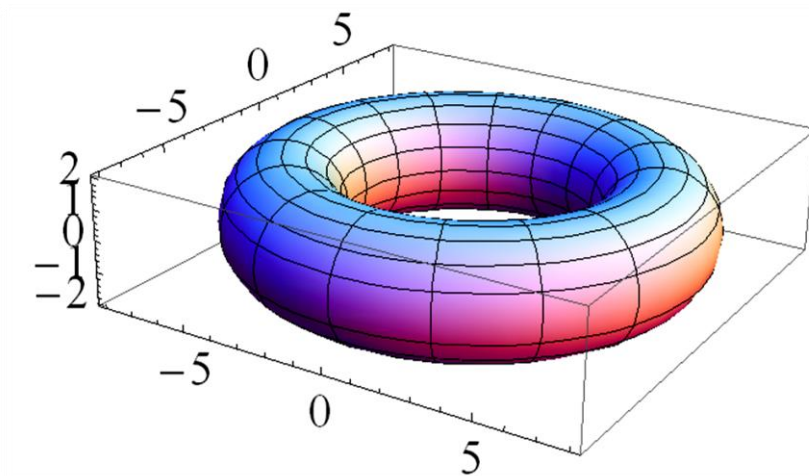


Slika 3.30: Pomen konstant a in b , ter parametrov u in v pri torusu.

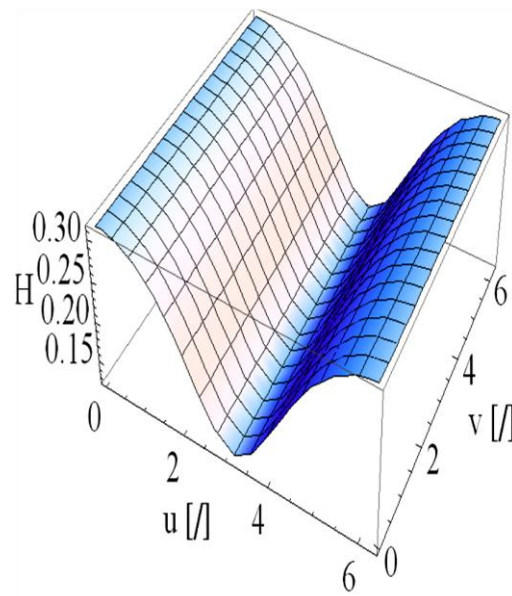
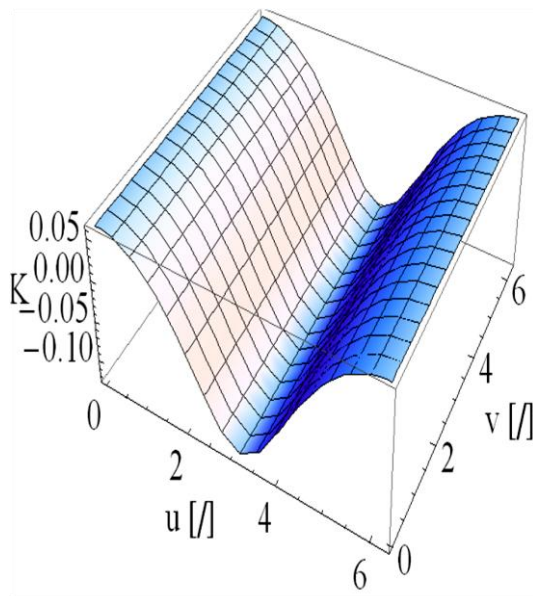
Zapišemo eksplicitno enačbo torusa, $z = \sqrt{a^2 - (b - \sqrt{x^2 + y^2})^2}$. Parametrično opišemo torus z enačbami $x = (a + b \cos u) \cos v$, $y = (a + b \cos u) \sin v$ in $z = b \sin u$, pri tem velja $u \in [0, 2\pi]$ in $v \in [0, 2\pi]$.

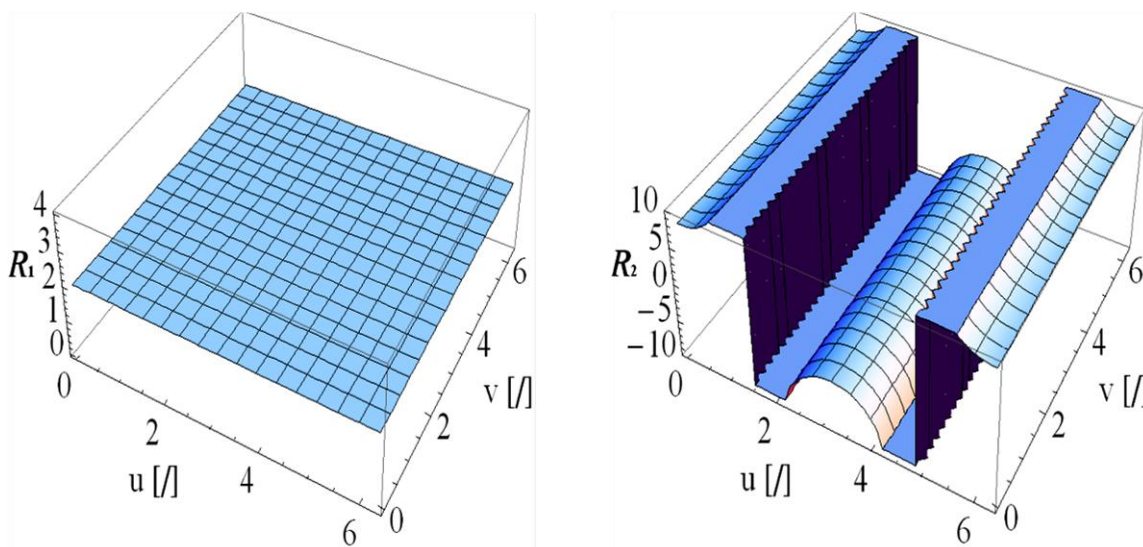
Koeficienti prve osnovne forme torusa so $E = b^2$, $F = 0$ in $G = (a + b \cos u)^2$, druge pa $L = \frac{\sqrt{b^2 (a + b \cos u)^2}}{a + b \cos u}$, $M = 0$ in $N = \frac{\cos u \sqrt{b^2 (a + b \cos u)^2}}{b}$.

Za primer na slikah 3.31 do 3.33 velja $a = 6$ in $b = 2$.



Slika 3.31: Torus.

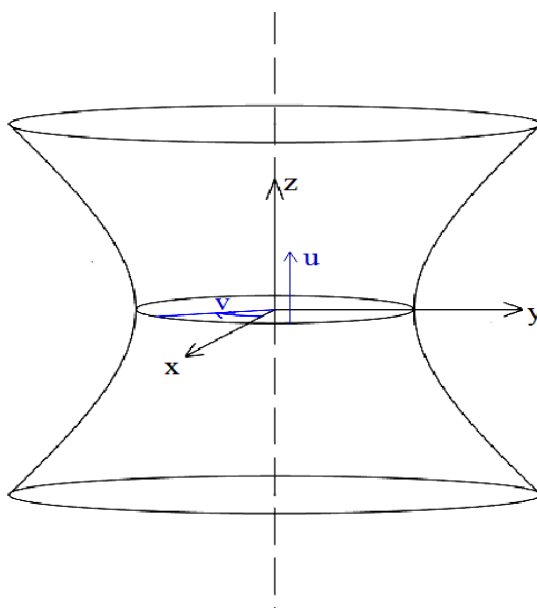
Slika 3.32: Gaussova in povprečna ukrivljenost torusa: opazimo, da zavzema K tako pozitivne kot negativne vrednosti, medtem ko so vrednosti H pozitivne za vse vrednosti parametrov u in v .



Slika 3.33: Glavna radija ukrivljenosti R_1 in R_2 torusa: vrednosti R_1 so konstantne in večje od nič za vse vrednosti parametrov u in v , medtem ko so vrednosti R_2 tako pozitivne, kot tudi negativne. Vrednosti R_2 gredo na mestih, kjer je $K = 0$ proti minus neskončno, zato sem omejil vrednosti na območje od -10 do 10.

3.10 Hiperboloid

Hiperboloid nastopa v dveh oblikah: kot enodelni ali dvodelni. Za potrebe gradbeništva je bolj zanimiv prvi. Obliko hiperboloida imajo pogosto hladilni stolpi v elektrarnah. Opišemo ga lahko na različne načine. Iz konstrukcijskega vidika je ugoden način opisa hiperboloida, ki ga prikaže kot mrežo vzporednikov in ravnih poševnih premic od dna do vrha hiperboloida. To je odličen primer prikaza težje predstavljivega dejstva, da lahko ukrivljene ploskve sestavljamo z množico ravnih premic, ki se po prostoru pomikajo po posebnemu pravilu. Tako vidimo, da spada hiperboloid med premonosne ploskve.

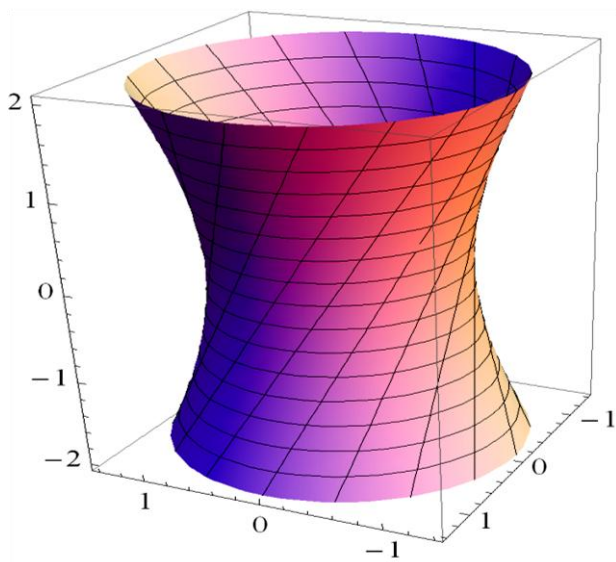


Slika 3.34: Pomen parametrov u in v pri hiperboloidu.

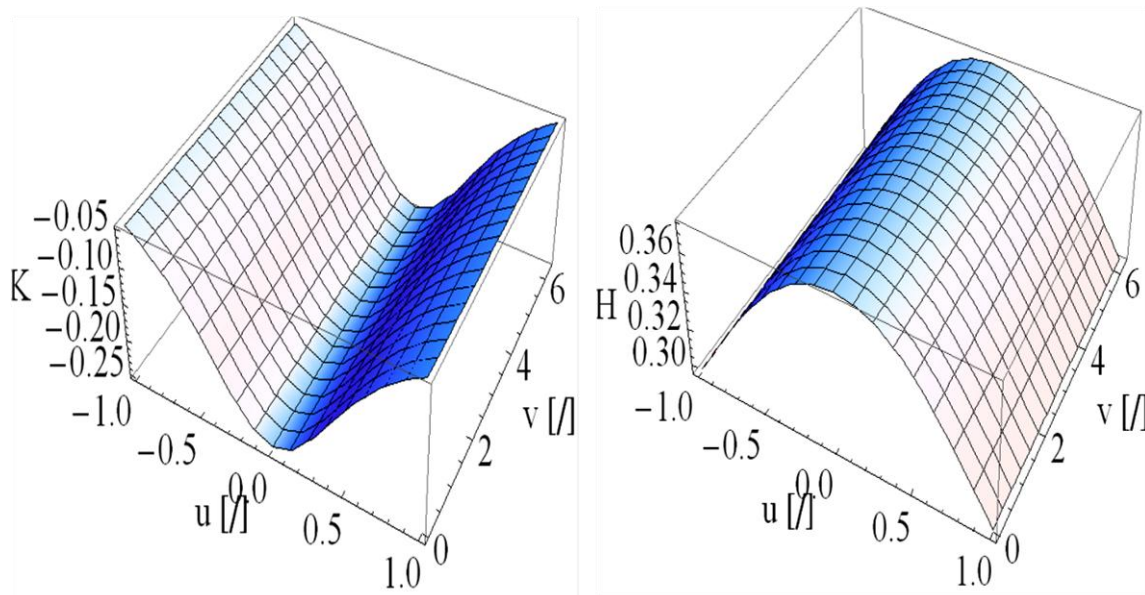
Parametrično lahko opišemo hiperboloid z enačbami $x = a (\cos v - u \sin v)$,
 $y = a (\sin v + u \cos v)$ in $z = b u$, pri čemer velja $v \in [0, 2\pi]$ in $u \in \mathfrak{R}$.

Koeficienti prve osnovne forme so $E = a^2 + b^2$, $F = a^2$ in $G = a^2 (1 + u^2)$, druge pa $L = 0$,
 $M = \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2(b^2 + (a^2 + b^2)u^2)}}$ in $N = \frac{a^2 b (1 + u^2)}{\sqrt{a^2(b^2 + (a^2 + b^2)u^2)}}$.

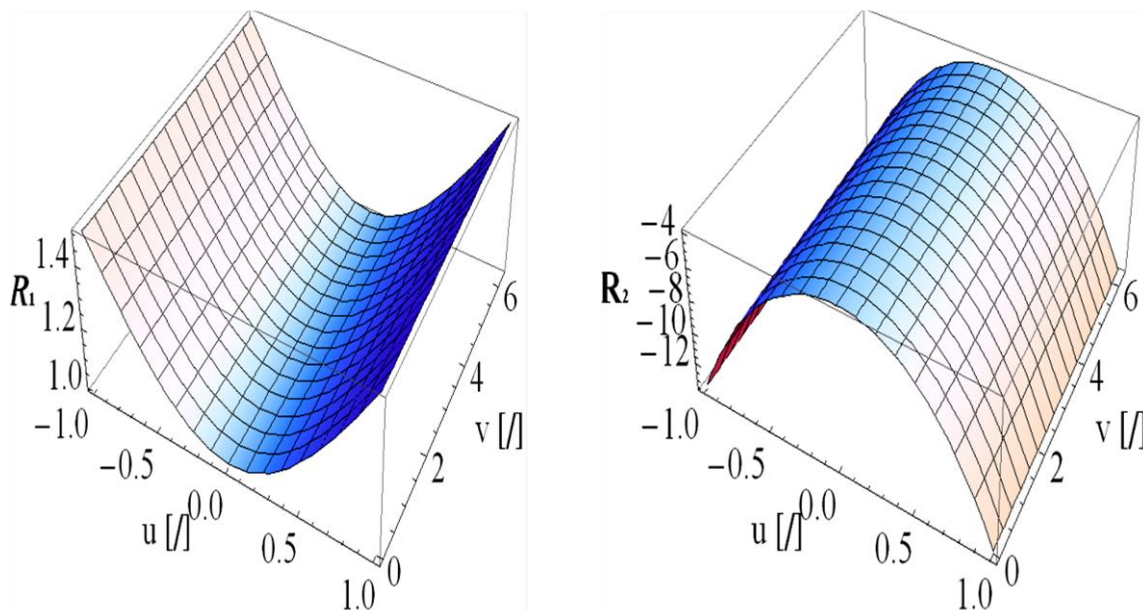
Za primer na slikah 3.35 do 3.37 sem izbral $a = 1$ in $b = 2$.



Slika 3.35: Hiperboloid.



Slika 3.36: Gaussova in povprečna ukrivljenost hiperboloida: opazimo, da za vse vrednosti parametrov u in v velja $K < 0$ in $H > 0$.



Slika 3.36: Glavna radija ukrivljenosti R_1 in R_2 hiperboloida: opazimo, da za vse vrednosti parametrov u in v velja $R_1 > 0$ in $R_2 < 0$.

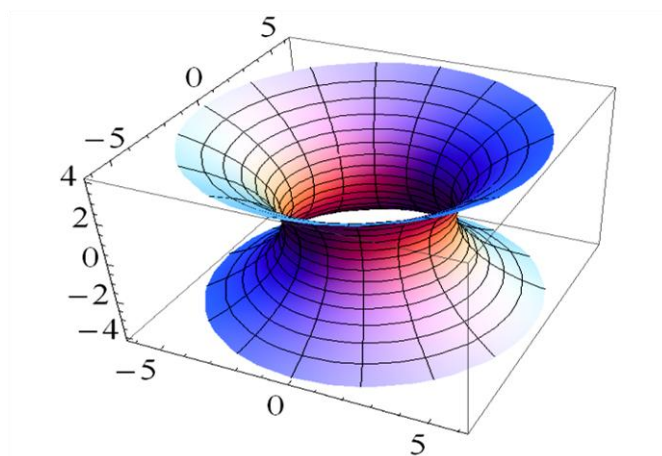
3.11 Katenoid

Katenoid dobimo tako, da zavrtimo verižnico okrog osi z . Je prva odkrita minimalna ploskev. To so ploskve z najmanjšo površino med dvema togima robovoma.

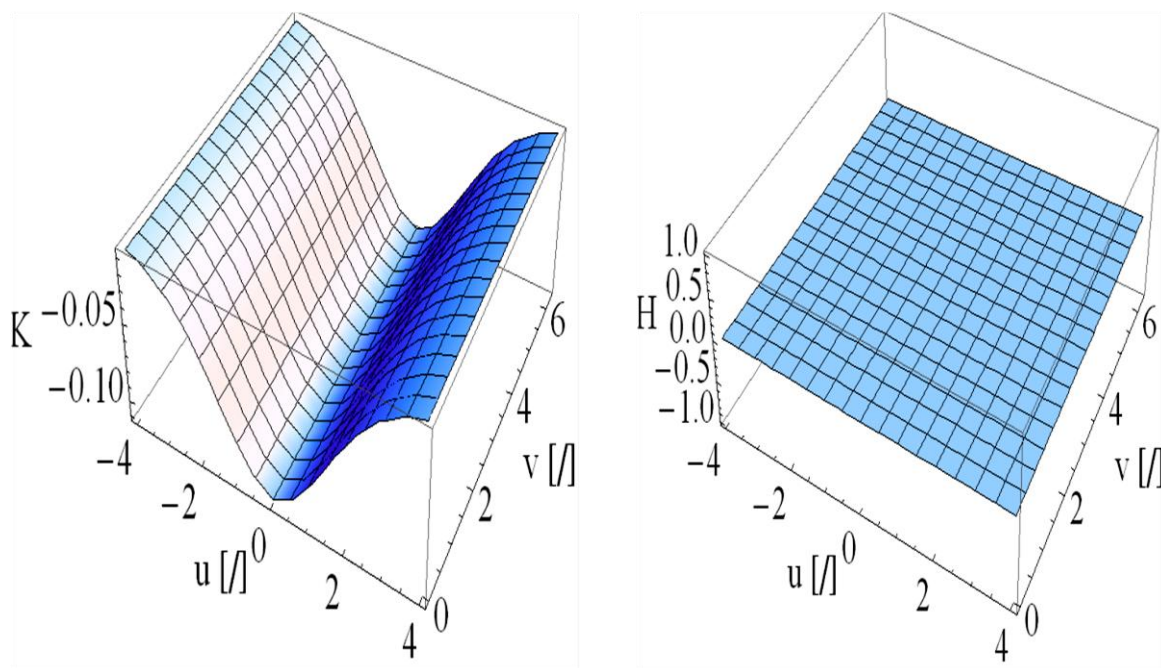
Katenoid parametrično opišemo z enačbami $x = c \cosh \left[\frac{u}{c} \right] \cosh v$, $y = c \cosh \left[\frac{u}{c} \right] \sin v$ in $z = b u$, pri čemer velja $v \in [0, 2\pi]$ in $u \in \mathfrak{R}$.

Koeficienti prve osnovne forme katenoida so $F = \cosh \left[\frac{u}{c} \right]^2$, $F = 0$ in $G = c^2 \cosh \left[\frac{u}{c} \right]^2$, druge pa $L = -\frac{1}{c}$, $M = 0$ in $N = c$.

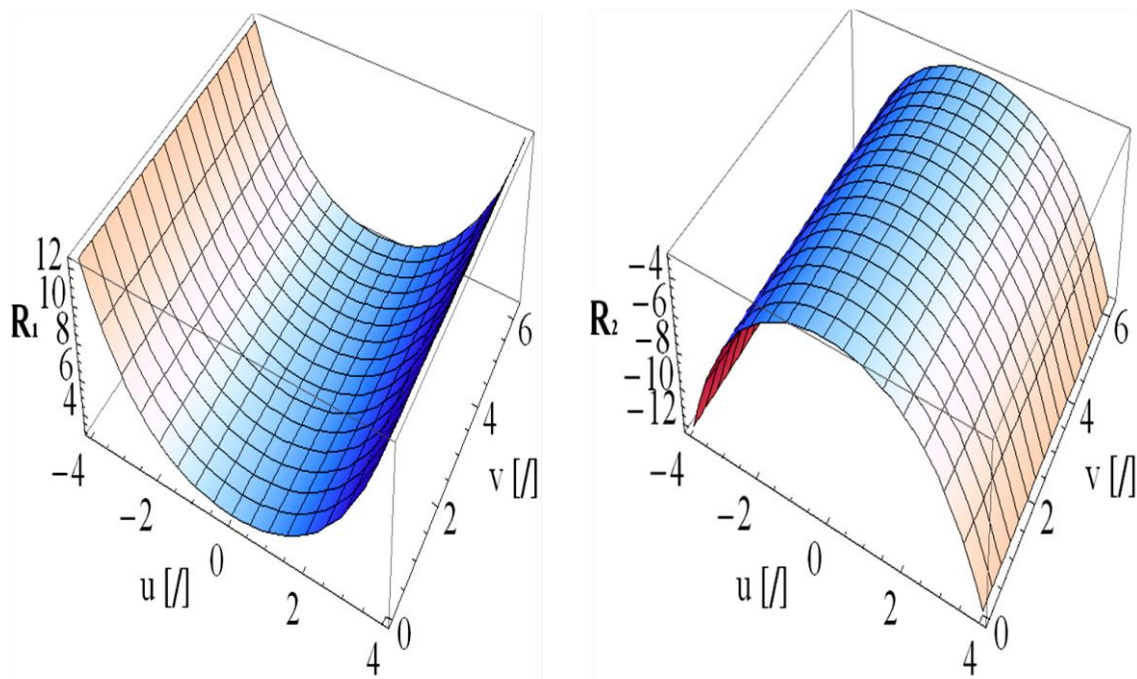
Za primer na slikah 3.37 do 3.39 sem izbral konstanto $c = 3$ in za $u \in [-4, 4]$.



Slika 3.37: Katenoid.



Slika 3.38: Gaussova in povprečna ukrivljenost katenoida: vidimo, da je $K < 0$ in $H = 0$ za vse vrednosti parametrov u in v .



Slika 3.39: Glavna radija ukrivljenosti R_1 in R_2 katenoida: opazimo, da velja $R_1 = -R_2$ za vse vrednosti parametrov u in v .

4 POGOSTE SKUPINE PLOSKEV

Ploskve delimo glede na njihove lastnosti v različne skupine. Vse ploskve, ki sem jih obravnaval, razen hiperboličnega paraboloida, so rotacijske ploskve.

Rotacijske ploskve so ploskve, ki nastanejo z vrtenjem (rotacijo) krivulje (tvorilke) v poljubni ravnini okrog premice (vrtilne osi), ki leži v isti ravnini.

Premonosne ploskve so ploskve, ki jih lahko tvorimo s premikanjem premice po posebnem pravilu po prostoru. Izmed ploskev, ki sem jih obravnaval, so takšne hiperbolični paraboloid, valj, stožec in hiperboloid.

Odvojna ploskev je premonosna ploskev, ki je ogrinjača družine ravnin. Če lahko premonosno ploskev razgrnemo v ravnino, ji pravimo odvojna ploskev. Vsaka premonosna ploskev ni odvojna. Za odvojne ploskve je Gaussova ukrivljenost v vseh točkah enaka nič, $K = 0$. (Bronštejn, I. N., Šemendajev, K. A., Musiol, G., Muhlig, H. 2009.)

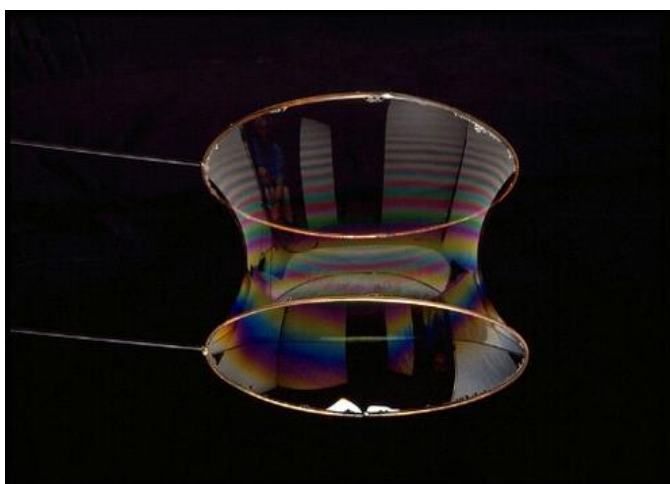
Takšna primera sta valj in stožec, pri katerih gre eden od radijev ukrivljenosti proti neskončnosti.

Sinklastična ploskev je ploskev pri kateri je Gaussova ukrivljenost povsod večja od nič, $K > 0$. To pomeni, da imata glavna radija ukrivljenosti pozitivne vrednosti. Takšne obravnavane ploskve so sfera, elipsoid, sferična kupola, sferični elipsoid, navadni paraboloid in eliptični paraboloid.

Antiklastična ploskev je tista, ki ima Gaussovo ukrivljenost povsod manjšo od nič, $K < 0$. To pomeni, da imata glavna radija ukrivljenosti drugačna predznaka. Takšni ploskvi sta hiperboloid in hiperbolični paraboloid.

Minimalne ploskve so ploskve, katerih povprečna ukrivljenost H , je v vseh točkah enaka nič, $H = 0$. To pomeni, da velja $R_1 = -R_2$. (Bronštejn, I. N., Šemendajev, K. A., Musiol, G., Muhlig, H. 2009.)

Takšna obravnavana ploskev je katenoid. Katenoid je prva odkrita minimalna ploskev. Primer katenoida v naravi predstavlja ploskev, ki jo tvori sloj milnice, če v milnico potopimo dva obroča (slika 4.1).



Slika 4.1: Primer katenoida v naravi, dva obroča potopljena v film milnice.

(<http://sciencereview.berkeley.edu/article/rising-above-plateaus-problem/>, (Pridobljeno 12.6. 2013.))

5 PROGRAM RHINOCEROS

5.1 NURBS modeliranje s programom *Rhinoceros*

NURBS (non-uniform rational basis - splines) ali zlepki, so matematične forme, ki lahko modelirajo razne oblike, od 2-D linij, krožnic, lokov ali kvadratov do kompleksnih 3-D poljubno oblikovanih ploskev. Zaradi njihove fleksibilnosti in natančnosti, se lahko NURBS modeli uporabljajo v mnogih procesih od ilustracije in animacije do proizvodnje.

NURBS so industrijski standard za oblikovalce, ki oblikujejo različne izdelke kompleksnih oblik, oblike izdelkov so poljubne in hkrati zvezne.

Program *Rhinoceros* je namenjen risanju in oblikovanju kompleksnih ploskev in teles: uporablja se v navtiki, letalstvu, avtomobilski industriji, arhitekturi, gradbeništvu in oblikovanju industrijskih izdelkov in pohištva, hišnih pripomočkov, zdravstvene in športne oprem, itd.

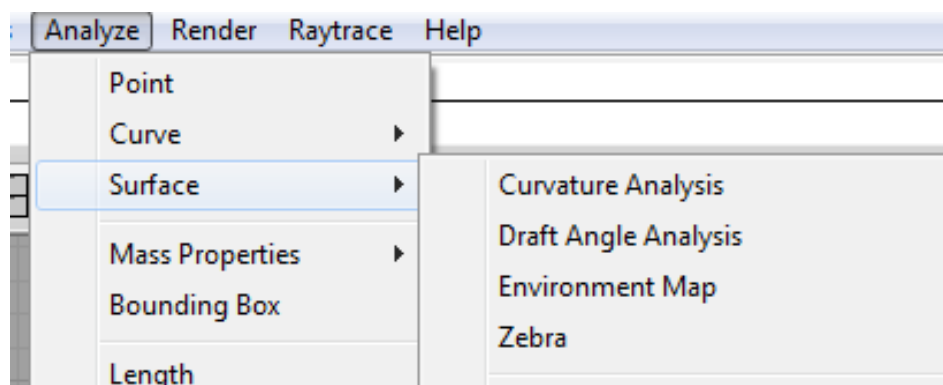
V okviru te diplomske naloge sem se spoznal z nekaj osnovami programa *Rhinoceros* in z njim izrisal nekaj ploskev. Spoznal sem se tudi z metodami analiziranja ploskev, ki jih program ponuja.

5.2 Vizualna analiza ploskev v programu *Rhinoceros*

NURBS krivuljo in ploskev definira njen red (stopnja + 1), množica uteženih kontrolnih točk in vozliščni vektorji. Medtem, ko krivuljo opisujemo z enim parametrom, ploskev opisujemo z dvema. Kontrolne točke lahko ležijo ali na krivulji oz. ploskvi ali izven. Na tak način imamo dober nadzor nad njihovim obnašanjem, kar omogoča učinkovito modeliranje in tudi analiziranje izrisanih krivulj in ploskev.

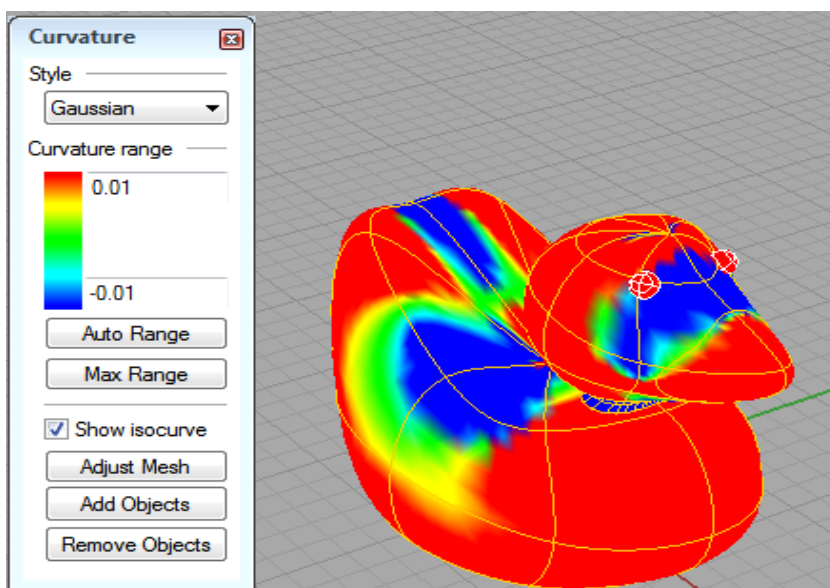
Rhinoceros vsebuje učinkovita orodja s katerimi lahko dobimo natančne podatke o izrisanih elementih. Nekateri najosnovnejši ukazi vsebujejo podatke o lokaciji, razdalji, kot med krivuljami, radiju ukrivljenosti neke krivulje, itd.

Ukazi vizualne analize ploskev nam omogočajo vizualni pregled površin ploskev, glede na različne lastnosti ploskev. NURBS ploskve se pri tem z različnimi tehnikami »renderinga« prikazujejo z različnimi barvnimi mapami in odsevi, s katerimi lahko opazujemo spremembe v ukrivljenosti oziroma lome površin. Program vsebuje štiri ukaze vizualne analize ploskev.



Slika 5.1: Ukazi za vizualno analizo ploskev.

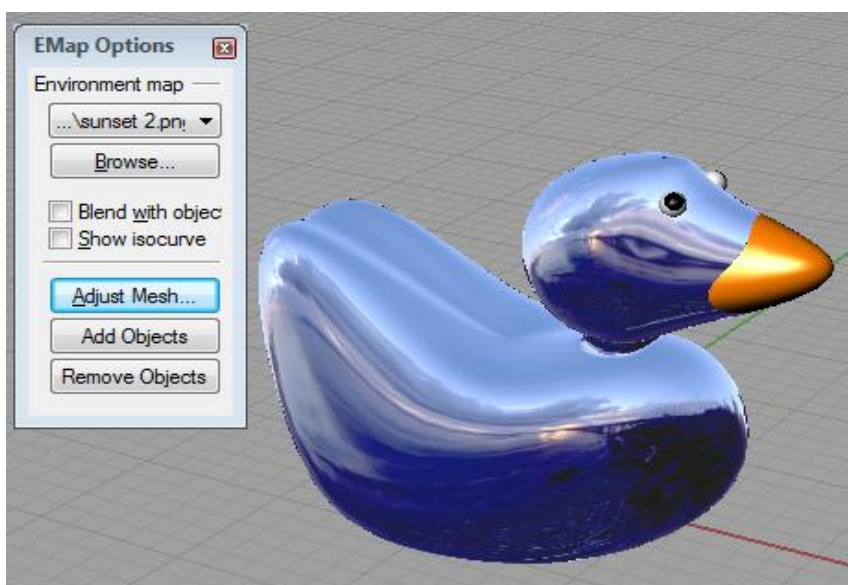
CurvatureAnalysis ukaz analizira ukrivljenost ploskev s prikazom ploskev v različnih barvnih odtenkih glede na spremembe v ukrivljenosti. S tem ukazom lahko analiziramo ploskev glede na Gaussovo in povprečno ukrivljenost, ter glavna radija ukrivljenosti. Barvna mapa ima razpon med rdečim in modrim odtenkom. Pri maksimalnih vrednostih se ploskev obarva na rdeče, pri minimalnih pa modro. Za vrednosti pri aritmetični sredini pa velja zelena barva.



Slika 5.2: Prikaz Gaussove ukrivljenosti z barvno mapo.

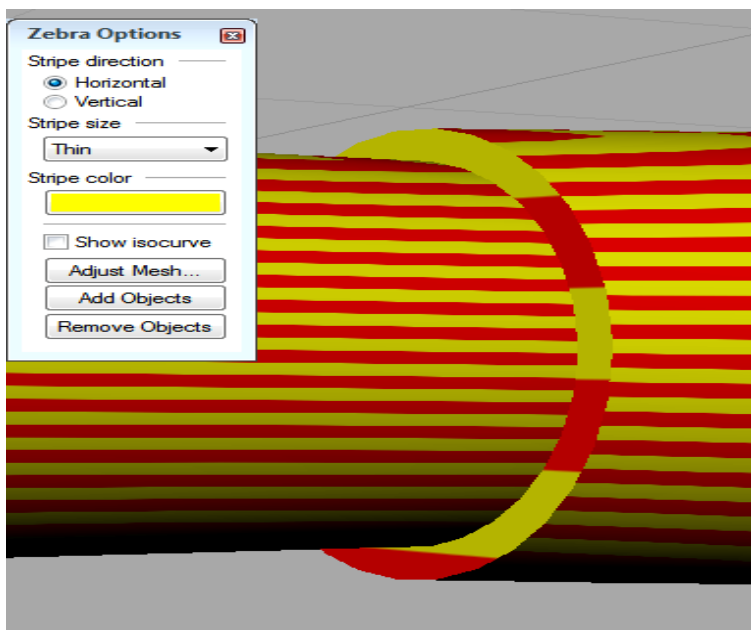
Natančnost risanja barvnih linij lahko kontroliramo z izbiro gostote mreže. To velja za vse ukaze vizualne analize ploskev.

EMap ukaz oziroma *Environment Map*, prikaže površino kot polirano pločevino na kateri se odbija svetloba. Tako lahko narisani objekt virtualno oblečemo v izbrani material in opazujemo, kako se na njem odbija svetloba, ter če imamo na površini nezaželjene motnje.



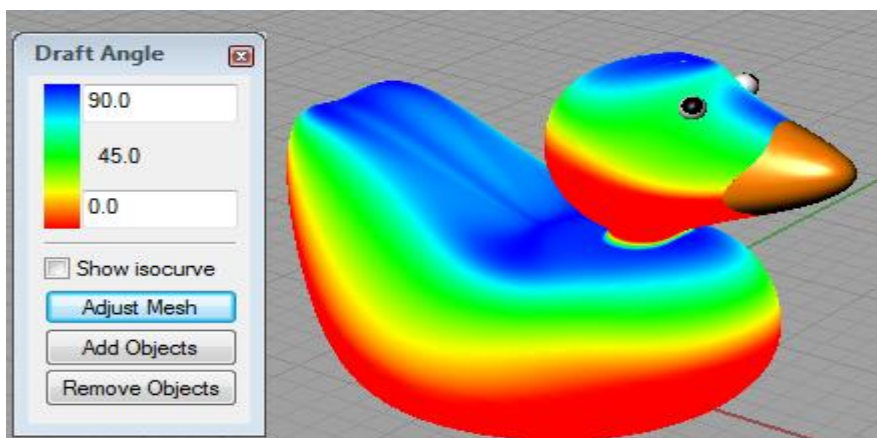
Slika 5.3: Ukaz *EMap*.

Zebra ukaz prikaže ploskev s podolgovatimi črtami. S tem ukazom je možno dobro analizirati spoje med različnimi ploskvami. Potek črt se lahko interpretira na tri načine. Prvi način se imenuje Position only (G0) in pomeni, da se ploskvi stikata, vendar je med njima zamik, ki povzroča rob. Drugi način (G1) pomeni ujemanje v poziciji in zveznemu poteku tangente, vendar pa med ploskvama ni enakomerne ukrivljenosti. To pomeni, da je ploskev zvezna. Ploskve, ki so združene z ukazom *FiletSrf* se obnašajo na takšen način. Tretji način (G2) pa pomeni ujemanje v poziciji, zveznemu poteku tangente in ukrivljenosti. Takšno stikanje ploskev dosežemo z ukazi *BlendSrf*, *MatchSrf* in *NetworkSrf*.



Slika 5.4: Ukaz *Zebra*. Stik telesa in glave ročne svetilke, vidi se situacija »G0«.

Draft Angle Analysis ukaz nam pomaga ocenjevati za kakšen kot je nagnjena površina ploskve na določenem mestu glede na konstrukcijsko ravnino. Deluje tako, da površino ploskve opremi z barvno mapo po kateri lahko ocenjujemo kote. Pri tem kot 0° pomeni, da je ploskev pravokotna na konstrukcijsko ravnino x - y in kot 90° , da je površina ploskve paralelna s konstrukcijsko ravnino x - y . Torej se kot meri glede na z os.



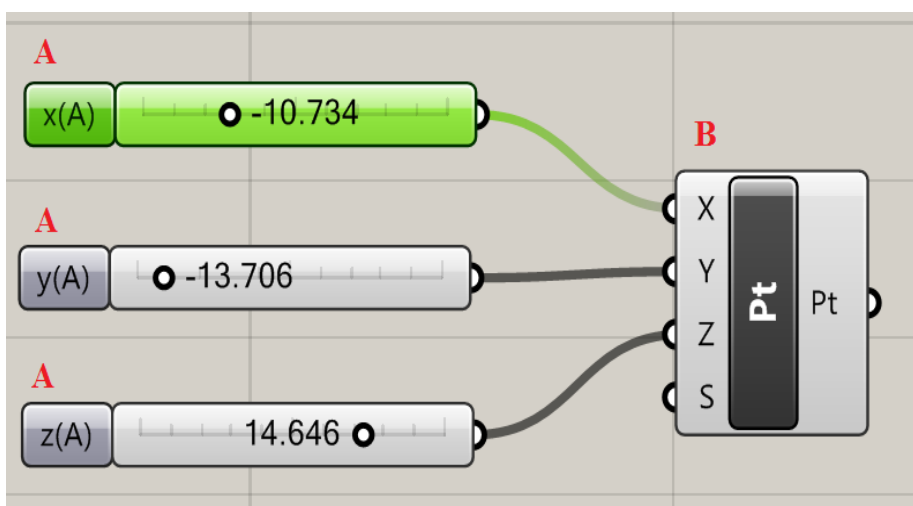
Slika 5.5: Ukaz *Draft Angle Analysis*.

5.3 Risanje 3D rotacijskih ploskev v programu *Rhinceros* s pomočjo programskega pripomočka *Grasshopper*

V programu *Rhinceros* lahko rišemo poljubne oblike. Velikokrat igrajo pri izbiri oblike površine pomembno vlogo geometrijski parametri, kot so Gaussova in povprečna ukrivljenost ter glavna radija ukrivljenosti. Tako lahko pridemo do zelene oblike s spreminjanjem oblike in posledično ukrivljenosti.

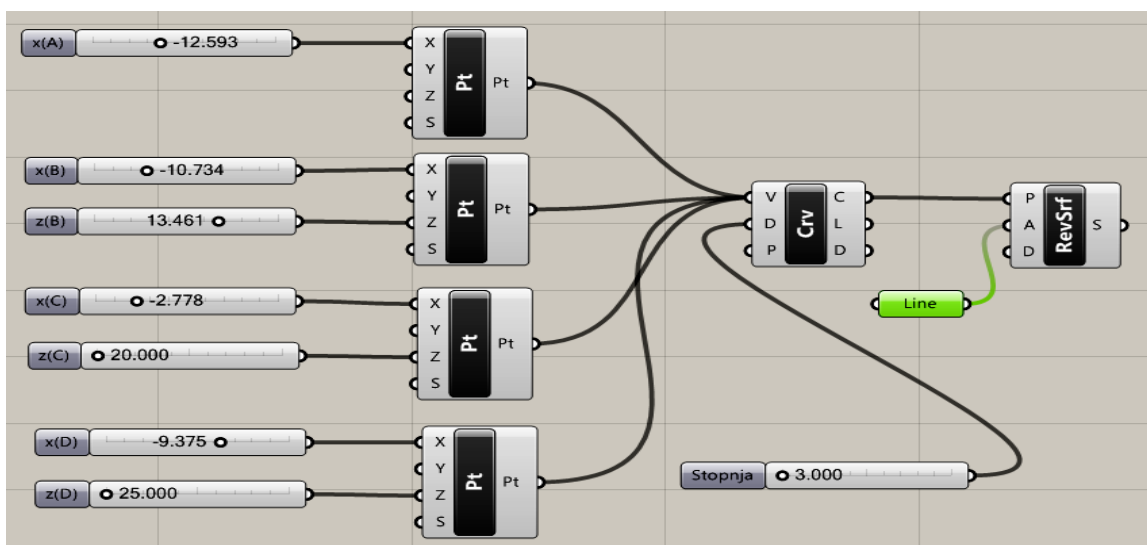
Programski pripomoček *Grasshopper* nam omogoča parametrizacijo točke, krivulj ali drugih elementov tako, da lahko njihove vrednosti spreminjamo v izbranem okviru. To pomeni, da lahko narišemo eno rotacijsko ploskev željene oblike in če jo želimo optimizirati, lahko z dodatkom *Grasshopper* spremenimo vrednosti izbranih parametrov, ter tako spremenimo njeno obliko. Tako nam ni potrebno ponovno risati objekta in lahko v kratkem času naredimo več različnih izvedb.

V glavnem sestoji zapis v programu *Grasshopper* iz parametrov in komponent. V parametrih se shranjujejo podatki, medtem ko komponente izvršujejo ukaze. Vsaka komponenta vsebuje vhodne podatke (input) in izhodne podatke (output) (slika 5.6).



Slika 5.6: Prikaz parametrizacije zapisa rotacijske ploskve s tremi kontrolnimi točkami v programu *Grasshopper*. S črko A so označeni parametri, s črko B pa komponenta.

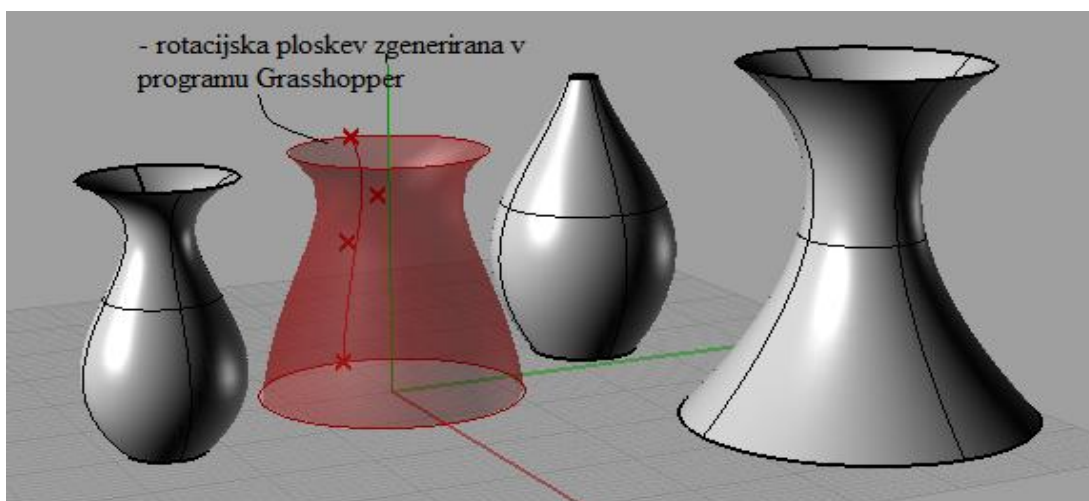
S programom *Grasshopper*, sem zgeneriral rotacijsko ploskev. Kot fleksibilne parametre sem izbral koordinate kontrolnih točk. Za izris premice potrebujem vsaj dve kontrolni točki; za moje potrebe po večji fleksibilnosti, sem izbral štiri kontrolne točke. Kot dodaten parameter sem izbral še stopnjo krivulje; ta mora biti vsaj za eno manj, kot pa je število kontrolnih točk, drugače nam *Grasshopper* javlja napako, vendar krivuljo vseeno izriše. Te parametre sem podajal z ukazom *Slider*, s katerim lahko podajamo meje numeričnim vrednostim. Sedaj sem izbral komponento za izris točk (*Pt*), kot vhodne podatke pa sem uporabil koordinate točk. Nato sem izbral komponento za izris krivulje (*Crv*), od katere vhodni podatki so bile točke in stopnja krivulje. Tako sem dobil izrisano krivuljo, ki ji lahko poljubno spreminjam meje kontrolnih točk. Sedaj mi manjka še komponenta za ukaz, ki zavrti krivuljo okoli osi (*RevSrf*). Kot vhodni podatek za to komponento potrebujem krivuljo in vrtilno os. Krivulje že imam, tako moram določiti še vrtilno os, to je os okoli katere vrtimo krivuljo. Tako izberem nov parameter *Line*, s katerim narišem vrtilno os. Sedaj imam vse pripravljeno za risanje rotacijskih ploskev.



Slika 5.7: Program v *Grasshopper*-ju za risanje poljubne rotacijske ploskve.

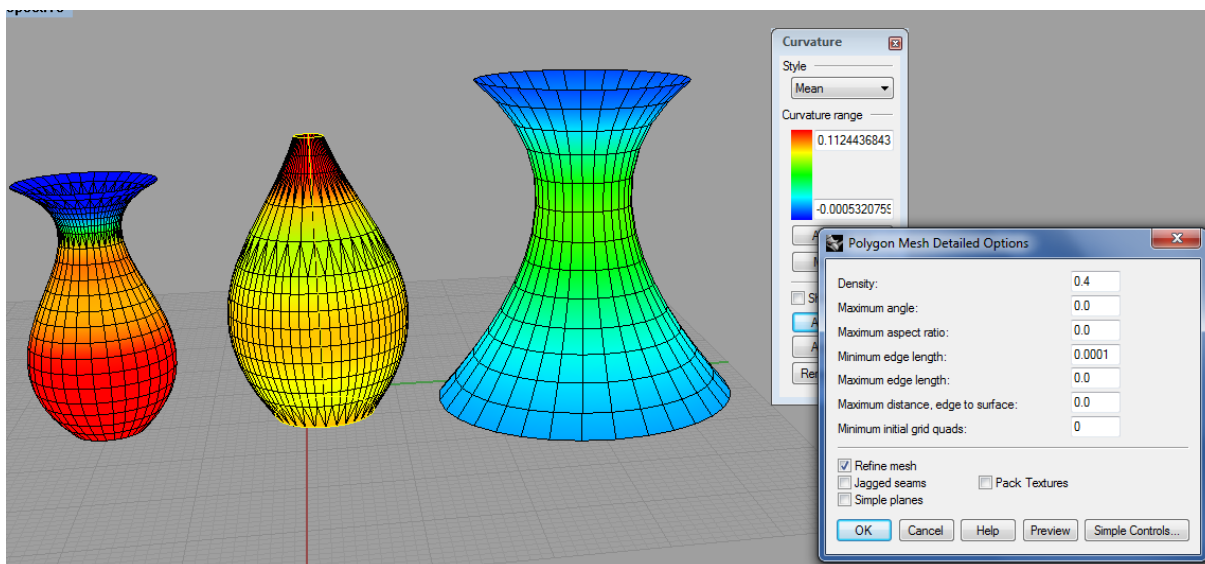
Ko ustvarimo obliko, ki jo želimo jo z ukazom *Bake* (zapeči) pretvorimo v rotacijsko ploskev, ki bi jo dobili, če bi jo narisali v programu *Rhinoceros*. Takšno ploskev lahko nato analiziramo kot lahko vsako ploskev narisano v programu *Rhinoceros*.

Če sedaj želimo analizirati ploskev za malo drugačne parametre kontrolnih točk, se vrnemo v program *Grasshopper* in spremenimo vrednosti za kontrolne točke. Če to ploskev zapečemo dobimo novo ploskev, ki jo lahko sedaj analiziramo v *Rhinoceros*-u.



Slika 5.8: Poljubne rotacijske ploskve v *Rhinoceros*-u.

Te ploskve lahko nato uporabljamo samostojno in jih poljubno analiziramo.



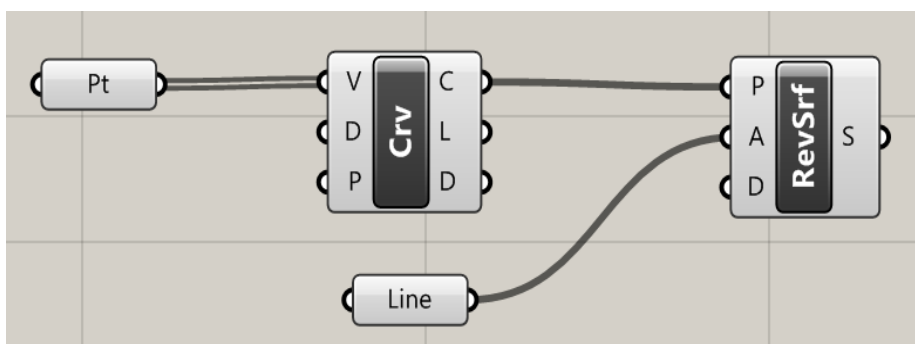
Slika 5.9: Analiza poljubnih rotacijskih ploskev.

Kot zanimivost lahko sedaj poskusim sparametrizirati novi hladilni stolp šestega bloka termoelektrarne Šoštanj. Po obliki predstavlja hladilni stolp enodelni hiperboloid. Zajel bom samo lupino, spodnje stebre skozi katere se dovaja hladen zrak pa bom zanemaril. Ker sem našel podatek o spreminjanju premerov in polmerov po višini, bom uporabil te podatke, da bom tako zagotovil obliko, ki je najbližja enodelnemu hiperboloidu.

Preglednica 2: Spreminjanje polmera in premera z višino.
(Čakš, 2013)

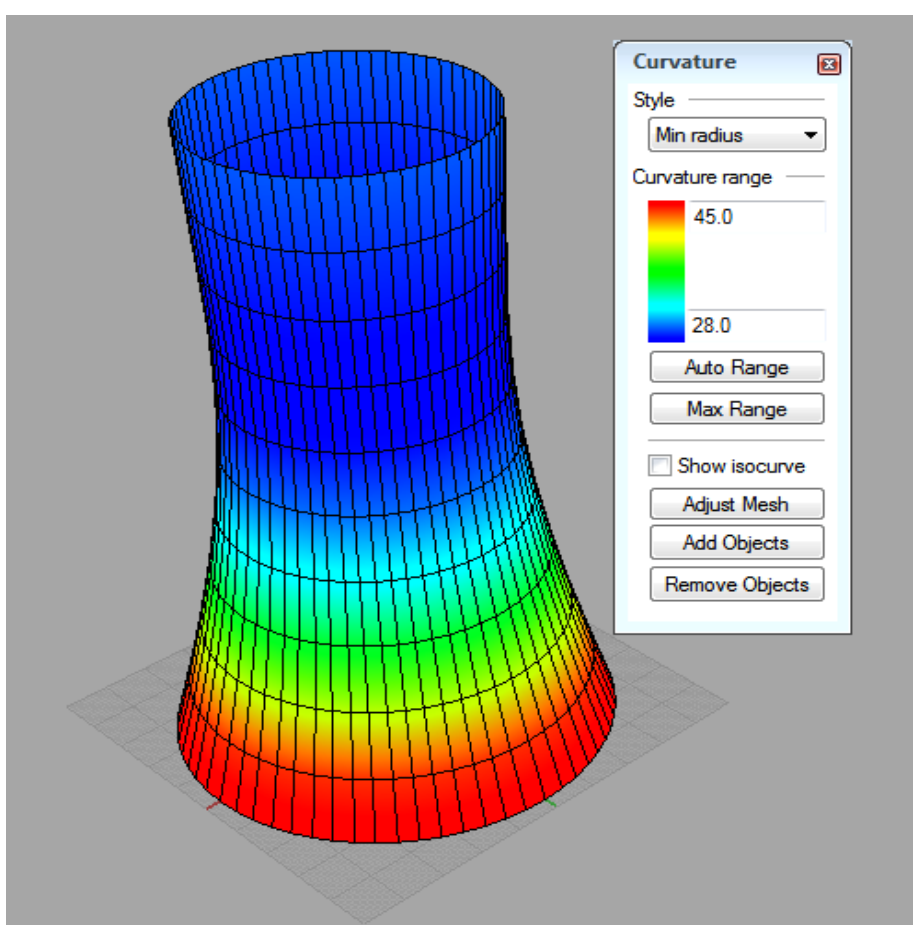
Višina stolpa [m]	Polmer [m]	Premer [m]
8,302	46,558	93,116
18,302	43,622	87,244
28,302	40,834	81,668
38,302	38,222	76,444
48,302	35,822	71,644
58,302	33,673	67,346
68,302	31,82	63,64
78,302	30,306	60,612
88,302	29,173	58,346
98,302	28,45	56,9
108,302	28,153	56,306
110,302	28,145	56,29
120,302	28,294	56,588
130,302	28,572	57,144
140,302	28,883	57,766
150,302	29,206	58,412
162	29,59	59,18

Sparametriziral bom 17 kontrolnih točk v programu *Grasshopper* in uporabil podane podatke za višino in polmer stolpa.



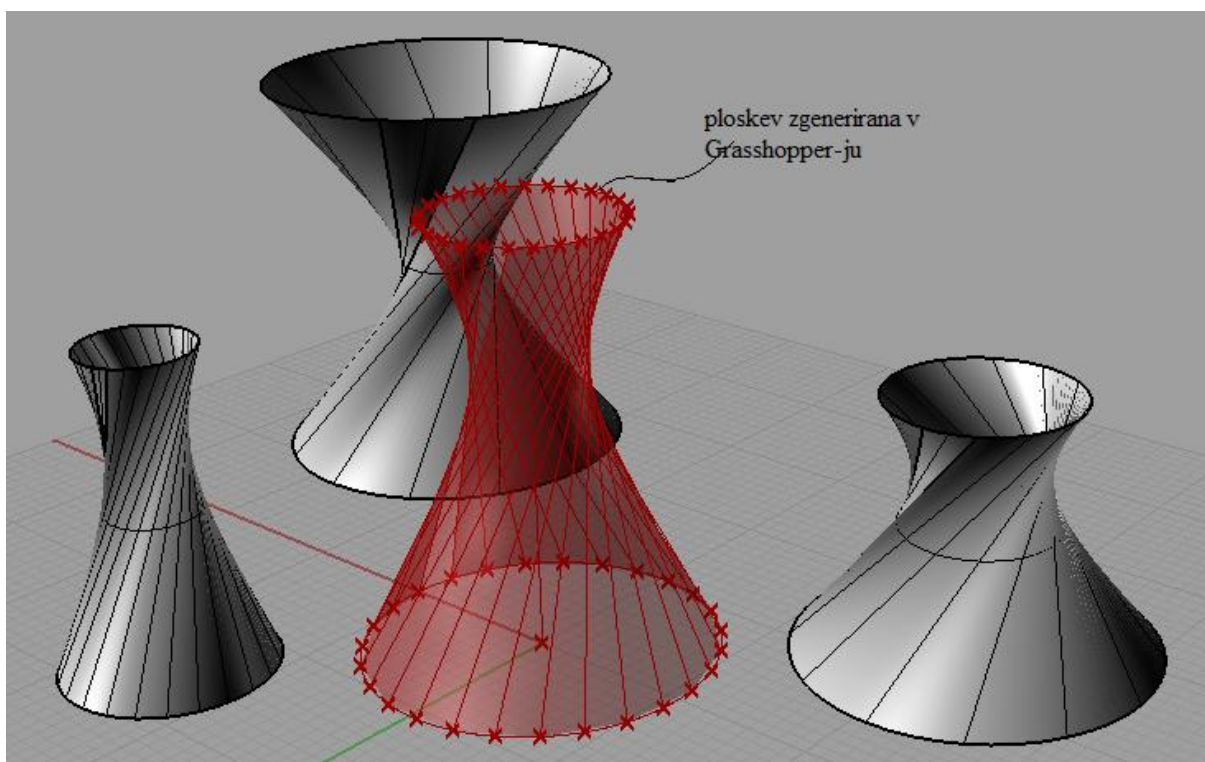
Slika 5.10: Program v *Grasshopper*-ju za hladilni stolp Teš 6.

Sedaj, ko imam obliko lahko model »zapečem« in ga analiziram v programu *Rhinoceros*.



Slika 5.10: Analiza vrednosti minimalnega radija ukrivljenosti hladilnega stolpa Teš 6 v programu *Rhinoceros*.

Ker si je težje predstavljati, da je hiperboloid premonosna ploskev, sem v *Rhinoceros*-u ob podpori programskega dodatka *Grasshopper* poskušal skonstruirati hiperboloide sestavljene iz ravnih daljic. Podobno kot pri prejšnjem primeru sem v programskem dodatku *Grasshopper* pripravil program za risanje, ki pa je bil malo bolj obsežen.



Slika 5.11: Hiperboloidi sestavljeni iz ravnih daljic.

6 ZAKLJUČEK

S to diplomsko nalogo sem se predvsem želel spoznati z geometrijo lupinastih konstrukcij. Spoznal sem se z osnovnimi izrazi diferencialne geometrije ploskev in razumem osnovne principe matematičnih izpeljav, po katerih pridemo do končnih oblik enačb.

Opazoval sem kako se spreminjajo vrednosti Gaussove ukrivljenosti, povprečne ukrivljenosti in glavnih radijev ukrivljenosti analiziranih ploskev po območju parametrov u in v .

Glede na klasifikacijo lupin po ukrivljenosti, lahko sklepamo kako se bodo obnašale pod obremenitvami. Naučil sem se ločiti ploskve v skupine (odvojne, premonosne, sinklastične, antiklastične, minimalne), in sem si tako pripravil dobro podlago za podrobnejše študiranje lupinastih konstrukcij v prihodnje.

Poleg tega sem se spoznal s tremi novimi programskimi orodji, in sicer *Mathematica*, *Rhinoceros* in programski dodatek k *Rhinoceros*-u, *Grasshopper*. Prepričan sem, da mi bodo ti programi v prihodnje še koristili.

Če bi imel še malo več časa, bi poskušal še vključiti poglavje o obnašanju lupinastih konstrukcij pod obtežbami v odvisnosti od geometrije srednje ploskve, vendar sem po drugi strani že brez tega poglavja prekoračil zgornjo omejitev strani, tako da mi bo to poglavje ostalo za študij na drugi stopnji Fakultete za gradbeništvo in geodezijo univerze v Ljubljani.

VIRI

Bronštejn, I. N., Šemendajev, K. A., Musiol, G., Muhlig, H. 2009. Matematični priročnik. Ljubljana, Tehniška založba Slovenije: str. 211 – 218.

Čakš, D. 2013, Analiza novega hladilnega stolpa v Šoštanju na vpliv vetra, Diplomaska naloga, Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za Gradbeništvo, Oddelek za gradbeništvo, Konstrukcijska smer: str. 20.

Mcneel, R. idr. 1993 – 2006. Rhinoceros 4.0 User's Guide: 113 str.

Smith, J., Sequin, C. Differential geometry of surfaces. Članek z Berkeleyja. (osebna komunikacija, februar 2013.)

Internetni viri

Wolfram Mathworld. 2013.

<http://mathworld.wolfram.com/Catenoid.html> (Pridobljeno 5. 8. 2013.)

<http://mathworld.wolfram.com/Cone.html> (Pridobljeno 5. 8. 2013.)

<http://mathworld.wolfram.com/Cylinder.html> (Pridobljeno 5. 8. 2013.)

<http://mathworld.wolfram.com/Ellipsoid.html> (Pridobljeno 5. 8. 2013.)

<http://mathworld.wolfram.com/Hyperboloid.html> (Pridobljeno 5. 8. 2013.)

<http://mathworld.wolfram.com/HyperbolicParaboloid.html> (Pridobljeno 5. 8. 2013.)

<http://mathworld.wolfram.com/Paraboloid.html> (Pridobljeno 5. 8. 2013.)

<http://mathworld.wolfram.com/Sphere.html> (Pridobljeno 5. 8. 2013.)

<http://mathworld.wolfram.com/Torus.html> (Pridobljeno 5. 8. 2013.)

Rotacijska ploskev. 2013.

http://sl.wikipedia.org/wiki/Rotacijska_ploskev (Pridobljeno 9. 8. 2013.)

Stožec. 2013.

<http://sl.wikipedia.org/wiki/Stožec> (Pridobljeno 7. 8. 2013.)

Valj. 2013.

<http://sl.wikipedia.org/wiki/Valj> (Pridobljeno 7. 8. 2013.)