

Univerza  
v Ljubljani

Fakulteta za  
*gradbeništvo in  
geodezijo*



Jamova 2  
1000 Ljubljana, Slovenija  
telefon (01) 47 68 500  
faks (01) 42 50 681  
fgg@fgg.uni-lj.si

UNIVERZITETNI ŠTUDIJ  
GEODEZIJE  
SMER GEODEZIJA

Kandidatka:

**MARLENKA FRAS**

**ŠTUDIJA ORTODROME IN LOKSODROME NA  
KROGLI, ELIPSOIDU TER V KARTOGRAFSKIH  
PROJEKCIJAH**

Diplomska naloga št.: **894/G**

**THE STUDY OF ORTHODROME AND LOXODROME  
ON A SPHERE, ELLIPSOID AND IN CARTOGRAPHIC  
PROJECTIONS**

Graduation thesis No.: **894/G**

**Mentor:**

doc. dr. Dušan Petrovič

**Predsednik komisije:**

izr. prof. dr. Dušan Kogoj

**Somentor:**

viš. pred. dr. Dalibor Radovan

Ljubljana, 27. 6. 2012

## **ERRATA**

Stran z napako

Vrstica z napako

Namesto

Naj bo



## **IZJAVA**

Podpisana Marlenka Fras izjavljam, da sem avtorica diplomskega dela z naslovom »Študija ortodrome in loksodrome na kroglu, elipsoidu ter v kartografskih projekcijah«.

Izjavljam, da je elektronska različica povsem enaka tiskani različici.

Izjavljam, da dovoljujem objavo elektronske različice v repozitoriju UL FGG.

Ljubljana, junij 2012

Marlenka Fras

“Ta stran je namenoma prazna.”

---

## **BIBLIOGRAFSKO – DOKUMENTACIJSKA STRAN IN IZVLEČEK**

<b>UDK:</b>	<b>528.9(043.2)</b>
<b>Avtor:</b>	<b>Marlenka Fras</b>
<b>Mentor:</b>	<b>doc. dr. Dušan Petrovič</b>
<b>Somentor:</b>	<b>viš. pred. dr. Dalibor Radovan</b>
<b>Naslov:</b>	<b>Študija ortodrome in loksodrome na krogli, elipsoidu ter v kartografskih projekcijah</b>
<b>Obseg in oprema:</b>	<b>80 str., 24 preg., 8 graf., 19 sl., 13 pril.</b>
<b>Ključne besede:</b>	<b>ortodroma, loksodroma, geodetska linija, kartografske projekcije, navigacija</b>

### **Izvleček**

Ortodroma in loksodroma sta karakteristični krivulji na zemeljski krogli. Njuna oblika in odstopanje med njima sta odvisni od treh spremenljivk: oddaljenosti med začetno in končno točko, njune geografske širine in azimuta, pod katerim sta krivulji usmerjeni. V diplomski nalogi smo pri različnih pogojih proučili ortodromo in loksodromo na krogli, ju primerjali z geodetsko linijo in loksodromo na elipsoidu ter ju prikazali in proučili v izbranih kartografskih projekcijah: Mercatorjevi, gnomonski, Lambertovi konformni konusni in transverzalni Mercatorjevi projekciji. Ko proučujemo slike ortodrome in loksodrome v ravnini projekcije, je njuna oblika odvisna tudi od deformacijskih lastnosti projekcije. Ugotavljali smo, v katerem merilu je razlika med ortodromo in loksodromo v projekciji še vidna, kar smo posebej podrobno določili za kartografske projekcije merila naših državnih kart. Problem smo reševali na treh različno velikih območjih: v Sloveniji, Evropi in celotni Zemlji. V nalogi smo raziskali tudi vprašanje uporabnosti loksodrome v praktičnem smislu, ob uporabi tehnologije GNSS in zmožnostjo avtomatskega določanja gosto izračunanih točk ortodrome oziroma geodetske linije v realnem času.

---

**BIBLIOGRAPHIC – DOCUMENTALISTIC INFORMATION AND ABSTRACT**

**UDC:** 528.9(043.2)  
**Author:** Marlenka Fras  
**Supervisor:** Assist. prof. Dušan Petrovič, Ph. D.  
**Mentor:** Sen. Lect. Dalibor Radovan, Ph. D.  
**Title:** The study of orthodrome and loxodrome on a sphere, ellipsoid and in cartographic projections  
**Notes:** 80 p., 24 tab., 8 ch., 19 fig., 13. an.  
**Key words:** orthodrome, loxodrome, rhumb line, geodesic, map projections, navigation

**Abstract**

Orthodrome, also known as great circle and loxodrome, which is also called a rhumb line, are two characteristic curves on a sphere model of the Earth. Their visualisation and discrepancies between them vary according to distance between departure and arrival point, their latitude and the azimuth of the curves. In diploma thesis, orthodrome and loxodrome were studied under different conditions and were compared with geodesic and loxodrome on an ellipsoidal model of the Earth. Orthodrome and loxodrome are also plotted and studied in different map projections: Mercator projection, Gnomonic projection, Lambert conformal conic projection and Transverse Mercator projection. The visualisation of the curves in projection vary according to values of all type of distortion in specific projection as well. Especially for Slovenia's scales of topographic maps, we determined in what scale the discrepancy between the orthodrome and loxodrome is noted on a map. We were solving the problem in three different-sized areas: in Slovenia, Europe and the whole world. We also cover the subject on the usability of loxodrome in practice, since nowadays the GNSS technology is widely used and real-time determination of big number of orthodrome or geodesic waypoints is enabled.

## **ZAHVALA**

*Za strokovno pomoč in svetovanje pri nastajanju diplomske naloge se zahvaljujem mentorju doc. dr. Dušanu Petroviču in somentorju viš. pred. dr. Daliborju Radovanu.*

*Zahvaljujem se tudi vsem sošolcem in prijateljem, s katerimi sem preživela čudovita študijska leta.*

*Posebna zahvala pa gre moji (razširjeni) družini, ki me je vseskozi podpirala.*



“Ta stran je namenoma prazna.”

## KAZALO VSEBINE

<b>1</b>	<b>UVOD.....</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>OBLIKA IN VELIKOST ZEMLJE .....</b>	<b>3</b>
2.1	Geoid.....	3
2.2	Rotacijski elipsoid.....	3
2.3	Krogla.....	5
<b>3</b>	<b>KOORDINATNI SISTEMI.....</b>	<b>6</b>
3.1	Sistem geografskih koordinat na rotacijskem elipsoidu.....	6
3.2	Sistem geografskih koordinat na krogli.....	6
3.3	Ravninski kartezični koordinatni sistem .....	6
<b>4</b>	<b>LOKSODROMA NA KROGLI.....</b>	<b>8</b>
4.1	Dolžina loksodrome .....	8
4.2	Izračun končne točke loksodrome .....	9
<b>5</b>	<b>ORTODROMA NA KROGLI .....</b>	<b>10</b>
5.1	Dolžina ortodrome.....	10
5.2	Izračun končne točke ortodrome .....	11
5.3	Izračun vmesnih točk ortodrome.....	11
<b>6</b>	<b>LOKSODROMA NA ELIPSOIDU .....</b>	<b>13</b>
6.1	Direktni problem loksodrome na elipsoidu .....	13
6.2	Inverzni problem loksodrome na elipsoidu .....	15
<b>7</b>	<b>GEODETSKA LINIJA NA ELIPSOIDU .....</b>	<b>16</b>
7.1	Direktni problem geodetske linije .....	17
7.2	Inverzni problem geodetske linije .....	20
7.3	Velika elipsa.....	21
<b>8</b>	<b>NAVIGACIJA .....</b>	<b>23</b>
8.1	Osnove navigacije .....	23
8.2	Navigacija po ortodromi in loksodromi .....	23
8.3	Uvedba tehnologije GNSS v navigacijo.....	23
<b>9</b>	<b>PROUČEVANJE ORTODROME, GEODETSKE LINIJE IN LOKSODROME V RAZLIČNIH POGOJIH NA ELIPSOIDU IN KROGLI.....</b>	<b>25</b>
9.1	Območje Slovenije .....	26
9.2	Območje Evrope.....	28
9.3	Območje sveta.....	30
<b>10</b>	<b>OPISI KARTOGRAFSKIH PROJEKCIJ .....</b>	<b>35</b>
10.1	Mercatorjeva projekcija.....	35
10.1.1	Lastnosti in uporaba .....	35

10.1.2	Enačbe .....	36
10.2	Gnomonska projekcija.....	37
10.2.1	Lastnosti in uporaba.....	37
10.2.2	Enačbe .....	38
10.3	Lambertova konformna konusna projekcija .....	39
10.3.1	Lastnosti in uporaba.....	39
10.3.2	Enačbe .....	40
10.4	Transverzalna Mercatorjeva projekcija .....	42
10.4.1	Lastnosti in uporaba.....	42
10.4.2	Enačbe .....	42
<b>11</b>	<b>ORTODROMA IN LOKSODROMA V KARTOGRAFSKI PROJEKCIJI.....</b>	<b>45</b>
11.1	Določitev odstopanja med krivuljama v projekciji.....	45
11.2	Odstopanje med ortodromo in loksodromo v projekcijah na krogli.....	46
11.2.1	Območje Slovenije .....	47
11.2.2	Območje Evrope.....	50
11.2.3	Območje sveta .....	58
11.3	Odstopanja med geodetsko linijo in loksodromo v kartografski projekciji elipsoida v ravnino.....	71
11.3.1	Območje Slovenije .....	71
11.3.2	Območje Evrope.....	71
11.3.3	Območje sveta .....	72
<b>12</b>	<b>ZAKLJUČEK.....</b>	<b>74</b>
<b>VIRI</b>	<b>.....</b>	<b>77</b>
	Uporabljeni viri .....	77
	Ostali viri.....	79

## KAZALO PREGLEDNIC

Preglednica 1: Vrednosti parametrov elipsoida GRS80.....	4
Preglednica 2: Mejne koordinate območij .....	25
Preglednica 3: Razlika v dolžini loksodrome in ortodrome oziroma geodetske linije v odvisnosti od dolžine in azimuta loksodrome na krogli ter elipsoidu na območju Slovenije (začetna točka na srednji geografski širini Slovenije) .....	27
Preglednica 4: Razlika v dolžini loksodrome in ortodrome oziroma geodetske linije v odvisnosti od dolžine in azimuta loksodrome na krogli ter elipsoidu na območju Slovenije (začetna točka na skrajni severni geografski širini).....	27
Preglednica 5: Razlika v dolžini loksodrome in ortodrome oziroma geodetske linije v odvisnosti od dolžine in azimuta loksodrome na krogli ter elipsoidu na območju Slovenije (začetna točka na skrajni južni geografski širini) .....	28
Preglednica 6: Razlika v dolžini loksodrome in ortodrome oziroma geodetske linije v odvisnosti od dolžine in azimuta loksodrome na krogli ter elipsoidu na območju Evrope .....	29
Preglednica 7: Razlika v dolžini loksodrome in ortodrome oziroma geodetske linije v odvisnosti od dolžine in azimuta loksodrome na krogli ter elipsoidu na območju sveta.....	31
Preglednica 8: Konstruktivske širine $\varphi_1$ obravnavanih območij .....	37
Preglednica 9: Centralne točke posameznih obravnavanih območij.....	39
Preglednica 10: Standardni paraleli obravnavanih območij.....	41
Preglednica 11: Odstopanje med ortodromo in loksodromo v projekcijah na območju Slovenije z začetno točko v ( $46^{\circ} 09'$ , $13^{\circ}24'$ ).....	48
Preglednica 12: Pravokotno odstopanje med ortodromo in loksodromo v projekcijah na območju Slovenije z začetno točko v ( $46^{\circ} 53'$ , $13^{\circ}24'$ ) .....	49
Preglednica 13: Pravokotno odstopanje med ortodromo in loksodromo v projekcijah na območju Slovenije z začetno točko v ( $45^{\circ} 25'$ , $13^{\circ}24'$ ) .....	50
Preglednica 14: Velikost odstopanja med ortodromo in loksodromo (v naravi) pri določenem merilu državnih kart, ki ga je še lahko opaziti na karti .....	50
Preglednica 15: Pravokotno odstopanje med ortodromo in loksodromo projekcijah na območju Evrope .....	51
Preglednica 16: Pravokotno odstopanje med ortodromo in loksodromo v projekcijah na območju sveta z začetno točko na ekvatorju ( $\varphi=0^{\circ}$ ).....	59
Preglednica 17: Pravokotno odstopanje med ortodromo in loksodromo v projekcijah na območju sveta z začetno točko na severnem povratniku ( $\varphi=23^{\circ}26'$ ) .....	61
Preglednica 18: Pravokotno odstopanje med ortodromo in loksodromo v projekcijah na območju sveta z začetno točko na srednji geografski širini ( $\varphi=45^{\circ}$ ).....	63

---

Preglednica 19: Pravokotno odstopanje med ortodromo in loksodromo v projekcijah na območju sveta z začetno točko na severnem tečajniku ( $\varphi=66^{\circ} 33'$ ) .....	64
Preglednica 20: Primerjava odstopanja med ortodromo in loksodromo v projekcijah krogle z odstopanjem geodetske linije in loksodrome v projekcijah elipsoida na območju Slovenije .....	71
Preglednica 21: Primerjava najmanjšega odstopanja med ortodromo in loksodromo v projekcijah krogle z odstopanjem geodetske linije in loksodrome v projekcijah elipsoida na območju Evrope.....	72
Preglednica 22: Primerjava največjega odstopanja med ortodromo in loksodromo v projekcijah krogle z odstopanjem geodetske linije in loksodrome v projekcijah elipsoida na območju Evrope.....	72
Preglednica 23: Primerjava najmanjšega odstopanja med ortodromo in loksodromo v projekcijah krogle z odstopanjem geodetske linije in loksodrome v projekcijah elipsoida na območju sveta .....	73
Preglednica 24: Primerjava največjega odstopanja med ortodromo in loksodromo v projekcijah krogle z odstopanjem geodetske linije in loksodrome v projekcijah elipsoida na območju sveta .....	73

## KAZALO GRAFIKONOV

Grafikon 1: Odstopanje med ortodromo in loksodromo v projekcijah na območju Slovenije z začetno točko na srednji geografski širini Slovenije.....	49
Grafikon 2: Odstopanje med ortodromo in loksodromo v projekcijah na območju Evrope z začetno točko na geografski širini $40^\circ$ .....	52
Grafikon 3: Odstopanje med ortodromo in loksodromo v projekcijah na območju Evrope z začetno točko na geografski širini $50^\circ$ .....	53
Grafikon 4: Odstopanje med ortodromo in loksodromo v projekcijah na območju Evrope z začetno točko na geografski širini $60^\circ$ .....	54
Grafikon 5: Odstopanje med ortodromo in loksodromo v projekcijah na območju sveta z začetno točko na ekvatorju .....	60
Grafikon 6: Odstopanje med ortodromo in loksodromo v projekcijah na območju sveta z začetno točko na severnem povratniku ( $\varphi=23^\circ 26'$ ) .....	62
Grafikon 7: Odstopanje med ortodromo in loksodromo v projekcijah na območju sveta z začetno točko na srednji geografski širini ( $\varphi=45^\circ$ ).....	63
Grafikon 8: Odstopanje med ortodromo in loksodromo v projekcijah na območju sveta z začetno točko na severnem tečajniku ( $\varphi=66^\circ 33'$ ) .....	65

**KAZALO SLIK**

Slika 1: Geoid, lokalni elipsoid in globalni elipsoid (Vir: Kennedy, Kopp, 2000) .....	4
Slika 2: Ravninski kartezični koordinatni sistem (Vir: URL 1) .....	7
Slika 3: Loksodroma na prosojni krogli (Vir: Alexander, 2004).....	8
Slika 4: Ortodroma – krajši odsek velikega kroga na krogli (Vir: URL 2) .....	10
Slika 5: Cikel geodetske linije na elipsoidu.....	16
Slika 6: Cikel geodetske linije v ravnini.....	17
Slika 7: Reducirana širina (Vir: URL 3).....	18
Slika 8: Lok velike elipse .....	21
Slika 9: Meje testiranega območja sveta .....	30
Slika 10: Prikaz ortodrome (zelena barva) in loksodrome (rdeča barva) na zemeljski krogli.....	33
Slika 11: Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeča barva) na območju Evrope v Mercatorjevi projekciji .....	55
Slika 12: Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeča barva) na območju Evrope v gnomonski projekciji .....	56
Slika 13: Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeča barva) na območju Evrope v Lambertovi konformni konusni projekciji.....	57
Slika 14: Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeča barva) na območju Evrope v transverzalni Mercatorjevi projekciji.....	58
Slika 15: Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeča barva) na območju sveta v Mercatorjevi projekciji .....	66
Slika 16: Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeča barva) na območju sveta v ekvatorialni gnomonski projekciji.....	67
Slika 17: Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeča barva) na območju sveta v poševni gnomonski projekciji.....	68
Slika 18: Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeča barva) na območju sveta v polarni gnomonski projekciji.....	69
Slika 19: Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeča barva) na območju sveta v Lambertovi konformni konusni projekciji.....	70

“Ta stran je namenoma prazna.”





## 1 UVOD

Zemlja je nebesno telo matematično nepravilne oblike, zato za izračune geodetskih nalog uporabljamo idealizirane gladke površine. Geoid je fizikalno definirana gladka ploskev in je najboljši približek oblike Zemlje. Za geodetske izračune je potrebna matematično definirana ploskev, za katero v praksi uporabljamo kroglo ali elipsoid za natančnejše naloge.

Na zemeljski krogli lahko določimo dve karakteristični krivulji: ortodromo in loksodromo. Ortodroma predstavlja najkrajšo razdaljo med točkama, loksodroma pa krivuljo konstantnega azimuta, zato imata še poseben pomen v navigaciji. Na elipsoidu ortodromo nadomesti geodetska linija, ki ravno tako predstavlja najkrajšo razdaljo na ploskvi.

Omenjeni krivulji se obnašata različno pri različnih oddaljenostih, azimutih in geografskih širinah, prav tako se različno preslikujeta v ravnino kartografske projekcije. V nalogi so obravnavane štiri različne projekcije, od katerih je vsaka izbrana s posebnim razlogom. Mercatorjeva projekcija je edina, v kateri se loksodroma preslika kot ravna črta, kar je pomembno v navigaciji, gnomonska pa edina, v kateri se ortodroma preslika kot ravna črta, zato je uporabna za načrtovanje najkrajših poti in prenos ortodrom na karte, izdelane v drugih projekcijah. Gauss-Krügerjeva je pomembna, saj je naša državna projekcija, ki se je zaradi uskladitve z evropsko terminologijo preimenovala v transversalno Mercatorjevo projekcijo. Lambertova konformna konusna projekcija pa je zanimiva, ker se ortodroma pri dolžinah do 1000 km zelo malo razlikuje od premice, prav tako je tudi projekcija, namenjena za prikaze Evrope.

V nalogi je študija ortodrome, loksodrome in geodetske linije vezana predvsem na pomorsko navigacijo, ki pa se z uvedbo novosti, kot so tehnologija GNSS, elektronske navigacijske karte in geografski informacijski sistemi, spreminja. Včasih so se navigacijski parametri izračunavali na osnovi grafične metode neposredno s karte v Mercatorjevi projekciji. Ta je bila za pomorščaka nepogrešljiva. Danes imajo navigacijski informacijski sistemi, kot je ECDIS (Electronic Chart Display and Information System), vgrajene algoritme za izračun točk ortodrome in loksodrome.

Namen naloge je podrobno proučiti karakteristični krivulji – ortodromo in loksodromo na krogli, na elipsoidu, v kartografskih projekcijah ter raziskati njun pomen v navigaciji. Ortodromo in loksodromo na krogli bomo primerjali z geodetsko linijo in loksodromo na elipsoidu, in sicer na podlagi odstopanja med dolžinama krivulj. V projekcijah pa bo primerjava izvedena na podlagi prečnega odstopanja med krivuljama. Namen naloge je proučiti tudi vidnost odstopanja med krivuljama v projekciji v določenem merilu, kjer bo to še posebej raziskano za območje Slovenije.

---

Za sistematično reševanje naloge bomo problem obravnavali na treh različno velikih območjih: v Sloveniji, Evropi in celotni Zemlji.

Cilj naloge je ugotoviti obnašanje ortodrome oz. geodetske linije in loksodrome glede na spreminjanje treh spremenljivk: oddaljenosti med začetno in končno točko, azimuta ter geografske širine. Ugotovili bomo, kako se odstopanja med ortodromo in loksodromo na krogli razlikujejo glede na odstopanja na elipsoidu ter presodili upravičenost zapletenih izračunov na elipsoidu, ki je danes standard za navigacijo v pomorstvu, saj je aproksimacija Zemlje s kroglo v tradicionalni navigaciji zadoščala za reševanje večine praktičnih problemov. Nenazadnje je cilj ugotoviti, kako uvedba nove tehnologije vpliva na spreminjanje navigacije v pomorstvu ter poskusiti napovedati prihodnost praktične uporabe teh krivulj v bližnji prihodnosti.

## 2 OBLIKA IN VELIKOST ZEMLJE

### 2.1 Geoid

Geoid predstavlja telo, omejeno z ekvipotencialno ploskvijo, ki jo določa gladina mirujočih oceanov pri popolnem ravnovesju vseh sil na Zemlji. Sledi topografiji površja ter razporeditvi in gostoti mas v notranjosti Zemlje. V vsaki točki poteka pravokotno na težiščnico oziroma vektor gravitacijske sile, kar se lahko izkoristi za definicijo višinskih sistemov. V matematični kartografiji pa potrebujemo matematično definirano ploskev, ki se lahko izrazi z analitičnimi enačbami, zato se uporabljata kroglja ali rotacijski elipsoid.

### 2.2 Rotacijski elipsoid

Rotacijski elipsoid je matematično definirana ploskev, ki jo dobimo, če elipso zavrtimo okrog male osi. Obliko in velikost elipsoida opišemo z enim od treh različnih parov parametrov:  $a$  in  $b$ , kjer sta  $a$  in  $b$  velika in mala polos elipsoida ter velja  $a > b$ ,  $a$  in  $f$ , kjer je  $f$  prva sploščenost elipsoida ali  $a$  in  $e$ , kjer je  $e$  prva ekscentričnost elipsoida.

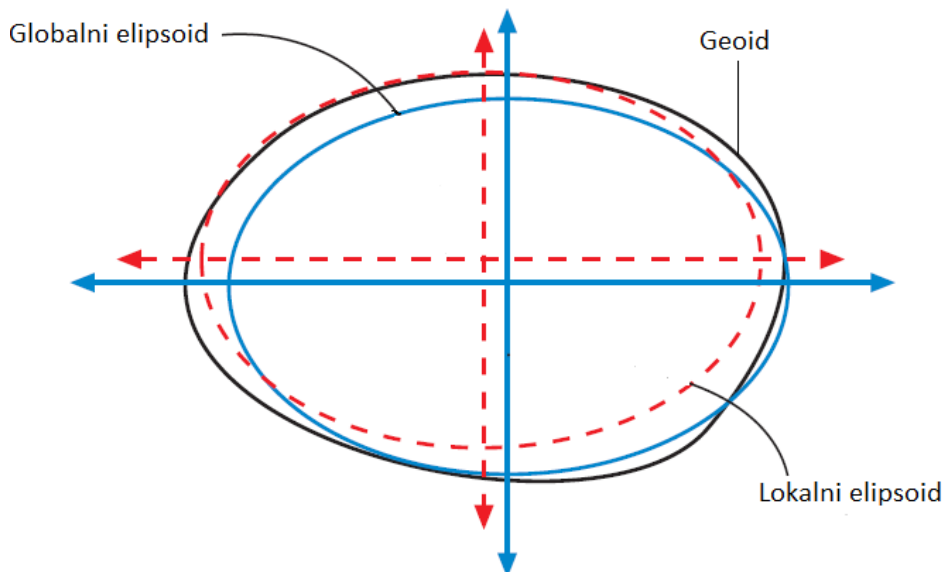
Parametri so medsebojno povezani z naslednjimi enačbami (Peterca, 2001):

$$f = \frac{a - b}{a}$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

$$1 - e^2 = (1 - f)^2$$

Obstajata dve vrsti rotacijskih elipsoidov: referenčni ali lokalni in globalni ali splošni (Slika 1). Oblika, dimenzije in orientacija globalnega elipsoida so prilagojeni celotni Zemlji, medtem ko je referenčni elipsoid le na nekem območju optimalno prilagojen geoidu. Referenčni geoid ni geocentričen. Danes se uporaba referenčnih elipsoidov opušta, saj sodobna geodetska merjenja omogočajo določitev geocentričnih elipsoidov, ki so prilagojeni dejanski obliki celotne Zemlje in imajo izhodišče v središču zemeljskih mas. Poleg geometrijskih vsebujejo tudi fizikalne parametre. Na ta način določajo Zemljo bolje kot referenčni elipsoidi, ki temeljijo zgolj na podlagi geodetskih meritev. Splošni zemeljski elipsoidi so izredno pomembni pri povezovanju prostorskih podatkov evropskega in svetovnega obsega (Peterca, 2001).



Slika 1: Geoid, lokalni elipsoid in globalni elipsoid (Vir: Kennedy, Kopp, 2000)

V diplomski nalogi se pri obravnavi geodetske linije in loksodrome na elipsoidu pojavljajo še naslednji parametri elipsoida: polmer ukrivljenosti meridiana  $M$ , polmer ukrivljenosti prvega vertikala  $N$  in polmer vzporednika  $r$  (Peterca, 2001).

$$M = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{(1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.1)$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}} \quad (2.2)$$

$$r = N \cdot \cos \varphi \quad (2.3)$$

V nalogi je privzet elipsoid GRS80, ki je tudi referenčna ploskev našega državnega koordinatnega sistema D96/TM. Vrednosti parametrov za omenjen elipsoid so prikazani v preglednici 1.

Preglednica 1: Vrednosti parametrov elipsoida GRS80

Parameter	Vrednost
<b>a</b>	6 378 137 m
<b>b</b>	6 356 753,314 m
<b>f</b>	1 / 298,257
<b>e</b>	0,081817

### 2.3 Kroгла

Kroгла je najenostavnejša ploskev, s katero lahko matematično opišemo Zemljo. Kadar zadostujejo manj natančni rezultati pri reševanju nalog matematične kartografije, se lahko kot približek Zemlje uporabi kroгла, katere polmer se določi na različne načine. V nalogi je privzet radij, ki se izračuna kot aritmetična sredina polosni triosnega elipsoida (Peterca, 2001).

$$R = \frac{2a + b}{3}$$

$$R_{GRS80} = 6\,371\,009\,m$$

### 3 KOORDINATNI SISTEMI

Koordinatni sistem definirajo pravila, s katerimi je podan način določitve koordinat točkam. Koordinata je število, s katerim je podana komponenta položaja v prostoru. Položaj je količina, ki jo obravnavamo kot absolutno, koordinate pa so relativne količine, saj so odvisne od koordinatnega sistema (Stopar, 2008).

Poznamo več delitev koordinatnih sistemov, med katerimi bodo obravnavani tisti, ki se uporabljajo v matematični kartografiji in so uporabljeni v diplomski nalogi.

#### 3.1 Sistem geografskih koordinat na rotacijskem elipsoidu

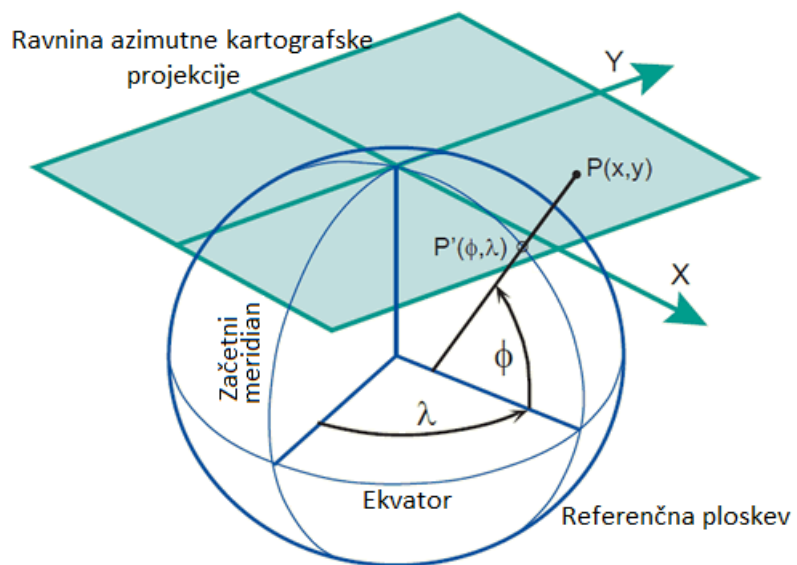
Položaj točke je na ploskvi elipsoida določen glede na ekvator in začetni meridian z dvema koordinatama: geografsko širino  $\varphi$  in geografsko dolžino  $\lambda$ . Geografska širina predstavlja kot, ki ga normala na elipsoid v točki  $P'$  oklepa z ravnino ekvatorja (Slika 2). Šteje se od ekvatorja proti poloma in vsebuje vrednosti od  $0^\circ$  do  $\pm 90^\circ$ . Geografska dolžina pa je kot, ki ga meridianska ravnina točke  $P$  oklepa z ravnino začetnega (Greenwiškega) meridiana. Šteje se od začetnega meridiana proti vzhodu in zahodu in tako vsebuje vrednosti od  $0^\circ$  do  $\pm 180^\circ$  (Peterca, 2001).

#### 3.2 Sistem geografskih koordinat na krogli

Koordinatni sistem je zelo podoben sistemu geografskih koordinat na elipsoidu. Sferna geografska širina je kot med radijem krogle v določeni točki in ravnino ekvatorja, geografska dolžina pa je kot med ravnino začetnega meridiana in ravnino meridiana določene točke (Peterca, 2001).

#### 3.3 Ravninski kartezični koordinatni sistem

Ravninski kartezični oziroma pravokotni koordinatni sistem sestavljata dve medsebojno pravokotni osi, ki se sekata v koordinatnem izhodišču. Vertikalna os je X-os, kjer pozitivne vrednosti naraščajo proti severu, vodoravna pa je Y-os, kjer pozitivne vrednosti naraščajo proti vzhodu. Ta koordinatni sistem uporabljamo v ravnini kartografske projekcije (Slika 2). Za karte velikih meril se navadno kot referenčna ploskev uporablja rotacijski elipsoid, za karte malih meril pa se lahko uporabi krogla, saj je generalizacija vsebine večja od projekcijske deformacije.

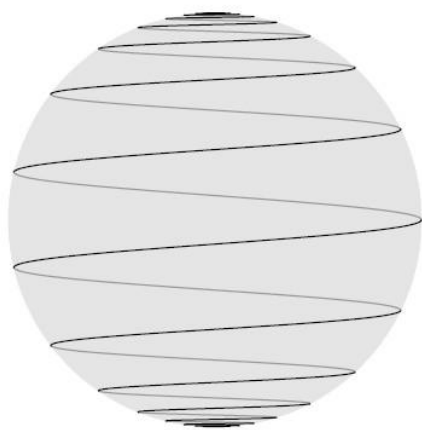


Slika 2: Ravninski kartezični koordinatni sistem (Vir: URL 1)



## 4 LOKSODROMA NA KROGLI

Loksodroma je krivulja na zemeljski krogli, ki seka vse poldnevnikove pod istim kotom (Slika 3). Vse loksodrome, razen poldnevnikov in vzporednikov, ki so prav tako loksodrome, izgledajo na krogli kot spirala, zavita okoli krogle, ki se asimptotično približuje poloma, nikoli pa ju ne doseže. Spirale se med seboj razlikujejo le v naklonu.



Slika 3: Loksodroma na prosojni krogli (Vir: Alexander, 2004)

Zgodovina uporabe loksodrome sega v čase, ko so se pomorščaki začeli zavedati, da pot konstantnega kurza ni najkrajša razdalja. Leta 1566 je Pedro Nunes v svojih zapisih prvič uporabil besedo »rumb« (»rhumb line« pomeni loksodroma v angleščini). Beseda loksodroma pa se je razvila iz grške besede loxos (poševen) in dromos (smer). Prvič se pojavi leta 1624, ko jo je Willebrord Snell latiniziral iz flamske besede »kromstrijk«, kar pomeni zakrivljena smer. To besedo je Simon Stevin uporabil v opisih Nunesovih del. Danes obstajata v angleščini dva prevoda besede loksodroma: »loxodrome« in »rhumb line«. »Loxodrome« je latinski sinonim besede »rhumb line« in se bolj uporablja kot geometrijski pojem. Z besedo »rhumb« v angleškem jeziku opredelimo smer, z »loxodrome« pa krivuljo (Alexander, 2004).

### 4.1 Dolžina loksodrome

Dolžina loksodrome med dvema točkama je pomemben podatek pri načrtovanju poti, saj so od nje odvisni stroški goriva in čas, ki bo potreben za pot. Za izračun dolžine loksodrome so potrebne geografske koordinate začetne točke  $A (\varphi_1, \lambda_1)$  in končne točke  $B (\varphi_2, \lambda_2)$ . Enačba za izračun dolžine loksodrome med točkama  $A$  in  $B$  je (Peterca, 2001):

$$D_L = \frac{R \cdot (\varphi_2 - \varphi_1)}{\cos A}$$

kjer  $R$  predstavlja radij Zemlje in  $A$  azimut loksodrome, ki ga izračunamo po enačbi (Peterca, 2001):

$$A = \operatorname{atan} \left( \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\ln \left( \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2} \right) \right) - \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right)} \right)$$

## 4.2 Izračun končne točke loksodrome

Izračun končne točke loksodrome je pogost problem v praktični navigaciji, s katerim se pomorščak seznanja takrat, ko želi izračunati položaj plovila glede na dolžino opravljene poti in azimuta, po katerem je plul. Za izračun končne točke loksodrome  $B(\varphi_2, \lambda_2)$  so torej potrebne koordinate začetne točke  $A(\varphi_1, \lambda_1)$ , azimut  $A$  in dolžina poti po loksodromi  $D_L$ . Enačbe so (Benković, 1986):

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{D_L}{R} \cdot \cos A$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\varphi_M \cdot \tan A$$

$$\Delta\varphi_M = R \cdot \ln \left( \frac{\tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2} \right)}{\tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right)} \right)$$

kjer je  $\varphi_2$  geografska širina končne točke  $B$ ,  $\lambda_2$  geografska dolžina končne točke  $B$ ,  $\Delta\varphi_M$  razlika Mercatorjevih širin točk  $A$  in  $B$  in  $R$  radij Zemlje.

Vmesne točke loksodrome se v navigaciji običajno ne računajo, saj jih za reševanje običajnih navigacijskih problemov ni potrebno poznati. Običajno se računajo le vmesne točke ortodrome, da jo lahko razdelimo na več odsekov ter med njimi potujemo po loksodromi.

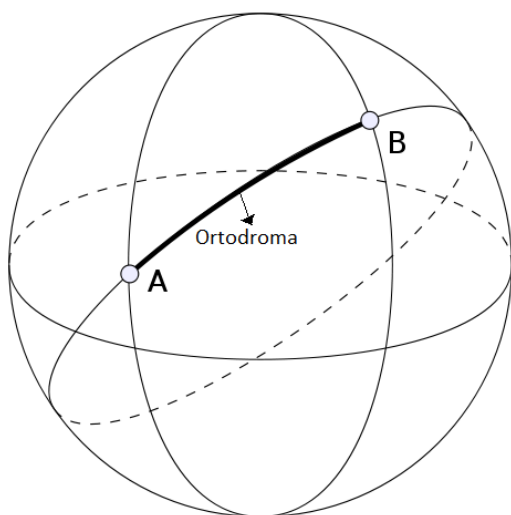
Za doseg cilja diplomske naloge, v kateri proučujemo obe krivulji na krogli, elipsoidu in v kartografskih projekcijah, pa so potrebne tudi vmesne točke loksodrome, saj bo z njimi opisan potek krivulje. V nalogi bomo te točke računali na podlagi enačb izračuna končne točke loksodrome. Določi se, na koliko delov se razdeli celotna dolžina poti, nato pa se računajo točke za vsak delček poti, torej za različne dolžine poti loksodrome, medtem ko začetna točka in azimut ostajata vseskozi enaka.

## 5 ORTODROMA NA KROGLI

Veliki krog je krožnica na površini krogle, ki deli kroglo na dve polobli in ima enako središče kot krogla. Drugače povedano, veliki krog je presečišče krogle z ravnino, ki poteka skozi njeno središče. Ker ima najmanjšo ukrivljenost na površini krogle, je krajši odsek velikega kroga tudi najkrajša razdalja med točkama oziroma ortodroma.

Najkrajšo zveznico dveh točk na katerikoli analitični ploskvi imenujemo geodetska linija. Ortodroma je torej geodetska linija na zemeljski krogli in je krajši del velikega kroga skozi dve točki (Slika 4) (Peterca, 2001).

Po ortodromi je v praksi težje potovati, saj bi morali neprestano spreminjati smer. Izjema je potovanje po poldnevnikih ali po ekvatorju, ki so prav tako veliki krogi. V teh primerih ortodroma in loksodroma sovpadata.



Slika 4: Ortodroma – krajši odsek velikega kroga na krogli (Vir: URL 2)

### 5.1 Dolžina ortodrome

Dolžina ortodrome je pomemben podatek pri načrtovanju poti. Običajno se ga povezuje s prihrankom poti glede na loksodromo. Za izračun sta potrebni začetna točka  $A (\varphi_1, \lambda_1)$  in končna točka  $B (\varphi_2, \lambda_2)$ , nato pa se računa po enem od obrazcev sferne trigonometrije. V nalogi je uporabljen kosinusni stavek (Benković, 1986):

$$D_o = R \cdot \text{acos} ( \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 \cdot \cos\Delta\lambda ),$$

kjer je  $D_o$  dolžina ortodrome v dolžinski merski enoti,  $R$  radij Zemlje in  $\Delta\lambda$  razlika geografskih dolžin začetne in končne točke.

## 5.2 Izračun končne točke ortodrome

Izračun končne točke ortodrome se v tradicionalni praktični navigaciji redko uporablja, saj se pot načrtuje po loksodromi (računa se le vmesne točke ortodrome). Za izračun so potrebne koordinate začetne točke  $A (\varphi_1, \lambda_1)$ , začetni azimut  $A_z$ , in dolžina poti po ortodromi  $D_o$  v dolžinski merski enoti. Enačbe so (Fenna, 2007):

$$\varphi_B = \varphi_1 + \arcsin \left( \sin \varphi_1 \cdot \cos \left( \frac{D_o}{R} \right) + \cos \varphi_1 \cdot \sin \left( \frac{D_o}{R} \right) \cdot \cos A_z \right)$$
$$\lambda_B = \lambda_1 + \arctan \left( \frac{\sin \left( \frac{D_o}{R} \right) \cdot \sin A_z}{\cos \varphi_1 \cdot \cos \left( \frac{D_o}{R} \right) - \sin \varphi_1 \cdot \sin \left( \frac{D_o}{R} \right) \cdot \cos A_z} \right)$$

kjer je  $R$  radij Zemlje.

## 5.3 Izračun vmesnih točk ortodrome

Potovanje natanko po ortodromi je v tradicionalni navigaciji praktično neizvedljivo, saj bi morali zvezno spreminjati azimut vozila, zato se določijo vmesne točke na ortodromi, med katerimi se potuje s konstantnim azimutom po loksodromi. Najprej je potrebno določiti geografske dolžine vmesnih točk  $\lambda_x$ , nato pa izračunati še pripadajoče geografske širine  $\varphi_x$  (Benković, 1986):

$$\tan \varphi_x = \tan \varphi_1 \cdot \cos \Delta\lambda_x + \operatorname{ctg} A_z \cdot \sin \Delta\lambda_x \cdot \sec \varphi_1$$

$$\Delta\lambda_x = (\pm\lambda_x) - (\pm\lambda_A),$$

kjer  $A_z$  predstavlja začetni azimut ortodrome ter  $\Delta\lambda_x$  razliko v geografski dolžini vmesne in začetne točke.

Ta način je pomemben v praktični tradicionalni navigaciji, saj se tako poljubno izberejo geografske dolžine vmesnih točk, nato pa se izračunane točke vrišejo na karto v Mercatorjevi projekciji, od koder se določijo azimuti odsekov loksodrom.

---

Vmesne točke pa se lahko izračuna tudi na podlagi enačb izračuna končne točke, s tem da se spreminja dolžina dela poti po ortodromi, dokler ni zajeta celotna ortodroma. V nalogi je zaradi lažje zastavitve problema v programskem okolju uporabljena slednja metoda. Za namen diplomske naloge namreč ni pomembno, kakšna je geografska dolžina vmesnih točk, saj so te potrebne samo za aproksimacijo ortodrome, ki se nato preslika v različne projekcije.

## 6 LOKSODROMA NA ELIPSOIDU

Loksodroma na elipsoidu je, enako kot na krogli, krivulja, ki seka meridiane pod enakim azimutom. Kadar se azimut razlikuje od  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  ali  $270^\circ$ , se bo loksodroma asimptotično približevala polu, v nasprotnem primeru pa bo sovpadala z meridianom ali vzporednikom.

Pri obravnavanju loksodrome na elipsoidu, razlikujemo dva problema: direktni in inverzni. Direktni problem nastopi, kadar sta dani geografska širina in dolžina točke  $P_1$ , azimut ter razdalja med točkama  $P_1$  in  $P_2$ , računa pa se geografske koordinate točke  $P_2$ . Inverzni problem pa se pojavi, kadar so dane geografske koordinate začetne in končne točke, računamo pa azimut loksodrome in razdaljo med točkama.

V nalogi bomo primerjali razliko v dolžini poti med loksodromo in ortodromo med dvema krajema na krogli ter razliko v dolžini poti med loksodromo in geodetsko linijo med istima krajema na elipsoidu. V tem primeru uporabimo inverzni problem. Ravno tako bomo primerjali odstopanje med ortodromo in loksodromo v kartografskih projekcijah, pridobljenih s preslikavo krogle v ravnino ter razliko v odstopanju med geodetsko linijo in loksodromo v kartografskih projekcijah, pri katerih je kot referenčna ploskev uporabljen elipsoid. Za izris loksodrome v kartografski projekciji so potrebne vmesne točke, ki se nato preslikajo v ravnino projekcije. Vmesne točke loksodrome na elipsoidu bodo izračunane na podlagi enačb izračuna končne točke, kot je razloženo že v poglavju 4.2. V tem primeru uporabimo direktni problem.

### 6.1 Direktni problem loksodrome na elipsoidu

Najprej je potrebno izračunati dolžino loka meridiana  $L_l$  od ekvatorja do točke  $P_1$  (Fenna, 2007):

$$L_1 = a(A_0\varphi_1 - A_1\sin 2\varphi_1 + A_4\sin 4\varphi_1 - A_6\sin 6\varphi_1 + A_8\sin 8\varphi_1 - A_{10}\sin 10\varphi_1 + \dots)(6.1)$$

kjer so

$$A_0 = 1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 - \frac{5}{256}e^6 - \frac{175}{16384}e^8 - \frac{441}{65536}e^{10} + \dots$$

$$A_2 = \frac{3}{8}\left(e^2 + \frac{1}{4}e^4 + \frac{15}{128}e^6 + \frac{35}{512}e^8 + \frac{735}{16384}e^{10} + \dots\right)$$

$$A_4 = \frac{15}{256}\left(e^4 + \frac{3}{4}e^6 + \frac{35}{64}e^8 + \frac{105}{256}e^{10} + \dots\right)$$

$$A_6 = \frac{35}{3072}\left(e^6 + \frac{5}{4}e^8 + \frac{315}{256}e^{10} + \dots\right)$$

$$A_8 = \frac{315}{131072} \left( e^8 + \frac{7}{4} e^{10} + \dots \right)$$

$$A_{10} = \frac{693}{131072} (e^{10} + \dots)$$

Sledi izračun dolžine loka meridiana  $L_2$  od ekvatorja do točke  $P_2$ :

$$L_2 = s \cdot \cos \alpha + L_1$$

V nadaljevanju se uporabi Newton-Raphsonova iteracija za izračun geografske širine  $\varphi_2$  (Deakin, 2010):

$$f(\varphi^{(n)}) = a(A_0 \varphi^{(n)} - A_1 \sin 2\varphi^{(n)} + A_4 \sin 4\varphi^{(n)} - A_6 \sin 6\varphi^{(n)} + A_8 \sin 8\varphi^{(n)} - A_{10} \sin 10\varphi^{(n)} + \dots) - L_2 = 0,$$

kjer  $n$  označuje številko zaporedne iteracije. Za začetno vrednost iteracije  $\varphi^{(1)}$  se lahko privzame geografsko širino točke  $P_1$ . Sledi izračun nove vrednosti, ki se uporabi v naslednji iteraciji:

$$\varphi^{(n+1)} = \varphi^{(n)} - \frac{f(\varphi^{(n)})}{f'(\varphi^{(n)})},$$

kjer je

$$f'(\varphi^{(n)}) = \frac{d}{d\varphi} (f(\varphi^{(n)}))$$

in

$$\begin{aligned} f'(\varphi^{(n)}) &= \\ &= a(A_0 - 2A_2 \cos 2\varphi^{(n)} + 4A_4 \cos 4\varphi^{(n)} - 6A_6 \cos 6\varphi^{(n)} + 8A_8 \cos 8\varphi^{(n)} - 10A_{10} \cos 10\varphi^{(n)}) \end{aligned}$$

Iteracije se izvajajo, dokler ni razlika med  $\varphi^{(n+1)}$  in  $\varphi^{(n)}$  sprejemljivo majhne vrednosti (v nalogi je bila privzeta vrednost 0,01", sicer bi pa za pomorsko navigacijo zadostovala razlika velikosti ene sekunde). Vrednost  $\varphi$ , ki jo dobimo v zadnji iteraciji, je  $\varphi_2$  - geografska širina točke  $P_2$ .

Sledi izračun izometričnih širin  $q_1$  in  $q_2$  ter njune razlike  $\Delta q$ . Enakim diferencialom  $d\varphi$  in  $d\lambda$  ne ustrezata enaki dolžini diferencialno majhnih lokov, kar pomeni, da sistem geografskih koordinat na elipsoidu ni izometričen. Merski enoti vzdolž koordinatnih osi torej nista med seboj enaki. Iz tega

razloga uvedemo sistem izometričnih koordinat, v katerem sta  $q$  in  $\lambda$  izometrični koordinati,  $q$  pa se imenuje izometrična širina. Računamo jo po enačbi (Peterca, 2001):

$$q_i = \ln \left( \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_i}{2} \right) \cdot \left( \frac{1 - e \cdot \sin \varphi_i}{1 + e \cdot \sin \varphi_i} \right)^{\frac{e}{2}} \right), \quad i = 1, 2 \quad (6.2)$$

kjer je  $e$  ekscentričnost elipsoida. Nato izračunamo še razliko geografskih dolžin po enačbi

$$\Delta \lambda = \Delta q \cdot \tan \alpha,$$

kjer je

$$\Delta q = q_2 - q_1$$

ter se jo prišteje  $\lambda_1$  (Deakin, 2010):

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta \lambda$$

## 6.2 Inverzni problem loksodrome na elipsoidu

Pri reševanju inverznega problema so dane geografske koordinate začetne in končne točke na elipsoidu, računata pa se azimut  $\alpha$  ter dolžina loksodrome  $s$ .

Najprej izračunamo izometrični širini  $q_1$  in  $q_2$  po enačbi (6.2) ter njuno razliko  $\Delta q$  in nato še razliko geografskih dolžin začetne in končne točke  $\Delta \lambda$ .

Sledi izračun azimuta loksodrome  $\alpha$  po enačbi (Deakin, 2010):

$$\alpha = \arctan \left( \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{q_2 - q_1} \right)$$

Ko po enačbi (6.1) izračunamo še dolžini loka meridiana  $L_1$  in  $L_2$ , lahko izračunamo dolžino loksodrome po enačbi (Deakin, 2010):

$$s = \frac{L_2 - L_1}{\cos \alpha}$$



## 7 GEODETSKA LINIJA NA ELIPSOIDU

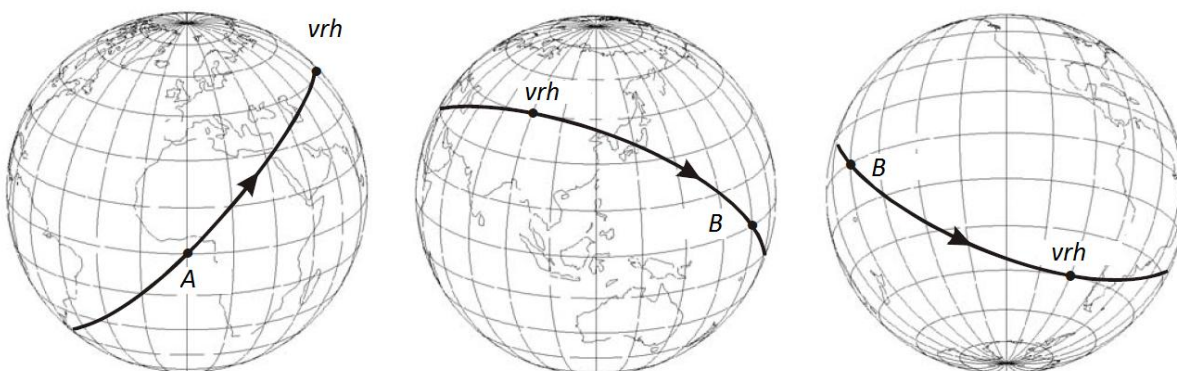
Na krogli je najkrajša povezava dveh točk lok velikega kroga oziroma ortodroma, ki je ravninska krivulja. Na elipsoidu pa je najkrajša razdalja med dvema točkama, t.i. geodetska linija, prostorska krivulja. Geodetska linija ima lastnost, da v vsaki njeni točki poteka oskulacijska ravnina skozi normalo na ploskev v tej točki (Stopar, 2008).

Karakteristična enačba geodetske linije je Clairautova enačba, ki se glasi:

$$N \cdot \cos\varphi \cdot \sin\alpha = \text{const}$$

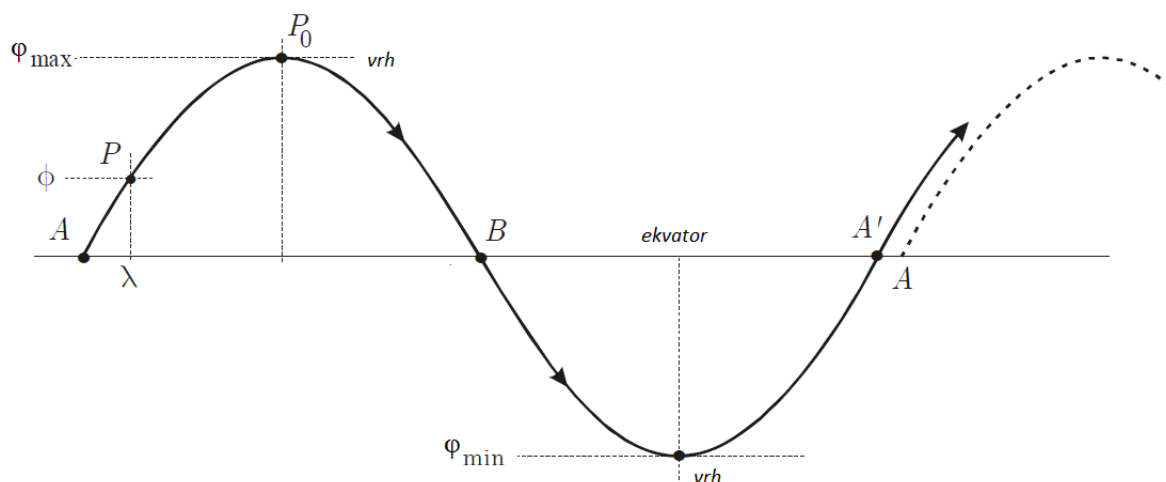
kjer je  $N$  polmer ukrivljenosti prvega vertikalala ter  $\alpha$  azimut krivulje v določeni točki. Enačba pove, da je v vsaki njeni točki produkt radija vzporednika  $r = N \cdot \cos\varphi$  in sinusa azimuta  $\alpha$  v tisti točki konstanta. Ko se geografska širina geodetske linije večja (na severni ali južni polobli), radij vzporednika pada in sinus azimuta  $\alpha$  se spreminja, dokler ne doseže maksimuma ali minimuma pri  $\pm 1$ . Ta točka se imenuje vrh geodetske linije in ima lastnost, da v njej geodetska linija doseže največjo geografsko širino (Deakin, 2009).

Sliki 5 in 6 prikazujeta celoten cikel geodetske linije. Slika 6 ta cikel prikazuje v ravnini, kjer je dobro vidno nihanje geodetske linije med dvema mejnima vzporednikoma, od katerih se eden nahaja na severni in drugi na enaki geografski širini na južni polobli.  $P$  je točka na geodetski liniji, ki seka ekvator v točki  $A$ , doseže maksimum v točki  $P_0$  na severni polobli pri  $\varphi_{max}$ , se usmeri jugovzhodno proti ekvatorju, ki ga seka v točki  $B$ , doseže najvišjo geografsko širino na južni polobli v  $\varphi_{min}$ , nato pa zaključi svoj cikel v točki  $A'$  na ekvatorju. Geografski dolžini točke  $A$  in  $A'$  se razlikujeta. To pomeni, da se geodetska linija (zaradi ekscentričnosti elipsoida) po celotnem ciklu ne ponovi (Deakin, 2010).



Slika 5: Cikel geodetske linije na elipsoidu

(Vir: Deakin, 2010)



Slika 6: Cikel geodetske linije v ravnini

(Vir: Deakin, 2010)

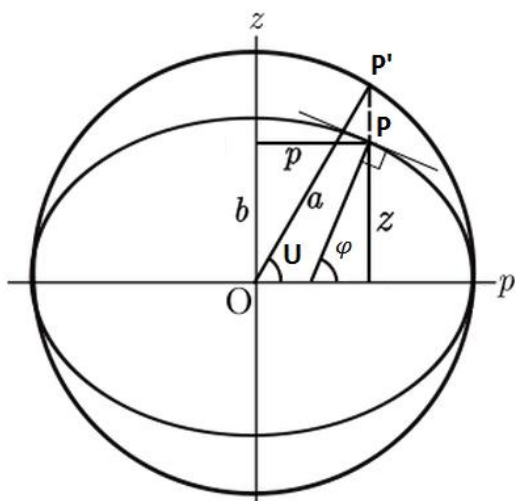
Ko obravnavamo geodetsko linijo na elipsoidu, lahko rešujemo direktni ali inverzni problem. Obstaja več načinov reševanja teh dveh problemov, v nalogi pa bo uporabljena metoda, ki jo je razvil Thaddeus Vincenty leta 1975. Njegova metoda temelji na uporabi pomožne krogle (Vincenty, 1975).

Kot je omenjeno že v prejšnjem poglavju, bomo v nalogi primerjali razliko v dolžini poti med loksodromo in ortodromo med dvema krajema na krogli ter razliko v dolžini poti med loksodromo in geodetsko linijo med istima krajema na elipsoidu, prav tako pa bomo primerjali odstopanja med krivuljama v kartografski projekciji pri preslikavi krogle v ravnino ter preslikavi elipsoida v ravnino. Za reševanje omenjenih nalog je potrebno obravnavati oba problema geodetske linije, direktnega in inverznega.

## 7.1 Direktni problem geodetske linije

Pri direktnem problemu sta dani geografska širina in dolžina točke  $P_1$ , začetni azimut  $\alpha_{12}$  in dolžina geodetske linije  $s$ , računajo pa se geografske koordinate točke  $P_2$ . Celoten postopek je razvil Vincenty (Vincenty, 1975).

Najprej je potrebno izračunati reducirano širino  $U_1$  točke  $P_1$ . Povezavo med reducirano in geografsko širino na elipsoidu prikazuje slika 7. Reducirana širina je definirana s polmerom, ki poteka iz centra elipsoida do točke  $P'_1$  na pomožni krogli, ki je vertikalna projekcija točke  $P_1$  na elipsoidu.



Slika 7: Reducirana širina (Vir: URL 3)

Enačba reducirane širine  $U_1$  se glasi:

$$\tan U_1 = (1 - f) \cdot \tan \varphi_1 \quad (7.1)$$

kjer je  $f$  sploščenost elipsoida.

Sledi izračun azimuta geodetske linije na ekvatorju  $\alpha_E$

$$\sin \alpha_E = \cos U_1 \cdot \sin \alpha_1 = \cos U_0 \quad (7.2)$$

kjer je  $\alpha_1$  azimut geodetske linije v točki  $PI$ , ter  $U_0$  reducirana širina vrha geodetske linije.

Sledi izračun konstante  $u$  po enačbi

$$u^2 = \cos^2 \alpha_E \frac{(a^2 - b^2)}{b^2} \quad (7.3)$$

kjer sta  $a$  in  $b$  velika ter mala polos elipsoida.

Nato izračunamo kotno razdaljo  $\sigma_1$  od ekvatorja do točke  $PI'$  na pomožni krogli:

$$\tan \sigma_1 = \frac{\tan U_1}{\cos \alpha_1}$$

Sledi izračun Vincenty-jevih konstant  $A'$  in  $B'$  po enačbah

$$A' = 1 + \frac{u^2}{16384} \left( 4096 + u^2 \cdot (-768 + u^2 \cdot (320 - 175u^2)) \right) \quad (7.4)$$

$$B' = \frac{u^2}{1024} \left( 256 + u^2 \cdot (-128 + u^2 \cdot (74 - 74u^2)) \right) \quad (7.5)$$

in nato še izračun kotne razdalje  $\sigma$  med  $PI'$  in  $P2'$  na pomožni krogli s pomočjo iteracij:

$$2\sigma_m = 2\sigma_1 + \sigma$$

$$\Delta\sigma = B' \cdot \sin\sigma \left( \cos 2\sigma_m + \frac{1}{4} B' (\cos\sigma (2\cos^2 2\sigma_m - 1)) \right)$$

$$\sigma = \frac{s}{bA'} + \Delta\sigma$$

kjer je  $\sigma_m$  kotna razdalja med ekvatorjem in sredinsko točko geodetske linije  $PI'P2'$  na pomožni krogli.

Kot prvo aproksimacijsko vrednost lahko za  $\sigma$  izberemo  $\frac{s}{bA'}$ . V tem koraku so izračunani že vsi elementi, potrebni za izračun geografske širine končne točke geodetske linije  $P2$ :

$$\tan\varphi_2 = \frac{\sin U_1 \cdot \cos\sigma + \cos U_1 \cdot \sin\sigma \cdot \cos\alpha_1}{(1-f)\sqrt{\sin^2\alpha_E + (\sin U_1 \cdot \sin\sigma - \cos U_1 \cdot \cos\sigma \cdot \cos\alpha_1)^2}}$$

Za izračun geografske dolžine končne točke pa je potrebno najprej izračunati še razliko geografskih dolžin na pomožni krogli  $\Delta\omega$ :

$$\tan\Delta\omega = \frac{\sin\sigma \cdot \sin\alpha_1}{\cos U_1 \cdot \cos\sigma - \sin U_1 \cdot \sin\sigma \cdot \cos\alpha_1}$$

ter Vincety-jevo konstanto  $C$ :

$$C = \frac{f}{16} \cos^2\alpha_E (4 + f(4 - 3\cos^2\alpha_E)),$$

nakar lahko izračunamo razliko geografskih dolžin na elipsoidu po enačbi:

$$\Delta\lambda = \Delta\omega - (1 - C) \cdot f \cdot \sin\alpha_E \left( \sigma + C \cdot \sin\sigma (\cos 2\sigma_m + C \cdot \cos\sigma (-1 + 2\cos^2\sigma_m)) \right)$$

in  $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$ .

S tem je izračunana točka  $P2(\varphi_2, \lambda_2)$ .

## 7.2 Inverzni problem geodetske linije

Inverzni problem nastopi, ko ob danih geografskih koordinatah začetne in končne točke geodetske linije  $P1$  in  $P2$ , računamo dolžino geodetske linije ter začetni in nasprotni azimut.

Začnemo z izračunom reduciranih širin točk  $P1$  in  $P2$  po enačbi (7.1), nakar sledi izračun razlike geografskih dolžin točk  $P1$  in  $P2$   $\Delta\lambda$ .

Sledi izračun razlike geografskih dolžin na pomožni krogli  $\Delta\omega$  med  $P1'$  in  $P2'$  s pomočjo iteracije.

$$\sin^2\sigma = (\cos U_2 \cdot \sin\Delta\omega^{(n)})^2 + (\cos U_1 \cdot \sin U_2 - \sin U_1 \cdot \cos U_2 \cdot \cos\Delta\omega^{(n)})^2$$

$$\cos\sigma = \sin U_1 \cdot \sin U_2 + \cos U_1 \cdot \cos U_2 \cdot \cos\Delta\omega^{(n)}$$

$$\tan\sigma = \frac{\sin\sigma}{\cos\sigma}$$

$$\sin\alpha_E = \frac{\cos U_1 \cdot \cos U_2 \cdot \sin\Delta\omega^{(n)}}{\sin\sigma}$$

$$\cos 2\sigma_m = \cos\sigma - \frac{2\sin U_1 \cdot \sin U_2}{\cos^2\alpha_E}$$

$$\Delta\omega^{(n)} = \Delta\lambda + (1 - C) \cdot f \cdot \sin\alpha_E \left( \sigma + C \cdot \sin\sigma (\cos 2\sigma_m + C \cdot \cos\sigma (-1 + 2 \cdot \cos^2 2\sigma_m)) \right),$$

kjer je  $n$  korak iteracije. Za prvo aproksimacijsko vrednost za  $\Delta\omega$  se lahko vzame  $\Delta\lambda$ .

Sledi izračun azimuta geodetske linije na ekvatorju ali parametrične širine vrha geodetske linije  $U_0$  po enačbi (7.2), izračun geodetske konstante  $u$  po enačbi (7.3) ter izračun Vincenty-jevih konstant  $A'$  in  $B'$  po enačbah (7.4) in (7.5).

V naslednjem koraku pa izračunamo dolžino geodetske linije  $s$ :

$$\Delta\sigma = B' \cdot \sin\sigma \left( \cos 2\sigma_m + \frac{1}{4} B' \left( \cos\sigma (2\cos^2 2\sigma_m - 1) - \frac{1}{6} B' \cdot \cos 2\sigma_m (-3 + 4\sin^2\sigma) (-3 + 4\cos^2 2\sigma_m) \right) \right)$$

$$s = b \cdot A(\sigma - \Delta\sigma),$$

kjer je  $b$  mala polos elipsoida.

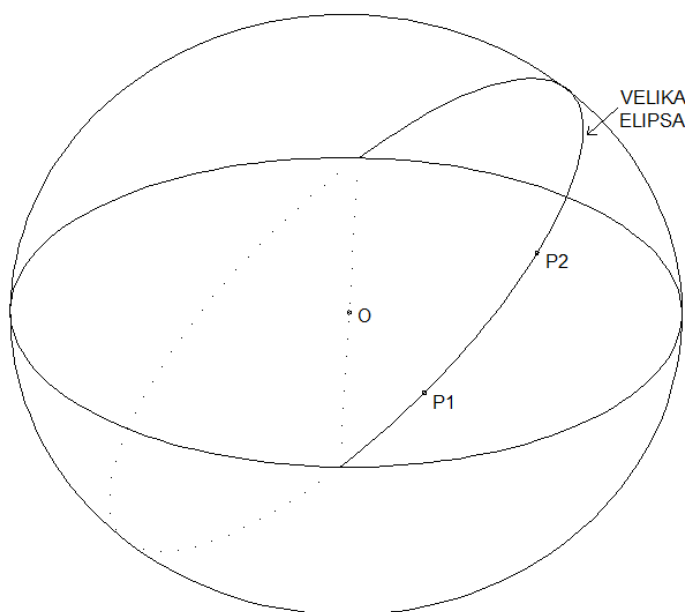
Na koncu izračunamo še začetni ( $\alpha_1$ ) in nasprotni azimut ( $\alpha_{21}$ ):

$$\tan\alpha_1 = \frac{\cos\psi_2 \cdot \sin\Delta\omega}{\cos\psi_1 \cdot \sin\psi_2 - \sin\psi_1 \cdot \cos\psi_2 \cdot \cos\Delta\omega}$$

$$\alpha_{21} = \alpha_1 \pm 180^\circ$$

### 7.3 Velika elipsa

Velika elipsa je krivulja na površju elipsoida, ki jo dobimo, če elipsoid presekamo z ravnino, ki poteka skozi njegov geometrični center ter začetno in končno točko poti  $P1$  in  $P2$  (Slika 8).



Slika 8: Lok velike elipse

Numerični testi in primerjave so pokazali, da lahko geodetsko linijo dobro aproksimiramo z lokom velike elipse. Celo pri dolžinah do približno 9000 navtičnih milj (~16700 km) in razlikah geografskih dolžin do  $135^\circ$  je odstopanje še vedno zanemarljivo majhno za pomorsko navigacijo, saj je manjše od 1 navtične milje, ki znaša 1852 m (med krajema Sydney v Avstraliji in Valparaiso v Čilu znaša odstopanje med lokom velike elipse in geodetsko linijo 0,71 navtične milje). Večja točnost rezultatov, pridobljenih na podlagi izračunov na geodetski liniji, nima praktičnega pomena v navigaciji, pomeni pa kompleksnejše izračune. Izračuni na podlagi velike elipse pa so preprostejši in še vedno precej bolj

točni kot tradicionalni izračuni za potrebe navigacije na podlagi zemeljske krogle in ortodrome na njej (Pallikaris in Latsas, 2009).

V nadaljevanju kljub vsemu podrobneje proučujemo geodetsko linijo.

## **8 NAVIGACIJA**

### **8.1 Osnove navigacije**

Beseda navigacija izhaja iz latinskih besed »navis«, kar pomeni ladja in »agare«, kar pomeni gibanje. V preteklosti je navigacija pomenila le veččino upravljanja z ladjo. Danes je opredeljena kot veda o vodenju ljudi, prevoznih sredstev, satelitov in vesoljskih plovil po optimalni, npr. najkrajši ali najbolj varni poti med dvema točkama na Zemlji ali drugem nebesnem telesu (Benković, 1986).

Navigacijo v grobem delimo na astronomsko, terestrično in elektronsko. Pri astronomski se položaj določa s pomočjo nebesnih teles, kot so Sonce, Luna, zvezde in planeti. Elektronska navigacija je določanje položaja s pomočjo elektronskih navigacijskih naprav. Sem spada navigacija na podlagi sprejemnikov GNSS. Terestrična navigacija pa pomeni določitev položaja na podlagi opazovanja naravnih ali umetnih zemeljskih objektov, kot so značilne zgradbe, svetilniki, pomorske oznake ter značilne topografske oblike kopnega in morskega dna (Bjelovučić et al., 2007).

### **8.2 Navigacija po ortodromi in loksodromi**

Če bi od začetne do končne točke načrtovane poti potovali po ortodromi, bi potovali po odseku velikega kroga in bi tako prepotovali najkrajšo možno pot. V tem primeru pa bi morali neprestano spreminjati smer gibanja, saj ortodroma seka poldnevniko pod različnimi koti. Ker je to v praksi težko izvedljivo, ortodromo razdelimo na več krajših odsekov, med katerimi se potuje po loksodromi. Vmesne točke moramo skrbno izbrati, saj je od njihovega števila in položaja odvisna dolžina poti (Klenak, 2004).

V primeru potovanja po loksodromi ne opravimo najkrajše možne poti, vendar pa je navigacija enostavna, saj ni potrebno spreminjati kurza. Razlike v dolžinah med ortodromo in loksodromo so odvisne od dolžine poti, kurza in geografske širine začetne in končne točke. Kadar razlike v dolžinah niso prevelike, je primerneje izbrati navigacijo po loksodromi. Navadno jo izberemo tudi v primeru večjih oddaljenosti med začetno in končno točko poti, s tem da ortodromo razdelimo na več krajših loksodrom (Maling, 1992).

### **8.3 Uvedba tehnologije GNSS v navigacijo**

Tehnologija GNSS je ob uvedbi v navigacijo povzročila spremembe, saj je postala nepogrešljivo sredstvo tako za pomorsko kot druge vrste navigacij. V pomorstvu so tako vse bolj v uporabi



---

elektronske pomorske karte v vektorski obliki, t.im. elektronske navigacijske karte (ENC – Electronic Navigation Chart), ki se uporabljajo skupaj z sprejemniki GNSS, ki določajo položaj ladje. ENC predstavlja del sistema za prikazovanje elektronskih navigacijskih kart in informacij (ECDIS), ki z navigacijsko opremo deluje kot navigacijski informacijski sistem, ki prikazuje elektronsko karto. Uporaba ENC in ECDIS je tako vsaj enakovredna uporabi ažurirane karte (Radovan et al., 2006).

Današnji navigacijski sistemi, opremljeni z algoritmi za izračun ortodrome omogočajo, da je vsak nov izračunan položaj plovila začetna točka posodobljene ortodrome ali, natančneje, velike elipse. V tem primeru loksodrome ne potrebujemo. Nekateri avtorji celo napovedujejo konec njene dobe (v praktičnem smislu), saj nihče več ne bo računal navigacijskih elementov iz elektronske karte po grafični metodi (Weintrit, Kopacz, 2011).

Če bi torej izbrali navigacijo po ortodromi in bi imeli vključeno avtomatsko krmiljenje, ki bi bilo povezano s sprejemnikom GNSS ter vgrajenimi algoritmi za izračun točk ortodrome v realnem času, bi pomenilo, da loksodrome v praktičnem smislu ne potrebujemo več. Zaenkrat se to še ni uveljavilo v praksi. Izračunamo točke ortodrome, ki jih optimalno določimo glede na dolžino poti, vendar vmes še vedno potujemo po loksodromi. Najverjetneje nikoli ne bomo pozabili nanjo, saj prednost konstantnega kurza, v primerjavi z neprestanim obračanjem krmila, pomeni več kot prednost krajše poti. Nenazadnje lahko na plovilu odpove elektronika, brez katere ne gre drugače, kot da uporabimo analogne karte in veščine tradicionalne navigacije.

## 9 PROUČEVANJE ORTODROME, GEODETSKE LINIJE IN LOKSODROME V RAZLIČNIH POGOJIH NA ELIPSOIDU IN KROGLI

Pri načrtovanju poti je dolžina le-te pomemben podatek, saj je od nje odvisna višina stroškov (goriva) in poraba časa. Predvsem na krajših razdaljah ni pomembno, ali izberemo pot po ortodromi ali loksodromi, na daljših poteh in v višjih geografskih legah pa je razlika med njima precejšnja. Razlika v dolžini med ortodromo in loksodromo se torej spreminja s spreminjanjem dolžine med začetno in končno točko, azimutom in geografsko širino. Celoten problem v diplomski nalogi proučujemo na treh različno velikih območjih: območju Slovenije, Evrope in sveta.

V diplomski nalogi je izbran naslednji način reševanja problema: najprej določimo začetno točko, dolžino loksodrome in njen azimut, nato pa izračunamo končno točko poti. Za isti par točk izračunamo še dolžino ortodrome.

Mejne koordinate območij so prikazane v preglednici 2. Za Evropo so izbrane koordinate skrajnih točk celinske Evrope, zaokrožene na stopinjo. Najsevernejšo točko predstavlja Kinnarodden (Norveška), najjužnejšo Punta de Tarifa (Španija), najzahodnejšo Cabo de Roca (Portugalska), na vzhodu pa je to najvzhodnejši konec republike Komi v Rusiji (URL 4 (10.1.2012)).

Preglednica 2: Mejne koordinate območij

	$\varphi$ (jug, sever)	$\lambda$ (zahod, vzhod)
<b>Slovenija</b>	(45° 25', 46° 53')	(13° 24', 16° 36')
<b>Evropa</b>	(36° 00', 71° 00')	(-10° 00', 66° 00')
<b>svet</b>	(-90° 00', 90° 00')	(-180° 00', 180° 00')

Na vseh treh območjih krivulji proučujemo pod enakimi azimuti, in sicer 0°, 45°, 90° ter 135°. Na ta način so zajeti skrajni primeri, kjer so razlike med ortodromo in loksodromo najmanjše, največje, pa tudi vmesne. Če izberemo vrednost določenega azimuta, odštetega od 360°, dobimo zrcalno sliko ortodrome oz. loksodrome glede na Y-os matematičnega koordinatnega sistema, zato krivulji proučujemo le za azimute, izbrane od 0° do 180°. Vrednosti odstopanja med krivuljama pri azimutu 0° (in 180°) v preglednicah niso prikazane, saj takrat krivulji sovpadata. Loksodroma je sicer prostorsko ukrivljena krivulja, medtem ko je ortodroma ravninska krivulja, zaradi česar tudi prihaja do razlik med njima. Pri azimutu 0° oz. 180° in na ekvatorju pa je tudi loksodroma ravninska krivulja, zaradi česar krivulji v teh primerih sovpadata.

Izračuni so narejeni s pomočjo programa Matlab R2011b.

## 9.1 Območje Slovenije

Dolžina loksodrome je odvisna od velikosti obravnavanega območja. V Sloveniji je najprej izbrana dolžina 200 km, saj ta zajame večino Slovenije. Nato je vrednost v vsakem naslednjem koraku razpolovljena, ki smo jo zaradi preglednosti zaokrožili na celi kilometer. Izračune smo ponavljali do 3 km, ko smo ugotovili, da se ortodroma in loksodroma v največjem merilu državne karte (1 : 5000) ne razlikujeta.

Geografska širina začetne točke je določena v skladu z območjem. Na območju Slovenije proučujemo loksodromo in ortodromo na srednji geografski širini Slovenije, ki znaša  $46^{\circ} 09'$  severne geografske širine. Za geografsko dolžino pa je izbrana dolžina skrajne zahodne točke Slovenije ( $\lambda = 13^{\circ}24'$ ), saj se krivulji tako pri vseh vrednostih azimutov skoraj v celoti nahajata na območju Slovenije tudi pri največji izbrani dolžini.

Razlike v dolžini loksodrome in ortodrome oziroma geodetske linije so prikazane v preglednicah 3, 4 in 5, kjer  $D_L$  predstavlja dolžino loksodrome,  $A$  azimut loksodrome ter  $\Delta D$  razliko med dolžino loksodrome in ortodrome oziroma geodetske linije. Razlika  $\Delta D$  je vedno pozitivna, saj je loksodroma vedno daljša ali enake dolžine kot ortodroma oziroma geodetska linija.

Izračuni so narejeni po enačbah, napisanih v poglavjih 4.2, 5.1, 6.2 in 7.2.

Preglednica 3: Razlika v dolžini loksodrome in ortodrome oziroma geodetske linije v odvisnosti od dolžine in azimuta loksodrome na krogli ter elipsoidu na območju Slovenije (začetna točka na srednji geografski širini Slovenije)

<b>D<sub>L</sub> [km]</b>	<b>A [°]</b>	<b>ΔD<sub>KROGLA</sub> [m]</b>	<b>ΔD<sub>ELIPSOID</sub> [m]</b>
<b>200</b>	<b>45</b>	4,6	4,7
	<b>90</b>	8,9	8,9
	<b>135</b>	4,3	4,3
<b>100</b>	<b>45</b>	0,6	0,6
	<b>90</b>	1,1	1,2
	<b>135</b>	0,5	0,5
<b>50</b>	<b>45</b>	0,1	0,1
	<b>90</b>	0,1	0,1
	<b>135</b>	0,1	0,1
<b>25</b>	<b>45</b>	0,0	0,0
	<b>90</b>	0,0	0,1
	<b>135</b>	0,0	0,0
<b>12</b>	<b>45</b>	0,0	0,0
	<b>90</b>	0,0	0,0
	<b>135</b>	0,0	0,0

V Sloveniji se od skrajne južne do severne točke geografska širina spremeni le za približno stopinjo in pol, zato predvidevamo, da spreminjanje razlike v dolžini med loksodromo in ortodromo v odvisnosti od geografske širine ne bo veliko. Kljub temu bomo preverili, kakšne vrednosti dobimo, ko postavimo začetno točko na skrajni sever ( $\varphi = 46^\circ 53'$ ) in skrajni jug Slovenije ( $\varphi = 45^\circ 25'$ ) pri najdaljši dolžini, tj. 200 km.

Preglednica 4: Razlika v dolžini loksodrome in ortodrome oziroma geodetske linije v odvisnosti od dolžine in azimuta loksodrome na krogli ter elipsoidu na območju Slovenije (začetna točka na skrajni severni geografski širini)

<b>D<sub>L</sub> [km]</b>	<b>A [°]</b>	<b>ΔD<sub>KROGLA</sub> [m]</b>	<b>ΔD<sub>ELIPSOID</sub> [m]</b>
<b>200</b>	<b>45</b>	4,9	4,9
	<b>90</b>	9,3	9,3
	<b>135</b>	4,5	4,5

Preglednica 5: Razlika v dolžini loksodrome in ortodrome oziroma geodetske linije v odvisnosti od dolžine in azimuta loksodrome na krogli ter elipsoidu na območju Slovenije (začetna točka na skrajni južni geografski širini)

$D_L$ [km]	$A$ [°]	$\Delta D_{\text{KROGLA}}$ [m]	$\Delta D_{\text{ELIPSOID}}$ [m]
200	45	4,4	4,4
	90	8,4	8,4
	135	4,0	4,0

V preglednicah 3, 4 in 5 opazimo spreminjanje razlike v dolžini ortodrome in loksodrome v odvisnosti od treh spremenljivk, vendar so te majhne. Največja odstopanja v dolžini so pri azimutu  $90^\circ$  in pri najdaljši razdalji, kjer znašajo 8,9 m. Če primerjamo vrednosti odstopanja za skrajni sever in skrajni jug Slovenije, opazimo naraščanje razlike v dolžini ortodrome in loksodrome z naraščanjem geografske širine, vendar se to odstopanje od skrajnega juga pa do skrajnega severa spremeni le za približno 1 meter pri azimutu loksodrome  $90^\circ$ , pri azimutu  $45^\circ$  in  $135^\circ$  pa le za nekaj decimetrov.

Razlike v dolžini med loksodromo in geodetsko linijo na elipsoidu se zelo podobne tistim med ortodromo in loksodromo na krogli. Vrednosti se razlikujejo za največ decimeter pri najdaljših dolžinah loksodrome (200 km) in azimutu  $90^\circ$ , sicer pa razlik med uporabo krogle ali elipsoida praktično ni, gledano s stališča potrebne natančnosti za navigacijo, kjer zadošča metrska natančnost.

## 9.2 Območje Evrope

Na območju Evrope proučujemo razlike med krivuljama z začetno točko na geografskih širinah  $40^\circ$ ,  $50^\circ$  in  $60^\circ$ . Za geografsko dolžino je privzet začetni meridian ( $\lambda = 0$ ), ki poteka skozi Greenwich. Dolžina loksodrome je določena v skladu z velikostjo območja, in sicer krivulji proučujemo pri dolžini loksodrome 1000 km, 2000 km in 3000 km. Rezultate odstopanj v dolžini poti med ortodromo oz. geodetsko linijo in loksodromo prikazuje preglednica 6, kjer  $\varphi$  predstavlja geografsko širino začetne točke,  $A$  azimut loksodrome,  $D_L$  dolžino loksodrome in  $\Delta D$  razliko med dolžino loksodrome in ortodrome oziroma geodetske linije.

Preglednica 6: Razlika v dolžini loksodrome in ortodrome oziroma geodetske linije v odvisnosti od dolžine in azimuta loksodrome na krogli ter elipsoidu na območju Evrope

$\varphi$	A [°]	D <sub>L</sub> [km]	$\Delta D_{\text{KROGLA}}$ [km]	$\Delta D_{\text{ELIPSOID}}$ [km]
40°	45	1000	0,454	0,455
	90		0,724	0,726
	135		0,289	0,289
	45	2000	4,619	4,626
	90		5,832	5,848
	135		1,856	1,856
	45	3000	20,118	20,154
	90		19,916	19,967
	135		5,021	5,020
50°	45	1000	0,922	0,924
	90		1,464	1,469
	135		0,586	0,587
	45	2000	9,541	9,565
	90		11,761	11,796
	135		3,817	3,821
	45	3000	43,054	43,175
	90		40,087	40,213
	135		10,578	10,587
60°	45	1000	2,026	2,033
	90		3,089	3,101
	135		1,209	1,212
	45	2000	22,391	22,468
	90		24,789	24,878
	135		7,7798	7,797
	45	3000	112,885	113,298
	90		84,265	84,576
	135		21,499	21,540

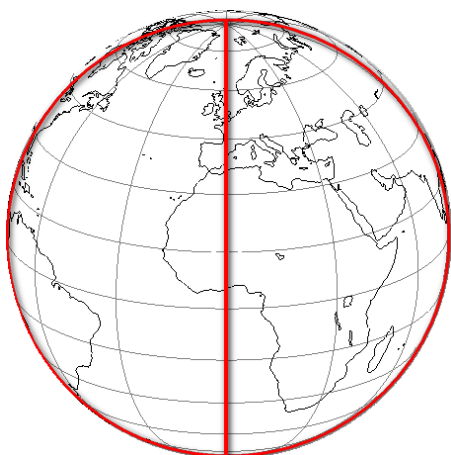
Na območju Evrope je razlika v dolžini med ortodromo in loksodromo že znatna, saj so obravnavane daljše razdalje in različne geografske širine, ki na območju Evrope dosežejo že visoke vrednosti (60°). Po pričakovanjih so v večini primerov največja odstopanja pri azimutu loksodrome 90°, razen pri najdaljših razdaljah loksodrome (3000 km), kjer se največja odstopanja v dolžini pojavijo pri azimutu 45°. Razlog lahko pripišemo dejstvu, da ima loksodroma v smeri vzhod-zahod največjo ukrivljenost v

horizontalni ravnini, zaradi česar so načeloma pri azimutu loksodrome  $90^\circ$  največja odstopanja, vendar pa ta ukrivljenost skokovito narašča, ko se približujemo poloma, zaradi česar se zgodi, da pri daljših oddaljenostih med točkama in pri azimutu loksodrome  $45^\circ$  postanejo ta odstopanja večja. Na primeru Evrope je opazno hitro naraščanje razlike v dolžini s prehajanjem v višje geografske lege. Tako razlika v dolžini med krivuljama v skrajnem primeru naraste tudi z 20 km na 113 km, če primerjamo rezultate razlike v dolžini pri začetni točki na  $40^\circ$  ter začetni točki na  $60^\circ$  (pri azimutu loksodrome  $45^\circ$  in dolžini 3000 km).

Če primerjamo med seboj še rezultate razlik v dolžini ortodrome in loksodrome na krogli s tistimi na elipsoidu, je trend spreminjanja enak, običajno so le malo večje razlike v dolžini med geodetsko linijo in loksodromo na elipsoidu. Razlike v rezultatih, pridobljenih na krogli, v primerjavi s tistimi na elipsoidu, znašajo od centimetra pa do slabega pol kilometra. Največja razlika nastane pri dolžini loksodrome na krogli 3000 km, usmerjeni pod azimutom  $45^\circ$  ter z začetno točko na  $60^\circ$  geografske širine in znaša 413 m, kar pomeni 0,1 % glede na dolžino loksodrome. Zaključimo lahko, da so razlike znatne, vendar za navigacijo nepomembne.

### 9.3 Območje sveta

Obravnavanje krivulj na območju sveta je pri izračunih omejeno na vzhodni del zahodne ter zahodni del vzhodne poloble (Slika 9). Razlog je v tem, da se loksodroma pri daljših razdaljah, v višjih geografskih legah pa tudi pri krajših, začne asimptotično približevati polu. Enačbe za izračun končne točke loksodrome pa odpovejo, ko se začne loksodroma ovijati okrog pola.



Slika 9: Meje testiranega območja sveta

Na območju sveta proučujemo ortodromo in loksodromo na štirih geografskih legah. Začetno točko krivulj smo postavili najprej na ekvator ( $\varphi = 0^\circ$ ), nato na severni povratnik ( $\varphi = 23^\circ 26'$ ), srednjo geografsko širino ( $\varphi = 45^\circ$ ) in severni tečajnik ( $\varphi = 66^\circ 33'$ ). Vrednosti so izbrane tako, da lahko

sistematično proučujemo krivulji na štirih značilnih zemljepisnih širinah, ki so druga od druge približno enako oddaljene. Začetne točke so izbrane le na severni polobli, saj bi dobili identične rezultate, če bi krivuljo, ki jo določa par točk na severni polobli, čez ekvator prezrcalili na južno poloblo. Geografska dolžina začetne točke je privzeta tako, da sta začetna in končna točka ortodrome oz. loksodrome približno enako oddaljeni od začetnega meridiana, kar sicer v tem poglavju ne igra vloge in pride prav šele pri obravnavanju krivulj v kartografskih projekcijah.

Krivulji proučujemo pri dolžinah loksodrome 7500 km, 10000 km in 12500 km. V višjih geografskih legah se doda še tisto dolžino loksodrome, zaokroženo na 1000 km, pri kateri se krivulja pri azimutu  $45^\circ$  še nahaja na zgoraj omenjenem območju. Tako na severnem povratniku proučujemo krivulji tudi za vrednost dolžine loksodrome (na krogli) 9000 km, na srednji geografski širini za 6000 km in na severnem tečajniku za 3000 km. Pri večjih vrednostih od omenjenih dolžin se torej računajo razlike med ortodromo oz. geodetsko linijo in loksodromo le še za azimut  $90^\circ$  in  $135^\circ$ , na severnem tečajniku pa pri dolžini loksodrome, večji od 7500 km, le še za azimut  $135^\circ$ .

Rezultati so prikazani v preglednici 7, kjer  $\varphi$  predstavlja geografsko širino začetne točke,  $\lambda$  geografsko dolžino začetne točke,  $A$  azimut loksodrome,  $D_L$  dolžino loksodrome ter  $\Delta D$  razliko med dolžino loksodrome in ortodrome oziroma geodetske linije.

Preglednica 7: Razlika v dolžini loksodrome in ortodrome oziroma geodetske linije v odvisnosti od dolžine in azimuta loksodrome na krogli ter elipsoidu na območju sveta

$\varphi$ [° ']	A	$D_L$ [km]	$\Delta D_{\text{KROGLA}}$ [km]	$\Delta D_{\text{ELIPSOID}}$ [km]
0	45	7500	57	57
	90		0	0
	135		57	57
	45	10000	335	335
	90		0	0
	135		335	335
	45	12500	1644	1648
	90		0	0
	135		1644	1648

se nadaljuje...



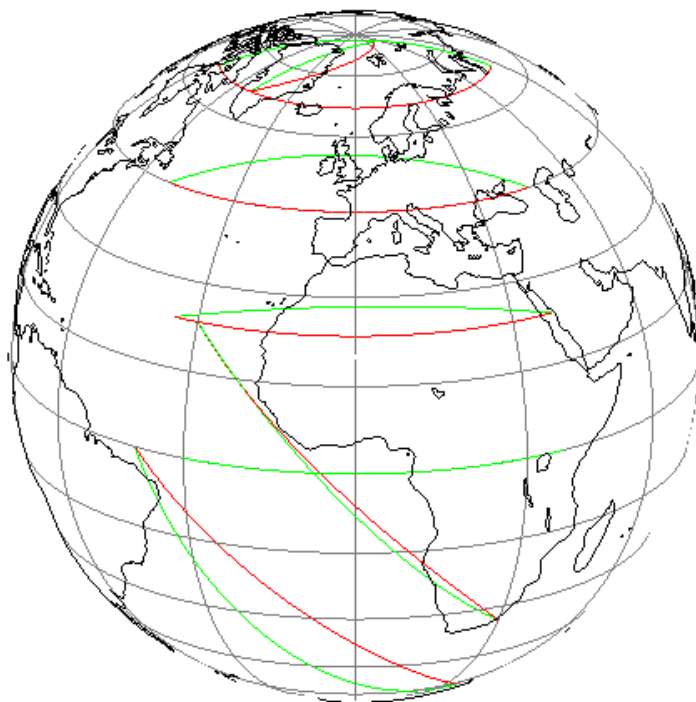
...nadaljevanje Preglednice 7

$\varphi$ [° ']	A	$D_L$ [km]	$\Delta D_{KROGLA}$ [km]	$\Delta D_{ELIPSOID}$ [km]	
23 26	45		356	356	
	90	7500	94	94	
	135		3	3	
	45		1063	1065	
	90	9000	174	174	
	135		11	11	
	45		/	/	
	90	12500	588	591	
	135		222	223	
	45	45		687	690
		90	6000	239	240
		135		32	32
45			/	/	
90		7500	488	490	
135			44	44	
45			/	/	
90		10000	1261	1265	
135			57	57	
45			/	/	
90		12500	2704	2713	
135			59	59	
66 33	45		292	293	
	90	3000	148	148	
	135		35	35	
	45		/	/	
	90	7500	2308	2317	
	135		253	253	
	45		/	/	
	90	10000	/	/	
	135		421	422	
	45		/	/	
	90	12500	/	/	
	135		594	595	

V začetni točki na ekvatorju so razlike v dolžini ortodrome in loksodrome enake pri azimutu loksodrome  $45^\circ$  in  $135^\circ$ . Razlog je v enakih ukrivljenostih krivulj v obeh smereh. Pri azimutu loksodrome  $90^\circ$  ni odstopanj, saj v tem primeru loksodroma postane ravninska krivulja in tako sovпада z ortodromo. Na splošno pa so v okolici ekvatorja najmanjše razlike med krivuljama, saj je tu ukrivljenost najmanjša.

Na območju sveta, kjer so obravnavane večje oddaljenosti med točkama, so razlike med krivuljama pri azimutu loksodrome  $45^\circ$  večje kot pri azimutu  $90^\circ$ . Enako je na primeru Evrope pri daljših razdaljah. Azimut  $45^\circ$  loksodromo in pripadajočo ortodromo usmeri proti severnemu polu, kjer torzija, ki opisuje ukrivljenost loksodrome v prostoru, hitro narašča. Le-ta pa je pri ortodromi enaka 0, saj je ravninska krivulja. Do razlik med krivuljama prihaja torej zaradi torzije loksodrome.

Slika 10 prikazuje ortodrome in loksodrome na območju celotnega sveta na zemeljski krogli. Opazimo lahko, kako se odstopanja med njima spreminjajo glede na njun položaj ter usmerjenost na krogli. Izrisane so loksodrome dolžin 7500 km, usmerjene pod azimutom  $90^\circ$  z začetno točko na ekvatorju, severnem povratniku, srednji geografski širini ter severnem tečajniku. Izrisana je tudi loksodroma dolžine 9000 km, usmerjena pod  $135^\circ$  z začetno točko na severnem povratniku in loksodroma dolžine 3000 km, usmerjena pod azimutom  $45^\circ$  z začetno točko na severnem tečajniku. Poleg vseh loksodrom so izrisane še ortodrome med enakima paroma točk.



Slika 10: Prikaz ortodrome (zelena barva) in loksodrome (rdeča barva) na zemeljski krogli

---

Pri proučevanju geodetske linije in loksodrome na elipsoidu dobimo zelo podobne rezultate in ugotovitve. Geodetska linija in loksodroma na elipsoidu sta vedno malo daljši od ortodrome in loksodrome na krogli, prav tako so razlike med njima običajno malo večje. Razlog temu je sploščenost elipsoida. Največja razlika pri obravnavanih primerih nastopi v primeru dolžine loksodrome na krogli 7500 km, azimuta loksodrome na krogli  $90^\circ$  ter začetne točke na severnem tečajniku in znaša na krogli 2308 km. Pot po loksodromi bi bila v tem primeru za 31% daljša glede na pot po ortodromi. Na elipsoidu je razlika med loksodromo in geodetsko linijo za 9 km večja, kar predstavlja 0,1 % obravnavane dolžine loksodrome na krogli. Če primerjamo še dolžino ortodrome in geodetske linije za isti par točk, znaša razlika med njima 20 km, kar predstavlja 0,3 % dolžine ortodrome. Na tako dolgi relaciji ne bi prihranili veliko več časa in goriva, če bi upoštevali to vrednost, seveda pa so številke odvisne tudi od načina izračuna polmera zemeljske krogle.

## 10 OPISI KARTOGRAFSKIH PROJEKCIJ

Ortodromo oz. geodetsko linijo in loksodromo bomo obravnavali v štirih različnih kartografskih projekcijah: Mercatorjevi, gnomonski, Lambertovi konformni konusni in transverzalni Mercatorjevi projekciji. Vsaka izmed njih je izbrana z določenim razlogom. Mercatorjeva projekcija je edina, v kateri se loksodroma preslika kot ravna črta, kar je pomembno pri navigaciji, gnomonska pa edina, v kateri se ortodroma preslika kot ravna črta, zaradi česar se v glavnem uporablja za načrtovanje najkrajših poti in prenos ortodrom na karte, izdelane v drugih projekcijah. Lambertova konformna konusna projekcija je zanimiva, ker se ortodroma pri dolžinah do 1000 km zelo malo razlikuje od premice, Gauss-Krügerjeva pa je pomembna, saj naša državna projekcija<sup>1</sup>.

### 10.1 Mercatorjeva projekcija

#### 10.1.1 Lastnosti in uporaba

Mercatorjeva projekcija spada med pokončne konformne cilindrične projekcije, kar pomeni, da se površina krogle ali elipsoida projicira na plašč valja, pri tem pa se koti ohranjajo. Poldnevnik se preslikajo kot ravne črte, ki so med seboj enako oddaljene, vzporedniki pa prav tako kot ravne črte, vendar neenako oddaljene med seboj. Te oddaljenosti so manjše bliže ekvatorju in se večajo proti poloma (Snyder, 1987).

Glede na položaj valja obstajata dva primera Mercatorjevih projekcij. Valj je lahko tangentni, ki se dotika krogle vzdolž ekvatorja ali pa sekantni, ki seka kroglo vzdolž dveh standardnih paralel. Vzdolž teh dveh paralel ni popačenj, v primeru tangentnega valja pa ni popačenj vzdolž ekvatorja (Snyder, 1987).

V polarnih predelih se pojavljajo velike deformacije površin, saj se pola v tej projekciji preslikata v neskončnost, zato ju na karti ne moremo prikazati (Snyder, 1987).

V Mercatorjevi projekciji se loksodroma preslika kot premica, zaradi česar ima projekcija poseben pomen v navigaciji, saj omogoča enostavno grafično računanje elementov, potrebnih za navigacijo.

---

<sup>1</sup> Zaradi uskladitve z evropsko terminologijo in imenom novega državnega koordinatnega sistema (ETRS89/TM) smo Gauss-Krügerjevo projekcijo preimenovali v transverzalno Mercatorjevo, zato jo v diplomski nalogi v nadaljevanju tako imenujemo.

Ortodroma se preslikuje kot krivulja višjega reda, konkavno obrnjena proti ekvatorju, torej vizualno ni najkrajša razdalja tudi na karti (Peterca, 2001).

### 10.1.2 Enačbe

V Mercatorjevo projekcijo se lahko preslikata tako krogla kot elipsoid. Enačbe za izračun koordinat, kjer valj seka kroglo po konstrukcijski paraleli  $\varphi_1$  (t.j. standardna paralela, na podlagi katere se računa kartografska mreža lista karte), so (Peterca, 2001):

$$x = R \cdot \cos\varphi_1 \cdot \ln U$$

$$y = R \cdot \cos\varphi_1 \cdot (\lambda - \lambda_0)$$

kjer je

$$U = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

in kjer je  $\lambda_0$  srednji meridian območja preslikave,  $R$  radij Zemlje,  $y$  in  $x$  pa so pravokotne koordinate v Mercatorjevi projekciji. Os  $X$  sovpada s srednjim meridianom območja preslikave, ki pozitivno narašča proti severu.

Enačbe, kjer valj seka elipsoid po konstrukcijski paraleli  $\varphi_1$ , pa so (Peterca, 2001):

$$x = N_1 \cdot \cos\varphi_1 \cdot \ln U$$

$$y = N_1 \cdot \cos\varphi_1 (\lambda - \lambda_0)$$

kjer je

$$U = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \left(\frac{1 - e \cdot \sin\varphi}{1 + e \cdot \sin\varphi}\right)^{\frac{e}{2}}$$

in kjer je  $N_1$  krivinski polmer prvega vertikalnega za konstrukcijsko paralelo,  $e$  ekscentričnost elipsoida,  $\lambda_0$  srednji meridian območja preslikave,  $y$  in  $x$  pa so pravokotne koordinate v Mercatorjevi projekciji.

Načeloma se konstrukcijska širina določi kot geografska širina srednje paralele lista karte, zaokrožena na celo minuto. Ker pa v nalogi obravnavamo ortodromo in loksodromo neodvisno od listov geografskih kart, konstrukcijsko širino določimo kot srednjo geografsko širino obravnavanega območja. Določene konstrukcijske širine so prikazane v preglednici 8.

Preglednica 8: Konstrukcijske širine  $\varphi_1$  obravnavanih območij

Območje	Konstrukcijska širina $\varphi_1$
Slovenija	46° 09' (blizu geografske širine Ljubljane)
Evropa	53° 30' (blizu geografske širine Berlina)
svet	0° 00' (tangentsni valj)

## 10.2 Gnomonska projekcija

### 10.2.1 Lastnosti in uporaba

Gnomonska projekcija spada med azimutne perspektivne projekcije, kar pomeni, da se točke na krogli preslikajo v ravnino, ki se te krogle dotika v centralni točki projekcije ali jo seka po vzporedniku ali almukantaratu. Projekcijsko središče se nahaja v središču krogle, zato lahko v tej projekciji prikažemo manj kot polovico poloble. Glede na deformacije spada med poljubne projekcije (Peterca, 2001).

Glede na lego projekcijske ravnine obstajajo trije primeri gnomonskih projekcij: polarne, ekvatorialne in poševne. Za vse tri velja, da se vsi veliki krogi (ortodrome) in s tem tudi vsi poldnevnik in ekvator preslikajo kot ravne črte, ostali vzporedniki pa kot krožnice, elipse, parabole ali hiperbole. Vsi veliki krogi, ki potekajo skozi centralno točko, se preslikajo kot šop premic, ki izhajajo iz te točke. Azimut vsake izmed teh premic je enak azimutu na zemeljskem površju. Točke, ki so enako oddaljene od centralne točke na zemeljskem površju, ostanejo take tudi v projekciji (Peterca, 2001).

Pri polarni gnomonski projekciji se poldnevnik preslikajo kot šop premic, ki so medsebojno oddaljene za enake vrednosti kotov, vzporedniki pa kot krogi s središčem v polu. Bolj, ko se oddaljujemo od pola, bolj so ti krogi oddaljeni med seboj. V primeru ekvatorialne gnomonske projekcije pa se poldnevnik preslikujejo kot medsebojno vzporedne ravne črte, pravokotne na ekvator. Bližje ko smo centralnemu poldnevniku, manjše so oddaljenosti med poldnevnik in hitreje se večajo, bolj ko se od njega oddaljujemo. Ostali vzporedniki, razen ekvatorja, pa se preslikujejo kot hiperbole, simetrične glede na ekvator.

Pri poševnih gnomonskih projekcijah se poldnevnik ravno tako preslikujejo kot ravne črte, vendar so medsebojno oddaljene za različne vrednosti kotov. Ekvator je pravokoten na centralni poldnevnik. Če je centralna točka severno od ekvatorja, se vzporednik, ki ga dobimo, če zemljepisno širino centralne točke odštejemo od 90°, preslika kot parabola, severnejši od tega vzporednika kot elipse, južnejši pa kot hiperbole. Ravno obratno velja, če se centralna točka nahaja južno od ekvatorja (Snyder, 1987).

Le v centralni točki ni nobenih deformacij, sicer pa te hitro naraščajo z oddaljevanjem od centra (Snyder, 1987).

Najpomembnejša in uporabna značilnost gnomonske projekcije je, da se ortodrome preslikujejo kot ravne črte. Loksodroma pa se preslikuje kot krivulja višjega reda, konkavno obrnjena proti polu. Načeloma se ta projekcija uporablja le za načrtovanje najkrajših poti in prenos ortodrom na karte, izdelane v drugih projekcijah (Peterca, 2001).

### 10.2.2 Enačbe

V ravnino gnomonske projekcije se lahko preslikuje le krogla, torej obstaja le krogelna oblika enačb. Zapisane enačbe veljajo za poševno gnomonsko projekcijo (Snyder, 1987):

$$x = R \cdot k' \cdot \cos\varphi \cdot \sin(\lambda - \lambda_0)$$

$$y = R \cdot k' \cdot [\cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi - \sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi \cdot \cos(\lambda - \lambda_0)]$$

kjer je

$$k' = \frac{1}{\cos c}$$

$$\cos c = \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi + \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi \cdot \cos(\lambda - \lambda_0)$$

in kjer je  $c$  kotna razdalja točke od centra projekcije,  $k'$  faktor merila v pravokotni smeri glede na radij iz centra karte,  $\varphi_1$  geografska širina centralne točke,  $\lambda_0$  geografska dolžina centralne točke,  $(x, y)$  pa so pravokotne koordinate v gnomonski projekciji. Os  $Y$  sovpada s srednjim meridianom  $\lambda_0$ , ki pozitivno narašča proti severu.

Centralna točka je v primeru obravnavanja območij Slovenije in Evrope določena kot središče območja, torej je bil uporabljen poševni položaj gnomonske projekcije. Na ta način se pridobi najmanjše popačenje celotnega območja. Na območju celega sveta pa so zaradi velikosti območja uporabljeni vsi trije položaji gnomonske projekcije: ekvatorialni, poševni in polarni. V primeru začetne točke na ekvatorju in severnem povratniku je uporabljen ekvatorialni položaj, v primeru začetne točke na srednji geografski širini poševni, v primeru začetne točke na severnem tečajniku pa polarni položaj. Koordinate centralnih točk so prikazane v preglednici 9.

Preglednica 9: Centralne točke posameznih obravnavanih območij

Območje	Centralna točka ( $\varphi_1, \lambda_0$ )	Položaj
Slovenije	(46° 09', 14° 30')	poševni
Evrope	(53° 30', 28° 00')	poševni
sveta	(0° 00', 0° 00')	ekvatorialni
	(45° 00', 0° 00')	poševni
	(90° 00', 0° 00')	polarni

### 10.3 Lambertova konformna konusna projekcija

#### 10.3.1 Lastnosti in uporaba

Lambertova konformna konusna projekcija (LKKP) spada med projekcije, pri kateri se mreža meridianov in paralel preslika na plašč stožca, ob tem pa se ohranjajo koti. Stožec se lahko dotika krogle vzdolž ene, ali pa seka kroglo vzdolž dveh standardnih paralel (Peterca, 2001).

Vzporedniki se preslikujejo kot neenakomerno oddaljeni loki koncentričnih krožnic, ki so tem bližje skupaj, čim bližje smo standardni paraleli. Poldnevnik pa se preslikujejo kot premice oz. radiji koncentričnih krožnic, ki so med seboj enako oddaljeni in sekajo vzporednike pod pravimi koti. Pol, ki se nahaja na isti polobli kot standardna paralela, se preslika kot točka, medtem ko se nasprotni preslika v neskončnost (Snyder, 1987).

LKKP se uporablja kot geodetska projekcija in kot projekcija letalskih ter preglednih kart srednjih meril. Kot geodetska projekcija je primerna za območja na srednjih geografskih širinah, ki se raztezajo v smeri vzhod – zahod. LKKP je projekcijski standard za izdelavo mednarodnih letalskih kart merila 1 : 500 000 in 1 : 1 000 000. Kljub temu, da se ortodroma preslika kot krivulja, se do razdalje 1000 km zelo malo razlikuje od premice. LKKP je tudi projekcijski standard Mednarodne karte sveta merila 1 : 1 000 000, ki pa je zastarela (Peterca, 2001).

LKKP je prav tako standard aktualne evropske zbirke prostorskih podatkov EuroRegionalMap (ERM), EuroGlobalMap (EGM) in EuroBoundaryMap (EBM) (URL 5).

Na standardnih paralelah ni deformacij dolžine, medtem ko so te negativne med dvema standardnima paralelama in pozitivne izven njiju (Snyder, 1987).



Ortodroma se v LKKP preslikuje kot krivulja višjega reda, konkavno usmerjena proti ekvatorju, ki pa se do 1000 km zelo malo razlikuje od premice in se jo lahko obravnava kot premico, loksodroma pa se preslikuje kot krivulja višjega reda, konkavno usmerjena proti polu.

### 10.3.2 Enačbe

Za Lambertovo konformno konusno projekcijo obstajata dve obliki enačb glede na to, kateri približek Zemlje je uporabljen: sferna in elipsoidna.

Enačbe za sferno obliko LKKP z dvema standardnima paralelama so (Snyder, 1987):

$$x = \rho \cdot \sin\theta$$

$$y = \rho_0 - \rho \cdot \cos\theta$$

kjer so

$$\rho = \frac{R \cdot F}{\tan^n \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}$$

$$\theta = n \cdot (\lambda - \lambda_0)$$

$$\rho_0 = \frac{R \cdot F}{\tan^n \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2} \right)}$$

$$F = \frac{\cos\varphi_1 \cdot \tan^n \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right)}{n}$$

$$n = \frac{\ln \left( \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} \right)}{\ln \left( \frac{\tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2} \right)}{\tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right)} \right)}$$

in kjer so  $(\varphi_0, \lambda_0)$  koordinate izhodišča ravninskega pravokotnega koordinatnega sistema,  $\varphi_1, \varphi_2$  standardni paraleli,  $n, F, \rho_0$  pa so konstante, ki se določijo enkrat za celotno karto. Os Y predstavlja srednji meridian  $\lambda_0$ , pozitivno usmerjen proti severu. Os X pravokotno seka os Y pri  $\varphi_0$  in je pozitivno usmerjena proti vzhodu.

Enačbe za preslikavo elipsoida v ravnino Lambertove konformne konusne projekcije so (Snyder, 1987):

$$x = \rho \cdot \sin\theta$$

$$y = \rho_0 - \rho \cdot \cos\theta$$

kjer so

$$\rho = a \cdot F \cdot t^n$$

$$\theta = n(\lambda - \lambda_0)$$

$$\rho_0 = a \cdot F \cdot t_0^n$$

$$n = \frac{\ln(m_1) - \ln(m_2)}{\ln(t_1) - \ln(t_2)}$$

$$m = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2\varphi}}$$

$$t = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{\left(\frac{1 - e \cdot \sin\varphi}{1 + e \cdot \sin\varphi}\right)^{\frac{e}{2}}}$$

$$F = \frac{m_1}{n \cdot t_1^n}$$

Konstante  $n, F$  in  $\rho_0$  se ravno tako določijo le enkrat za celotno karto.

Standardni paraleli sta določeni za vsako območje posebej. Območje Slovenije je v primeru LKKP obravnavano kot uradno določeno območje lista Mednarodne karte sveta NL33, ki zajema Slovenijo. List karte sega po geografski širini od 44° do 46° severne geografske širine po dolžini pa od 12° do 18° vzhodne geografske dolžine. Standardni paraleli sta določeni tako, da sta za 1/6 oddaljeni od mejne južne oziroma severne paralele lista. Na območju Evrope sta standardni paraleli določeni po enakem principu. Za območje sveta pa sta določeni izkustveno in na podlagi sprotnega izrisovanja Tissotovih indikatrix (s pomočjo programa Matlab). Standardne paralele območij so prikazane v preglednici 10.

Preglednica 10: Standardni paraleli obravnavanih območij

Območje	$\varphi_1$	$\varphi_2$
<b>Slovenija</b>	44° 40'	47° 20'
<b>Evropa</b>	42° 00'	65° 00'
<b>svet</b>	-10° 00'	40° 00'

## 10.4 Transverzalna Mercatorjeva projekcija

### 10.4.1 Lastnosti in uporaba

Transverzalna Mercatorjeva projekcija je konformna prečna cilindrična projekcija meridianskih con, pri kateri se centralni meridian in ekvator preslikata kot ravni črti, preostali vzporedniki in poldnevnik pa kot kompleksne krivulje, simetrične glede na srednji meridian in ekvator (Peterca, 2001).

Linjsko merilo vzdolž srednjega meridiana je lahko enako 1, kar pomeni, da vzdolž srednjega meridiana ni deformacij, lahko pa ga malo zmanjšamo in tako pozitivne in negativne linijske deformacije enakomerneje razporedimo po celotnem območju cone. Območje brez deformacij se tako prestavi vzdolž dveh ravnih črt na krogli (ali dveh krivulj na elipsoidu), simetričnih glede na srednji meridian. Kadar privzamemo kroglo kot približek Zemlje, so linijske deformacije v tej projekciji le funkcija oddaljenosti od srednjega meridiana cone (Snyder, 1987).

Projekcija je primerna za geodetsko računanje, katastrsko in topografsko izmero ter kartiranje in je na tem področju tudi najbolj razširjena.

Ortodroma se v transverzalni Mercatorjevi projekciji preslika kot skoraj ravna črta pri krajših razdaljah. Pri daljših pa se na severni polobli, kadar je usmerjena v smeri severovzhoda ali severozahoda preslika kot krivulja, konkavno usmerjena proti ekvatorju, kadar pa je usmerjena v smeri jugovzhoda ali jugozahoda, se preslika kot krivulja, konkavno usmerjena protu polu. Na južni polobli dobimo zrcalno sliko. Loksodroma se preslika kot krivulja, konkavno usmerjena proti polu.

### 10.4.2 Enačbe

Transverzalna Mercatorjeva projekcija obstaja tako za preslikavo krogle kot tudi elipsoida v ravnino, torej ločimo sferno in elipsoidno obliko enačb.

Enačbe za preslikavo krogle v ravnino transverzalne Mercatorjeve projekcije so (Snyder, 1987):

$$x = \frac{1}{2}R \cdot k_0 \cdot \ln\left(\frac{1+B}{1-B}\right)$$

$$y = R \cdot k_0 \cdot \left(\arctan\left(\frac{\tan\varphi}{\cos(\lambda - \lambda_0)}\right) - \varphi_0\right)$$

kjer so

$$k = \frac{k_0}{\sqrt{1 - B^2}}$$

$$B = \cos\varphi \cdot \sin(\lambda - \lambda_0)$$

in kjer je  $k_0$  faktor merila vzdolž srednjega meridiana cone,  $(\varphi_0, \lambda_0)$  pa so koordinate izhodišča ravninskega pravokotnega koordinatnega sistema. Os Y koordinatnega sistema sovпада s srednjim meridianom cone in je pozitivno usmerjena proti severu. Os X pravokotno seka os Y pri  $\varphi_0$  in je pozitivno usmerjena proti vzhodu.

Enačbe za preslikavo elipsoida v ravnino transverzalne Mercatorjeve projekcije so (Snyder, 1987):

$$x = k_0 \cdot N \left( A + (1 - T + C) \cdot \frac{A^3}{6} + (5 - 18 \cdot T + T^2 + 72 \cdot C - 58 \cdot e'^2) \cdot \frac{A^5}{120} \right)$$
$$y = k_0 (L - L_0 + N \cdot \tan\varphi \left( \frac{A^2}{2} + (5 - T + 9 \cdot C + 4 \cdot C^2) \cdot \frac{A^4}{24} + \right. \\ \left. (61 - 58 \cdot T + T^2 + 600 \cdot C - 330 \cdot e'^2) \cdot \frac{A^6}{720} \right))$$

kjer so

$$T = \tan^2\varphi$$

$$C = e'^2 \cdot \cos^2\varphi$$

$$A = \cos\varphi(\lambda - \lambda_0)$$

in kjer je  $N$  polmer ukrivljenosti prvega vertikala, ki se izračuna po enačbi (2.2),  $L$  dolžina loka meridiana, ki se izračuna po enačbi (6.1),  $k_0$  faktor merila vzdolž srednjega meridiana cone ter  $(\varphi_0, \lambda_0)$  koordinate izhodišča ravninskega pravokotnega koordinatnega sistema.

Za faktor merila vzdolž srednjega meridiana cone se navadno privzame vrednost 1, kar pomeni, da na srednjem meridianu cone ni deformacij. V določenih primerih se ta vrednost nekoliko zmanjša, da se deformacije porazdelijo čez celotno območje cone. V primeru naše državne projekcije je faktor merila določen z vrednostjo 0,9999, kar pomeni, da dolžinske deformacije na srednjem meridianu znašajo - 0,0001 in postopoma naraščajo do 0,0001 na robu cone. Na ta način smo dosegli, da še vedno z absolutno natančnostjo preslikave 1:10 000 potrebujemo, namesto dveh, le eno (razširjeno) cono za našo državno projekcijo, kar pomeni enoten državni koordinatni sistem za celo ozemlje Slovenije. Tako je tudi v diplomski nalogi za območje Slovenije privzet faktor merila 0,9999.

---

Za območje Evrope ena cona transverzalne Mercatorjeve pomeni že precejšnje deformacije linijskega merila, vendar je za proučevanje odstopanja med ortodromo in loksodromo v projekciji potreben enoten koordinatni sistem. Kadar se faktor merila srednjega meridiana nekoliko zmanjša, da se deformacije bolje porazdelijo po območju, se ga določi na podlagi vnaprej določene absolutne natančnosti preslikave, nato pa se lahko določi dovoljena širina cone. V diplomski nalogi pa je območje že vnaprej določeno, zato se za faktor merila srednjega meridiana cone privzame kar običajna vrednost 1. Dejansko nas v diplomski nalogi zanima splošno obnašanje krivulj v projekcijah, za kar ne potrebujemo visokih natančnosti.

Za območje sveta transverzalna Mercatorjeva projekcija v enotni coni nikakor ni primerna, saj so deformacije prevelike, so pa kljub temu prikazani rezultati, četudi informativno. Za faktor merila na srednjem meridianu je privzeta vrednost 1.

## 11 ORTODROMA IN LOKSODROMA V KARTOGRAFSKI PROJEKCIJI

V navigaciji je pomembno, kako sta na karti prikazani ortodroma in loksodroma. Za boljši prikaz resničnega stanja bi morala ortodroma v kartografski projekciji izgledati krajša od pripadajoče loksodrome. Prav tako je zaželeno, da je v projekciji ortodroma konkavno usmerjena proti ekvatorju, loksodroma pa proti polu, saj je tako tudi v naravi. Za uporabo kart v navigaciji je pomembno tudi, kako je prikazana mreža poldnevnikov in vzporednikov. Uporabnik lahko brez težav določi geografske koordinate točke, kadar so poldnevniki in vzporedniki ravne, medsebojno pravokotne črte. Nenazadnje pa je pomembno tudi, da ima karta v izbrani projekciji čim manjše deformacije ter da so le te čim bolj enakomerno porazdeljene čez celotno območje karte (Pallikaris et al., 2010).

V tem delu naloge bomo analizirali obnašanje ortodrome oz. geodetske linije in loksodrome pri različnih pogojih v štirih kartografskih projekcijah: Mercatorjevi, gnomonski, Lambertovi konformni konusni in transverzalni Mercatorjevi projekciji

Podobno, kot smo obravnavali razlike v dolžini med ortodromo in loksodromo na krogli in elipsoidu, bomo v tem poglavju obravnavali prečna odstopanja med krivuljama v projekcijski ravnini. Za reševanje zastavljenega problema je potrebno najprej izračunati vmesne točke obeh krivulj na krogli in elipsoidu, nato pa te točke preslikati v projekcijsko ravnino izbrane kartografske projekcije. V nadaljevanju pa glede na karakteristiko krivulj v projekciji izračunamo največjo (pravokotno) oddaljenost med ortodromo oz. geodetsko linijo in loksodromo. To odstopanje je pomemben podatek, saj je od njega odvisno, ali se bosta krivulji v projekciji v določenem merilu še ločili na karti. Odstopanje med krivuljama v projekciji je torej tisti parameter, ki bo osnova za primerjavo odnosa med krivuljama pri različnih pogojih v izbrani projekciji, kot tudi med projekcijami.

Odstopanja med ortodromo in loksodromo v kartografski projekciji prav tako proučujemo na treh različno velikih območjih: Sloveniji, Evropi in svetu. Pri vseh treh območjih uporabljamo enake vrednosti koordinat začetnih točk, azimutov in dolžin loksodrome kot v poglavju 9.

### 11.1 Določitev odstopanja med krivuljama v projekciji

Največjo oddaljenost med krivuljama lahko izračunamo, kadar sta določeni analitično. V diplomski nalogi ortodromo oziroma geodetsko linijo in loksodromo obravnavamo kot zaporedje točk, zato strogo matematično največjega pravokotnega odstopanja na ta način ni mogoče dobiti. Analitičnih enačb za pravokotno odstopanje med krivuljama v literaturi nisem zasledila. Na vsakem območju je zato uporabljen drugačen pristop k reševanju problema.

Na območju Slovenije, kjer obravnavamo kratke razdalje, se sredinski točki ortodrome in loksodrome na krogli oz. elipsoidu preslikata kot skoraj sredinski tudi v projekcijsko ravnino. Z zadostno (podmetrsko) natančnostjo, ki je potrebna za kartografske namene, sta privzeti kot sredinski. Odstopanje v projekciji se tako na območju Slovenije računa kot razdaljo med transformiranimi koordinatama sredinskih točk obeh krivulj v določeni projekciji:

$$\Delta D_P = \sqrt{(x_{SL} - x_{SO})^2 + (y_{SL} - y_{SO})^2}$$

kjer so  $(x_{SL}, y_{SL})$  koordinate sredinske točke loksodrome v izbrani projekciji in  $(x_{SO}, y_{SO})$  koordinate sredinske točke ortodrome (oz. geodetske linije) v izbrani projekciji.

Na območju Evrope in sveta, kjer so razdalje med začetno in končno točko večje, zgoraj omenjen način ni korekten, saj sredinska točka na krivulji nikakor ni več sredinska tudi v projekciji. Reševanje problema poteka kartometrično. V programu Matlab, kjer so narejeni vsi izračuni, sem napisala tudi programe, ki za ortodromo oziroma geodetsko linijo in loksodromo v izbrani projekciji zapišejo datoteko, primerno za uvoz v AutoCAD. V slednjem sem nato izmerila pravokotno odstopanje med krivuljama v posameznih projekcijah.

V Mercatorjevi ali gnomonski projekciji je določitev pravokotnega odstopanja med krivuljama pri azimutu  $90^\circ$  enostavna in točna. V omenjenih projekcijah se namreč vedno ena od krivulj preslika kot premica, pri azimutu  $90^\circ$  pa je krivulja od premice najbolj oddaljena prav na sredini. V programu AutoCAD poiščemo sredinsko točko premice, nato pa izmerimo pravokotno oddaljenost krivulje od premice. Kadar krivulja v projekciji ni najbolj oddaljena prav od sredinske točke premice, je potrebno narediti oceno. V tem primeru pravokotno glede na premico izmerimo oddaljenost krivulje od več točk na premici, kjer ocenimo, da bi oddaljenost lahko bila največja in se tako poišče največje odstopanje. V primeru, ko se ortodroma oz. geodetska linija in loksodroma preslikata kot krivulji, pa se problem v diplomski nalogi rešuje na naslednji način: med začetno in končno točko narišemo premico in pravokotno nanjo izmerimo odstopanje med krivuljama. Izmerimo razdaljo med več točkami na območju, kjer predvidevamo, da bo odstopanje največje ter tako izberemo največjo med njimi. Metoda je približna, vendar za potrebe praktične kartografije zadošča.

## 11.2 Odstopanje med ortodromo in loksodromo v projekcijah na krogli

V diplomski nalogi obravnavamo ortodromo in loksodromo v kartografski projekciji krogelnih v ravninske kartezične koordinate in geodetsko linijo ter loksodromo v projekciji elipsoidnih koordinat v ravninske kartezične. Najprej bodo prikazani rezultati za preslikavo krogle, nato pa še elipsoida.

Na vseh treh območjih obravnavamo iste krivulje kot v poglavju 9, le preslikane v kartografske projekcije. Na vsakem območju obravnavamo ortodromo in loksodromo, ki sta določeni z začetno točko, dolžino loksodrome in azimutom loksodrome. Izračunamo končno točko loksodrome, nato pa za isto začetno in končno točko izračunamo še ortodromo. Izračunamo vmesne točke obeh krivulj, ki jih nato preslikamo v projekcijo, v kateri določimo največje pravokotno odstopanje med njima. Vsi rezultati ustrezajo vrednostim v naravi.

Rezultati so prikazani po območjih s tabelami in grafi. Točke v posameznem grafu so zaradi boljše preglednosti povezane s črto. Imena kartografskih projekcij so v legendi označena z okrajšavami:

M - Mercatorjeva projekcija

G - gnomonska projekcija

LKKP - Lambertova konformna konusna projekcija

TM - transverzalna Mercatorjeva projekcija

Pomemben podatek, posebno v navigaciji, pa je tudi, ali se na karti v določenem merilu sploh vidi razlika med ortodromo in loksodromo. Vidna je v primeru, da je pravokotno odstopanje med krivuljama večje od grafične natančnosti, ki običajno znaša 0,2 mm. Problem vidnosti odstopanja med krivuljama v projekciji bo v tem poglavju podrobno raziskan za Slovenijo, in sicer, v katerem merilu naših državnih kart bi bilo pravokotno odstopanje še vidno.

### **11.2.1 Območje Slovenije**

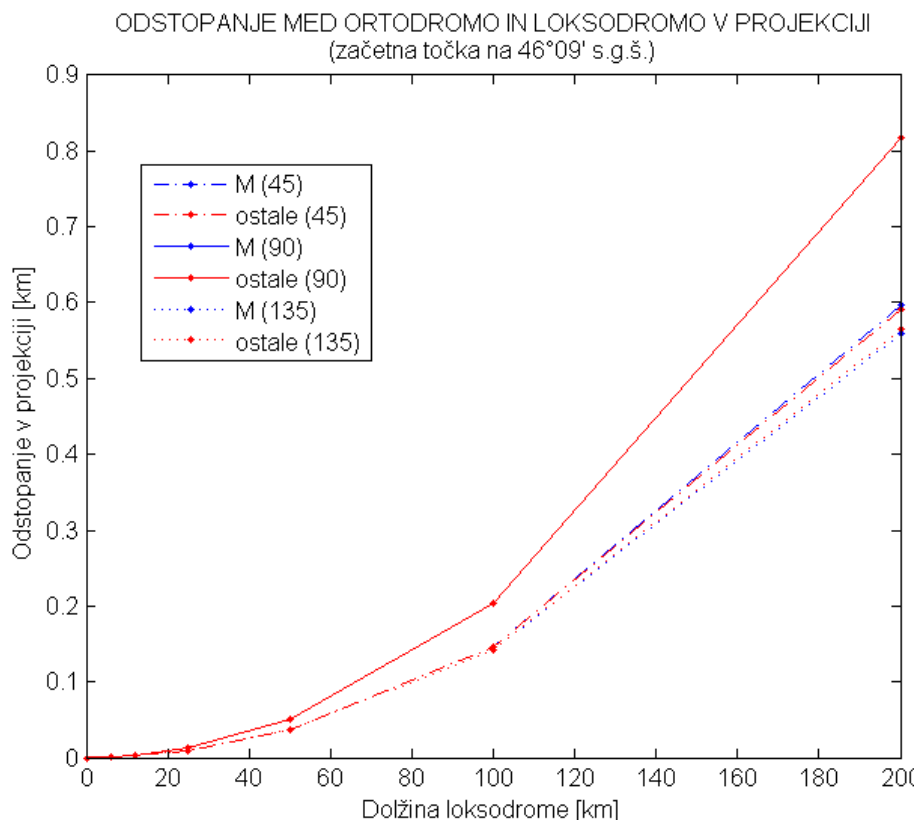
Kot vidimo v preglednici 11, se rezultati med seboj malo razlikujejo, če primerjamo odstopanja med ortodromo in loksodromo pri različnih pogojih v projekciji kot tudi med različnimi projekcijami. Največja odstopanja so v vseh projekcijah pri najdaljših dolžinah (200 km) in azimutu  $90^\circ$ , ter znašajo manj kot 1 km (817 m). Pri azimutu loksodrome  $90^\circ$  dobimo v vseh projekcijah enaka odstopanja med krivuljama. Nekoliko manjša odstopanja so pri azimutu  $45^\circ$  in še manjša pri  $135^\circ$ . Pri razdaljah, krajših od 100 km, je pravokotno odstopanje pri vseh obravnavanih azimutih za vse štiri projekcije enako, primerjano na meter natančno.



Preglednica 11: Odstopanje med ortodromo in loksodromo v projekcijah na območju Slovenije z začetno točko v ( $46^{\circ} 09'$ ,  $13^{\circ} 24'$ )

<b>D<sub>L</sub> [km]</b>	<b>A [°]</b>	<b>PRAVOKOTNO ODSSTOPANJE V PROJEKCIJI [m]</b>			
		<b>M</b>	<b>G</b>	<b>LKKP</b>	<b>TM</b>
<b>200</b>	<b>45</b>	598	591	591	591
	<b>90</b>	817	817	817	817
	<b>135</b>	559	565	565	565
<b>100</b>	<b>45</b>	147	146	146	146
	<b>90</b>	204	204	204	204
	<b>135</b>	142	143	143	143
<b>50</b>	<b>45</b>	36	36	36	36
	<b>90</b>	51	51	51	51
	<b>135</b>	36	36	36	36
<b>25</b>	<b>45</b>	9	9	9	9
	<b>90</b>	13	13	13	13
	<b>135</b>	9	9	9	9
<b>12</b>	<b>45</b>	2	2	2	2
	<b>90</b>	3	3	3	3
	<b>135</b>	2	2	2	2
<b>6</b>	<b>45</b>	0,5	0,5	0,5	0,5
	<b>90</b>	1,2	1,2	1,2	1,2
	<b>135</b>	0,5	0,5	0,5	0,5
<b>3</b>	<b>90</b>	0,5	0,5	0,5	0,5

Rezultati so prikazani še na grafu 1, kjer opazimo spreminjanje odstopanja med ortodromo in loksodromo v projekciji z večanjem oddaljenosti med točkama ter spreminjanjem azimuta. Rezultati so si med seboj zelo podobni med posameznimi projekcijami, zato je na grafu posebej predstavljena Mercatorjeva, ki še najbolj odstopa, ostale pa so predstavljene skupaj, saj se razlike ne bi opazile. Pri azimutu loksodrome  $90^{\circ}$  so v vseh projekcijah enaka odstopanja med krivuljama, primerjano na meter natančno, zato v tem primeru grafa odstopanj sovpadata.



Grafikon 1: Odstopanje med ortodromo in loksodromo v projekcijah na območju Slovenije z začetno točko na srednji geografski širini Slovenije

Kot lahko odčitamo iz preglednic 12 in 13, se na območju Slovenije pravokotno odstopanje z geografsko širino še ne spremeni prav veliko. Te razlike v odstopanju so največje v Mercatorjevi projekciji, kjer pri najdaljši obravnavani razdalji in pri azimutu 90° med skrajnim severom in jugom znašajo 64 m, pri ostalih projekcijah pa 40 m. Pri razdaljah, krajših od 200 km, so rezultati za vse štiri projekcije enaki.

Preglednica 12: Pravokotno odstopanje med ortodromo in loksodromo v projekcijah na območju Slovenije z začetno točko v (46° 53', 13°24')

D <sub>L</sub> [km]	A [°]	PRAVOKOTNO ODSSTOPANJE V PROJEKCIJI [m]			
		M	G	LKKP	TM
200	45	622	606	606	606
	90	850	838	838	838
	135	581	580	580	580

Preglednica 13: Pravokotno odstopanje med ortodromo in loksodromo v projekcijah na območju Slovenije z začetno točko v ( $45^{\circ} 25'$ ,  $13^{\circ} 24'$ )

$D_L$ [km]	A [°]	PRAVOKOTNO Odstopanje v projekciji [m]			
		M	G	LKKP	TM
200	45	575	576	576	576
	90	786	797	796	796
	135	538	551	551	551

Prikaz ortodrome in loksodrome na območju Slovenije v posameznih projekcijah je predstavljen v prilogah A1, A2, A3 in A4. Za lažjo orientacijo je izrisana mreža poldnevnikov in vzporednikov ter nekaj večjih krajev.

Velikost odstopanja med ortodromo in loksodromo v projekciji, ki je še vidno v merilu naših državnih kart prkazuje preglednica 14.

Preglednica 14: Velikost odstopanja med ortodromo in loksodromo (v naravi) pri določenem merilu državnih kart, ki ga je še lahko opaziti na karti

Merilo	Velikost pravokotnega odstopanja $\Delta D_p$
1 : 1 000 000 (DPK1000)	$\Delta D_p > 200$ m
1 : 500 000 (DPK500)	$\Delta D_p > 100$ m
1 : 50 000 (DTK50)	$\Delta D_p > 10$ m
1 : 25 000 (DTK25)	$\Delta D_p > 5$ m
1 : 5000 (DTK5)	$\Delta D_p > 1$ m

Pravokotno odstopanje med poljubno usmerjeno loksodromo dolžine 200 km (in pripadajočo ortodromo), bi še bilo vidno na Državni pregledni karti merila 1 : 1 000 000, med tem ko pri razdaljah, krajših od 6 km, pravokotnega odstopanja med krivuljama ne bi zasledili niti na Državni topografski karti merila 1 : 5000.

### 11.2.2 Območje Evrope

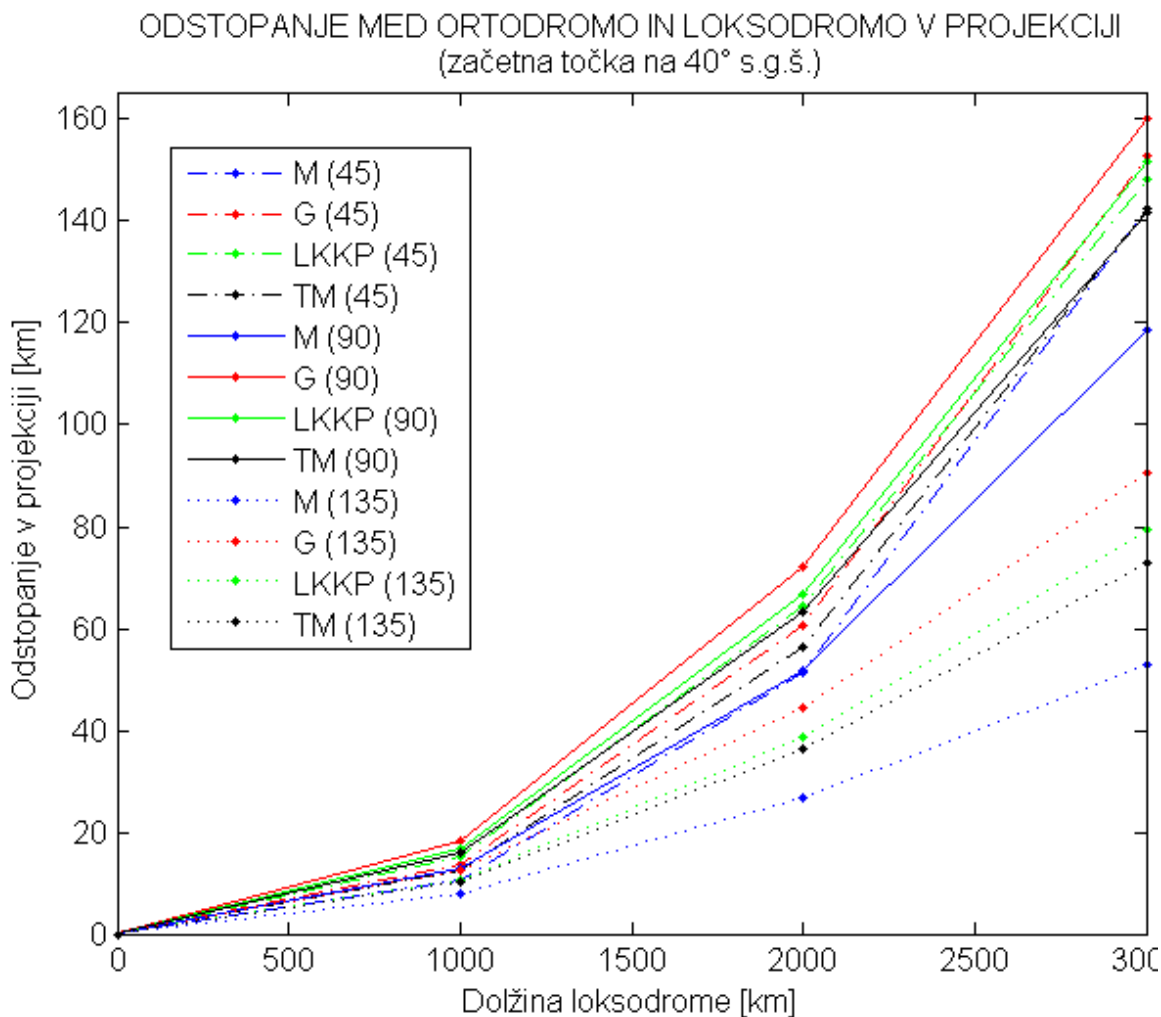
Na območju Evrope, kjer obravnavamo ortodromo in loksodromo pri večjih oddaljenostih med točkama, se odstopanje med njima v projekciji že precej poveča v primerjavi z območjem Slovenije, tako med krivuljama, kot tudi med projekcijami, kar lahko podrobneje odčitamo iz preglednice 15.

Preglednica 15: Pravokotno odstopanje med ortodromo in loksodromo projekcijah na območju Evrope

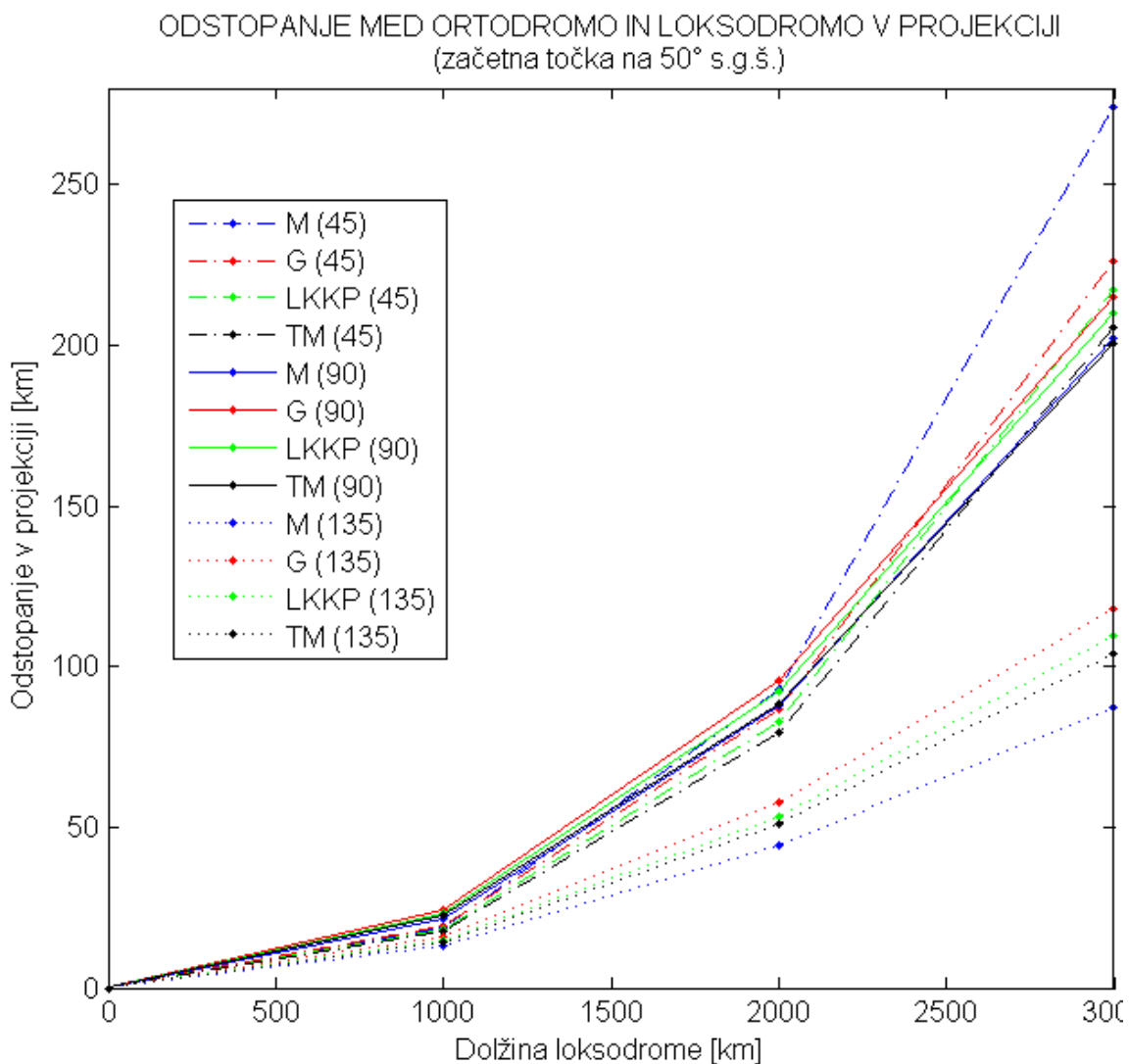
$\phi$ [°]	$D_L$ [km]	A [°]	PRAVOKOTNO Odstopanje v projekciji [km]			
			M	G	LKKP	TM
40°	1000	45	11	14	15	14
		90	13	18	17	17
		135	8	12	11	11
	2000	45	51	61	65	60
		90	52	72	67	68
		135	27	45	39	39
	3000	45	143	153	148	153
		90	118	160	152	152
		135	53	91	79	78
50°	1000	45	18	19	18	19
		90	22	24	23	24
		135	13	16	15	15
	2000	45	93	87	83	86
		90	88	95	92	95
		135	44	58	53	55
	3000	45	274	226	217	221
		90	202	215	209	214
		135	87	118	110	112
60°	1000	45	37	29	28	28
		90	40	34	33	34
		135	23	22	20	22
	2000	45	201	138	130	130
		90	165	139	135	137
		135	78	78	75	77
	3000	45	702	383	365	352
		90	383	314	305	308
		135	151	159	153	158

Najmanjše odstopanje v nižjih geografskih širinah je v Mercatorjevi projekciji, pri kateri pa so v višjih geografskih legah (pri 60°) odstopanja največja. To je pričakovano, saj v Mercatorjevi projekciji linijske deformacije zelo naraščajo, bolj ko se približujemo polu. Velika odstopanja med krivuljama zasledimo v gnomonski projekciji, za katero je značilno, da deformacije hitro naraščajo, bolj ko se oddaljujemo od centralne točke projekcije. Območje Evrope je dovolj veliko, da ta lastnost

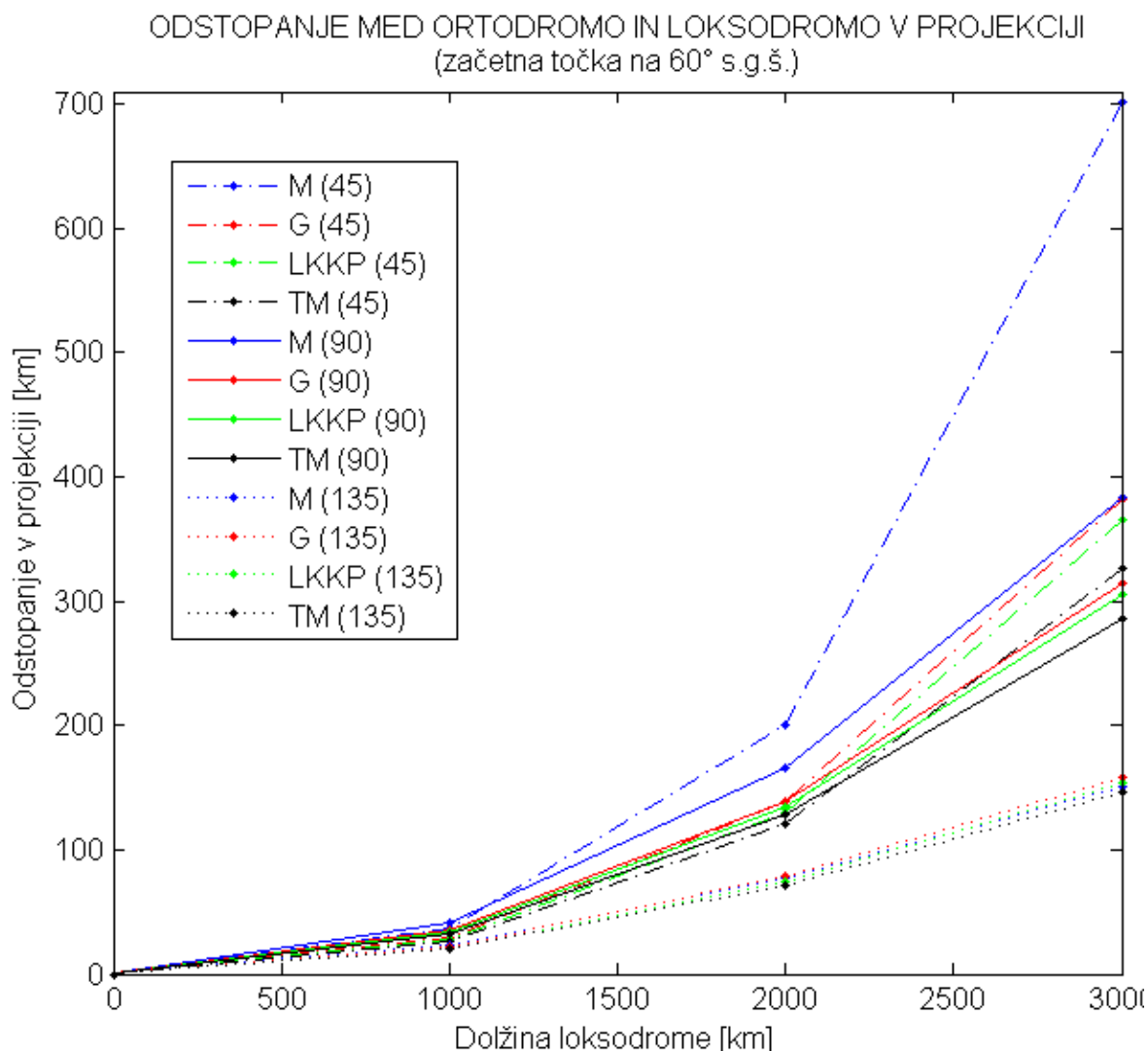
gnomonske projekcije pride do izraza. Odstopanja v Lambertovi konformni konusni projekciji so precej odvisna od izbire standardnih paralel. Iz tega razloga LKKP zavzema velike vrednosti odstopanj, ko obravnavamo krivulji z začetno točko na  $40^\circ$  pri dolžini loksodrome 1000 in 2000 km, saj se v tem primeru krivulji nahajata na območju večjega linijskega merila in pozitivnih deformacij. Na območju med standardnima paralelama so deformacije negativne, zato so tudi odstopanja med krivuljama, ki jih proučujemo na tem območju, manjša.



Grafikon 2: Odstopanje med ortodromo in loksodromo v projekcijah na območju Evrope z začetno točko na geografski širini  $40^\circ$



Grafikon 3: Odstopanje med ortodromo in loksodromo v projekcijah na območju Evrope z začetno točko na geografski širini 50°

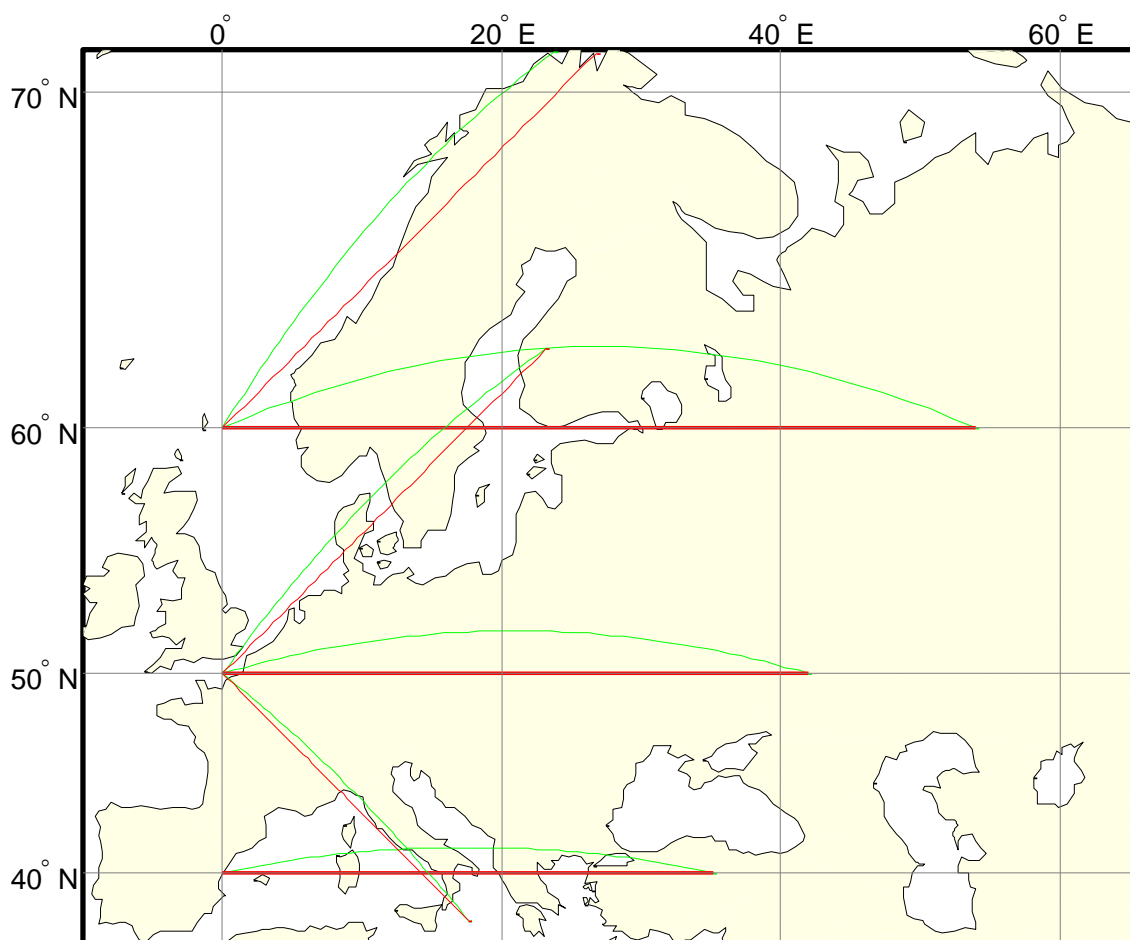


Grafikon 4: Odstopanje med ortodromo in loksodromo v projekcijah na območju Evrope z začetno točko na geografski širini 60°

Grafi 2, 3 in 4 kažejo na večanje odstopanja z večanjem dolžine loksodrome in prehajanjem v višje geografske lege. Na območju Evrope se že lahko opazi, da največje odstopanje v projekciji ni vedno pri azimutu 90°. To se spreminja s spreminjanjem geografske širine in razdaljo med začetno in končno točko krivulj. S prehajanjem v višje geografske lege in večanjem oddaljenosti med točkama namreč v neki točki večja vrednost pripada azimutu 45° (na višji geografski širini se ta točka pojavi pri krajši dolžini loksodrome). Kot je že omenjeno v poglavju 9, pride do večjih odstopanj med krivuljama na krogli zaradi torzije loksodrome, ki skokovito narašča, ko se približujemo polu. V ravnini določenih projekcij, posebej v Mercatorjevi, pa je večje pravokotno odstopanje podkrepljeno še z večanjem linijskih deformacij proti poloma. V Mercatorjevi projekciji torej najbolj naraščajo razlike med odstopanji na različnih geografskih legah. Tako odstopanje med ortodromo in loksodromo z začetno točko na 40° geografske širine naraste v skrajnem primeru do 560 km, če primerjamo rezultate z začetno točko krivulj na 60° geografske širine. Najmanjše odstopanje v višjih geografskih legah pa je

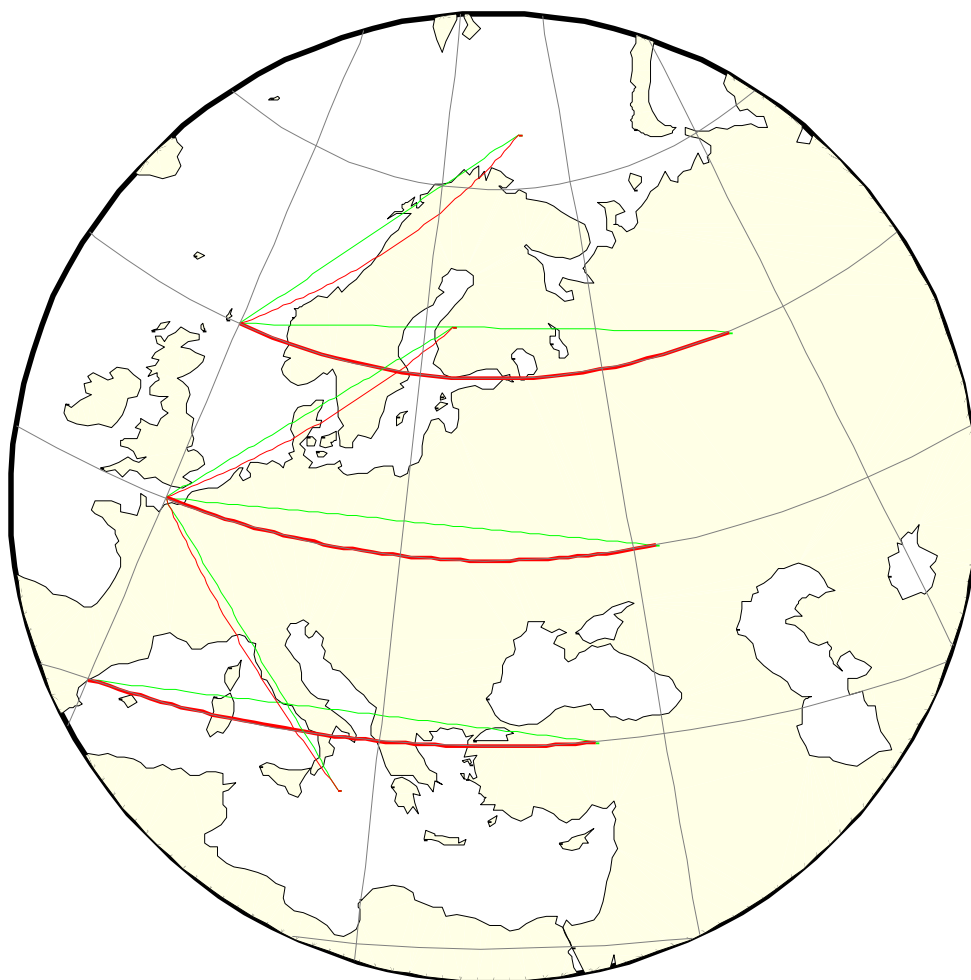
v transverzalni Mercatorjevi projekciji, saj linijske deformacije v tej projekciji naraščajo z oddaljevanjem od srednjega meridiana.

Na slikah 11, 12, 13 in 14 so prikazane oblike ortodrome in loksodrome v posameznih projekcijah. Izrisane so loksodrome dolžine 3000 km, usmerjene pod kotom  $90^\circ$  z začetno točko na  $40^\circ$ ,  $50^\circ$  ter  $60^\circ$  severne geografske širine, loksodromi dolžine 2000 km, z začetno točko na  $50^\circ$  severne geografske širine, ki sta usmerjeni pod kotoma  $45^\circ$  in  $135^\circ$  ter loksodroma dolžine 2000 km, z začetno točko na  $60^\circ$  severne geografske širine, usmerjena pod kotom  $45^\circ$ . Za enake pare točk so prikazane tudi ortodrome. Ortodroma je označena z zeleno in loksodroma z rdečo barvo. Lepo se opazi spreminjanje odstopanja v odvisnosti od dolžine, azimuta ter geografske širine. Izrazito je naraščanje odstopanja s prehajanjem v višje geografske lege, ki je še posebej izrazito v Mercatorjevi projekciji.

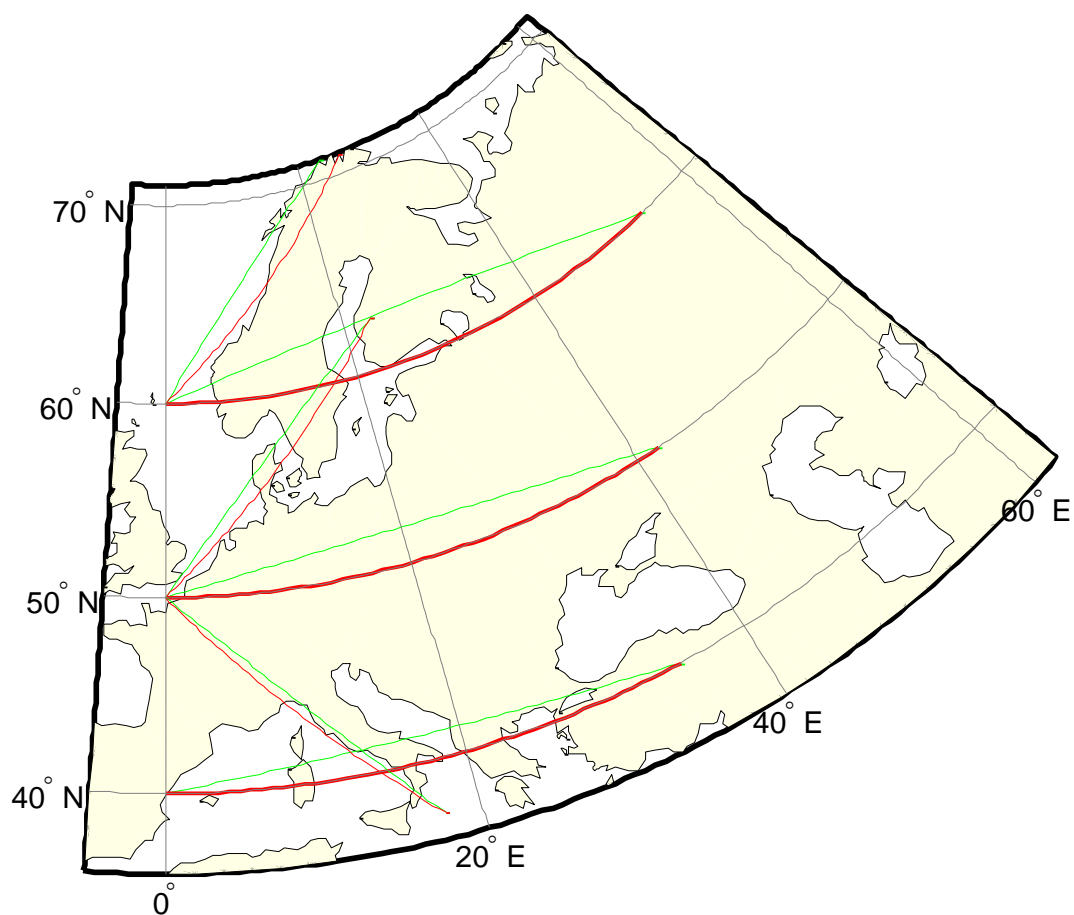


Slika 11: Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeča barva) na območju Evrope v Mercatorjevi projekciji

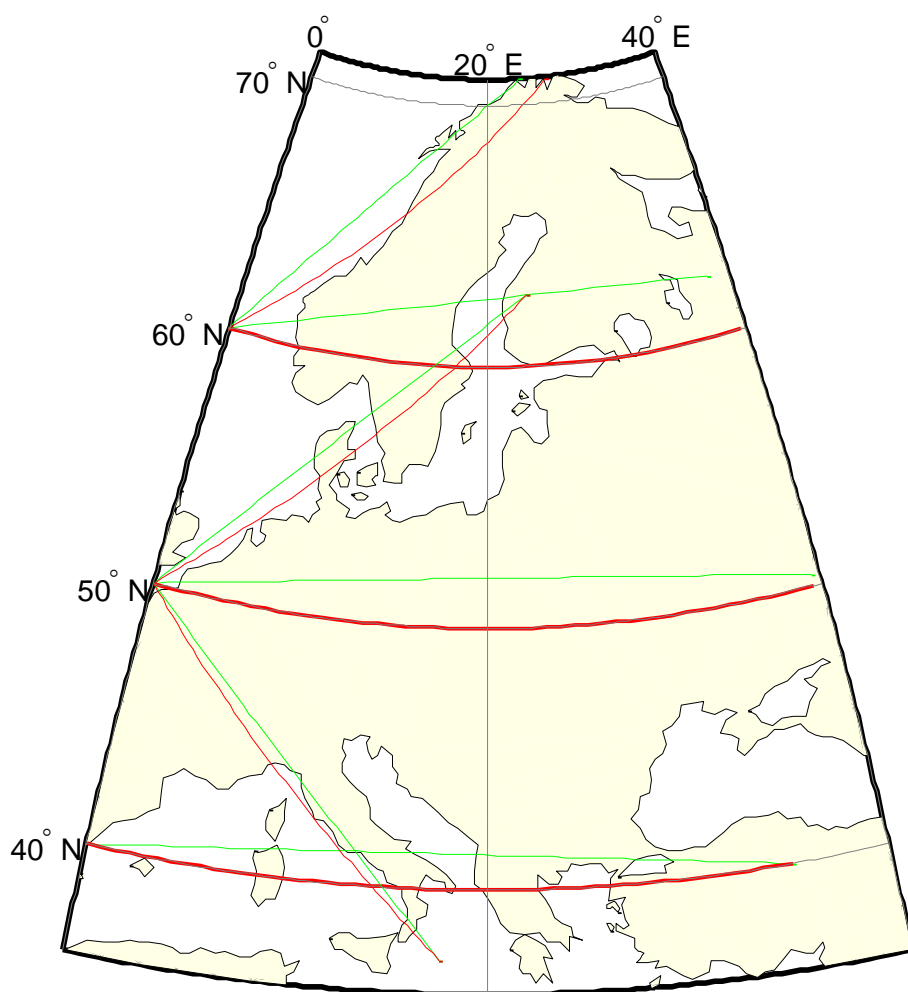




Slika 12: Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeča barva) na območju Evrope v gnomonski projekciji



Slika 13: Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeča barva) na območju Evrope v Lambertovi konformni konusni projekciji



Slika 14: Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeča barva) na območju Evrope v transverzalni Mercatorjevi projekciji

Na območju Evrope opazimo odstopanja med ortodromo in loksodromo pri vseh obravnavanih primerih, če bi območje izrisali na format lista A3 v odgovarjajočem merilu, ki bi znašalo okoli 1 : 20 000 000. Še celo v manjšem merilu, približno 1 : 40 000 000, ki bi ustrezalo formatu lista A5, se vidijo vsa odstopanja, razen v primeru loksodrome dolžine 1000 km, usmerjene pod azimutom  $135^\circ$  in z začetno točko na  $40^\circ$  geografske širine (in odgovarjajoče ortodrome). Različni primeri ortodrom in loksodrom, izrisanih v projekcijah v merilu na območju Evrope, se nahajajo v prilogah B1, B2, B3 in B4.

### 11.2.3 Območje sveta

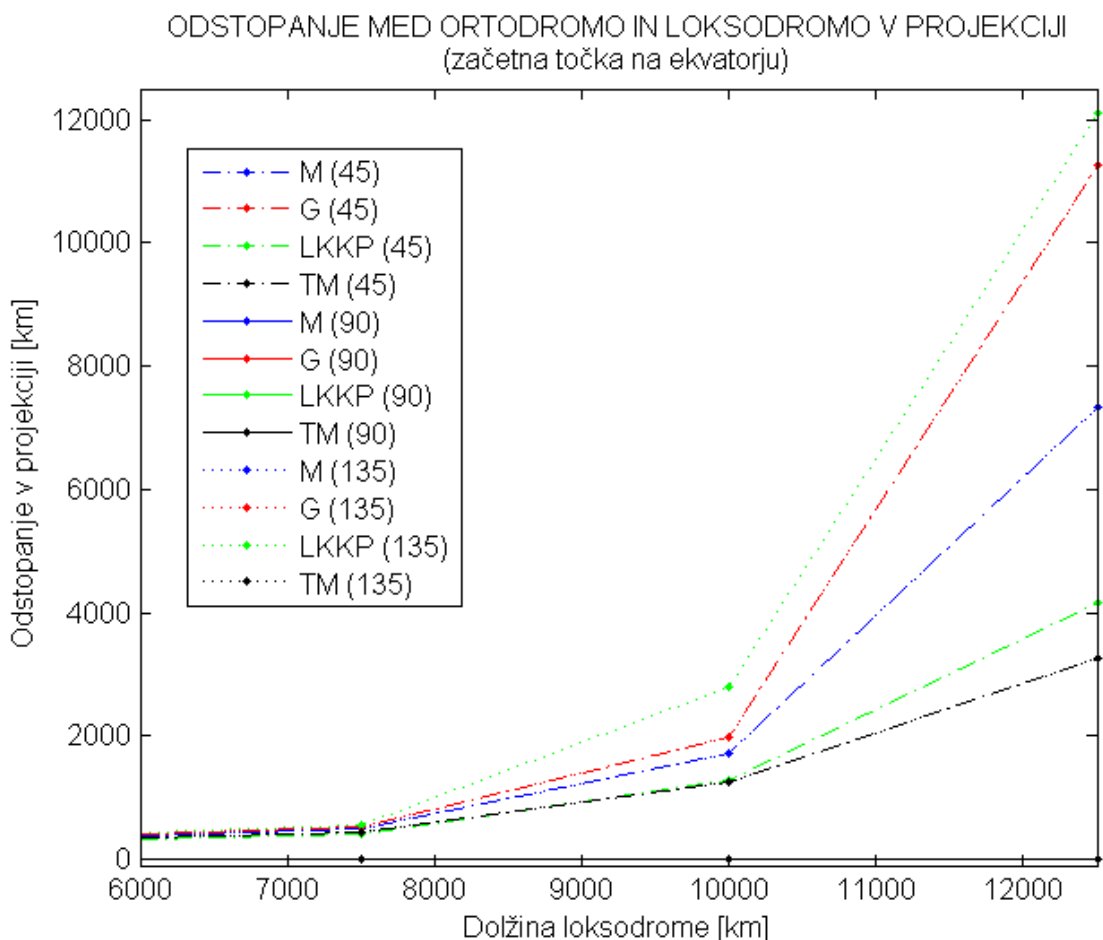
Za območje sveta so rezultati prikazani po tabelah, ločenih glede na geografsko širino začetne točke. Kot je razvidno iz preglednice 16 in grafa 5, so odstopanja med ortodromo in loksodromo z začetno točko na ekvatorju v Mercatorjevi, gnomonski in transverzalni Mercatorjevi projekciji razporejena

simetrično glede na ekvator. Izstopa le LKKP, saj sta standardni paraleli izbrani nesimetrično glede na ekvator.

Preglednica 16: Pravokotno odstopanje med ortodromo in loksodromo v projekcijah na območju sveta z začetno točko na ekvatorju ( $\varphi=0^\circ$ )

<b>D<sub>L</sub> [km]</b>	<b>A [°]</b>	<b>PRAVOKOTNO Odstopanje v projekciji [km]</b>			
		<b>M</b>	<b>G</b>	<b>LKKP</b>	<b>TM</b>
<b>7500</b>	<b>45</b>	493	520	398	427
	<b>90</b>	0	0	0	0
	<b>135</b>	493	520	543	427
<b>10000</b>	<b>45</b>	1728	1982	1267	1249
	<b>90</b>	0	0	0	0
	<b>135</b>	1728	1982	2809	1248
<b>12500</b>	<b>45</b>	7339	11267	4176	3272
	<b>90</b>	0	0	0	0
	<b>135</b>	7339	11267	12105	3272

Odstopanja v projekcijah so si zelo podobna do razdalje 7500 km, nato pa se začnejo bolj razlikovati med seboj. Največja so v gnomonski projekciji, nato v Mercatorjevi, sledi LKKP in nato transverzalna Mercatorjeva projekcija. V LKKP je odstopanje med ortodromo in loksodromo pod kotom  $135^\circ$  večje kot pri loksodromi pod kotom  $45^\circ$ , kar je nenavadno. Razlog je v tem, da so deformacije med standardnima paraleloma negativne in pozitivne izven njiju. Paraleli sta izbrani na geografskih širinah  $10^\circ$  južno in  $40^\circ$  severno od ekvatorja, kar pomeni, da krivulji, ki sta usmerjeni južno od ekvatorja, padeta na območje z večjimi deformacijami kot krivulji severno od ekvatorja.



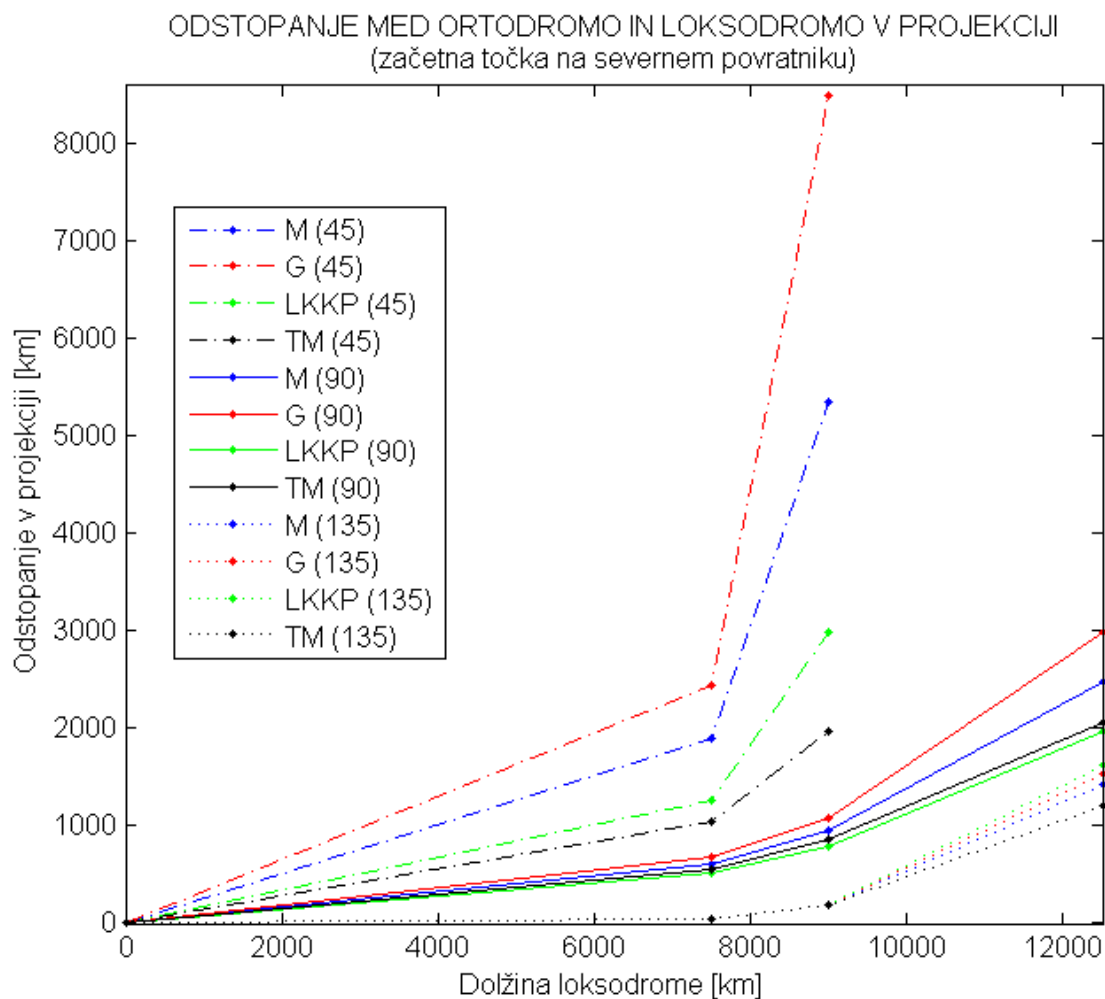
Grafikon 5: Odstopanje med ortodromo in loksodromo v projekcijah na območju sveta z začetno točko na ekvatorju

Ko začetno točko krivulje prestavimo na geografsko širino severnega povratnika (preglednica 17 in graf 6), so največja odstopanja v vseh projekcijah pri azimutu loksodrome  $45^\circ$ , kar je pričakovano, saj sta krivulji v tem primeru usmerjeni proti polu, kjer so tudi na krogli razlike med krivuljama največje. V tem primeru se odstopanja najbolj razlikujejo med projekcijami. Situacija bi bila drugačna na južni polobli, kjer bi dobili večja odstopanja pri azimutu  $135^\circ$ , najmanj pa bi se odstopanja med seboj razlikovala pri loksodromi pod azimutom  $45^\circ$ .

Preglednica 17: Pravokotno odstopanje med ortodromo in loksodromo v projekcijah na območju sveta z začetno točko na severnem povratniku ( $\varphi=23^{\circ}26'$ )

<b>D<sub>L</sub> [km]</b>	<b>A [°]</b>	<b>PRAVOKOTNO ODSTOPANJE V PROJEKCIJI [km]</b>			
		<b>M</b>	<b>G</b>	<b>LKKP</b>	<b>TM</b>
<b>7500</b>	<b>45</b>	1892	2443	1261	1046
	<b>90</b>	616	685	510	554
	<b>135</b>	50	52	51	50
<b>9000</b>	<b>45</b>	5359	8504	2995	1966
	<b>90</b>	962	1084	792	854
	<b>135</b>	191	195	196	184
<b>12500</b>	<b>90</b>	2478	2982	1976	2070
	<b>135</b>	1433	1528	1629	1216

Pri azimutu  $135^{\circ}$  so odstopanja precej manjša, saj ortodroma in loksodroma v tem primeru v sekata ekvator, kjer je ukrivljenost ortodrome in loksodrome na krogli manjša, kar povzroči, da se odstopanja zmanjšajo. Največja odstopanja so v gnomonski projekciji, razen pri azimutu  $135^{\circ}$ , kjer prednjači projekcija LKKP. Pri slednji pa so najmanjša odstopanja pri azimutu  $90^{\circ}$ , saj se v tem primeru krivulji nahajata na območju med standardnima paralelama, kjer so deformacije negativne. Če ne bi uporabili ekvatorialne gnomonske projekcije in bi uporabili poševen položaj, s centralno točko na širini severnega povratnika, ne bi dobili toliko večjih odstopanj ravno v tej projekciji. Ne glede na vse, gnomonska projekcija za prikaz območij svetovnega merila ni primerna, saj se v njej lahko preslika manj kot polobla.

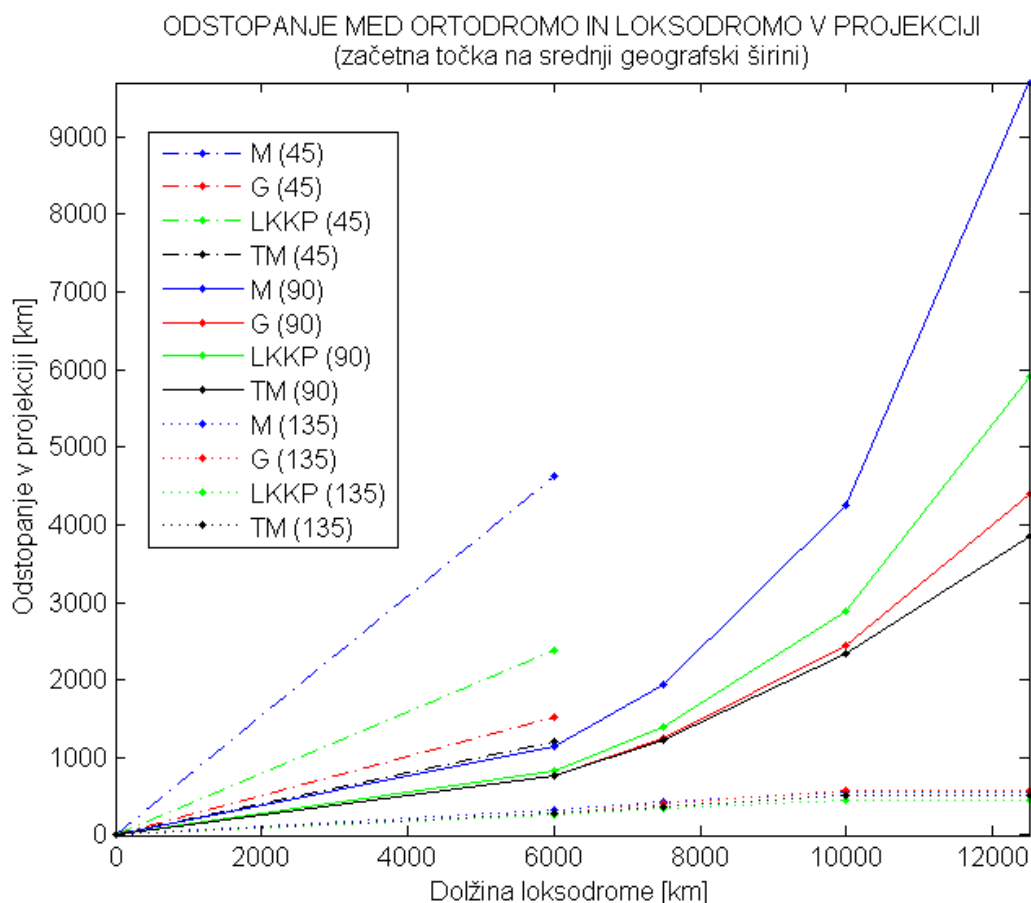


Grafikon 6: Odstopanje med ortodromo in loksodromo v projekcijah na območju sveta z začetno točko na severnem povratniku ( $\varphi=23^{\circ}26'$ )

Ko je začetna točka postavljena na srednjo geografsko širino (preglednica 18 in graf 7), se situacija precej spremeni, saj se ortodroma in loksodroma tudi na krogli bolj razlikujeta v dolžini, bolj ko se oddaljujemo od ekvatorja. Grafi odstopanj v odvisnosti od oddaljenosti med točkama postajajo vedno bolj strmi, ko ortodromo in loksodromo prestavljamo v višje geografske lege, kar lahko opazimo že s primerjavo vseh grafov. Največja odstopanja so v Mercatorjevi projekciji, kar je pričakovano, saj deformacije hitro naraščajo, ko se približujemo poloma. Na tej širini, sploh če sta krivulji obrnjeni proti polu, dobimo v Mercatorjevi projekciji zelo nerealno sliko, saj dobimo občutek, da je pot po loksodromi veliko krajša. Pri gnomonski projekciji je uporabljen poševen položaj (centralna točka z geografsko širino na  $45^{\circ}$ ), zato so v tem primeru odstopanja v tej projekciji nekoliko manjša, še posebej pri krajših oddaljenostih med začetno in končno točko, ko še nismo toliko oddaljeni od centralne točke. Gnomonska projekcija je neprimerna za navigacijo, kjer potrebujemo prikaz velikega območja, saj je stanje zelo popačeno, kar se vidi na slikah 26, 27 in 28.

Preglednica 18: Pravokotno odstopanje med ortodromo in loksodromo v projekcijah na območju sveta z začetno točko na srednji geografski širini ( $\varphi=45^\circ$ )

D <sub>L</sub> [km]	A [°]	PRAVOKOTNO ODSTOPANJE V PROJEKCIJI [km]			
		M	G	LKKP	TM
6000	45	4629	1531	2379	1207
	90	1145	762	829	759
	135	320	294	259	278
7500	90	1946	1245	1386	1230
	135	422	408	346	375
10000	90	4256	2448	2892	2338
	135	551	576	459	504
12500	90	9693	4403	5909	3854
	135	550	584	460	517



Grafikon 7: Odstopanje med ortodromo in loksodromo v projekcijah na območju sveta z začetno točko na srednji geografski širini ( $\varphi=45^\circ$ )

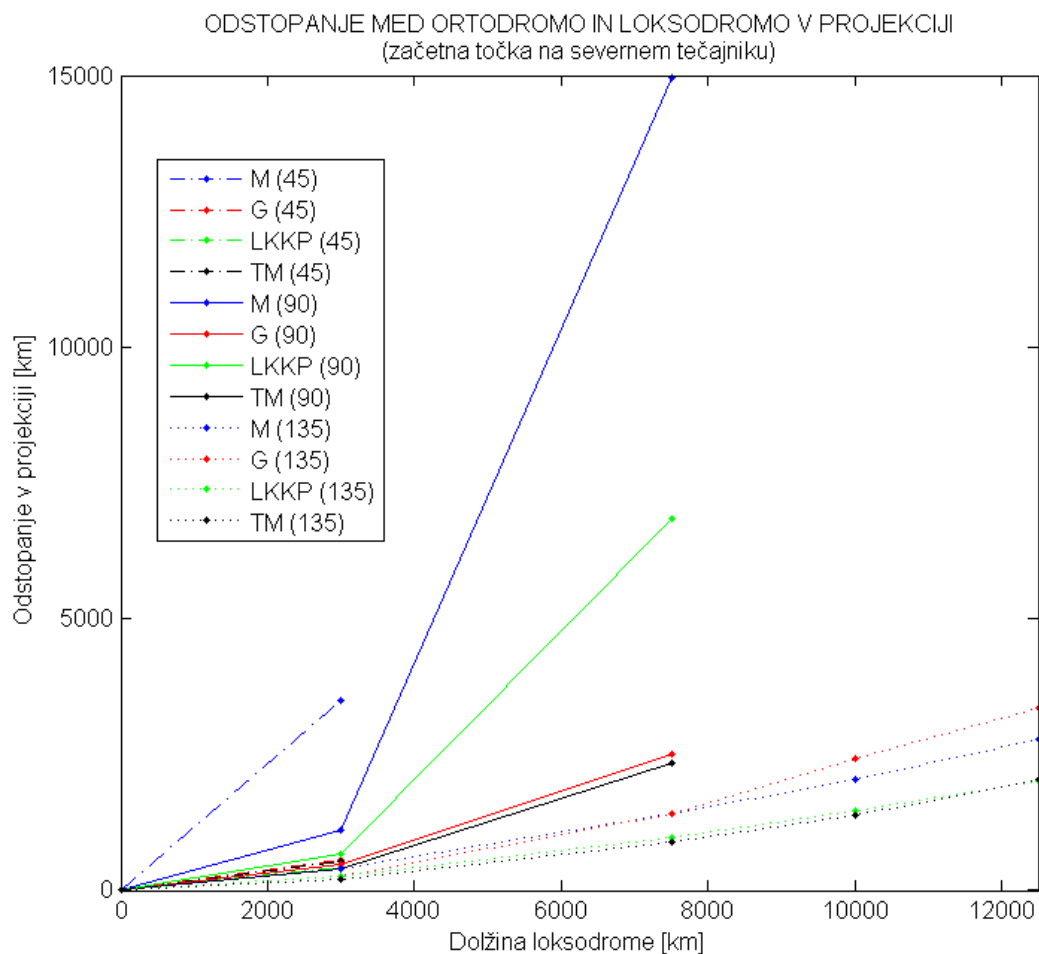


Mercatorjeva projekcija je tista, v kateri se odstopanje v odvisnosti od razdalje med točkama, azimuta in geografske širine najhitreje spreminja, še posebej s slednjo. Iz rezultatov v preglednici 19 in grafa 8 ugotovimo, da odstopanje na severnem tečajniku daleč najbolj izstopa prav v tej projekciji (razen pri azimutu 135°). Sledi zaključek, da je Mercatorjeva projekcija nezanesljiva za prikazovanje območij in navigacijo v višjih geografskih legah, saj daje zelo nerealno sliko dejanskega stanja. Če v tej projekciji primerjamo Grenlandijo in Južno Ameriko po površini, izgleda Grenlandija večja, čeprav v naravi to ne drži. Precejšnja odstopanja med krivuljama so tudi v LKKP, za kar je razlog v izbiri standardnih paralel.

V gnomonski projekciji je odstopanje relativno veliko. V omenjeno projekcijo lahko preslikamo manj kot eno poloblo zemeljske krogle, zato je potrebno spreminjati položaj gnomonske projekcije vse od ekvatorialnega, poševnega pa do polarnega, sicer dobimo zelo popačene slike krivulj, v določenih primerih pa bi krivulja celo padla izven območja preslikave. Izmed vseh obravnavanih projekcij je ravno polarna gnomonska še najbolj primerna za navigacijo v polarnih predelih.

Preglednica 19: Pravokotno odstopanje med ortodromo in loksodromo v projekcijah na območju sveta z začetno točko na severnem tečajniku ( $\varphi=66^{\circ} 33'$ )

<b>D<sub>L</sub> [km]</b>	<b>A [°]</b>	<b>PRAVOKOTNO Odstopanje v projekciji [km]</b>			
		<b>M</b>	<b>G</b>	<b>LKKP</b>	<b>TM</b>
<b>3000</b>	<b>45</b>	3489	556	423	543
	<b>90</b>	1103	470	665	406
	<b>135</b>	386	253	256	199
<b>7500</b>	<b>90</b>	14952	2510	6847	2354
	<b>135</b>	1406	1406	986	887
<b>10000</b>	<b>135</b>	2053	2436	1472	1393
<b>12500</b>	<b>135</b>	2780	3360	2027	2037

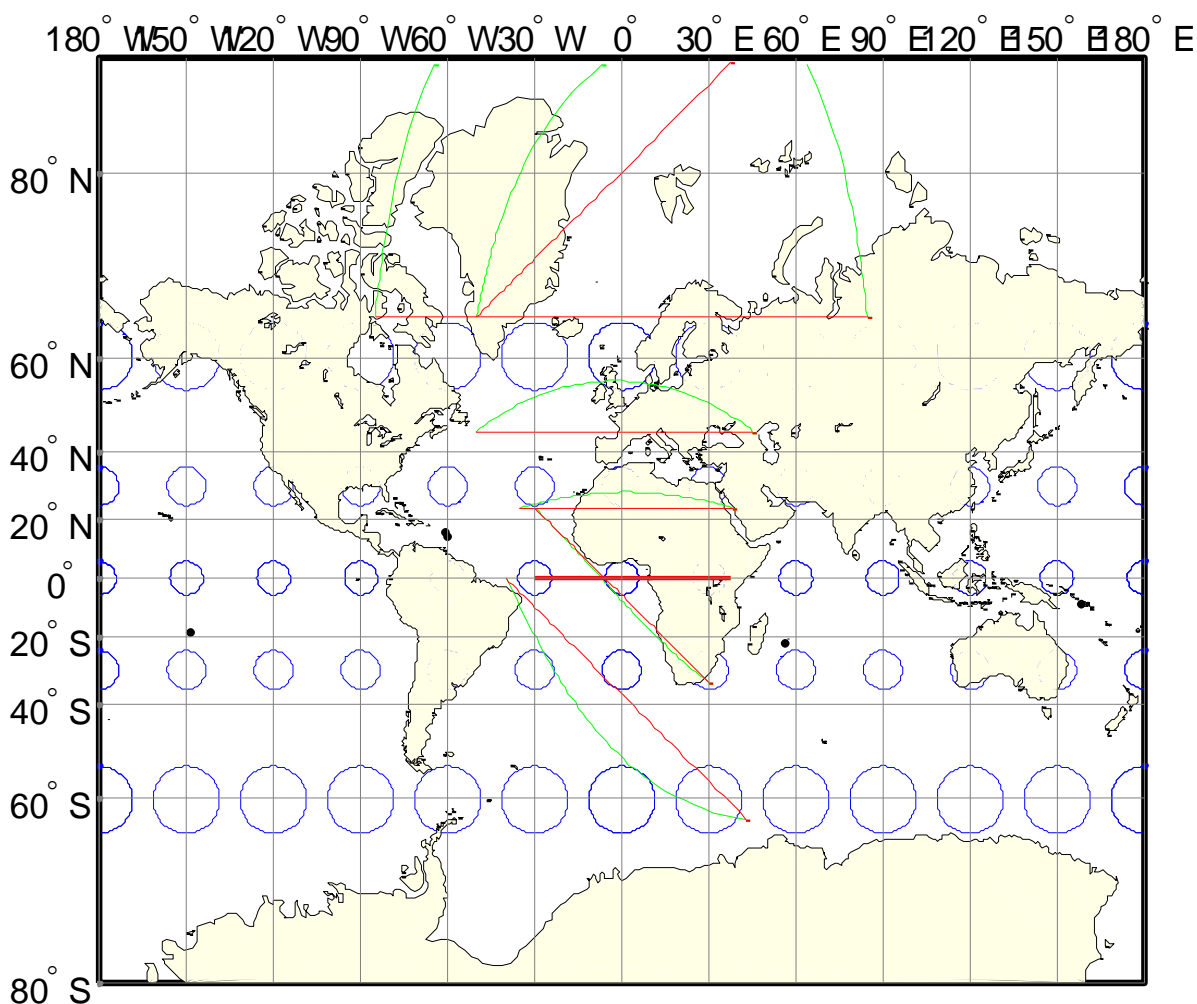


Grafikon 8: Odstopanje med ortodromo in loksodromo v projekcijah na območju sveta z začetno točko na severnem tečajniku ( $\varphi=66^{\circ} 33'$ )

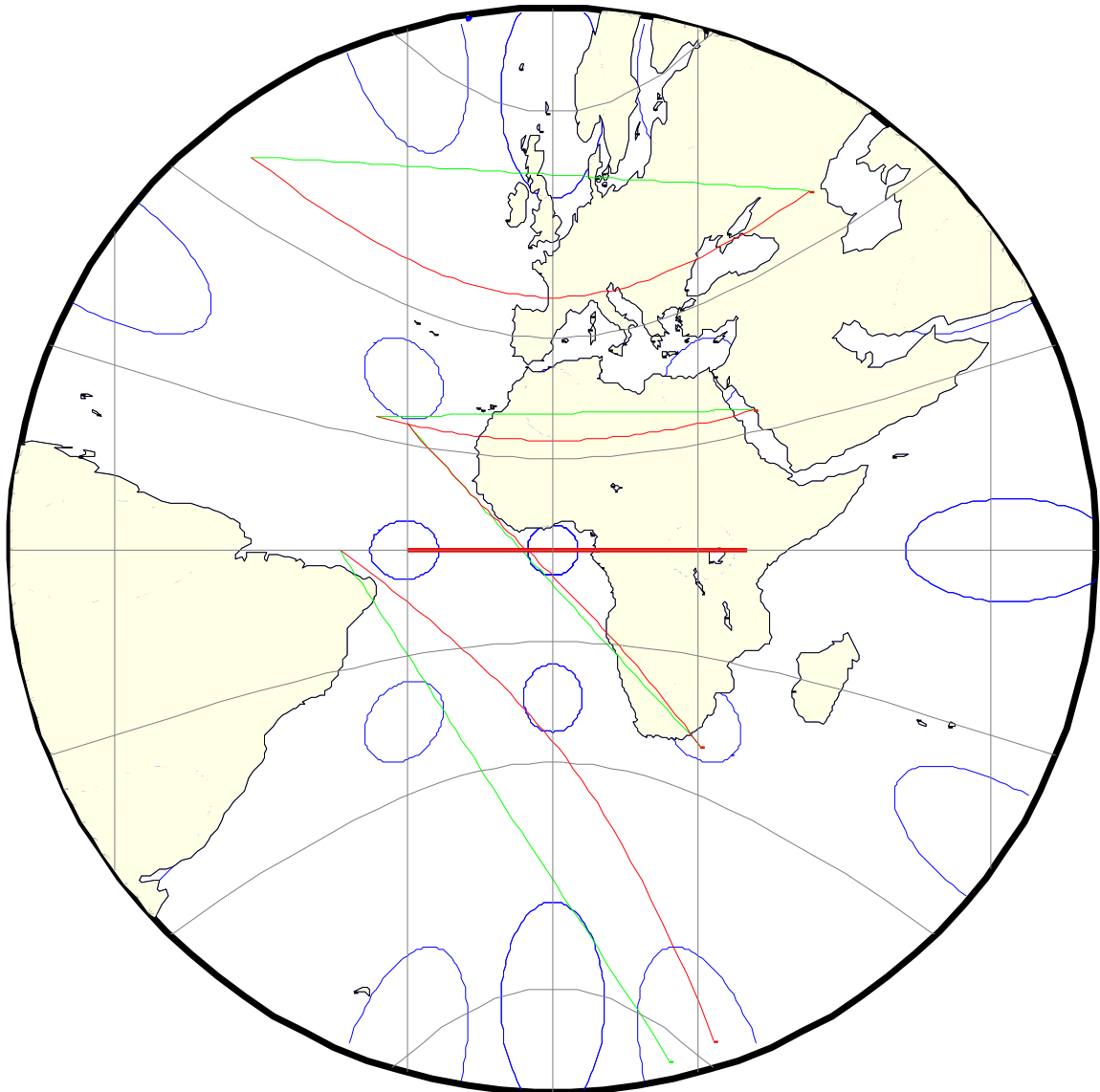
Proučevanje odstopanja med ortodromo in loksodromo v projekciji na območju celotnega sveta daje najboljšo sliko o odvisnosti odstopanja od razdalje med začetno in končno točko, azimuta in geografske širine. Vse tri spremenljivke (oddaljenost med točkama, azimut krivulj in geografska širina začetne in končne točke) se med seboj prepletajo. Na podlagi primerjave vseh grafov lahko ugotovimo, da v višjih geografskih legah bolj strmo narašča graf odstopanja v odvisnosti od oddaljenosti med točkama, ki jo določa dolžina loksodrome na krogli. Bolj se razlikujejo tudi odstopanja glede na izbran azimut. Azimut krivulje ima v višjih geografskih legah in pri daljših oddaljenostih med točkama večji vpliv, prav tako ima večji vpliv dolžina v višjih geografskih legah.

Rezultati so pri obravnavanju ortodrome in loksodrome v kartografskih projekcijah pogojeni z izbiro projekcijskih parametrov, kot so centralna točka v gnomonski projekciji, standardni paraleli v LKKP-projekciji, konstrukcijska paralela v Mercatorjevi projekciji ali pa faktor merila srednjega meridiana v transverzalni Mercatorjevi projekciji.

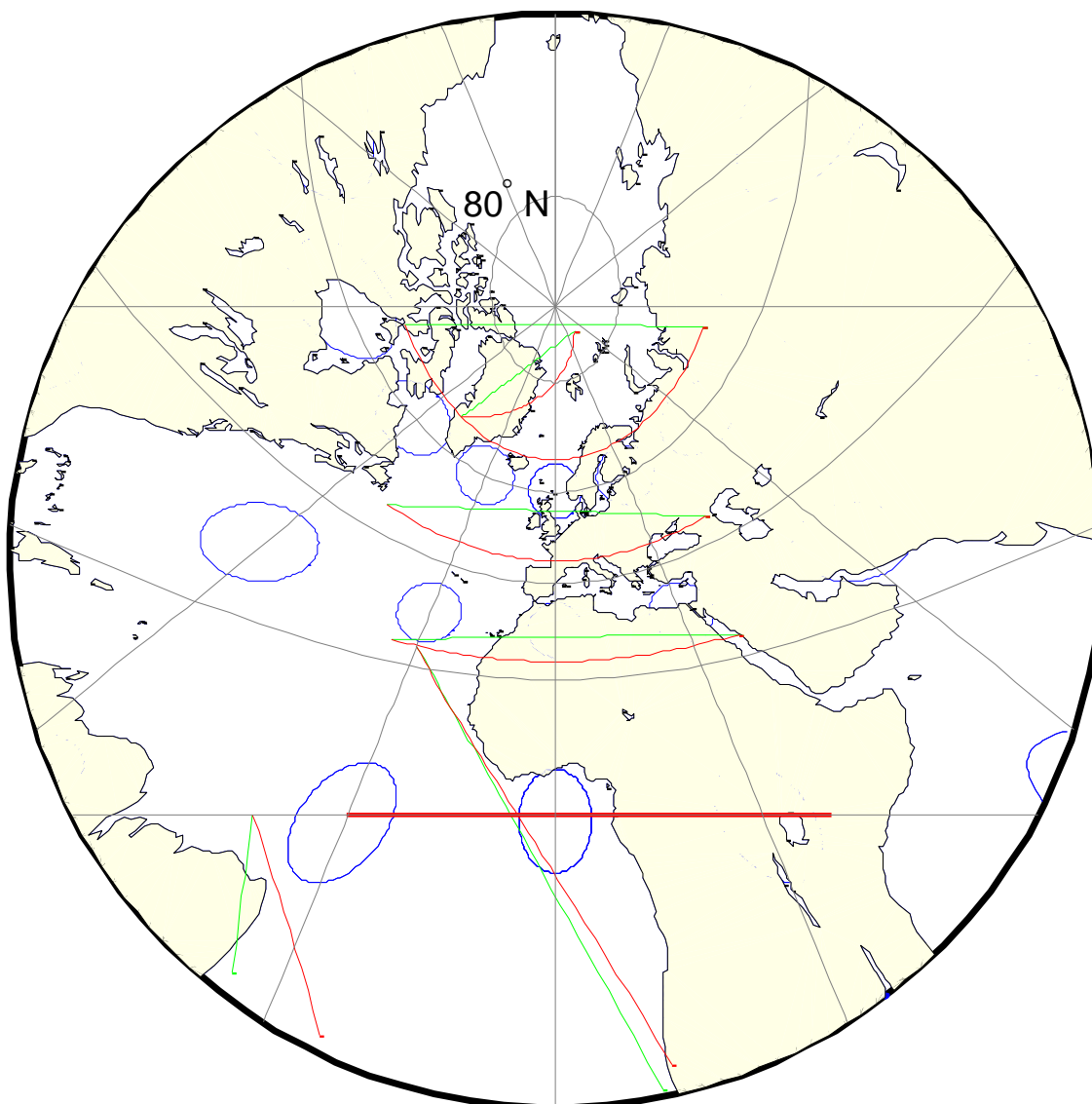
Oblike loksodrome in ortodrome v posameznih projekcijah na območju sveta prikazujejo slike 15, 16, 17, 18 in 19. Na njih opazimo, kako se odstopanja med njima spreminjajo pri različnih pogojih znotraj posamezne projekcije, kot tudi med projekcijami. Izrisane so tudi Tissotove indikatriše, ki kažejo velikost deformacij dolžin, površin in kotov. Transverzalna Mercatorjeva projekcija je v tem primeru izpuščena, saj ni primerna za prikaz celotnega sveta v eni coni, pa tudi program Matlab ne dopušča izrisa tako velike cone. Na karti so izrisane loksodrome dolžin 7500 km, usmerjene pod azimutom  $90^\circ$  na z začetno točko na ekvatorju, severnem povratniku, srednji geografski širini ter severnem tečajniku. Izrisana je tudi loksodroma dolžine 9000 km, usmerjena pod  $135^\circ$  z začetno točko na severnem povratniku in loksodroma dolžine 3000 km, usmerjena pod azimutom  $45^\circ$  z začetno točko na severnem tečajniku. Poleg vseh loksodrom so izrisane še ortodrome med paroma točk. Ortodrome so izrisane z zeleno, loksodrome pa z rdečo barvo.



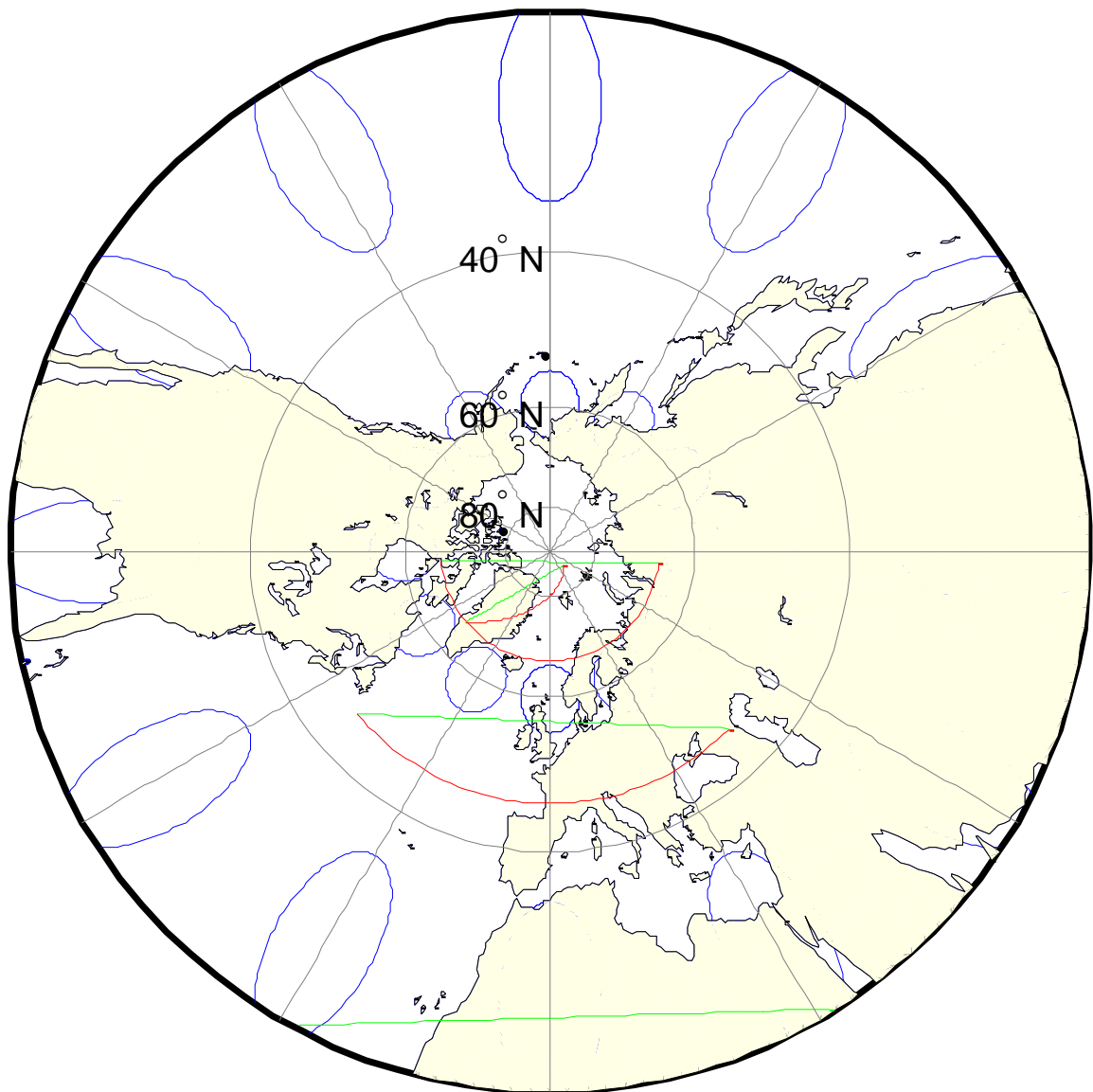
Slika 15: Ortodroma (zeleno) in loksodroma (rdeča) na območju sveta v Mercatorjevi projekciji



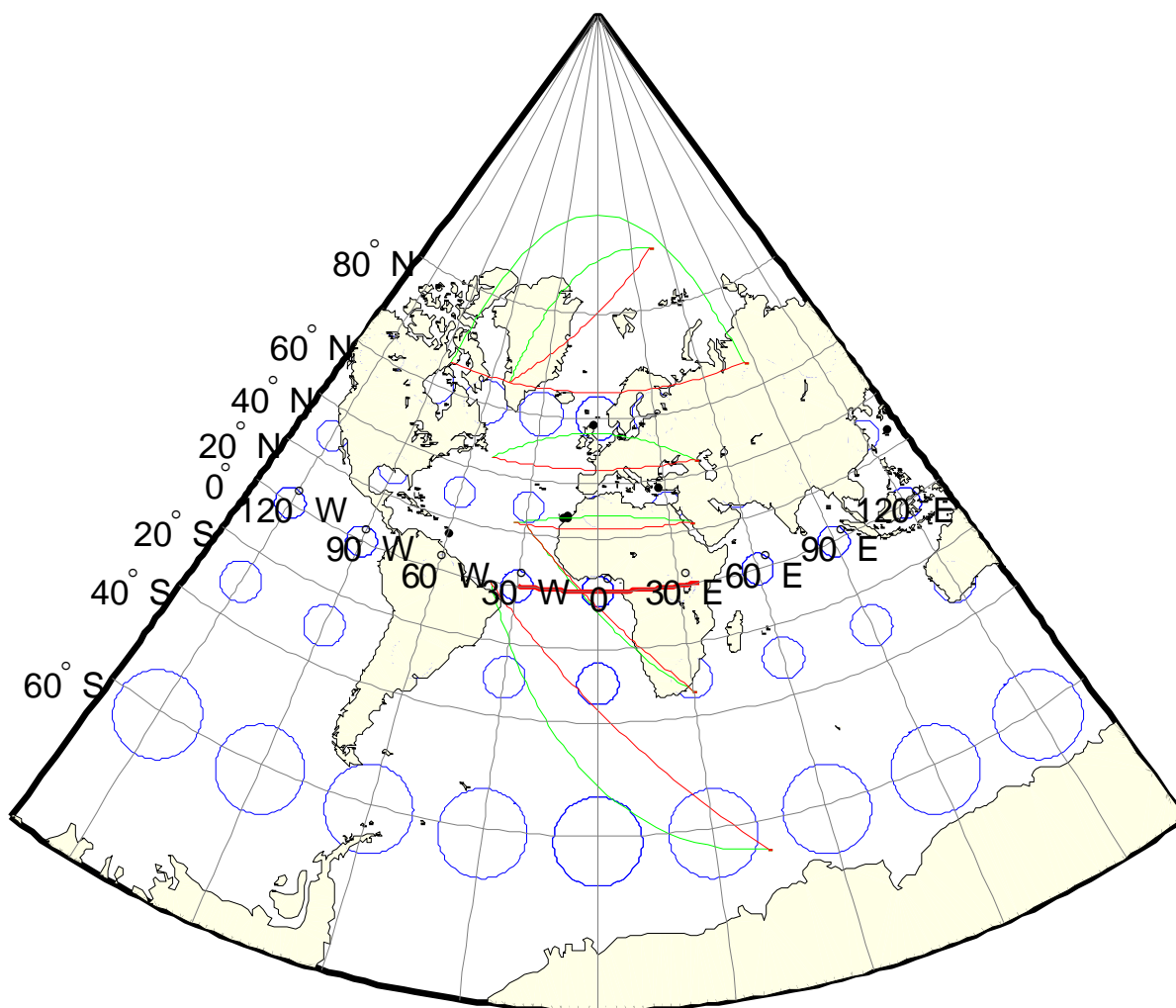
Slika 16: Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeča barva) na območju sveta v ekvatorialni gnomonski projekciji



Slika 17: Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeča barva) na območju sveta v poševni gnomonski projekciji



Slika 18: Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeča barva) na območju sveta v polarni gnomonski projekciji



Slika 19: Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeča barva) na območju sveta v Lambertovi konformni konusni projekciji

Če območje sveta izrišemo na format lista A3 v odgovarjajočem merilu, ki bi znašalo okoli 1 : 200 000 000, bi se videla prav vsa odstopanja med krivuljama, ki so obravnavana na tem območju. Ne bi pa mogli zaslediti razlike med loksodromo dolžine do 1000 km in ustrezajočo ortodromo na vseh obravnavanih geografskih širinah na območju Evrope (40°, 50° in 60°). Če bi območje izrisali v še manjšem merilu, ki bi odgovarjalo formatu lista A5 in bi znašalo približno 1 : 300 000 000, pa se ne bi videla odstopanja med krivuljama pri azimutu 135° z začetno točko na severnem povratniku in dolžino loksodrome 7500 km. Različni primeri ortodrom in loksodrom, izrisanih v projekcijah v merilu na območju sveta, se nahajajo v prilogah C1, C2, C3, C4 in C5.

### 11.3 Odstopanja med geodetsko linijo in loksodromo v kartografski projekciji elipsoida v ravnino

V tem poglavju bomo odstopanja med ortodromo in loksodromo v kartografski projekciji krogelnih v ravninske kartezične koordinate projekcije primerjali z vrednostmi odstopanj med geodetsko linijo in loksodromo v kartografski projekciji elipsoida v ravnino. Po območjih bomo primerjali tista odstopanja, ki so pri obravnavanju kartografskih projekcij na podlagi krogle zavzela najmanjše in največje vrednosti. Na ta način bomo videli, ali so razlike med odstopanji loksodrome in ortodrome oziroma geodetske linije v kartografski projekciji na podlagi krogle ali elipsoida sploh bistvene.

#### 11.3.1 Območje Slovenije

Kot lahko razberemo iz preglednice 20, se na območju Slovenije odstopanja v kartografski projekciji, ko preslikamo elipsoid v ravnino, v primerjavi z odstopanji v kartografski projekciji na podlagi krogle kot približka Zemlje, malo razlikujejo. V primeru najmanjšega odstopanja med krivuljama, t.j. pri dolžini loksodrome na krogli 6 km ter azimutu  $135^\circ$ , se razlik med odstopanji v projekciji krogle ter elipsoida v ravnino ne da zaslediti, merjeno na desetinko metra natančno. Razlike so največje tam, kjer so odstopanja med krivuljama v projekciji največja. Tak primer nastopi, ko se začetna točka nahaja na skrajnem severu Slovenije, loksodroma na krogli je dolga 200 km in usmerjena pod kotom  $90^\circ$ . Če se za par točk z enakimi geografskimi koordinatami primerja situacijo v projekcijah, ko je elipsoid privzet kot referenčna ploskev, se ne opazi večjih razlik. Te znašajo do največ 3 metre. Sledi zaključek, da je pri proučevanju ortodrome oziroma geodetske linije in loksodrome v kartografski projekciji na tako majhnem območju, kot je Slovenija, vseeno, ali se uporabi krogla ali elipsoid kot približek Zemlje za preslikavo v projekcijsko ravnino, gledano s stališča potrebne natančnosti.

Preglednica 20: Primerjava odstopanja med ortodromo in loksodromo v projekcijah krogle z odstopanjem geodetske linije in loksodrome v projekcijah elipsoida na območju Slovenije

Približek Zemlje	$D_L$ [km]	A [°]	Odstopanje v kartografski projekciji [m]		
			M	LKKP	TM
krogla	200	90	850	838	838
elipsoid	200.579	90	852	841	841

#### 11.3.2 Območje Evrope

Najmanjše odstopanje med ortodromo in loksodromo na območju Evrope v kartografski projekciji, kjer se privzame kroglo kot referenčno ploskev, dobimo v primeru začetne točke na  $40^\circ$  geografske širine, pri dolžini loksodrome 1000 km ter azimutu loksodrome  $135^\circ$ . Rezultati so prikazani v



preglednici 21. Odstopanje na elipsoidu se glede na odstopanje na krogli poveča za 0,17 % v Mercatorjevi projekciji, za 0,04 % v Lambertovi konformni konusni projekciji in za 0,08 % v transverzalni Mercatorjevi projekciji.

Preglednica 21: Primerjava najmanjšega odstopanja med ortodromo in loksodromo v projekcijah krogle z odstopanjem geodetske linije in loksodrome v projekcijah elipsoida na območju Evrope

Približek Zemlje	$D_L$ [km]	A [° ' '' ]	Odstopanje v kartografski projekciji [m]		
			M	LKKP	TM
<b>krogla</b>	<b>1000</b>	<b>135 00 00</b>	7748	10626	11016
<b>elipsoid</b>	<b>1000.1712</b>	<b>134 52 36.26</b>	7761	10630	11022

Enako je narejeno za primer največjega odstopanja, ki nastopi v primeru začetne točke na geografski širini 60°, pri dolžini loksodrome na krogli 3000 km ter azimutu loksodrome 45°. Iz preglednice 22 lahko ugotovimo, da odstopanje med krivuljama za isti par točk, projiciran iz elipsoida v ravnino projekcije, znaša od 0,32 % pa do približno 0,28 % več kot v primeru odstopanja med krivuljama, ki se preslikata iz krogle v ravnino. To je zanemaljiva razlika za srednje veliko razdaljo med začetno in končno točko v višjih geografskih legah.

Preglednica 22: Primerjava največjega odstopanja med ortodromo in loksodromo v projekcijah krogle z odstopanjem geodetske linije in loksodrome v projekcijah elipsoida na območju Evrope

Približek Zemlje	$D_L$ [km]	A [° ' '' ]	Odstopanje v kartografski projekciji [km]		
			M	LKKP	TM
<b>krogla</b>	<b>3000</b>	<b>45 00 00</b>	701,8	365,3	351,9
<b>elipsoid</b>	<b>3010.6712</b>	<b>45 01 18.09</b>	703,7	366,5	353,2

### 11.3.3 Območje sveta

Na območju sveta najmanjše odstopanje med ortodromo in loksodromo pri projekciji krogle v ravnino nastopi v primeru začetne točke na severnem povratniku, pri dolžini loksodrome 7500 km ter azimutu 135°. V preglednici 23 lahko primerjamo odstopanje za enak par točk, projiciran iz elipsoida v ravnino projekcije, kjer ugotovimo, da so razlike na tako veliki razdalji minimalne. Tudi odstopanja med krivuljama v projekcijah krogle v ter elipsoida v ravnino so majhna, saj v tem primeru krivulji sekata ekvator.

Preglednica 23: Primerjava najmanjšega odstopanja med ortodromo in loksodromo v projekcijah krogle z odstopanjem geodetske linije in loksodrome v projekcijah elipsoida na območju sveta

Približek Zemlje	$D_L$ [km]	A [° ' '' ]	Odstopanje v kartografski projekciji [km]		
			M	LKKP	TM
<b>krogla</b>	<b>7500</b>	<b>135 00 00</b>	50,3	50,6	50,0
<b>elipsoid</b>	<b>7486.0575</b>	<b>134 49 06.74</b>	50,2	50,5	49,9

Primerjali smo še odstopanja v primeru, ko je odstopanje med ortodromo in loksodromo v projekciji največje, t.j. v primeru začetne točke na severnem tečajniku pri azimutu loksodrome  $90^\circ$  ter dolžini loksodrome na krogli 7500 km. Iz preglednice 24 razberemo, da odstopanje med geodetsko linijo in loksodromo v projekciji, ko preslikamo elipsoid v ravnino znaša največ v primeru Mercatorjeve projekcije in se za 0,05 % razlikuje od odstopanja med ortodromo in loksodromo v Mercatorjevi projekciji pri preslikavi krogle.

Preglednica 24: Primerjava največjega odstopanja med ortodromo in loksodromo v projekcijah krogle z odstopanjem geodetske linije in loksodrome v projekcijah elipsoida na območju sveta

Približek Zemlje	$D_L$ [km]	A [°]	Odstopanje v kartografski projekciji [km]		
			M	LKKP	TM
<b>krogla</b>	<b>7500</b>	<b>90</b>	14952.5790	6847.5478	2354.5868
<b>elipsoid</b>	<b>7529.6317</b>	<b>90</b>	14960.2978	6864.8527	2363.7838

Glede na to, da je že primerjava rezultatov med razlikami v ortodromi in loksodromi na krogli ter geodetski liniji in loksodromi na elipsoidu pokazala, da se vrednosti ne razlikujejo prav dosti, je v tem delu naloge rezultat zelo podoben in pričakovan.

## 12 ZAKLJUČEK

V diplomski nalogi smo podrobno proučili karakteristični krivulji na zemeljski krogli – ortodromo in loksodromo ter ekvivalentni krivulji na Zemlji, aproksimirani z elipsoidom – geodetsko linijo in loksodromo. Oblika krivulj in odstopanje med njima sta odvisna od treh spremenljivk: oddaljenosti med začetno in končno točko, njune geografske širine in azimuta, pod katerim sta krivulji usmerjeni. Ko proučujemo slike ortodrome in loksodrome v ravnini kartografske projekcije, pa sta odvisni še od deformacijskih lastnosti projekcije. V nalogi sta krivulji obravnavani v štirih projekcijah: Mercatorjevi, gnomonski, Lambertovi konformni konusni in transverzalni Mercatorji projekciji. Nobena izmed njih ni idealna, vedno je potreben kompromis. Ugotavljali smo, katera je primerna za navigacijo, še posebej v pomorstvu. V nalogi se vseskozi pojavlja vprašanje smisla kompleksnih izračunov na elipsoidu, saj so izračuni na krogli vrsto let zadostovali za rešitev velike večine nalog v navigaciji. Nenazadnje pa smo v nalogi raziskali tudi vprašanje uporabe loksodrome v praktičnem smislu ob današnji tehnologiji določanja položaja z visoko natančnostjo ter možnostjo avtomatskega določanja gosto izračunanih točk ortodrome (geodetske linije).

Na podlagi proučevanja ortodrome in loksodrome na krogli so rezultati pokazali, da razlike v dolžini poti po eni in drugi naraščajo s prehajanjem v višje geografske lege. Načeloma so te razlike največje, ko azimut loksodrome znaša  $90^\circ$ , razen pri večjih oddaljenostih med začetno in končno točko, ko dobimo večje odstopanje pri azimutu, ki krivuljo usmeri proti polu. Loksodroma ima namreč največjo ukrivljenost v tangentni ravnini posamezne točke pri azimutu  $90^\circ$ , ki pa se drastično veča, bliže kot smo polu. Razlike v dolžini poti naraščajo tudi z večanjem oddaljenosti med točkama, kar hitro opazimo s primerjanjem velikosti odstopanj med ortodromo (geodetsko linijo) in loksodromo po posameznih območjih. Vse tri spremenljivke so med seboj funkcijsko povezane. Najmočnejši vpliv ima geografska širina.

Primerjava rezultatov, pridobljenih na krogli, glede na geodetsko linijo in loksodromo na elipsoidu je pokazala, da so odstopanja med seboj podobna. Kljub vsemu so izračuni na podlagi elipsoida natančnejši, zato se v mednarodni praksi danes uporablja elipsoid.

S kartografskega stališča je pomembno, kako se krivulji preslikata v ravnino kartografske projekcije in kakšna so njuna odstopanja v ravnini. Uporabnik karte mora dobiti čimbolj realno sliko dejanskega stanja, kar je posebej pomembno v navigaciji. Stanju v naravi se približamo, če je ortodroma oz. geodetska linija na karti prikazana krajše od loksodrome. Pravilnejši vtis dobimo, če je ortodroma konkavno usmerjena proti ekvatorju, loksodroma pa proti polu. Za Mercatorjevo projekcijo to ne drži, medtem ko ostale tri v večji meri zadoščajo pogojem. Na mestu je tudi, če je mreža vzporednikov in poldnevnikov v projekciji pravokotna. Na ta način lažje izvajamo meritve na karti, prav tako pa se

izognemo napačnemu razumevanju karte, saj bi lahko sicer mislili, da nek kraj leži na višji zemljepisni širini, medtem ko to v naravi ne drži. Temu pogoju zadosti le Mercatorjeva projekcija.

Rezultati so pokazali, da na majhnem območju, kot je območje Slovenije, ne prihaja do bistvenih razlik med odstopanjem med krivuljama v različnih projekcijah. Na splošno so odstopanja med ortodromo in loksodromo relativno majhna. Največje odstopanje na območju Slovenije tako znaša 0,8 mm na Državni pregledni karti v merilu 1 : 1 000 000. To odstopanje bi na DPK1000 še zaznali, saj je večje od grafične natančnosti, ki znaša 0,2 mm. Za majhno območje torej ni pomembno, katero projekcijo uporabimo za vizualizacijo poti za potrebe navigacije.

Na območju Evrope pa so odstopanja v projekcijah opaznejša. V splošnem so največja odstopanja v gnomonski projekciji, razen v višjih geografskih legah, ko začetno točko postavimo na 60° geografske širine, kjer se največje odstopanje pojavi v Mercatorjevi projekciji. Rezultati so popolnoma pričakovani, saj vemo, da večja odstopanja povzroči večja ukrivljenost krivulj, bolj ko se približujemo polu, v projekciji pa so ta odstopanja podkrepjena še z deformacijami, ki so v polarnih predelih največje v Mercatorjevi projekciji. Prav tako smo pričakovali velika odstopanja v gnomonski projekciji, saj vemo, da z oddaljenjem od centralne točke skokovito naraščajo deformacije dolžin. Območje Evrope je dovolj veliko, da se to opazi na karti.

Rezultati so bili zelo podobni, ko smo krivulji obravnavali na območju sveta. Največja odstopanja so v gnomonski projekciji, razen v polarnih predelih, kjer so ravno v polarni gnomonski projekciji odstopanja najmanjša. Ko prehajamo v višje geografske lege, postanejo največja odstopanja v Mercatorjevi projekciji. V Lambertovi konformni konusni projekciji se pojavijo večja odstopanja, ko sta krivulji na območju izven standardnih paralel, saj je to območje pozitivnih deformacij. Rezultati so pričakovani, saj smo to lahko sklepali na podlagi lastnosti ortodrome in loksodrome na krogli, ter na podlagi znanih lastnosti projekcij.

V nalogi so se odstopanja med ortodromo ter loksodromo v projekcijah kot preslikavi krogle primerjala z odstopanji med geodetsko linijo ter loksodromo v projekciji kot preslikavi elipsoida v ravnino. Rezultati v obeh primerih so podobni, načeloma so nekoliko večja odstopanja dobljena pri uporabi elipsoida.

Vseskozi se pojavlja vprašanje, kako pomembna je aproksimacija Zemlje z elipsoidom za izračune, potrebne za navigacijo, kjer ni zahtevana najvišja natančnost. Ali dobljeni rezultati dejansko opravičujejo kompleksnost izračunov na elipsoidu, saj vemo, da je vrsto let tradicionalen način navigacije na podlagi aproksimacije Zemlje s kroglo, karto v Mercatorjevi projekciji in grafičnim načinom računanja navigacijskih elementov s karte zadostila v veliki večini primerov. Izračuni

---

geodetske linije na elipsoidu so neprimerljivo zahtevnejši v primerjavi z ortodromo na krogli. Kljub vsemu so danes v sprejemnike GNSS in geografske informacijske sisteme vgrajeni algoritmi, zasnovani na podlagi elipsoida. Če želimo v navigaciji uporabljati določanje položaja s sprejemnikom GNSS, ki deluje na podlagi elipsoida, so potrebni izračuni ravno tako na elipsoidu. V praksi geodetsko linijo največkrat nadomesti lok velike elipse na elipsoidu, ki precej posploši izračune, vendar še vedno dobimo dovolj natančne rezultate za potrebe navigacije; večja natančnost namreč ne bi doprinesla nobene prednosti. Cilj uporabe elipsoida kot referenčne ploskve, uporaba tehnologije GNSS ter elektronske karte (ECN) po možnosti s souporabo GIS, kot je ECDIS, je varna navigacija.

Kljub tehnološkemu napredku v pomorski navigaciji ostaja loksodroma še vedno aktualna, saj bi navigacija izključno po geodetski liniji pomenila preveč sprotnih sprememb kurza, kar na vozilo ne vpliva najboljše. Prav tako ostaja aktualna analogna karta v Mercatorjevi projekciji, ker tako določajo mednarodni standardi. Nenazadnje se vedno lahko zgodi, da na plovilu zmanjka elektrike ali pa te na njem sploh ni.

## VIRI

### Uporabljeni viri

Alexander, J. 2004. Loxodromes: A rhumb way to go. *Mathematics magazine* 77, 5: 349-356.

<http://www.directionsmag.com/images/articles/waypoint/WayPointOptimization-body.htm>

(Pridobljeno 5.7.2011.)

Benković, F., Piškorec, M., Lako, L., Čepelak, K., Stajić, D. 1986. *Terestrička i elektronska navigacija*. Split, Hidrografski institut ratne mornarice: 876 str.

Bjelovučić, N., Domevšček, I. 2007. *Priročnik za voditelja čolna*. Rogaška Slatina (samozaložba: N. Bjelovučić): 116 str.

Deakin, R. E. 2010. *Loxodrome on an ellipsoid*. Melbourne, RMIT University, School of mathematical and geospatial sciences: 20 f.

<http://user.gs.rmit.edu.au/rod/files/publications/Loxodrome%20on%20Ellipsoid.pdf>

(Pridobljeno 8.9.2011.)

Deakin, R. E., Hunter, M.N. 2009. *Geodesics on an ellipsoid – Bessel's method*. Melbourne, RMIT University, School of mathematical and geospatial sciences: 66 f.

<http://user.gs.rmit.edu.au/rod/files/publications/Geodesics%20-%20Bessel's%20method.pdf>

(Pridobljeno 8.9.2011.)

Eurogeographics. 2012.

URL 5: <http://www.eurogeographics.org/> (Pridobljeno 20.5.2012.)

Fenna, D. 2007. *Cartographic science: a compendium of map projections, with derivations*. Boca Raton, London, New York, CRC Press: Taylor & Francis: 491 str.

Fras, M. 2006. *Višja geodezija 1. Zapiski po predavanjih prof. dr. Bojana Stoparja v šolskem letu 2005/2006*. Ljubljana, S.n.: loč.pag.

Fras, M. 2008. *Višja geodezija 3. Zapiski po predavanjih prof. dr. Bojana Stoparja v šolskem letu 2007/2008*. Ljubljana, S.n.: loč.pag.

Kennedy, M., Kopp, S. 2000. Understanding map projections. Redlands, Environmental Systems Research Institute, Inc: 110 str.

<http://kartoweb.itc.nl/geometrics/Map%20projections/Understanding%20Map%20Projections.pdf>

(Pridobljeno 5.7.2011.)

Maling, D. H. 1992. Coordinate Systems and Map Projections, 2 nd ed., Oxford, New York, Seoul, Tokyo, Pergamon Press: 476 str.

Ortodroma – krajši odsek velikega kroga na krogli. 2012.

URL 2: <http://de.wikipedia.org/wiki/Orthodrome> (Pridobljeno 1.3.2012.)

Snyder, J. P. 1987. Map projections – a working manual. Washington, United States government printing office: 383 str.

<http://www.scribd.com/doc/36982366/Map-Projections-A-Working-Manual-Snyder>

(Pridobljeno 11.5.2011.)

Peterca, M. 2001. Matematična kartografija. Kartografske projekcije. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo: 211 str.

Pallikaris, A., Latsas, G. 2009. New algorithm for great elliptic sailing (GES). Journal of navigation 62, 3: 493-507.

Pallikaris, A., Tsoulos, L., Paradissis, D. 2010. Improved algorithms for sailing calculations. Coordinates VI, 5: 15-18.

<http://mycoordinates.org/improved-algorithms-for-sailing-calculations/all/1/>

(Pridobljeno 10. 12. 2011.)

Pallikaris, A., Tsoulos, L. 2010. Map projections and visualization of navigational paths in electronic chart systems. V: 3<sup>rd</sup> international conference on cartography and GIS. Nessebar, Bulgaria, 15-20 junij, 2010: loč. pag.

[http://cartography-gis.com/pdf/82\\_Pallikaris\\_Greece\\_paper1.pdf](http://cartography-gis.com/pdf/82_Pallikaris_Greece_paper1.pdf) (Pridobljeno 10.12.2011.)

Radovan, D., Karničnik, I., Klanjšček, M. 2006. Vloga navtičnega vodnika slovenskega morjain pomorskih publikacij za priobalni GIS. V: D. Perko (ur.) et al., Geografski informacijski sistemi v Sloveniji 2005-2006 (str. 151-159). Ljubljana: Geografski inštitut Antona Melika, Inštitut za antropološke in prostorske študije ZRC SAZU.

<http://giam2.zrc-sazu.si/sites/default/files/9616568558.pdf> (Pridobljeno 15.3.2012.)

Ravninski kartezični koordinatni sistem. 2012.

URL 1: <http://kartoweb.itc.nl/geometrics/Map%20projections/body.htm>

(Pridobljeno 20.3.2012.)

Reducirana širina. 2012.

URL 3: <http://en.wikipedia.org/wiki/Latitude> (Pridobljeno 20.3.2012.)

Skrajne točke celinske Evrope. 2011.

URL 4: [http://sl.wikipedia.org/wiki/Skrajne\\_to%C4%8Dke\\_Evrope](http://sl.wikipedia.org/wiki/Skrajne_to%C4%8Dke_Evrope) (Pridobljeno 5.1.2012.)

Vincenty, T. 1975. Direct and inverse solutions of geodesics on the ellipsoid with applicaton of nested equation. Survey Review XXIII, 176: 88-93.

[http://www.ngs.noaa.gov/PUBS\\_LIB/inverse.pdf](http://www.ngs.noaa.gov/PUBS_LIB/inverse.pdf) (Pridobljeno 20.12.2011.)

Weintrit, A., Kopacz, P. 2011. A novel approach to loxodrome (rhumb line), orthodrome (great circle) and geodesic line in ECDIS and navigation in general. Transnav 5, 4: 507-517.

[http://www.transnav.eu/Article\\_A\\_Novel\\_Approach\\_to\\_Loxodrome\\_Weintrit,20,322.html](http://www.transnav.eu/Article_A_Novel_Approach_to_Loxodrome_Weintrit,20,322.html)

(Pridobljeno 5.1.2012.)

### **Ostali viri**

Bugayevskiy, L. M., Snyder, J. P. 1995. Map projections: a reference manual. London, Taylor & Francis: 328 str.

Fras, M. 2008. Matematika 2. Zapiski po predavanjih doc. dr. Mitja Laknerja v šolskem letu 2006/2007. Ljubljana, S.n.: loč.pag.

Fras, M. 2008. Kartografske projekcije. Zapiski po predavanjih viš. pred. dr. Daliborja Radovana v šolskem letu 2008/2009. Ljubljana, S.n.: loč.pag.

Kos, S., Zorović, D. 2006. Basic loxodromic navigational regularities. Naše more 53, 1-2: 1-8.

[http://hrcak.srce.hr/index.php?show=clanak&id\\_clanak\\_jezik=12346](http://hrcak.srce.hr/index.php?show=clanak&id_clanak_jezik=12346) (Pridobljeno 10.12.2011.)

Maling, D.H. 1989. Measurements from maps: principles and methods of cartometry. Oxford, Pergamon Press: 577 str.



Tseng, W.K., Lee, H.S. 2010. Navigation on a great ellipse. Journal of marine science and technology 18, 3: 369-375.

<http://jmst.ntou.edu.tw/marine/18-3/369-375.pdf> (Pridobljeno 12.1.2012.)

## **PRILOGE**

### **A IZRISI ORTODROME IN LOKSODROME V PROJEKCIJI V MERILU NA OBMOČJU SLOVENIJE**

- A1 Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeča barva) na območju Slovenije v Mercatorjevi projekciji v merilu 1 : 1 250 000
- A2 Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeča barva) na območju Slovenije v gnomonski projekciji v merilu 1 : 1 000 000
- A3 Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeča barva) na območju Slovenije v Lambertovi konformni konusni projekciji v merilu 1 : 1 250 000
- A4 Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeča barva) na območju Slovenije v transverzalnemu Mercatorjevi projekciji v merilu 1 : 1 200 000

### **B IZRISI ORTODROME IN LOKSODROME V PROJEKCIJI V MERILU NA OBMOČJU EVROPE**

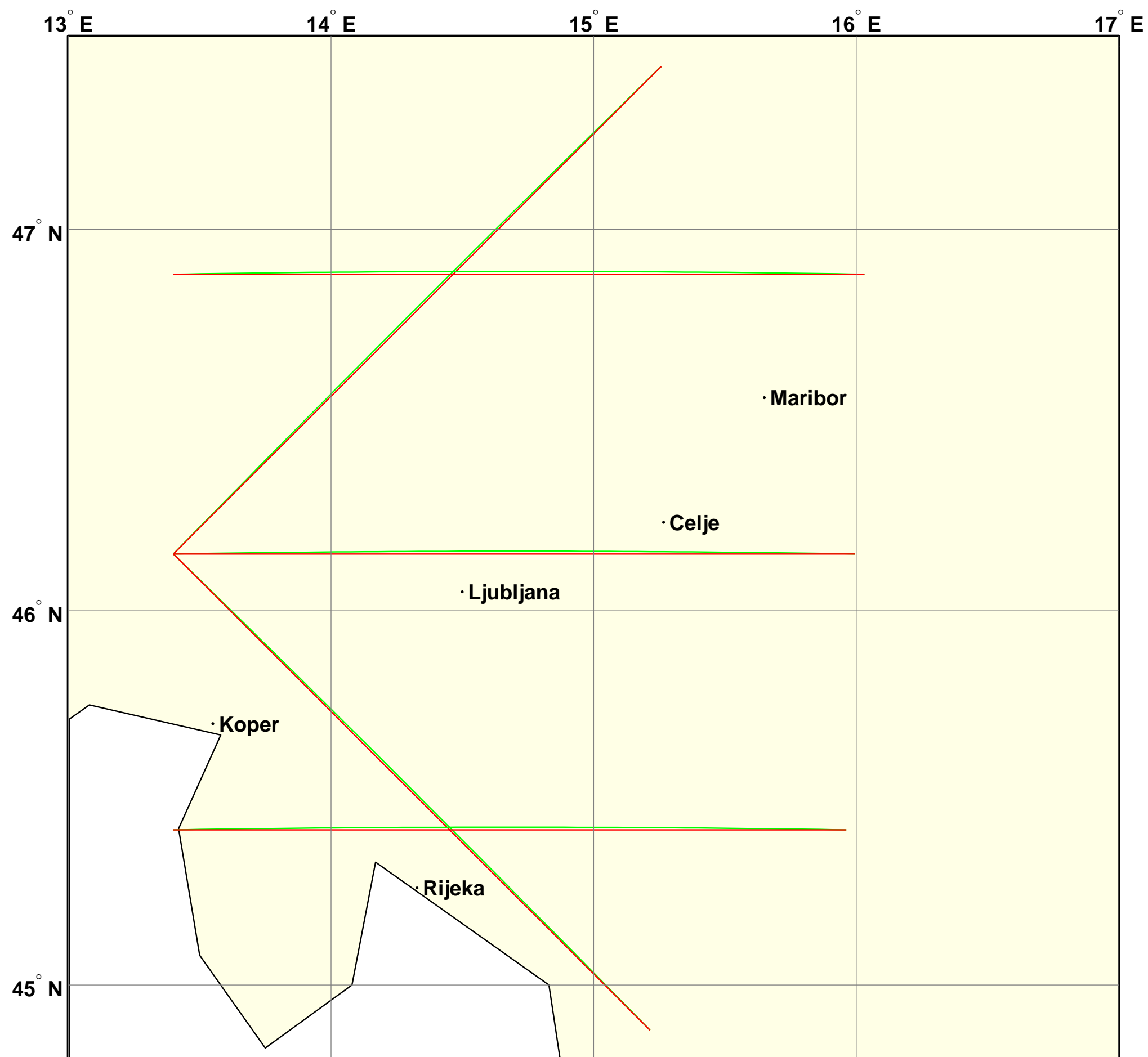
- B1 Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeča barva) na območju Evrope v Mercatorjevi projekciji v merilu 1 : 20 000 000
- B2 Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeča barva) na območju Evrope v gnomonski projekciji v merilu 1 : 20 000 000
- B3 Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeča barva) na območju Evrope v Lambertovi konformni konusni projekciji v merilu 1 : 23 000 000
- B4 Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeča barva) na območju Evrope v transverzalnemu Mercatorjevi projekciji v merilu 1 : 18 000 000

### **C IZRISI ORTODROME IN LOKSODROME V PROJEKCIJI V MERILU NA OBMOČJU SVETA**

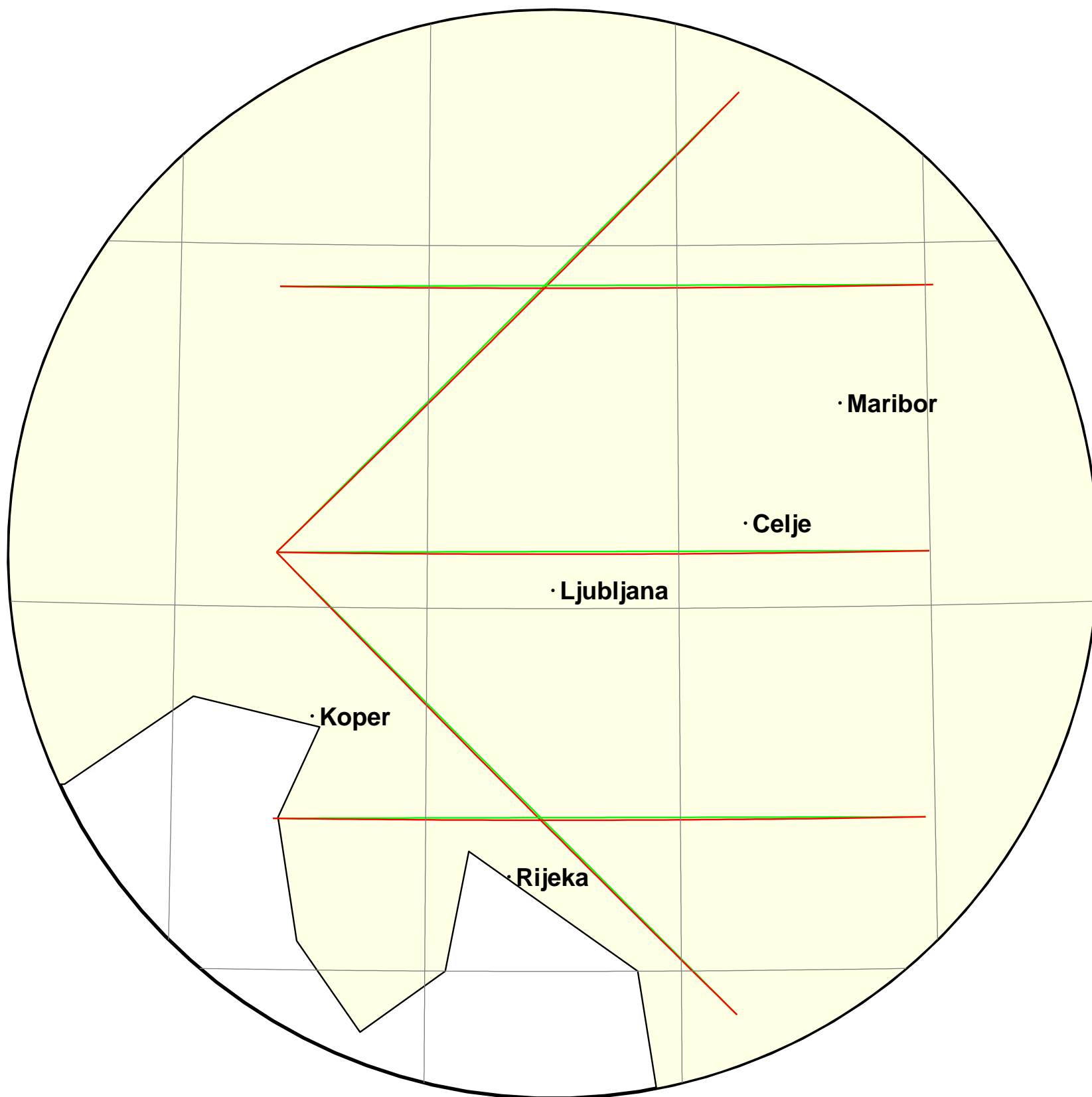
- C1 Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeča barva) na območju sveta v Mercatorjevi projekciji v merilu 1 : 170 000 000
- C2 Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeča barva) na območju sveta v ekvatorialni gnomonski projekciji v merilu 1 : 200 000 000
- C3 Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeča barva) na območju sveta v poševni gnomonski projekciji v merilu 1 : 200 000 000
- C4 Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeča barva) na območju sveta v polarni gnomonski projekciji v merilu 1 : 200 000 000

C5 Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeča barva) na območju sveta v Lambertovi  
konformni konusni projekciji v merilu 1 : 200 000 000

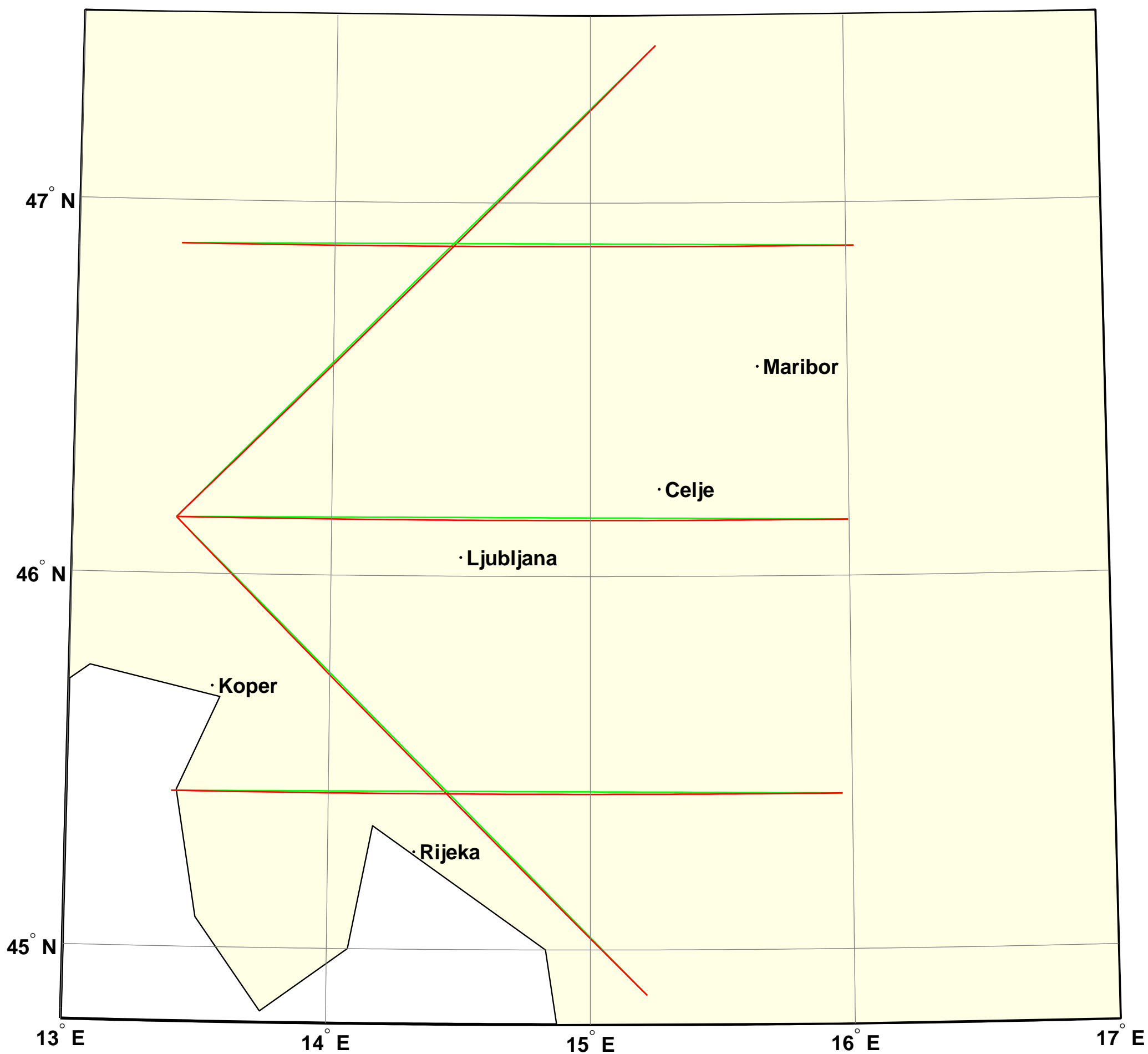
PRILOGA A1: Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeca barva) na obmocju Slovenije  
v Mercatorjevi projekciji v merilu 1 : 1 250 000



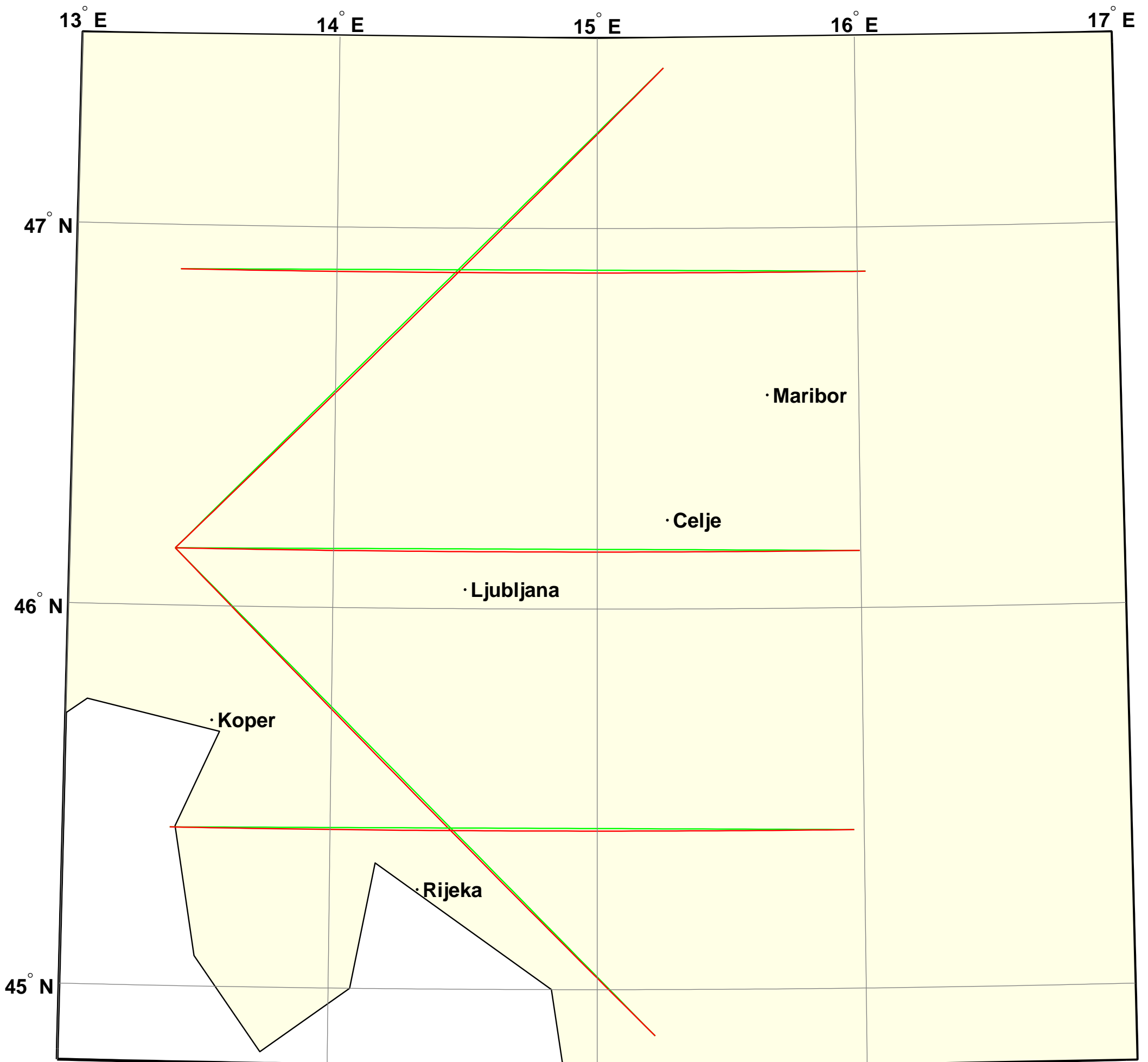
PRILOGA A2: Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeca barva) na obmocju Slovenije  
v gnomonski projekciji v merilu 1 : 1 000 000



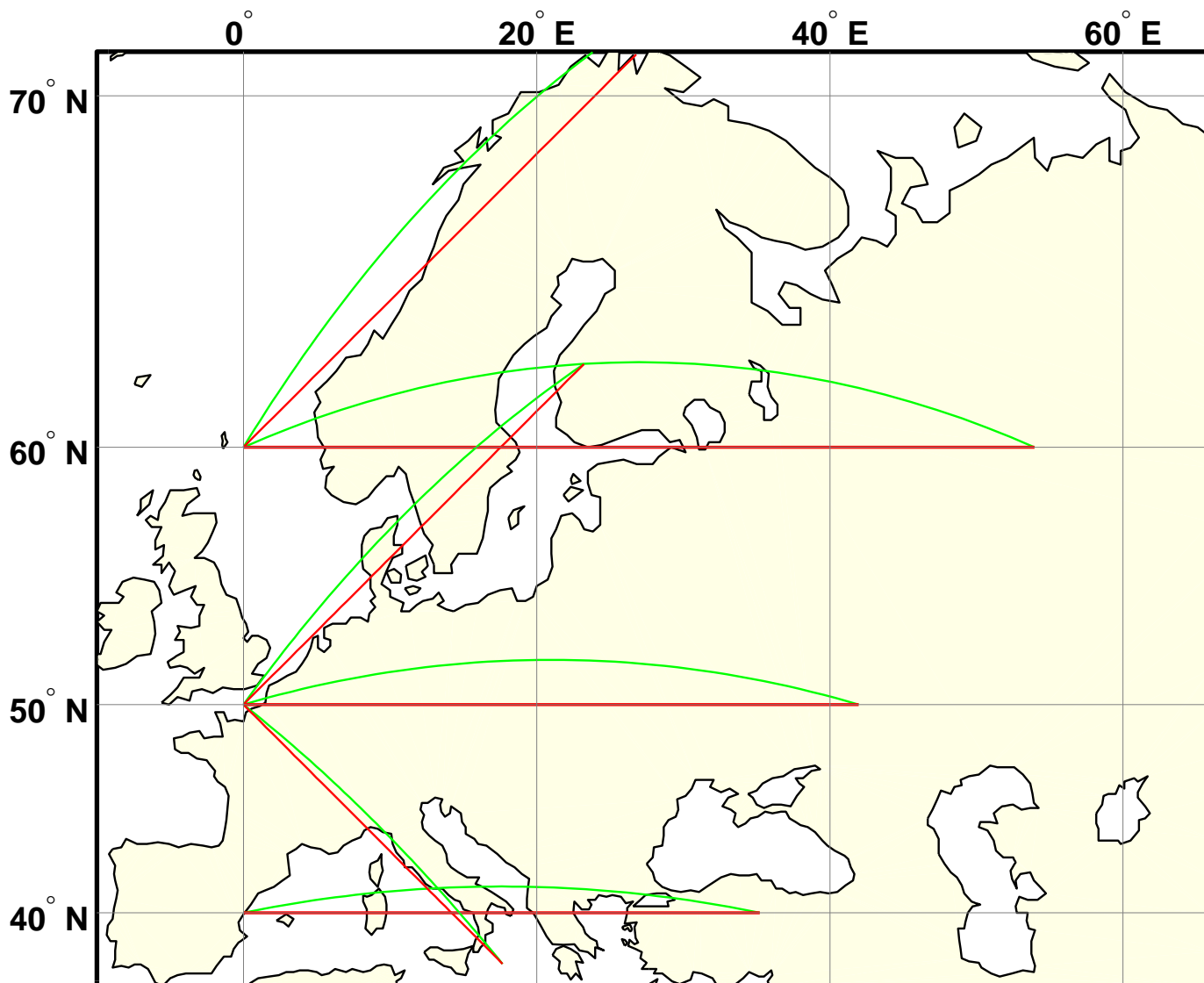
PRILOGA A3: Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeca barva) na obmocju Slovenije  
v LKKP projekciji v merilu 1 : 1 250 000



PRILOGA A4: Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeca barva) na obmocju Slovenije  
v transverzalni Mercatorjevi projekciji v merilu 1 : 1 200 000



PRILOGA B1: Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeca barva)  
na obmocju Evrope v Mercatorjevi projekciji v merilu 1 : 20 000 000

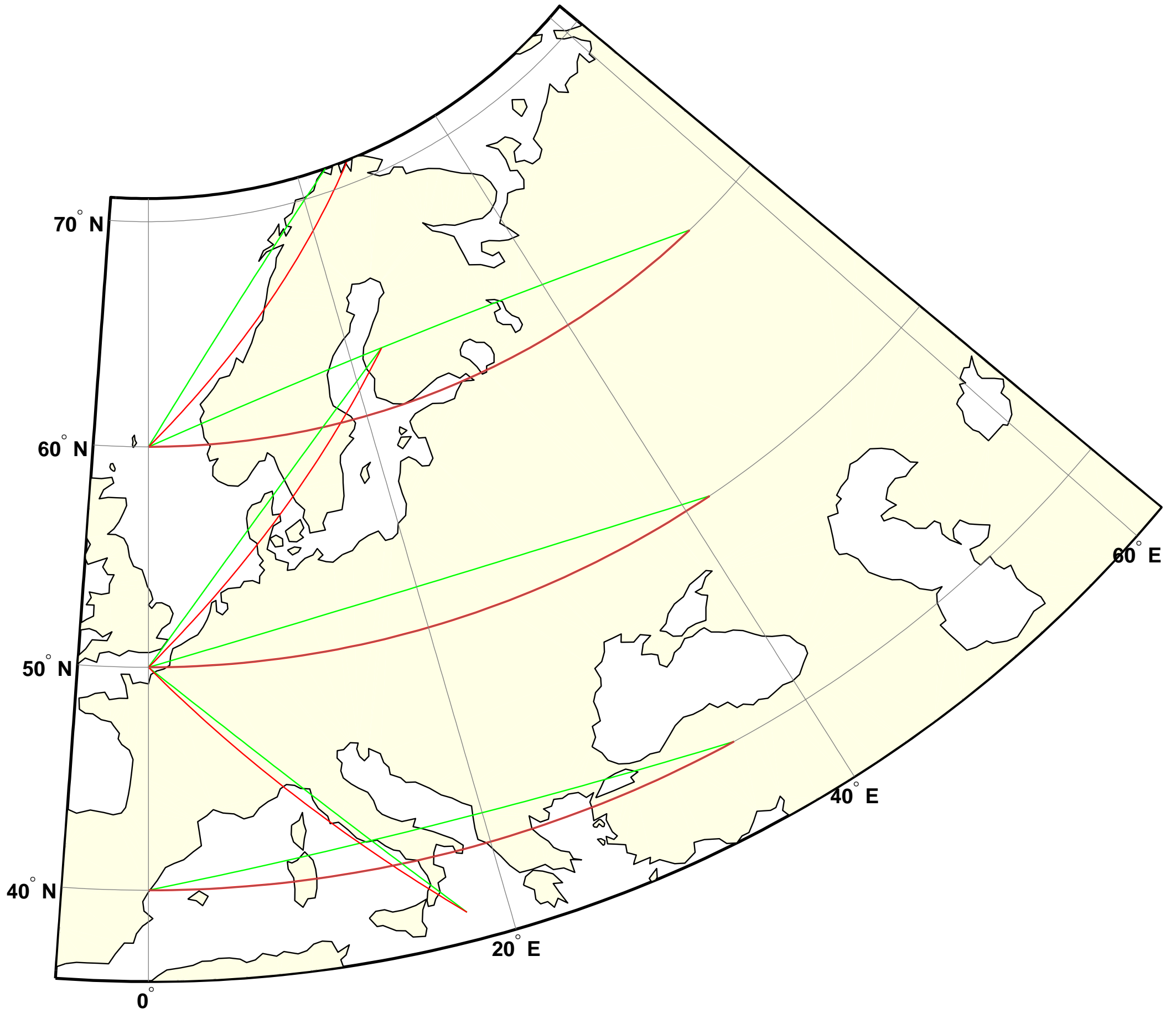




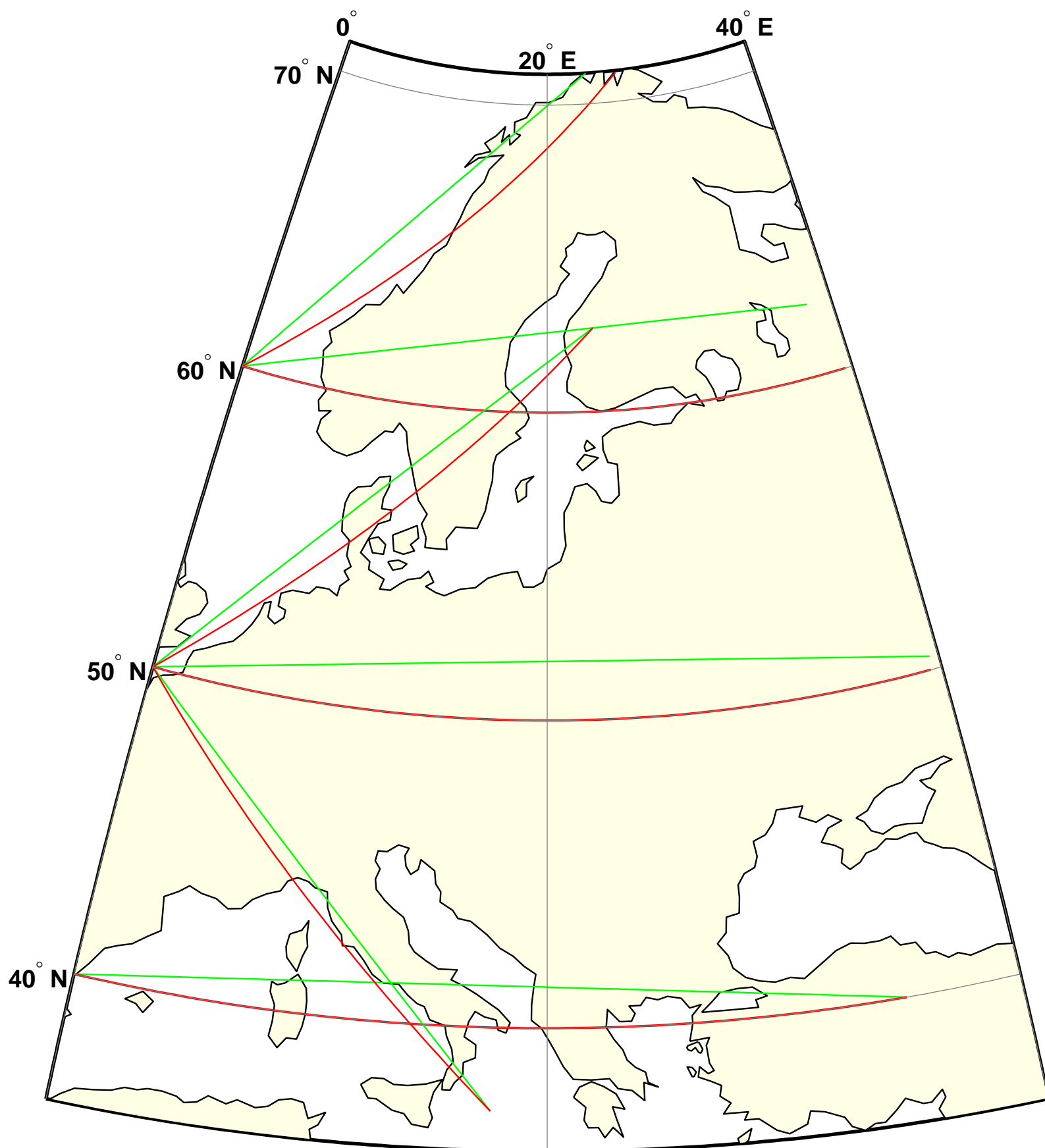
PRILOGA B2: Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeca barva)  
na obmocju Evrope v gnomonski projekciji v merilu 1 : 20 000 000



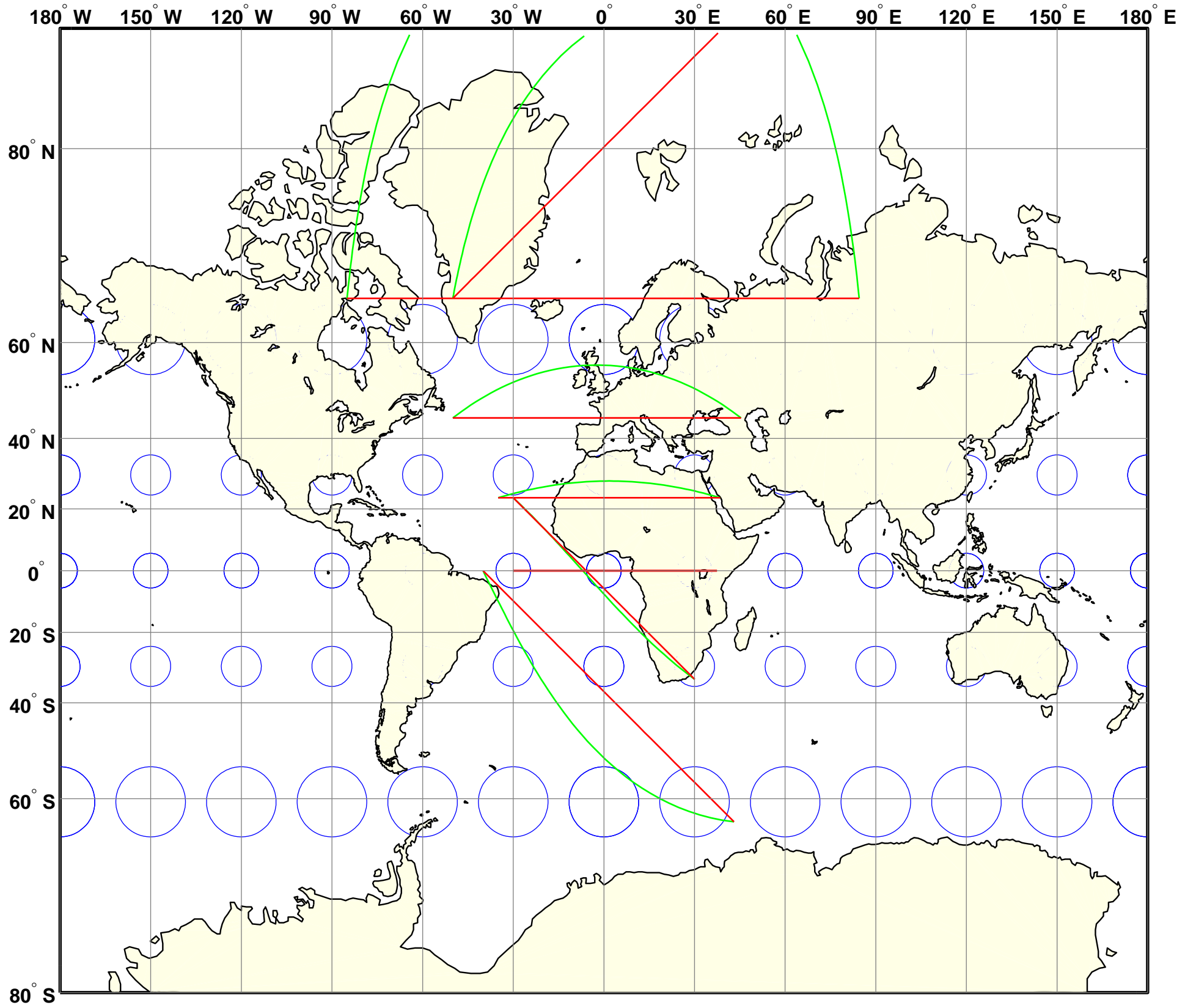
PRILOGA B3: Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeca barva) na obmocju Evrope  
v LKKP projekciji v merilu 1 : 23 000 000



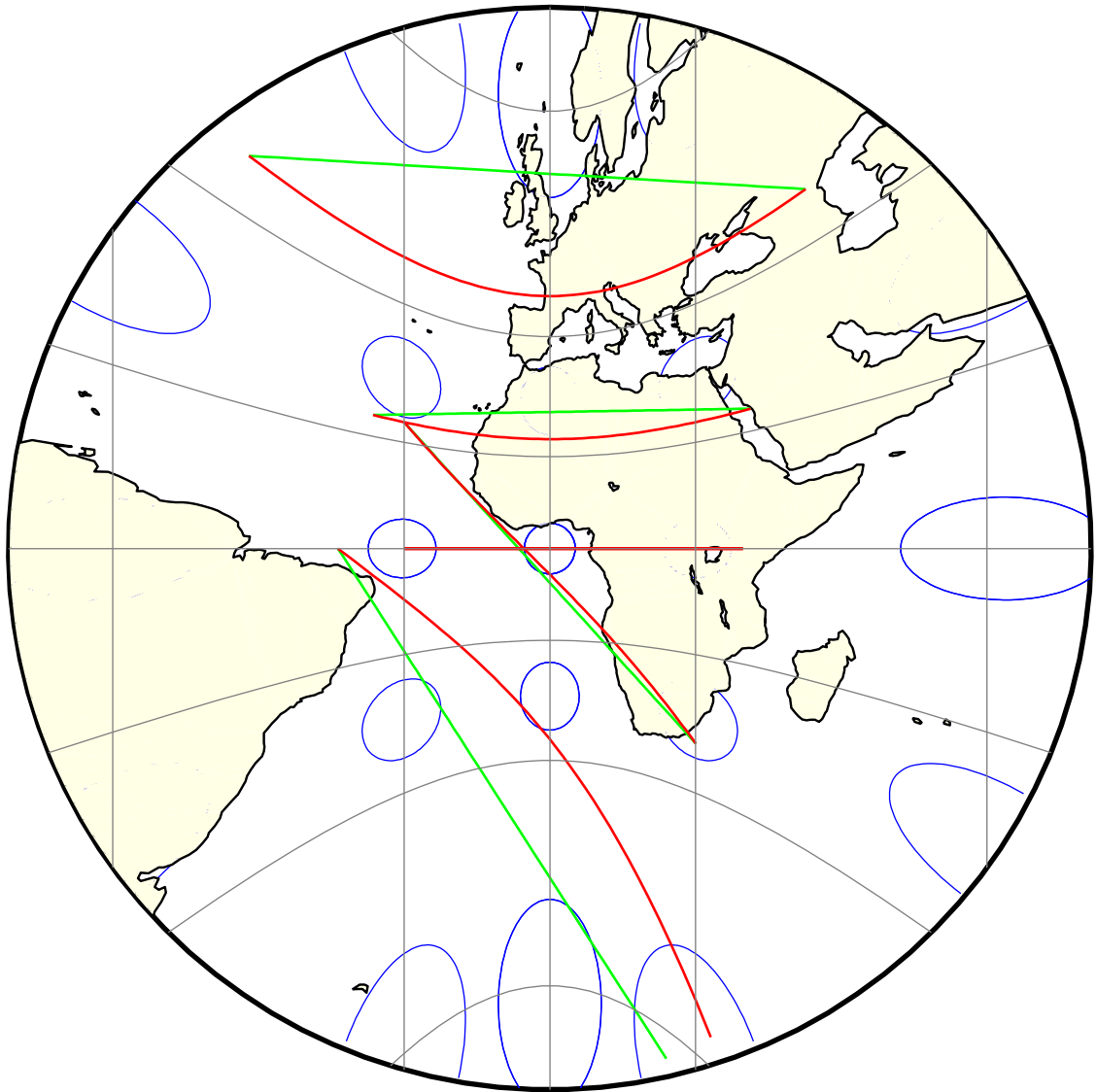
PRILOGA B4: Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeca barva) na obmocju Evrope  
v transverzalni Mercatorjevi projekciji v merilu 1 : 18 000 000



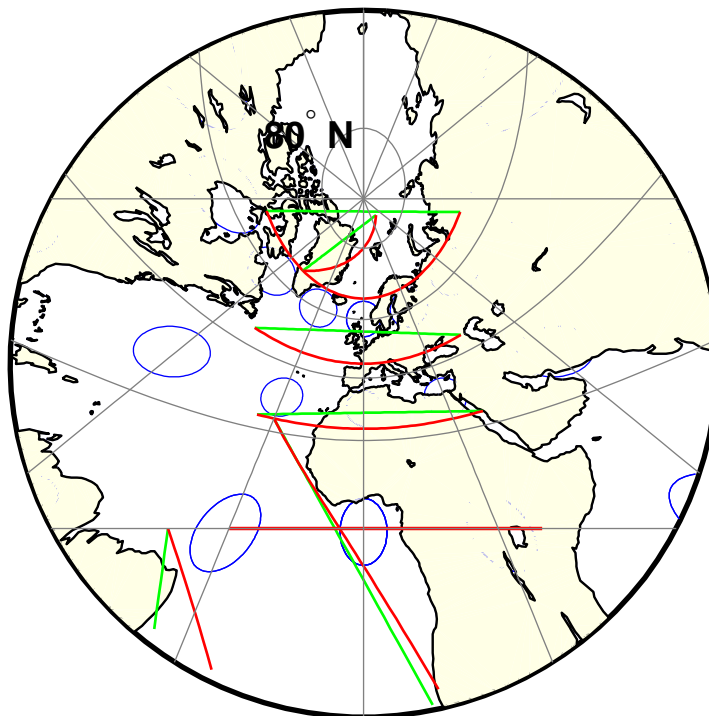
PRILOGA C1: Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeca barva) na obmocju sveta v Mercatorjevi projekciji v merilu 1 : 170 000 000



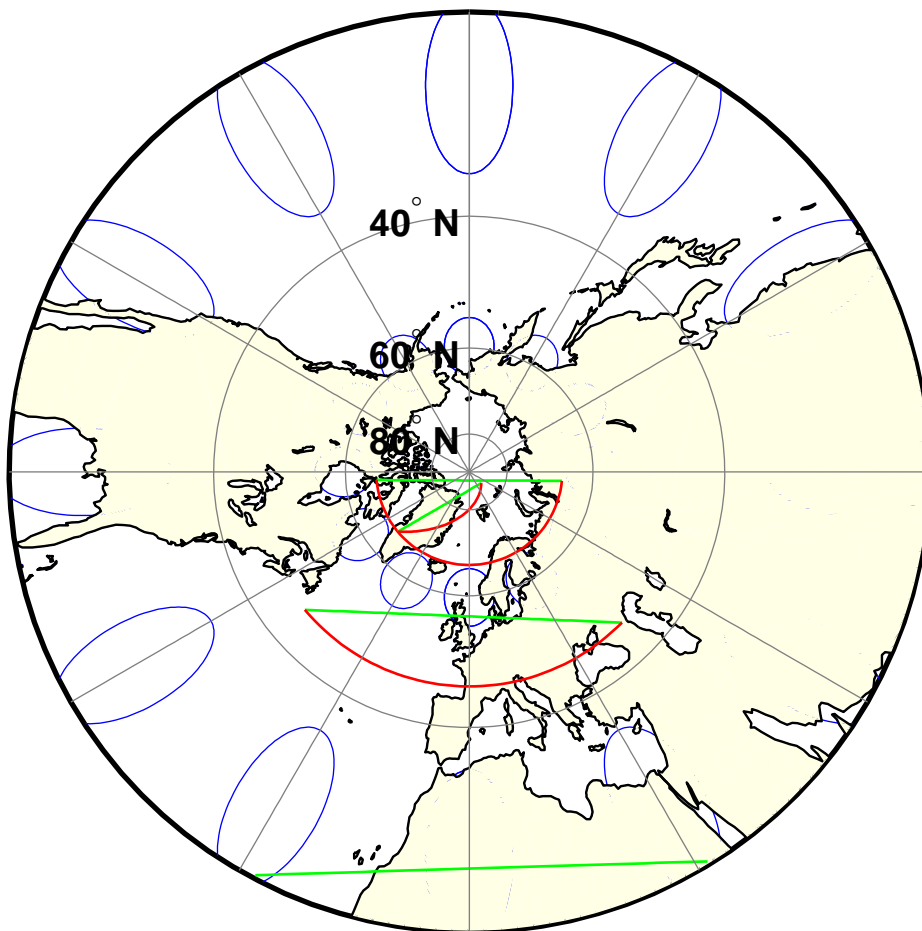
PRILOGA C2: Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeca barva)  
na obmocju sveta v ekvatorialni gnomonski projekciji  
v merilu 1 : 200 000 000



PRILOGA C3: Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeca barva)  
na obmocju sveta v posevni gnomonski projekciji  
v merilu 1 : 200 000 000



PRILOGA C4: Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeca barva)  
na obmocju sveta v polarni gnomonski projekciji  
v merilu 1 : 200 000 000





PRILOGA C5: Ortodroma (zelena barva) in loksodroma (rdeca barva) na obmocju sveta  
v LKKP projekciji v merilu 1 : 200 000 000

