

Univerza
v Ljubljani
Fakulteta
*za gradbeništvo
in geodezijo*

*Janova 2
1000 Ljubljana, Slovenija
telefon (01) 47 68 500
faks (01) 42 50 681
fgg@fgg.uni-lj.si*



Univerzitetni program Gradbeništvo,
Konstrukcijska smer

Kandidat:

Aleš Kroflič

Analiza obnašanja dvoslojnih elastičnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa in razmika

Diplomska naloga št.: 2971

Mentor:

doc. dr. Bojan Čas

Somentor:

izr. prof. dr. Igor Planinc

Ljubljana, 4. 9. 2007

IZJAVA O AVTORSTVU

Podpisani **ALEŠ KROFLIČ** izjavljam, da sem avtor diplomske naloge z naslovom:
**»ANALIZA OBNAŠANJA DVOSLOJNIH ELASTIČNIH NOSILCEV Z
UPOŠTEVANJEM ZDRSA IN RAZMIKA«.**

Izjavljam, da se odpovedujem vsem materialnim pravicam iz dela za potrebe elektronske
separatoteke FGG.

Ljubljana, 28.8.2007

BIBLIOGRAFSKO – DOKUMENTACIJSKA STRAN IN IZVLEČEK

- UDK:** 519.673:624.07(043.2)
- Avtor:** Aleš Kroflič
- Mentor:** Doc. dr. Bojan Čas (mentor), izr. prof. dr. Igor Planinc (somentor)
- Naslov:** Analiza obnašanja dvoslojnih elastičnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa in razmika
- Obseg in oprema:** 127 str., 5 pregl., 46 graf., 66 sl., 122 en.
- Ključne besede:** kompozitni nosilec, zdrs med slojema, razmikanje slojev, analitična rešitev, elastičnost

Izvleček

V diplomski nalogi obravnavamo problematiko dvoslojnih elastičnih nosilcev. Na začetku naloge opišemo najpogosteje uporabljene tipe dvoslojnih elastičnih nosilcev, v nadaljevanju pa predstavimo matematični model in pripadajočo analitično rešitev za analizo napetostnega in deformacijskega stanja elastičnih dvoslojnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa in razmika oziroma stiska (delaminacija) med slojema. S pomočjo analitične rešitve smo izdelali obsežno parametrično študijo vpliva prečne togosti stika in debeline vmesnega sloja na stiku nosilcev na obnašanje dvoslojnih lesenih nosilcev. Oba parametra imata minimalen vpliv na napetostno in deformacijsko stanje dvoslojnih kompozitnih nosilcev in ju lahko v analizi zanemarimo.

BIBLIOGRAPHIC – DOCUMENTALISTIC INFORMATION

UDC: 519.673:624.07(043.2)
Author: Aleš Kroflič
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Bojan Čas (Mentor), Assoc. Prof. Dr. Igor Planinc (Co-mentor)
Title: Numerical analysis of two-layered elastic beams considering inter-layer slip and delamination
Notes: 127 p., 5 tab., 46 gr., 66 fig., 122 eq.
Key words: composite beam, interlayer slip, delamination of layers, analytical solution, elasticity

Abstract

The analysis of elastic two-layer beams is the main scope of the present work. First the thesis presents most commonly used elastic two-layer beams, followed by a mathematical model and its analytical solution for the analysis of stress and strain state of elastic two-layer beams. We consider a longitudinal slip and vertical uplift. The analytic solution enabled us to prepare a parametric study of the effect of vertical stiffness and thickness of inner layer on the behavior of two-layer wooden beams. Both material parameters can be neglected in practical analysis, as they have minimal influence on the behavior of two-layer wooden beams.

ZAHVALA

Za pomoč pri nastajanju diplomske naloge se iskreno zahvaljujem mentorju doc. dr. B. Času in somentorju izr. prof. dr. I. Planincu.

Hvala tudi ostalim, ki so kakorkoli pripomogli pri nastanku te diplomske naloge.

KAZALO VSEBINE

1 UVOD	1
2 DVOSLOJNI KOMPOZITNI NOSILCI	6
2.1 Splošno	6
2.2 Vrste kompozitnih nosilcev	9
2.2.1 Kompozitni nosilec iz jekla in betona	9
2.2.2 Kompozitni nosilec iz lesa in betona	13
2.2.3 Kompozitni nosilec iz betona in FRP materialov	15
2.2.4 Kompozitni nosilec z dvema ali več sloji betona	20
2.2.5 Sestavljeni leseni nosilci	24
3 ANALIZA KOMPOZITNIH NOSILCEV SKLADNO Z EVROPSKIMI STANDARDI EUROCODE	28
3.1 Projektiranje sovprežnih konstrukcij iz jekla in betona	28
3.1.1 Splošno	28
3.1.2 Mejno stanje nosilnosti v primeru toge povezave betona in jekla	29
3.1.3 Mejno stanje uporabnosti	34
3.2 Projektiranje dvoslojnih nosilcev iz lesa	42
3.2.1 Splošno	42
3.2.2 Kontrola napetosti v lesenem sestavljenem prerezu	45
3.2.3 Obremenitev posameznih veznih sredstev	47
3.3 Dimenzioniranje stikov kompozitnih nosilcev iz lesa in betona	52
4 MATEMATIČNI MODEL KOMPOZITNEGA NOSILCA	53
4.1 Osnovne enačbe	53
4.2 Reševanje	62
5 RAČUNSKI PRIMERI	67
5.1 Kompozitni prostoležeči nosilec – analiza natančnosti	67
5.1.1 Newmarkov sovprežni nosilec	67

5.1.2 Primerjava z numerično rešitvijo Gare, Ranzija in Leonija (2006)	72
5.2 Dvoslojni leseni prostoležeči nosilec – parametrična študija	78
5.2.1 Geometrijski in materialni podatki dvoslojnega lesenega nosilca	78
5.2.2 Opis eksperimenta in določitev materialnih karakteristik za računsko analizo	80
5.2.3 Analiza primernosti predstavljenega matematičnega modela	84
5.2.4 Analiza vpliva parametrov C in e na obnašanje dvoslojnega lesenega nosilca	85
5.3 Kontinuirni nosilec – primerjava z Eurocode 5	101
6 ZAKLJUČKI	107
VIRI	108

KAZALO PREGLEDNIC

Preglednica 1: Geometrijski podatki betonske plošče	67
Preglednica 2: Geometrijski podatki jeklenega nosilca	68
Preglednica 3: Vzдолžne (strižne) in prečne vrednosti togosti stika (Gara et al., 2006)	73
Preglednica 4: Računske vzдолžne (strižne) in prečne vrednosti togosti stika	73
Preglednica 5: Izbrane vrednosti prečnih togosti stika	86

KAZALO GRAFIKONOV

Grafikon 1: Redukcijski faktor upogibnih momentov ob podpori	37
Grafikon 2: Primerjava kontaktne prečne linijske obtežbe p_n (primer 3 – A)	70
Grafikon 3: Primerjava prečne sile jeklenega nosilca Q_a (primer 3 – A)	70
Grafikon 4: Primerjava prečne sile betonske plošče Q_b (primer 3 – A)	71
Grafikon 5: Primerjava kontaktne prečne linijske obtežbe p_n (primer 3 – B)	71
Grafikon 6: Primerjava normirane ukrivljenosti betonske plošče (primer A).	74
Grafikon 7: Primerjava normirane ukrivljenosti nosilca (primer B)	75
Grafikon 8: Primerjava normirane ukrivljenosti betonske plošče (primer B)	75
Grafikon 9: Primerjava normiranega zamika med slojema na stiku (primer B)	76
Grafikon 10: Primerjava normiranega razmika na stiku (primer C)	76
Grafikon 11: Primerjava normirane ukrivljenosti jeklenega nosilca (primer D)	77
Grafikon 12: Primerjava normirane ukrivljenosti betonske plošče (primer D)	77
Grafikon 13: Konstitutivni zakon lesa v vzdolžni smeri za računsko analizo dvoslojnega lesenega nosilca	82
Grafikon 14: Konstitutivni model stika med slojema v vzdolžni smeri	82
Grafikon 15: Konstitutivni model stika v prečni smeri	83
Grafikon 16: Primerjava zamika na stiku dveh nosilcev za $P = 7.624kN$ in $C = 8.93kN/cm$	84
Grafikon 17: Primerjava prečnega pomika spodnjega nosilca za $P = 7.624kN$ in $C = 8.93kN/cm$	85
Grafikon 18: Spreminjanje zamika na stiku v odvisnosti od prečne togosti stika	86
Grafikon 19: Spreminjanje razmika oziroma vtisa v odvisnosti od prečne togosti stika	87
Grafikon 20: Spreminjanje prečnega pomika spodnjega lesenega nosilca v odvisnosti od prečne togosti stika	87
Grafikon 21: Spreminjanje prečnega pomika zgornjega nosilca v odvisnosti od prečne togosti stika	88
Grafikon 22: Spreminjanje upogibnega momenta spodnjega nosilca v odvisnosti od prečne togosti stika	88

Grafikon 23: Spreminjanje upogibnega momenta zgornjega nosilca v odvisnosti od prečne togosti stika	89
Grafikon 24: Spreminjanje osnih sil spodnjega nosilca v odvisnosti od prečne togosti stika	89
Grafikon 25: Spreminjanje osnih sil zgornjega nosilca v odvisnosti od prečne togosti stika	90
Grafikon 26: Spreminjanje prečne sile spodnjega nosilca v odvisnosti od prečne togosti stika	90
Grafikon 27: Spreminjanje prečne sile zgornjega nosilca v odvisnosti od prečne togosti stika	91
Grafikon 28: Spreminjanje zamika v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za $C = 0.1$ kN/cm	92
Grafikon 29: Spreminjanje zamika v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za $C = 0.5$ kN/cm	92
Grafikon 30: Spreminjanje zamika v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za $C = 1$ kN/cm	93
Grafikon 31: Spreminjanje zamika v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za $C = 8.93$ kN/cm	93
Grafikon 32: Spreminjanje zamika v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za $C = 10$ kN/cm	94
Grafikon 33: Spreminjanje zamika v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za $C = 100000$ kN/cm	94
Grafikon 34: Spreminjanje prečnega pomika v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za $C = 0.1$ kN/cm	95
Grafikon 35: Spreminjanje prečnega pomika v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za $C = 0.5$ kN/cm	95
Grafikon 36: Spreminjanje prečnega pomika v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za $C = 1$ kN/cm	96
Grafikon 37: Spreminjanje prečnega pomika v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za $C = 8.93$ kN/cm	96
Grafikon 38: Spreminjanje prečnega pomika v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za $C = 10$ kN/cm	97
Grafikon 39: Spreminjanje prečnega pomika v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za $C = 1000000$ kN/cm	97

Grafikon 40: Spreminjanje osne sile $N_b(x)$ v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za $C = 0.1$ kN/cm	98
Grafikon 41: Spreminjanje osne sile $N_b(x)$ v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za $C = 0.5$ kN/cm	98
Grafikon 42: Spreminjanje osne sile $N_b(x)$ v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za $C = 1$ kN/cm	99
Grafikon 43: Spreminjanje osne sile $N_b(x)$ v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za $C =$ 8.93 kN/cm	99
Grafikon 44: Spreminjanje osne sile $N_b(x)$ v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za $C = 10$ kN/cm	100
Grafikon 45: Spreminjanje osne sile $N_b(x)$ v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za $C =$ 100000 kN/cm	100
Grafikon 46: Primerjava prečnih pomikov spodnjega nosilca	106

KAZALO SLIK

Slika 1: Kompozitni nosilec iz jekla in betona	6
Slika 2: Primer armature, ki prečka stik	7
Slika 3: Primer jeklenih moznikov	7
Slika 4: Primer povezave les - beton	8
Slika 5: Primer veznih sredstev za povezovanje lesa	8
Slika 6: Primer veznih sredstev za povezovanje lesa	8
Slika 7: Primer sovprežnega nosilca	10
Slika 8: Primer jeklenih moznikov, ki so privarjeni na zgornjo površino jeklenega podpreza (t.i. Nelsonovi mozniki)	10
Slika 9: Primer sovprežne plošče s hladno oblikovano pločevino	11
Slika 10: Namestitev hladno oblikovane pločevine na nosilno konstrukcijo	12
Slika 11: Pritrjevanje veznih sredstev	12
Slika 12: Namestitev potrebne armature	12
Slika 13: Zabetoniranje betonske plošče	13
Slika 14: Primeri veznih sredstev pri kompozitnih nosilcih iz lesa in betona	14
Slika 15: Primer stika les – beton	15
Slika 16: Primer kompozitne konstrukcije iz lesa in betona	15
Slika 17: Primer utrditve armiranobetonske konstrukcije s FRP trakovi	17
Slika 18: Primer sanacije stropne konstrukcije s FRP trakovi	17
Slika 19: FRP nosilec	18
Slika 20: Menjava jeklenih mostnih nosilcev s FRP nosilci	18
Slika 21: Primer prefabricirane FRP plošče za sanacije prekladnih konstrukcij mostov	18
Slika 22: Instalacija FRP prefabriciranih plošč	19
Slika 23: Namestitev armature za betonsko zaščitno ograjo	19
Slika 24: Voziščna plošča je bila končana v dveh urah in pol	19
Slika 25: Izdelava betonske zaščitne ograje	20
Slika 26: Stanje med in po sanaciji	20
Slika 27: Ojačitev a) in sanacija betonskega prereza b)	21
Slika 28: Obstoječi in novi betonski sloj	22
Slika 29, slika 30: Primera sanacije voziščne plošče mostne konstrukcije	22

Slika 31: Odstranitev dotrajane betonske površine	22
Slika 32: Priprava betonske površine	23
Slika 33: Betoniranje nove betonske plasti	23
Slika 34: Obnovljeni del konstrukcije	23
Slika 35: Leseni klin, zagozda	24
Slika 36: Leseni žebli, leseni mozniki	25
Slika 37: Leseni mozniki	25
Slika 38: Različni tipi žbljev uporabljeni v lesenih konstrukcijah	25
Slika 39: Lesni vijaki (z zaokroženo, ovalno in ravno glavo)	25
Slika 40: Primeri krempljastih plošč	26
Slika 41: Krempljaste plošče	26
Slika 42: Kovinski žebelj, spona, lesni vijak, svornik - matica, streme	26
Slika 43: Nekaterе vrste moznikov posebnih oblik	26
Slika 44: Geometrijske karakteristike tipičnega sovprežnega nosilca iz betona in jekla	29
Slika 45: Obremenitev sovprežnega nosilca pri izvedbi z začasnimi podporami	34
Slika 46: Različni tipi sestavljenih lesenih prereзов, ki so obravnavani v EC5	42
Slika 47: Debeline t_1 in globine zabijanja t_2	48
Slika 48: Možni porušni mehanizmi veznih sredstev, ki prečkajo eno strižno ravnino	50
Slika 49: Varianta zabijanja osno obremenjenih žbljev	51
Slika 50: Prečni prereз sovprežnega nosilca	53
Slika 51: Matematično modeliranje stika. Vezno sredstvo modeliramo kot vzmet: (a) samo zamik, (b) zamik in razmik. Vezno sredstvo je »razmazano« vzdolž stika: (c) samo zamik, (d) zamik in razmik.	54
Slika 52: Kontaktne sile: (a) diskretno razporejene vzmeti, (b) zvezno razporejene vzmeti	55
Slika 53: Nedeformirana in deformirana lega kompozitnega nosilca.	56
Slika 54: Geometrijski pomen zdrsa in razmika kompozitnega nosilca	57
Slika 55: Prečni prereз jeklenega podnosilca	68
Slika 56: Lega točkovne sile $P = 10kN$: (levo) primer z oznako 3 – A, (desno) primer z oznako 3 – B	69
Slika 57: Lega točkovne sile	72
Slika 58: Prečni prereз sestavljenega lesenega nosilca	79
Slika 59: Razporeditev veznih sredstev	79

Slika 60: Razpored merilne opreme na prednji strani dvoslojnega lesenega nosilca	80
Slika 61: Razpored merilne opreme na zadnji strani dvoslojnega lesenega nosilca	80
Slika 62: Geometrijski podatki dvoslojnega kontinuirnega nosilca	101
Slika 63: Prečni prerez kontinuirnega dvoslojnega lesenega nosilca	102
Slika 64: Materialne karakteristike lesa za račun prečnih pomikov s programom SAP2000	104
Slika 65: Geometrijske karakteristike prečnega prereza za račun prečnih pomikov s programom SAP2000	105
Slika 66: Deformirana oblika lesenega kontinuirnega nosilca skladno z Eurocode 5	105

1 UVOD

Z razvojem gradbeništva smo priča številnim iznajdbam novih načinov gradnje in uporabe različnih materialov kot tudi konstrukcijskih elementov. Uporaba sestavljenih konstrukcijskih elementov je v gradbeništvu povzročila pojav novih možnosti gradnje in oblikovanja konstrukcij, zato so sestavljeni elementi danes v praksi zelo razširjeni. Za pogostost uporabe sestavljenih konstrukcijskih elementov je več vzrokov. V osnovi lahko s sestavljenimi prerezi v večji meri izkoristimo ugodne lastnosti posameznih sestavnih materialov. Prav tako pa uporabo sestavljenih prerezov pogojujejo tudi nekateri postopki gradnje (polmontažna in montažna gradnja).

Ko govorimo o sestavljenih nosilcih, imamo navadno v mislih dva tipa nosilcev: sestavljene in slojevite nosilce. Primer slojevitega nosilca je dodajanje nove plasti betona na obstoječo betonsko površino zaradi potrebe po ojačitvi oziroma sanaciji konstrukcijskega sklopa. Stopnjo želene povezanosti med slojema dosežemo z izborom načina obdelave stične površine in izbranimi mehanskimi lastnostmi veznega sredstva, t.j. armature, ki prečka stik. Ko govorimo o nosilcih, ki so medsebojno povezani samo z veznimi sredstvi, jih imenujemo sestavljeni nosilci. Pri teh je stopnja povezanosti med sestavnimi elementi določena predvsem z veznimi sredstvi. V nadaljevanju slojevite in sestavljene nosilce imenujemo kompozitni nosilci.

Glede na material so lahko sloji kompozitnega nosilca narejeni iz enakega ali pa različnih materialov. Navadno se odločimo za takšen izbor materialov in s tem tipov kompozitnih nosilcev, ki optimalno prevzamejo obremenitve, ki se v konstrukciji pojavijo. Pri kompozitnih nosilcih se v prerezi pojavijo tako tlačne kot tudi natezne napetosti. Zato je smiselno uporabiti materiale tako, da v delu prereza, ki je natežno obremenjen, uporabimo material z dobrimi nateznimi lastnostmi. Če pa v delu prereza nastopajo tlačne napetosti, uporabimo material z dobrimi tlačnimi lastnostmi.

V splošnem so lahko elementi kompozitnih nosilcev tudi nepovezani. Izkaže pa se, da jih je v večini primerov bolj racionalno povezati med seboj z veznimi sredstvi. Stopnjo povezanosti slojev običajno delimo na togo in podajno. Pri delovanju zunanje obtežbe pride na stiku podprerezov do zamikov in tudi razmikov oziroma vtiskanja (v nadaljevanju govorimo le o razmiku). Velikost zamika in razmika je odvisna od vrste povezave. Zmanjšamo jih lahko z uporabo manj podajne povezave, pri togi povezavi pa navadno predpostavimo, da so tako zamiki kot razmiki enaki nič. V takem primeru govorimo o homogenem nosilcu.

Za analizo kompozitnih nosilcev je bilo razvitih več matematičnih modelov oziroma teorij. V nadaljevanju predstavimo nekaj značilnih matematičnih modelov, ki jih zasledimo v literaturi.

Analizo nepopolne interakcije slojev v sestavljenih nosilcih so prvi predstavili Newmark, Siess in Viest (1951). Obravnavajo nosilec, ki je sestavljen iz dveh sodelujočih podelementov. Lastnosti stika so določili z naborom t.i. »push – out« testov jeklenih moznikov vtisnjenih v beton. Rezultate so primerjali s preiskavami na sovprežnem nosilcu T prereza. Glavna značilnost privzetega elastičnega modela je, da je stik med betonsko ploščo in jeklenim nosilcem vzdolž stika nepopoln, delaminacijo med nosilcema pa zanemari.

Robinson in Naraine (1988) obravnavata sovprežni nosilec iz betona in jekla po linearni teoriji elastičnosti. Analizirata vpliv interakcije na stiku med betonsko ploščo in jeklenim nosilcem. V modelu upoštevata tako možnost zdrsa kot tudi razmikanja - delaminacije na stiku. Predpostavita tudi, da so osne sile proporcionalne strižnim kontaktnim silam in, da je prečna sila proporcionalna prvemu odvodu upogiba nosilca. Te predpostavke pogojujejo obstoj dveh različnih koeficientov togosti - eden za togost stika v vzdolžni smeri in drugi za togost stika v prečni smeri. Za ta matematični model prikažeta tudi točno rešitev.

S točno analizo obnašanja kompozitnih nosilcev in stebrov z upoštevanjem zdrsa na stiku podelementov sta se ukvarjala tudi Girhammar in Gopu (1993). V članku je predstavljena točna analiza po teoriji prvega in drugega reda za kompozitne nosilce in stebre z upoštevanjem podajnosti stika pri prečni in osni obtežbi. Predstavljene so splošne rešitve (tako za teorijo prvega reda kot tudi za teorijo drugega reda) za pomike in notranje sile. Za osno obtežbo sta predpostavila, da deluje le v težišču transformiranega prereza kompozitnega

nosilca s togo povezavo. V tem primeru se pri teoriji prvega reda pri delovanju osnih obremenitev upogibki ne pojavljajo. Prav tako sta pri izpeljavi predpostavila, da se kontaktne sile na stiku podelementov enakomerno porazdelijo vzdolž stika. Model temelji na predpostavki o konstantnem strižnem koeficientu togosti stika. Razmikanje - delaminacijo nosilcev na stiku pa model zanemari.

Večina novejših člankov se ukvarja z numerično analizo kompozitnih nosilcev. Detajlni pregled je prikazan v Čas (2004). Večina razmikanje nosilcev na stiku zanemari. Kljub temu pa v zadnjem času zasledimo članke, ki v analizi upoštevajo tako zamike na stiku kot tudi razmike. V prvem sklopu omenimo članek Gara, Ranzi in Leoni (2006). Avtorji v članku analizirajo obnašanje kompozitnih nosilcev z metodo končnih elementov. Pri tem pa upoštevajo, da se nosilec obnaša elastično. Tudi konstitutivna modela stika sta linearno elastična. Posebnost modela je le, da je za obnašanje stika v prečni smeri predpostavljen bilinearen diagram sila – razmik.

V diplomski nalogi analiziramo mehansko obnašanje dvoslojnih elastičnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa in razmika med slojema. Eksperimentalno je dokazano, da se podelementa kompozitnega nosilca pri delovanju zunanje obtežbe na nivoju stika občutno zamakneta. Z matematičnim modeliranjem raziščemo kombiniran vpliv zamika in razmika na stiku med slojema na napetostno in deformacijsko stanje kompozitnih nosilcev.

Diplomo smo razdelili na štiri večja poglavja. V prvem poglavju diplomske naloge predstavimo pregled kompozitnih nosilcev, ki se v gradbeništvu največ uporabljajo. Tako poznamo:

- kompozitni nosilec iz jekla in betona (sovprežni nosilec);
- kompozitni nosilec iz lesa in betona;
- kompozitni nosilec iz betona in FRP trakov;
- kompozitni nosilec z dvema ali več slojev betona in
- kompozitni leseni nosilci, ki jih običajno poimenujemo kar sestavljeni leseni nosilci.

V drugem poglavju naloge na kratko predstavimo postopke dimenzioniranja značilnih sestavljenih nosilcev po evropskih standardih (Eurocode 2, Eurocode 3, Eurocode 4, Eurocode 5). Podrobneje obravnavamo sovprežne nosilce iz jekla in betona ter sestavljene lesene nosilce. Ta tip kompozitnih nosilcev analiziramo tudi v računskih primerih v nadaljevanju.

Tretje poglavje predstavlja osrednje poglavje diplomske naloge. V tem poglavju predstavimo matematični model za analizo obnašanja dvoslojnih kompozitnih nosilcev na podlagi teorije prvega reda ravninskih nosilcev. Pri modeliranju stika predpostavimo, da se ta obnaša linearno. Na stiku podelementov predpostavimo tudi vmesni sloj debeline e . Zamik in razmik med slojema se dejansko pojavita v tem sloju. Debelina sodelujočega vmesnega sloja je odvisna od vrste materiala obeh podelementov in tudi od povezave med sloji – veznih sredstev. Zaradi lažje obravnave mehanskega obnašanja kompozitnih nosilcev veznih sredstev ne modeliramo s točkovnimi vzmetmi (kot je to dokaj običajno), ampak vzmet razmažemo – povprečimo vzdolž celotnega vmesnega sloja. Na podlagi takšnega modela nato izpeljemo enačbe, ki določajo obnašanje stika in s tem kompozitnega nosilca. Za opis deformacijskega in napetostnega stanja v kompozitnem nosilcu upoštevamo tudi elastični model obeh slojev kompozitnega nosilca. Dobljenim enačbam pripišemo ustrezne statične in kinematične robne pogoje. Sistem enačb nato preoblikujemo tako, da dobimo diferencialno enačbo sedmega reda z eno neznanko - zamik na stiku, ki je ob predpostavljenih robnih pogojih analitično rešljiva. Enačbo analitično rešimo s pomočjo računalniškega programa Mathematica (2003).

V četrtem poglavju s tremi računskimi primeri prikažemo natančnost in primernost predstavljenega matematičnega modela in točne rešitve za analizo dvoslojnih kompozitnih nosilcev.

V prvem primeru primerjamo izpeljano analitično rešitev z analitično rešitvijo, ki sta jo predstavila Robinson in Naraine (1988). Obravnavamo sovprežni nosilec iz jekla in betona, ki je obtežen s točkovno silo na zgornjem in na spodnjem nosilcu. S tem računskim primerom analiziramo pravilnost predstavljene analitične rešitve za napetostno in deformacijsko stanje kompozitnih nosilcev.

Nato analitično rešitev primerjamo z rešitvijo po metodi končnih elementov, ki so jo predstavili Gara, Ranzi in Leoni (2006). Primerjamo rezultate za primer prostoležečega nosilca, obremenjenega s točkovno silo na sredini razpona spodnjega podnosilca. Pri tem obravnavamo štiri različne primere, pri katerih variramo togosti stika v prečni in vzdolžni smeri.

V drugem računskem primeru ocenimo primernost predstavljenega matematičnega modela za analizo dvoslojnih lesenih nosilcev. S tem namenom smo analizirali kompozitni nosilec, ki ga je v svoji diplomski nalogi eksperimentalno in numerično obravnaval Čas (1999). Nosilec je obtežen s točkovno silo na sredini razpona zgornjega podnosilca. Dobljene analitične rezultate primerjamo z rezultati eksperimenta in numeričnimi rešitvami izvedenimi s programom NONFRAN. Podrobno ocenimo vpliv prečne togosti stika in debeline vmesnega sloja na stiku na mehansko obnašanje dvoslojnega lesenega prostoležečega nosilca.

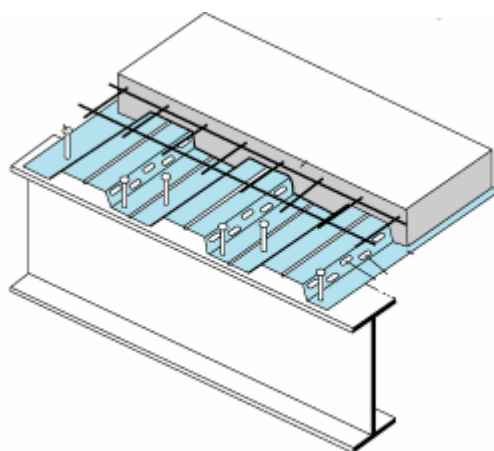
V zadnjem računskem primeru obravnavamo kontinuirni kompozitni leseni nosilec preko dveh polj, ki je obtežen z enakomerno prečno linijsko obtežbo. Naše analitične vrednosti za velikost prečnih pomikov primerjamo s pomiki, ki jih izračunamo skladno z evropskimi predpisi za lesene konstrukcije Eurocode 5.

V zadnjem delu diplomske naloge podajamo ugotovljene zaključke.

2 DVOSLOJNI KOMPOZITNI NOSILCI

2.1 Splošno

Prečni prerez kompozitnih nosilcev sestavljata dva ali več podprerezov, ki so običajno medsebojno povezani v enovit sistem. Značilnost kompozitnih nosilcev je, da je njihova nosilnost večja kot je vsota nosilnosti posameznih podnosilcev. V tej diplomski nalogi obravnavamo dvoslojne kompozitne nosilce. Kot značilen primer, ki je pogosto uporabljen v vsakodnevni gradbeni praksi, lahko navedemo kompozitni nosilec iz jekla in betona.



Slika 1: Kompozitni nosilec iz jekla in betona

V primerjavi z običajnimi nosilci imajo kompozitni nosilci več prednosti. Kot smo že omenili, pridobimo s primerno povezavo dveh podnosilcev večjo nosilnost kot pa je vsota nosilnosti posameznih podnosilcev. Pri osno – upogibni obremenitvi, s katero imamo ponavadi opravka, je običajno del prečnega prereza tlačno, del pa v nategu. Za večino gradbenih materialov je značilno, da ne prenašajo enako dobro tlačnih in nateznih obremenitev. Prav zaradi tega je tako pri osno – upogibno obremenjenih elementih konstrukcij smotno uporabiti kompozitne nosilce. V tlačnem delu prereza uporabimo materiale, ki dobro prenašajo tlačne obremenitve (npr. beton ali les), v nateznem delu pa jeklo, les ali številne nove kompozitne materiale na osnovi umetnih snovi, ki se odlikujejo z dobro natezno nosilnostjo. Nosilnost prečnega prereza kompozitnih elementov običajno povečamo še z izdelavo primerne povezave med elementi sestavljenih nosilcev. Tako zagotovimo enovitejšo obnašanje celotnega nosilca.

V splošnem zagotovimo povezavo med elementi sestavljenih nosilcev na naslednje načine:

- z adhezijo,
- s trenjem,
- z mehansko povezavo sestavnih elementov.

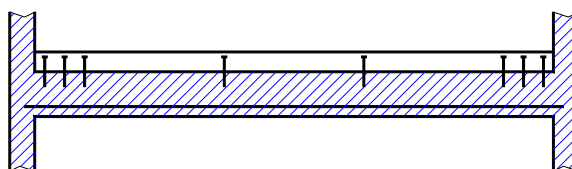
Pogosto pa se pojavljajo tudi kombinacije vseh treh načinov.

Adhezija je sila, ki privlači molekule različnih snovi. V smislu obravnave kompozitnih nosilcev pa gre za kemično povezavo sestavnih elementov. Navadno se pojavi na stiku betonskih nosilcev in naknadno betoniranih armiranobetonskih plošč.

Trenje se pojavlja na stičnih površinah podprezov in je v precejšnji meri odvisno od obdelave stične površine in normalnih napetosti na stično površino.

Mehansko povezavo med sestavnimi elementi dosežemo na več načinov:

- z uporabo armature, ki prečka stik (običajno v primeru sestavljenih betonskih elementov)



Slika 2: Primer armature, ki prečka stik

- z vgradnjo jeklenih moznikov (običajno v kompozitnih nosilcih iz jekla in betona)



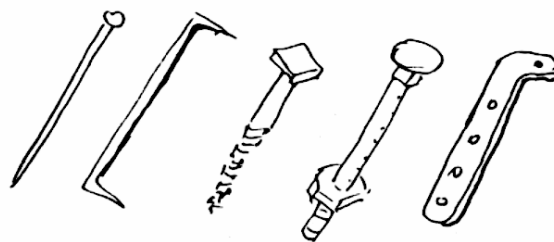
Slika 3: Primer jeklenih moznikov

- z žablji, vijaki in ostalimi specializiranimi veznimi sredstvi (kompozitni elementi iz lesa in betona)

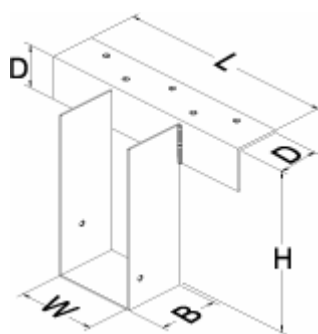


Slika 4: Primer povezave les - beton

- z žablji, vijaki, mozniki in drugimi veznimi sredstvi (povezovanje sestavnih elementov lesenih konstrukcij)



Slika 5: Primer veznih sredstev za povezovanje lesa



Slika 6: Primer veznih sredstev za povezovanje lesa

Prenos strižnih napetosti na stičnih površinah kompozitnih elementov je podoben tako pri trenju kot tudi pri mehanski povezavi elementov. Medtem ko fenomen trenja povezujemo z mikroskopskimi spremembami na stični površini, predstavljajo mehanska vezna sredstva t.i.

»makroskopske spremembe« površine stika. Pri povezovanju elementov kompozitnega nosilca praviloma uporabimo mehanska vezna sredstva. Z namenom poenostavitve izračunov adhezije in trenje običajno preprosto zanemarimo. Seveda je vpliv adhezije in trenja potrebno upoštevati v primeru, ko je sodelovanje slojev zagotovljeno le na ta način.

2.2 Vrste kompozitnih nosilcev

Kompozitni nosilci se razlikujejo glede na uporabljen material v posameznih sestavnih elementih in tudi glede na izvedbo stika med njimi. Pri opisu smo se omejili na tipe nosilcev, ki so v gradbeništvo najpogosteje uporabljani.

Analizirali bomo naslednje kompozitne nosilce:

- kompozitni nosilec iz jekla in betona (sovprežni nosilec),
- kompozitni nosilec iz lesa in betona,
- kompozitni nosilec iz betona in FRP trakov,
- kompozitni nosilec z dvema ali več sloji betona in
- sestavljene lesene nosilce.

V nadaljevanju na kratko predstavimo posamezne tipe kompozitnih nosilcev in njihovo uporabo v gradbeništvo.

2.2.1 Kompozitni nosilec iz jekla in betona

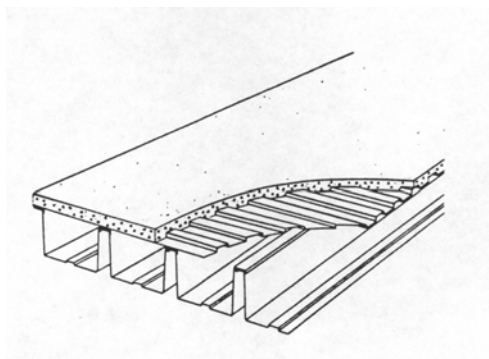
Sestavljene nosilce, v katerih uporabimo jekleni in armiranobetonski podprez, običajno imenujemo kar sovprežni nosilci. Pri takšnem sovprežnem prerezu nadomestimo natezni del betonskega prereza z jeklenim podprezom. Jekleni in betonski podprez povežemo s posebnimi veznimi sredstvi v sovprežni prerezu. Pri upogibnih obremenitvah jekleni del prereza prevzema predvsem natezne napetosti, betonski del pa tlačne napetosti. Seveda pa vedno ni tako, saj denimo v primeru kontinuirnega nosilca ugotovimo, da je položaj tlačne in natezne cone nad podporo ravno obraten kot v polju nosilca.

Sovprežne konstrukcije so se najprej pričele uporabljati v mostogradnji. Sovprežna konstrukcija je bila zgrajena na način, da so se lažje armiranobetonske plošče prosto položile preko jeklenih nosilcev. Šele kasneje se je razširila uporaba načrtnega spajanja elementov s pomočjo moznikov.

Uporaba sovprežnih konstrukcij se je do danes dobro uveljavila tako v visokih gradnjah kot tudi v mostogradnji. V klasičnih objektih visokogradnje se kombinacija jekla in betona uporablja predvsem za medetažne konstrukcije. Kot jekleni del podpreza lahko uporabimo jeklene nosilce, jeklena paličja ali valovito pločevino. Preko jeklenih nosilcev, paličja ali preko jeklenih pločevin dandanes običajno zabetoniramo monolitno armiranobetonsko ploščo.

Prerez sovprežnega nosilca sestoji iz:

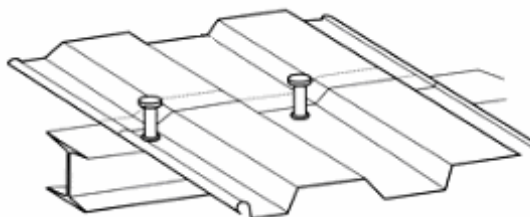
- jeklenega nosilca (valjani ali sestavljeni), hladno valjane pločevine
- armiranobetonske plošče in
- sovprežnega sredstva (togi ali podajni mozniki)



Slika 7: Primer sovprežnega nosilca



Slika 8: Primer jeklenih moznikov, ki so privarjeni na zgornjo površino jeklenega podpreza (t.i. Nelsonovi mozniki)



Slika 9: Primer sovprežne plošče s hladno oblikovano pločevino

Mozniki so konstruktivni element stika sovprežnega prereza, ki omogočajo skupno delovanje armiranobetonske plošče in jeklenega nosilca. Načini povezave med betonom in jeklom v sovprežnih konstrukcijah so:

- togi,
- podajni, ki jih pogosto imenujemo tudi elastični, ali
- prekinjeni (mozniki vgrajeni le na določenih odsekih stika).

V kolikor zamike na stiku obeh materialov popolnoma preprečimo, lahko govorimo o togem povezovanju betona in jekla. Kadar imamo opravka z velikim strižnim tokom v stiku, se poslužimo elastičnega sovpreganja. Pri kontinuirnih nosilcih pa uporabimo princip prekinjenega sovpreganja. Moznikov nad podporami ne nameščamo, saj plošča na tem mestu razpoka. Nadomestimo jih z vgradno vzdolžne mehke armature ali pa izdelamo dilatacijo v betonskem podprerezu.

Primer izdelave medetažne konstrukcije iz jekla in betona

Predstavili bomo primer izdelave sovprežne medetažne konstrukcije, v kateri kot jekleni del in hkrati tudi opaž uporabimo hladno oblikovano pločevino. Postopek izdelave je naslednji:

- na nosilno konstrukcijo oz. jeklene nosilce namestimo hladno oblikovano pločevino



Slika 10: Namestitev hladno oblikovane pločevine na nosilno konstrukcijo

- privarimo vezna sredstva - moznike



Slika 11: Pritrjevanje veznih sredstev

- namestimo potrebno mehko armaturo



Slika 12: Namestitev potrebne armature

- zabetoniramo betonsko ploščo



Slika 13: Zabetoniranje betonske plošče

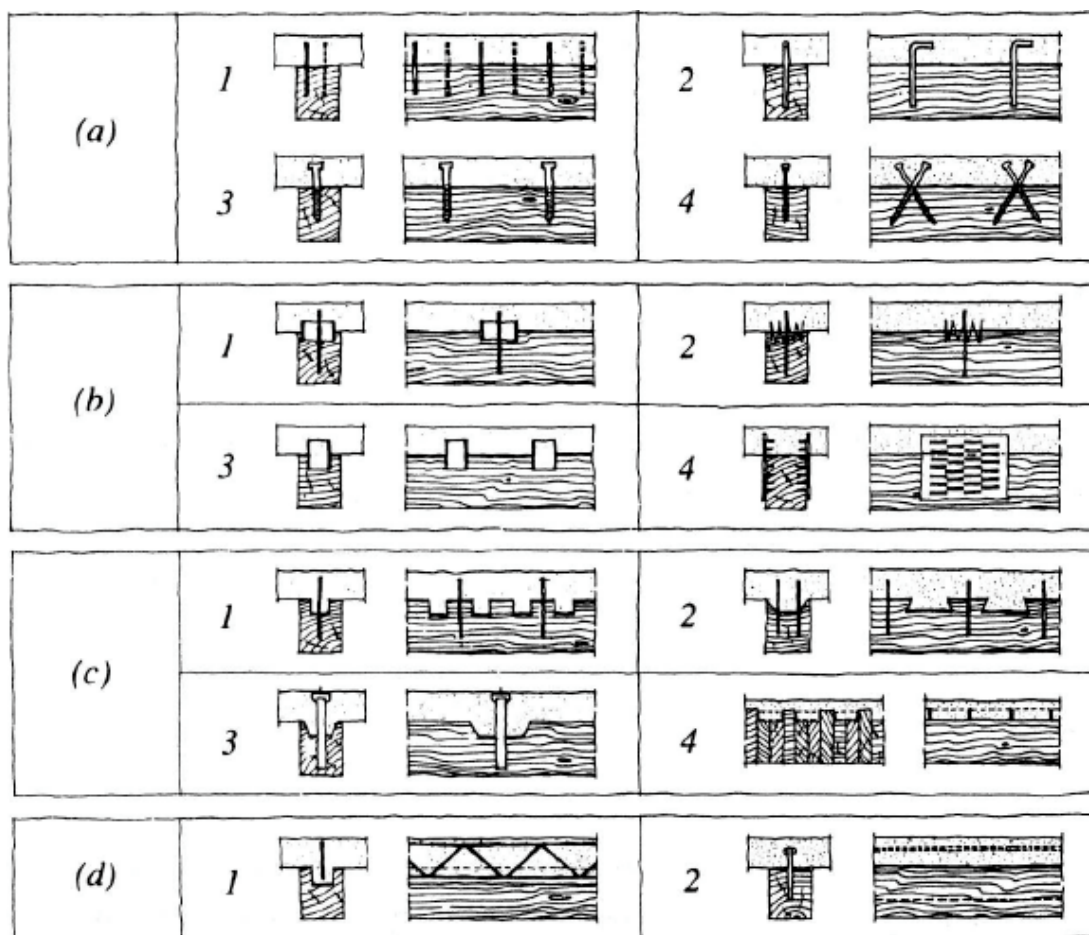
2.2.2 Kompozitni nosilec iz lesa in betona

V zadnjem desetletju se je zelo razširila uporaba kompozitnih nosilcev iz lesa in betona. Te zelo pogosto uporabimo pri obnovah lesenih medetažnih konstrukcij lesenih objektov (npr. stari gradovi, dvorane ipd.) in tudi pri premostitvenih objektih - mostovih. Les se navadno uporablja v natezних delih prerezov, beton pa v njegovih tlačnih delih. Glede na vrsto uporabe ponuja ta tip kompozitne konstrukcije različne ugodnosti. Takšna sanacija stare lesene medetažne konstrukcije zagotavlja, da ohranimo spodnje strani teh stropov intaktne. Sočasno strop tudi ojačimo z dodajanjem betonske plošče in ga bolje povežemo z obodnimi zidovi. S tem zagotovimo večjo nosilnost in togost obstoječih lesenih stropov. Poleg navedenega je gradnja oziroma sanacija takšnih stropov tudi zelo hitra. Prenovljeni stropni sistem ima tako tudi pozitiven vpliv na zvočno izolativnost in požarno varnost objekta.

Sanacije lesenih stropov se izvedejo po posebnem postopku. Talne deske in leseni nosilci so pogosto precej dotrajani, zato je večkrat potrebno kakšen element ojačati ali tudi v celoti zamenjati. Na vrh lesenega poda namestimo eno ali dve plasti polietilenske (PE) folije in vgradimo vezna sredstva na lesene nosilce. V kolikor je potrebno, leseni strop pred betoniranjem začasno dodatno podpremo. Sledi vgradnja potrebne mehke armature in betoniranje plošče. Ko doseže beton predpisano trdnost, lahkočasne podpore odstranimo. S tem je izdelava sestavljenega stropa končana.

Cena obnovljenega sistema je nižja kot pa cena celotne zamenjave stropa z betonsko ploščo ali novim lesenim stropom. Učinkovitost takšnega kompozitnega sistema pa je zelo odvisna od karakteristik sovprežnega sredstva. Razvitih je bilo že veliko načinov mehanskih ali lepljenih povezav. Nekatera vezna sredstva so enaka kot pri lesenih kompozitnih nosilcih, nekatera pa so bila posebej razvita za kompozitne sisteme iz lesa in betona. Na sliki 14 so prikazane različne vrste veznih sredstev pri kompozitnih nosilcih iz lesa in betona.

Pri uporabi kompozitnih nosilcev iz betona in lesa v mostogradnji pa betonski podprerez tudi ugodno varuje lesene elemente pred direktnim osončenjem in ostalimi meteornimi vplivi, saj so leseni elementi pozicionirani pod armiranobetonsko ploščo.



Slika 14: Primeri veznih sredstev pri kompozitnih nosilcih iz lesa in betona



Slika 15: Primer stika les – beton



Slika 16: Primer kompozitne konstrukcije iz lesa in betona

2.2.3 Kompozitni nosilec iz betona in FRP materialov

»FRP« ali »fiber reinforced polymer« lahko prevedemo kot »z vlakni ojačani polimer«. Ti materiali spadajo v široko skupino t.i. »konstrukcijskih kompozitov«. Sestavljeni so iz:

- ojačitve (značilnost katere je visoka mehanska odpornost)
- matrike (neprekinjen element, šibkejši po lastnostih)

Lastnost konstrukcijskih kompozitov je, da imajo boljše mehanske karakteristike kot jih imajo posamezni sestavni deli kompozitov. FRP materiali se zaradi dobre odpornosti v smislu natezne trdnosti že vrsto let uporabljajo v letalski, ladijski, vesoljski in vojaški industriji. V gradbeništvu se FRP materiali v veliki meri uporabljajo za statične in protipotresne ojačitve.

V primerjavi s klasičnimi načini se izkaže, da je uporaba kompozitov enostavnejša, trajnejša in cenejša. Zaradi izredno nizke lastne teže so enostavno in hitro vgradljivi. Prav tako pa uporaba objekta v času izvedbe del ni motena ali morebiti prekinjena.

Primeri posegov, pri katerih se uporablja FRP materiale:

- zunanje ovijanje tlačno ali upogibno preobremenjenih elementov
- obnova lokalno poškodovanih konstrukcij
- statične in popotresne ojačitve zidanih lokov in obokov

V zadnjih letih smo priča večjemu obsegu raziskav na področju uporabe FRP materialov pri utrjevanju armiranobetonskih konstrukcij. Le-to se je konvencionalno izvajalo z dolepljanjem jeklenih trakov. Cilj teh raziskav je razširiti obstoječe znanje o saniranju in utrditvi upogibno obremenjenih AB konstrukcij. Obnašanje FRP materiala je precej drugačno od obnašanja jekla, zato projektiranje utrditve AB konstrukcij s FRP trakovi ne more slediti enakemu postopku kot v primeru dolepljanja zunanje armature iz jekla.

Stik med betonom in zunanjo dodatno ojačitvijo v veliki meri določa obnašanje utrjene upogibno obremenjene konstrukcije. Najbolj kritičen primer porušitve je porušitev stika. Na podlagi eksperimentov je bilo pokazano, da se upogibno obremenjene konstrukcije navadno porušijo zaradi odlepljanja traku. To v bistvu predstavlja krhki lom stične površine.

Poznamo več načinov izvedbe utrditve konstruktivnih elementov z zunanjo FRP armaturo. Osnovna in najbolj pogosto uporabljena tehnika temelji na ročnem nanašanju armature v obliki predizdelanih trakov. Kompozitna vlakna neposredno nanašamo na betonsko površino, na katero smo predhodno enakomerno nanesli lepilo. Lahko pa so vlakna predhodno impregnirana v stroju skupaj z lepilom in se nato nanesejo na betonsko površino. Navadno zunanjo armaturo nanašamo tako, da je smer vlaken v armaturi vzporedna z glavnimi nateznimi napetostmi. Poleg osnovne so se razvile tudi številne posebne tehnike, ki so jih patentirala razna podjetja.



Slika 17: Primer utrditve armiranobetonske konstrukcije s FRP trakovi



Slika 18: Primer sanacije stropne konstrukcije s FRP trakovi

Vse bolj se FRP izdelki uporabljajo tudi pri izdelavi mostnih konstrukcij, saj narašča interes po menjavi tradicionalnih materialov (jeklo, beton) zaradi naslednjih razlogov:

- neodpornost tradicionalnih materialov na korozijo
- naraščanje cen tradicionalnih materialov (jeklo, les, beton)
- hitrejša izgradnja, večja varnost delavcev med izdelavo
- dolgoročno veliko nižji stroški vzdrževanja in menjave
- izboljšana varnost
- daljša življenjska doba (korozijska odpornost FRP kompozitov predstavlja veliko prednost)



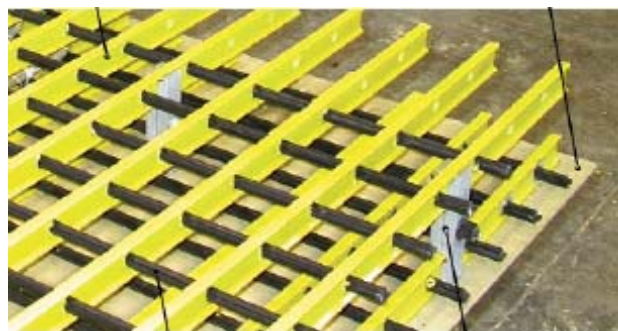
Slika 19: FRP nosilec



Slika 20: Menjava jeklenih mostnih nosilcev s FRP nosilci

Primer sanacije mostu s FRP ojačitvami

V prikazanem primeru je podana sanacija voziščne plošče mostne konstrukcije.



Slika 21: Primer prefabricirane FRP plošče za sanacije prekladnih konstrukcij mostov

Uporabljen je FRP ojačitveni sistem za izgradnjo novega mostu »Bridge 1482301« v mestu Green County, Missouri. Nov most je nastal na mestu dotrajanega triinsedemdeset let starega mostu. Zamenjava voziščne plošče je trajala le pet dni. Pri klasični sanaciji v armiranobetonski izvedbi pa je čas takšne gradnje približno tri tedne.

Faze dela so potekale po naslednjem vrstnem redu:

1. dan: vseh 18 plošč je 6 delavcev namestilo in sidralo v šestih urah



Slika 22: Instalacija FRP prefabriciranih plošč

2. dan: namestitev armature za betonsko zaščitno ograjo



Slika 23: Namestitev armature za betonsko zaščitno ograjo

3. dan: betoniranje voziščne plošče



Slika 24: Voziščna plošča je bila končana v dveh urah in pol

4. dan: izdelava betonske zaščitne ograje



Slika 25: Izdelava betonske zaščitne ograje



Slika 26: Stanje med in po sanaciji

2.2.4 Kompozitni nosilec z dvema ali več sloji betona

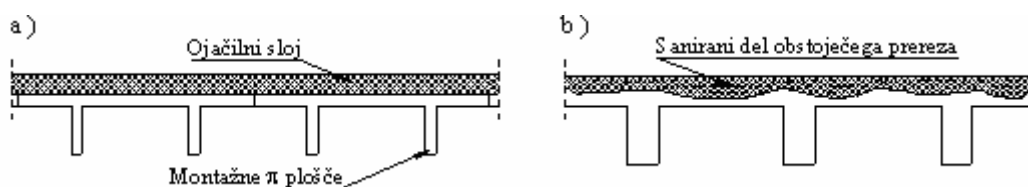
Takšen tip kompozitnih nosilcev se v gradbeni praksi navadno pojavlja pri sanaciji dotrajanih betonskih površin ali pri ojačitvi obstoječih betonskih prerezov. K obstoječim betonskim slojem dodamo nove betonske sloje, seveda pa je med njimi potrebno zagotoviti primerno povezavo. Ta tip sanacije se vedno izvede direktno na lokaciji obstoječe konstrukcije.

Projektant določi lego in debelino novega betonskega sloja glede na to, ali je potrebno povečati tlačno ali natezno cono. Nosilnost stika novega in starega betona je precej odvisna od priprave obstoječe betonske površine. V osnovi se je uveljavila delitev pripravljene stične betonske površine na gladke, srednje grobe in grobe. Z izdelavo primerne hrapave stične površine lahko dosežemo precejšnje povečanje nosilnosti stika. Armatura, ki povezuje nov in

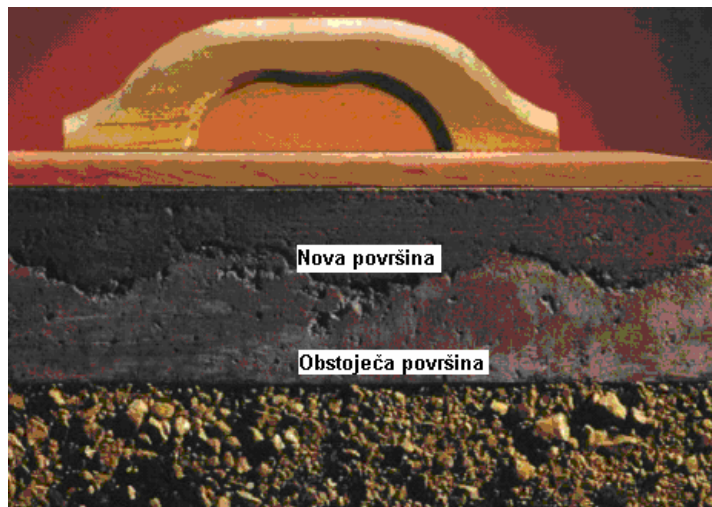
star sloj betona in prečka hrapavo stično površino, je večinoma natezno obremenjena. V primeru gladke stične površine pa prevladuje strižna obremenitev omenjene armature oz. moznikov.

Po CEB-FIB Model Code 1990 se mehanizem prenosa strižnih napetosti po stiku med betonskima slojema, ki je enakomerno obremenjen z normalnimi tlačnimi in strižnimi napetostmi, imenuje trenje med betonskima slojema. Mehanizem prenosa strižnih napetosti vzdolž stika zajema tudi trenje med zrcni agregata v naravno nastalih razpokah. Za mehanizem prenosa strižnih napetosti so izrednega pomena normalne napetosti na stiku, ki so posledica zunanje prečne obtežbe, sil prednapetja in delovanja natezne armature, ki prečka stik.

Pri dimenzioniranju sestavljenih betonskih elementov je nujno upoštevati razliko v starosti obstoječe in nove betonske plasti. Za betone je značilen pojav krčenja, ki pa je odvisen od starosti betona. Različno stari sloji betona se tako različno krčijo, kar privede do diferenčnega krčenja slojev, obremenitve stika in posledično tudi do možnosti porušitve stika. S skrbnim projektiranjem betonske mešanice lahko krčenje primerno reduciramo, vendar pa sil, nastalih zaradi omenjenega pojava, ne moremo v celoti izničiti. Poleg vsega navedenega se pojavijo obremenitve stika tudi zaradi različnih temperaturnih gradientov. Na ta način je celotna obremenitev na stiku skupek delovanja zunanje obtežbe, krčenja in temperaturnih gradientov. Te napetosti so lahko tako velike, da prekoračijo nosilnost osnovne povezave med obema betonoma. Pomembno je tudi dejstvo, da porušitev stične površine ne nastopi nujno v času sanacije ali kmalu po njej, ampak se lahko zgodi tudi nekaj let po sanaciji. V izogib porušitvi projektant pogosto ojača povezavo med slojema z uporabo veznih sredstev. Natezne in strižne sile na stiku navadno prevzamemo z jeklenimi mozniki. Ti so nameščeni vzdolž stične ploskve in prečkajo stik.



Slika 27: Ojačitev a) in sanacija betonskega prereza b)



Slika 28: Obstoječi in novi betonski sloj



Slika 29, slika 30: Primera sanacije voziščne plošče mostne konstrukcije

Potek sanacije betonske voziščne plošče po korakih:

- odstranitev dotrajane betonske površine s pomočjo posebne žage za beton



Slika 31: Odstranitev dotrajane betonske površine

- priprava betonske površine pred betoniranjem



Slika 32: Priprava betonske površine

- vgradnja sloja novega betona



Slika 33: Betoniranje nove betonske plasti

- končni izdelek – nova betonska površina



Slika 34: Obnovljeni del konstrukcije

2.2.5 Sestavljeni leseni nosilci

Pri premoščanju večjih razpetin z lesenimi konstrukcijami pogosto uporabimo lesene sestavljene elemente. V primeru uporabe kompozitnih lesenih nosilcev so njihovi prerezi sestavljeni iz dveh ali več podprerezov, ki jih običajno povežemo z veznimi sredstvi. Glede na tip povezave lahko lesene sestavljene nosilce zajamemo v okvir dveh limitnih primerov: tramovni sklad (brez povezave) in leseni kompozitni nosilci s togo povezavo (npr. lepljenci). Navadno pa so karakteristike povezave nekje v območju med tema dvema ekstremnima primeroma.

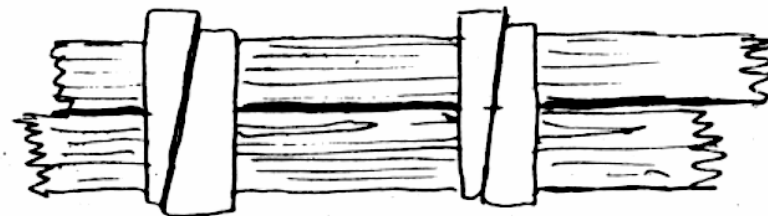
Z veznimi sredstvi povežemo posamezne sestavne dele v nosilne elemente in nosilne elemente nadalje v sestavljene konstrukcije. Od načina prevzema in prenosa obremenitev pa ločimo naslednje vrste priključkov v lesenih konstrukcijah:

- strižni priključki (vijaki, leseni vijaki, mozniki, žebli, krempljaste plošče, lepilo ipd.)
- natezni priključki
- tlačni priključki

Sodelovanje različnih vrst veznih sredstev je v računu mogoče upoštevati le v primeru, ko so približno enako podajna.

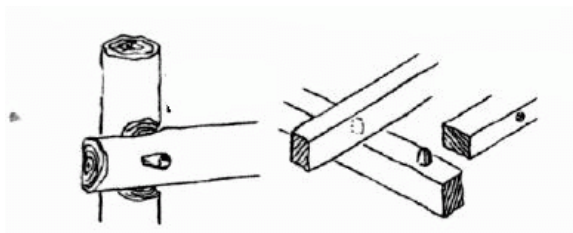
Delitev veznih sredstev glede na material je naslednja:

- lesena vezna sredstva:
 - leseni klini



Slika 35: Leseni klin, zagozda

- leseni mozniki, žablji



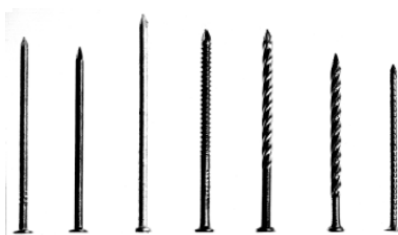
Slika 36: Leseni žablji, leseni mozniki



Slika 37: Leseni mozniki

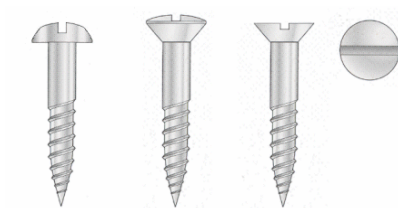
- kovinska vezna sredstva

- žablji



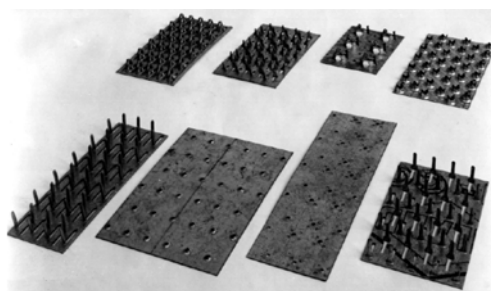
Slika 38: Različni tipi žabljev uporabljeni v lesenih konstrukcijah

- vijaki

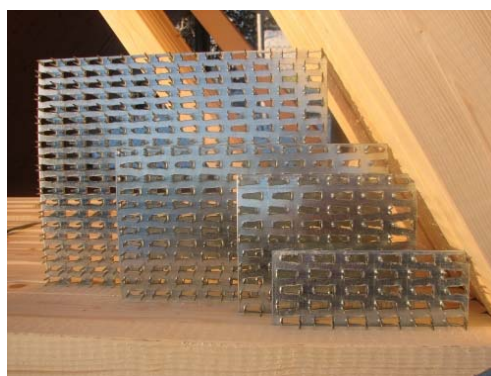


Slika 39: Lesni vijaki (z zaokroženo, ovalno in ravno glavo)

- trni
- krempljaste plošče, ježevke

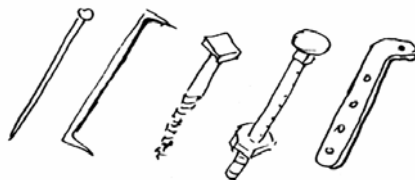


Slika 40: Primeri krempljastih plošč

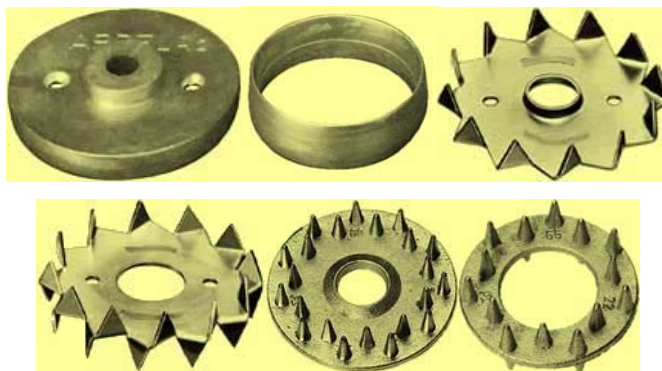


Slika 41: Krempljaste plošče

- kovinski mozniki



Slika 42: Kovinski žebelj, spona, lesni vijak, svornik - matica, streme



Slika 43: Nekatere vrste moznikov posebnih oblik

- vezna sredstva iz drugih snovi:
 - lepila
 - polietilenski materiali

3 ANALIZA KOMPOZITNIH NOSILCEV SKLADNO Z EVROPSKIMI STANDARDI EUROCODE

V tem poglavju bomo predstavili način dimenzioniranja treh vrst kompozitnih nosilcev, ki so v vsakodnevni gradbeni praksi najpogosteje uporabljeni, in sicer:

- kompozitni nosilci iz jekla in betona (sovprežni nosilci)
- sestavljeni nosilci iz lesa in
- kompozitni nosilci iz lesa in betona.

Naredili bomo okviren ter splošen pregled dimenzioniranja omenjenih kompozitnih nosilcev. Celostno so zadeve predstavljene v standardih Eurocode, na katere se tudi sklicujemo.

3.1 Projektiranje sovprežnih konstrukcij iz jekla in betona

3.1.1 Splošno

Projektiranje sovprežnih konstrukcij iz jekla in betona obravnava evropski standard Eurocode 4.

Analiza sovprežnih konstrukcij je odvisna predvsem od načina modeliranja stika oziroma od podajnosti stika med betonom in jeklom. Standard loči tri različne načine povezave:

- toga
- elastična ali podajna
- prekinjena

Kadar so zamiki na stiku popolnoma preprečeni, govorimo o t.i. togem sovpreganju jekla in betona. V kolikor se pojavijo v nosilcu velike prečne sile, in s tem tudi velik strižni tok na stiku, uporabimo elastično sovpreganje jekla in betona, saj bi za dosego tega sovpreganja potrebovali preveliko število moznikov. V primeru kontinuirnih nosilcev se običajno uporabi prekinjeno sovpreganje, saj nad podporami tlačne plošče razpokajo, zato je na teh odsekih

sovprežnega nosilca uporaba moznikov nesmiselna. Tako nad podporo v betonsko ploščo vgradimo vzdolžno mehko armaturo ali pa izvedemo dilatacijo.

3.1.2 Mejno stanje nosilnosti v primeru toge povezave betona in jekla

V primeru toge povezave jekla in betona privzamemo, da na stiku med betonom in jeklom ne pride do zamika. Togo obnašanje stika navadno zagotovimo s pomočjo jeklenih moznikov, ki so privarjeni na jekleni I profil.

Za strižni tok vzdolž stika lahko napišemo:

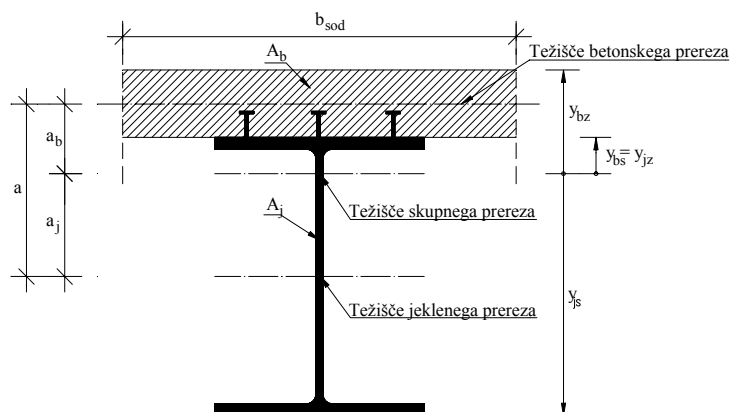
$$T(x) = \frac{V(x) \cdot S_b}{I_s}, \quad (3.1)$$

kjer je

$V(x)$... strižna sila, katere vrednost se lahko vzdolž stika spreminja,

S_b ... statični moment betonskega dela prereza glede na skupno težišče in

I_s ... vztrajnostni moment sestavljenega prereza glede na skupno težišče.



Slika 44: Geometrijske karakteristike tipičnega sovprežnega nosilca iz betona in jekla

V računski analizi kot vodilni material običajno izberemo jeklo. S pomočjo koeficienta

$n = \frac{E_j}{E_b}$, ki predstavlja razmerje med elastičnima moduloma jekla in betona, lahko

karakteristike betonskega podprereza pretvorimo v jeklenem prerezu enakovredne

karakteristike. Na ta način zapišemo geometrijske karakteristike kompozitnega nosilca kot sledi:

$$A_s = A_j + \frac{A_b}{n} \quad (3.2)$$

A_s ... skupna površina nadomestnega prereza,

A_j ... površina jeklenega podprereza in

A_b ... površina pripadajočega betonskega podprereza.

$$S_b = \frac{A_b \cdot a_b}{n} \quad (3.3)$$

S_b ... statični moment »enakovrednega« betonskega prereza.

$$I_s = I_j + A_j \cdot a_j^2 + \frac{1}{n} \cdot (I_b + A_b \cdot a_b^2), \quad (3.4)$$

kjer je

I_s ... vztrajnostni moment »enakovrednega« betonskega prereza,

I_j ... lokalni vztrajnostni moment jeklenega podprereza in

I_b ... lokalni vztrajnostni moment betonskega podprereza.

Na podlagi znanega strižnega toka med podprerezoma lahko izračunamo tudi strižno obremenitev moznika:

$$D(x) = \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \left(\frac{T(x)}{n_m} \right) dx, \quad (3.5)$$

kjer je

$T(x)$... strižni tok vzdolž nosilca,

e ... razdalja med mozniki in

n_m ... število moznikov v prečnem prerezu.

Pri moznikih imamo dva možna kriterija porušitve:

- prestrig moznika

- lokalna porušitev betona zaradi prevelikih lokalnih tlačnih napetosti ob mozniku

Standard Eurocode 4 podaja enačbe za izračun nosilnosti moznikov. Skladno s prestrigom moznika (prvi možni kriterij porušitve) se njegova nosilnost izračuna na naslednji način:

$$P_{Rd} = \frac{0.8 \cdot f_u \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}}{\gamma_v}, \quad (3.6)$$

kjer je

f_u ... mejna natezna trdnost jekla,

d ... premer okroglega moznika in

γ_v ... varnostni faktor, ki je enak 1.25.

Enačba za nosilnost jeklenega moznika glede na lokalne napetosti v betonu (drugi možni kriterij porušitve) pa je kot sledi:

$$P_{Rd} = \frac{0.29 \cdot \alpha \cdot d^2 \cdot \sqrt{f_{ck} E_{cm}}}{\gamma_v}, \quad (3.7)$$

kjer je

f_{ck} ... karakteristična tlačna trdnost betona,

E_{cm} ... elastični modul betona in

α ... parameter določen z izrazom:

$$\alpha = \begin{cases} 0.2 \cdot \left(\frac{h}{d} + 1 \right), & \text{če } 3 < \frac{h}{d} < 4 \\ 1, & \text{če } \frac{h}{d} > 4 \end{cases}, \text{ kjer je}$$

d ... premer okroglega moznika in

h ... višina moznika (standard Eurocode 4 priporoča tudi $h_{\text{moznika}} > 3 \cdot d_{\text{moznika}}$).

V izračunih kot merodajno privzamemo manjšo izmed obeh vrednosti P_{Rd} .

Ponavadi na določenih odsekih vzdolž nosilca razporedimo moznike na enakomerne razdalje.

Ko izberemo dimenzije moznika in izračunamo njegovo nosilnost, lahko enostavno določimo

potrebno razdaljo med mozniki. V primeru prostoležečega nosilca in zvezne obtežbe preko celotnega razpona, so maksimalne strižne napetosti na stiku ravno na obeh koncih nosilca.

Zadostiti moramo pogoju:

$$D_{max} = \frac{T_{max} \cdot e_{max}}{n_m} < P_{Rd}, \quad (3.8)$$

kjer je

D_{max} ... maksimalna obremenitev moznika,

T_{max} ... maksimalni strižni tok vzdolž stika,

e_{max} ... maksimalna razdalja med mozniki,

n_m ... število moznikov v prečnem prerezu in

P_{Rd} ... nosilnost moznika.

Enačbo je mogoče preurediti tako, da izračunamo maksimalne dopustne razdalje med mozniki:

$$e_{max} = \frac{n_m \cdot P_{Rd}}{T_{max}}. \quad (3.9)$$

Z gornjo enačbo smo dobili maksimalne dopustne razdalje med mozniki za dele nosilca, v katerih se pojavijo največje vrednosti strižnega toka. V kolikor poznamo spreminjanje vrednosti strižnega toka vzdolž nosilca, lahko razdaljo med veznimi sredstvi tudi spreminjamo. Običajno uporabimo odsekoma enakomerno razporeditev moznikov vzdolž nosilca.

Za razdalje med veznimi sredstvi so po standardu Eurocode 4 priporočene naslednje vrednosti:

- $e_{vzdolžno} < 5 \cdot d$
- $e_{prečno} < 2.5 \cdot d$, kjer je d premer moznika.

Obremenitev, ki jo bo prevzel sovprežni prerez, je v veliki meri odvisna od postopka izdelave sovprežne konstrukcije.

Glede na način podpiranja med izdelavo ločimo naslednje primere:

a. celotno lastno težo prevzame jekleni nosilec

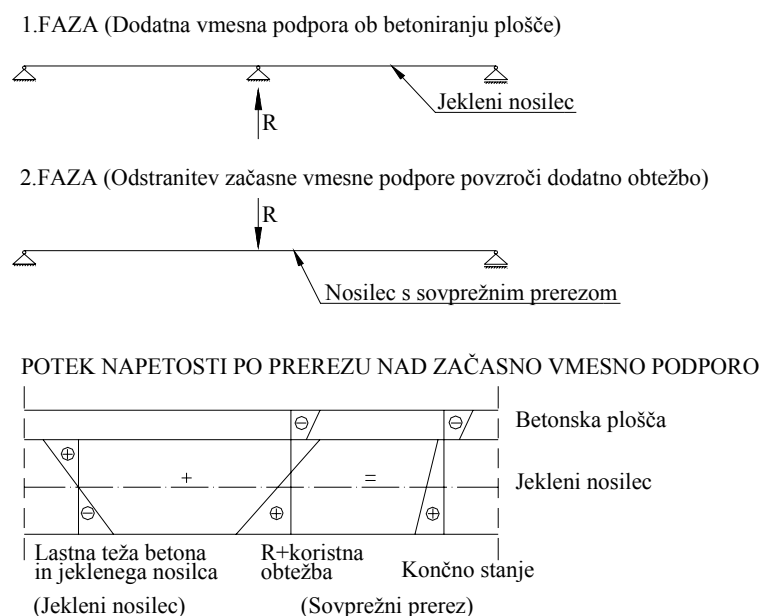
Vsa obremenitev med betoniranjem betonske plošče odpade na jekleni nosilec. Ta je podprt samo na končnih podporah, dodatnega podpiranja med končnimi podporami ne izvedemo. Ko doseže beton predpisano starost, lahko nosilec obremenimo tudi s spremenljivo obtežbo. Spremenljivo obtežbo prevzame sovprežni nosilec.

b. celotno lastno težo prevzame sovprežni nosilec

Jeklene nosilce pred betoniranjem betonske plošče podpremo vzdolž celotnega razpona. Tako v fazi betoniranja vso obtežbo prevzamejo podpore. Ko doseže beton predpisano starost, odstranimočasne podpore in tako vso obtežbo, tako stalno kot tudi koristno, prevzame sovprežni prerez.

c. del lastne teže prevzame jekleni nosilec

Jeklene nosilce pred betoniranjem betonske plošče začasno podpremo, vendar ne po celotni razpetini, ampak le na določenih mestih razpona. Tako dosežemo, da del lastne teže prevzamejo podpore, del pa je odpade na jekleni nosilec. Ko beton doseže predpisano trdnost, odstranimočasne podpore. Tako dosežemo, da je sestavljeni element obremenjen s točkovnimi silami na mestih prejšnjih začasnih podpor. Obremenitev je enaka velikostim reakcij v začasnih podporah, smer pa je ravno nasprotna reakcijskim silam. Sovprežni prerez prevzame vso koristno obtežbo, s katero obremenimo nosilec.



Slika 45: Obremenitev sovprežnega nosilca pri izvedbi z začasnimi podporami

3.1.3 Mejno stanje uporabnosti

V tem poglavju bomo obravnavali mejno stanje uporabnosti (MSU) sovprežnih nosilcev, v katerih sta podprezeta jekleni nosilec ter monolitna armiranobetonska plošča. Standard Eurocode 4 namreč ne obravnava sovprežnih nosilcev iz profilirane pločevine, prefabricirane betonske plošče in strižnih moznikov.

Pri analizi MSU običajno izvedemo naslednji merodajni kontroli:

- kontrola povesa
- kontrola razpok.

Ostale kontrole, kot na primer mejno stanje vibracij, pri obravnavanih sovprežnih konstrukcijah običajno niso merodajne in jih tako standard Eurocode 4 ne obravnava.

Pri računu napetosti in deformacij v mejnem stanju uporabnosti moramo v računu upoštevati naslednje vplive:

- »shear lag« efekt

- povečana upogibnost zaradi nepopolne interakcije, zaradi česar se pojavi zdrs ali razmik na stiku podnosilcev
- zmanjšanje togosti betona zaradi razpok in nategov na mestu maksimalnih negativnih upogibnih momentov
- lezenje in krčenje betona
- relaksacija jekla
- tečenje armature na mestih maksimalnih negativnih momentov

Kontrola povesov

Deformacije ne smejo vplivati neugodno na uporabo, učinkovitost ali videz konstrukcije in morajo biti znotraj sprejemljivih vrednosti. Mejne vrednosti so določene na podlagi lastnosti nenosilnih elementov konstrukcij (predelne stene ipd.). Navadno v stavbah upoštevamo deformacije, ki so posledica - skladno s standardom Eurocode 1 - redke kombinacije obtežbe.

Povese samega jeklenega nosilca zaradi delujoče obtežbe izračunamo po navodilih standarda Eurocode 3. Povese sestavljenega nosilca zaradi delujoče obtežbe pa izračunamo tako, da v njih upoštevamo tudi vse že omenjene vplive:

- vpliv »shear lag«-a na povesi je običajno dovoljeno zanemariti,
- vpliv nepopolne interakcije lahko zanemarimo, v kolikor je eden ali več kritičnih prereзов nosilca v razredu kompaktnosti 3 ali 4 skladno s standardom Eurocode 3,
- prav tako lahko vpliv nepopolne interakcije zanemarimo, v kolikor so strižna sovprežna sredstva projektirana v skladu s poglavjem 6 standarda Eurocode 4; če uporabimo najmanj polovico sovprežnih sredstev potrebnih za togo strižno povezavo, če so sile na sovprežna sredstva manjše od 70% karakteristične vrednosti strižne odpornosti posameznega moznika (kot definirano v poglavju 3.5.2 – Eurocode 4).

V kolikor gornjim pogojem ne zadostimo, vendar je stopnja strižne povezave večja od 0.4 ($N/N_f \geq 0.4$), potem lahko nastalo povečanje povesa zaradi nepopolne interakcije določimo na naslednji način:

- za sovprežne konstrukcije, ki so v fazi gradnje začasno podprte

$$\frac{\delta}{\delta_c} = 1 + 0.5 \left(1 - \frac{N}{N_f} \right) \left(\frac{\delta_a}{\delta_c} - 1 \right) \quad (3.10)$$

- za sovprežne konstrukcije, ki v fazi gradnje niso začasno podprte

$$\frac{\delta}{\delta_c} = 1 + 0.3 \left(1 - \frac{N}{N_f} \right) \left(\frac{\delta_a}{\delta_c} - 1 \right), \quad (3.11)$$

kjer je

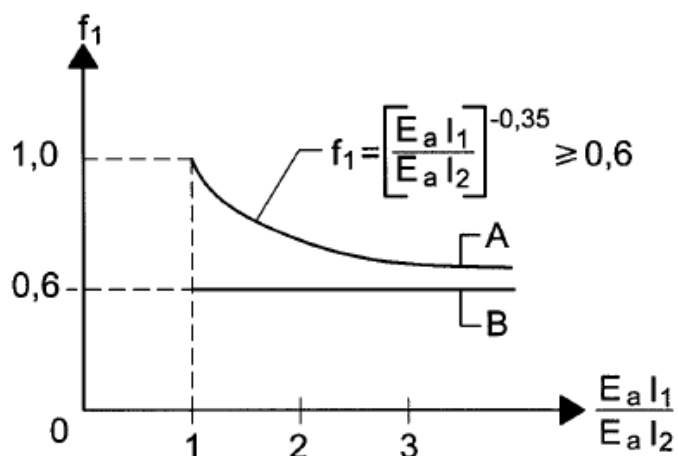
δ_a ... povese samostojno delujočega jeklenega nosilca,

δ_c ... povese sovprežnega nosilca s polno sovprežnostjo in

$\frac{N}{N_f}$... stopnja strižne povezave.

Vpliv razpokanosti prereza v območju negativnih momentov na povese sovprežnega nosilca upoštevamo v računu tako, da privzamemo eno izmed naslednjih metod analize:

- negativne momente pri vsaki notranji podpori in rezultirajočo natezno napetost zgornjega vlakna betonskega prereza, σ_{ct} , najprej izračunamo s pomočjo upogibne togosti $E_a I_1$ (E_a je elastični modul jekla, I_1 vztrajnostni moment ekvivalentnega efektivnega jeklenega prereza ob upoštevanju, da je beton v nategu nerazpokan). Pri vsaki podpori, kjer σ_{ct} preseže vrednost $0.15 f_{ck}$, moramo upogibno togost reducirati na vrednost $E_a I_2$ (I_2 je vztrajnostni moment ekvivalentnega efektivnega jeklenega prereza ob upoštevanju, da razpokan beton v nategu zanemarimo, upoštevamo pa vzdolžno armaturo) na območju 15% dolžine razpona na obe strani podpore. Nato s popravljenimi upogibnimi togostmi ponovno analiziramo nosilec. Reducirano togost pri vmesnih podporah je potrebno uporabiti za vse obtežne primere.
- za nosilce, katerih kritični prerezi skladno s standardom Eurocode 3 sodijo v razred kompaktnosti 1, 2 ali 3, pa pri vsaki podpori, kjer σ_{ct} prekorači vrednost $0.15 f_{ck}$, pomnožimo upogibni moment z redukcijskim faktorjem f_1 .



Grafikon 1: Redukcijski faktor upogibnih momentov ob podpori

Krivuljo A uporabimo, ko je obtežba na enoto dolžine na vseh razponih enaka in se razponi med seboj ne razlikujejo za več kot 25%. Drugače privzamemo spodnjo mejno vrednost $f_1 = 0,6$ - krivulja B.

Pri nepodprtih nosilcih v stavbah upoštevamo vpliv lokalnega tečenja konstrukcijskega jekla v območju podpor z reduciranjem upogibnega momenta. Pri tem uporabimo faktorje:

$f_2 = 0,5$... v kolikor je meja tečenja jekla (f_y) dosežena pred dosegom zadostne trdnosti betona betonske plošče,

$f_2 = 0,7$... v kolikor je meja tečenja jekla (f_y) dosežena pri obtežbi, ki deluje po utrditvi betonske plošče.

Pri statično določenih nosilcih v stavbah je potrebno vpliv ukrivljenosti zaradi krčenja betona upoštevati, ko je razmerje razpona glede na višino nosilca večje od 20 in je ocenjena deformacija krčenja večja od $400 \cdot 10^{-6}$.

Kontrola razpok betona v sovprežnem nosilcu

Razpoke v sovprežnih konstrukcijah moramo omejiti do te mere, da ne bodo poslabšale funkcionalnosti in trajnosti objekta ali povzročile njihov nesprejemljiv videz. Razpoke so

skoraj neizogibne na mestih, kjer so armiranobetonski elementi sovprežnega nosilca podvrženi nateznim obremenitvam.

Notranje sile in momente določimo z elastično globalno analizo. Ponavadi uporabimo kvazi – stalno kombinacijo obtežbe skladno s standardom Eurocode 1.

V kolikor je konstrukcija v 1. razredu izpostavljenosti (glede na poglavje 4.1.2.2. standarda Eurocode 2), širina razpok ne vpliva na trajnost konstrukcije. V tem primeru razpok ne kontroliramo.

V primerih, ko je sovprežni nosilec podvržen negativnim upogibkom (dvigom) in ne opravimo kontrole širine razpok v betonskem delu prereza, mora biti količina vzdolžne armature znotraj efektivne širine pasnice več kot:

- 0.4% betonskega prereza (za sovprežne konstrukcije, ki so v fazi gradnje začasno podprte)
- 0.2% betonskega prereza (za sovprežne konstrukcije, ki v fazi gradnje niso začasno podprte)

Omejitev razpok do sprejemljivih širin in preprečitev nekontroliranega razpokanja zagotovimo s tem, da bo armatura v vseh prerezih, ki so značilno natezno obremenjeni, ostala v elastičnem stanju v trenutku, ko se bodo pojavile prve razpoke. Prav tako pa moramo omejiti razdaljo med armaturnimi palicami in premer armaturnih palic.

Za razrede izpostavljenosti 2 do 4 (glej standard Eurocode 2) za betonske elemente sovprežnih nosilcev lahko privzamemo, da je maksimalna še sprejemljiva širina razpoke 0.3 mm, medtem ko za razred izpostavljenosti 1 lahko omejimo širino razpoke na 0.5 mm. Za razred izpostavljenosti 5 pa je potrebno izvesti meritve širin razpoke in pri tem upoštevati naravo vplivov agresivnih kemikalij.

Minimalna armatura v betonskem elementu sovprežnega nosilca

V nadaljevanju predstavimo zahteve standarda Eurocode 4 glede potrebne minimalne vzdolžne armature v betonskem podprezu sovprežnega nosilca, ki jo je potrebno vgraditi, da ostane armatura v elastičnem stanju ob pojavu prve razpoke.

Potrebna površina vzdolžne armature v betonskem delu sovprežnega prereza mora zadostiti izrazu:

$$A_s \geq k \cdot k_c \cdot f_{cte} \cdot A_{ct} / \sigma_{st} \quad (3.12)$$

A_s ... potrebna minimalna vzdolžna armatura,

A_{ct} ... efektivna površina betonskega prereza v nategu,

f_{cte} ... efektivna natezna trdnost betona ob nastanku prve razpoke,

σ_{st} ... maksimalna dovoljena napetost v armaturi takoj po nastanku razpoke,

k ... faktor, definiran v 4.4.2.2(3) standardu Eurocode 2, običajno privzeta vrednost 0.8,

k_c ... faktor, katerega konzervativno ocenjena vrednost znaša 0.9.

Posredna kontrola razpok

Ta postopek uporabimo v območjih, kjer količina potrebne natezne armature za zagotovitev odpornosti na upogib v mejnem stanju nosilnosti preseže vrednost minimalne potrebne armature za preprečitev razpok. Postopamo tako, da preverimo nivo napetosti v natezni armaturi betonskega podpreza.

Natezne napetosti armature določimo na podlagi elastične analize prereza. Za kontrolo napetosti armature betonske pasnice sovprežnega prereza uporabimo enačbo:

$$\sigma_s = \sigma_{st} + \frac{0.4 \cdot f_{ctm} \cdot A_{ct}}{\alpha \cdot A_s}, \quad (3.13)$$

kjer je:

σ_s ... napetost v armaturi, ki se nahaja najbližje robu betonskega prereza; pri izračunu zanemarimo beton v nategu,

A_{ct} ... efektivna površina betonskega prereza tlačnega dela nosilca,

A_s ... celotna površina vzdolžne armature znotraj efektivne površine A_{ct} ,

α ... faktor, ki ga iz vrednotimo na način $\alpha = A \cdot I / (A_a \cdot I_a)$,

A_a, I_a ... površina in vztrajnostni moment jeklenega dela sovprežnega prereza in

A, I ... površina in vztrajnostni moment sovprežnega prereza brez upoštevanja nateznega dela betonskega podprereza.

V kolikor σ_s prekorači projektno trdnost mehke armature f_{sk} , moramo sovprežni prerez ponovno dimenzionirati. Ponovno dimenzioniranje ni potrebno, v kolikor σ_s prekorači projektno vrednost tečenja armaturnega jekla f_{sy} , ne doseže pa projektne trdnosti jekla f_{sk} .

Izračun širine razpok

Računsko širino razpoke, ki jo primerjamo s projektno vrednostjo širine razpoke w_k , izračunamo po pravilih poglavja 4.4.2.4 standarda Eurocode 2.

Natezne napetosti v mehki armaturi betonskega podprereza izračunamo z upoštevanjem zmanjšanja togosti sestavljenega prereza zaradi razpokanosti betona. V kolikor ne poznamo bolj točne metode, lahko σ_s izračunamo po enačbi (3.13).

Najbolj primeren postopek izračuna za omejitev razpok je naslednji:

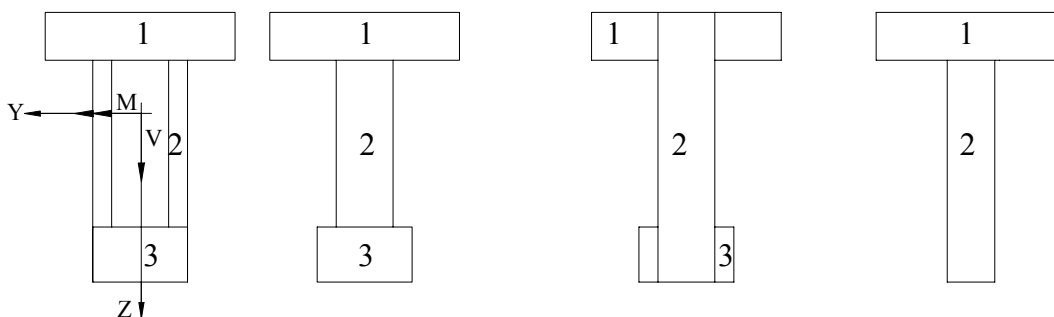
- določimo tista območja, kjer je beton izpostavljen nateznim obremenitvam in določimo območja potrebne armature za zadostitev pogojem v mejnem stanju uporabnosti,
- določimo razred izpostavljenosti in maksimalno širino razpoke,
- v območjih, kjer je zahtevana le minimalna armatura in so razpoke posledica vsiljenih deformacij kot npr. krčenje betona ipd., uporabimo postopek izračuna minimalne armature ter določimo maksimalni dovoljeni premer armaturnih palic

- v ostalih območjih izvedemo običajno analizo konstrukcije za kontolo razpok. Na podlagi izrednotenih notranjih statičnih količin izvedemo t.i. posredno kontrolo razpok (v kolikor je širina razpok omejena na 0.3 mm ali 0.5 mm). V kolikor imamo opraviti s strožjimi zahtevami, uporabimo običajno kontrolo razpok kot predlaga standard Eurocode 2, poglavje 4.4.2.4.

3.2 Projektiranje dvoslojnih nosilcev iz lesa

3.2.1 Splošno

V nadaljevanju predstavimo račun lesenih sestavljenih nosilcev na podlagi evropskega standarda za lesene konstrukcije Eurocode 5. Postopek dimenzioniranja temelji na linearni teoriji elastičnosti. S tem postopkom je možno obravnavati naslednje sestavljene lesene elemente s sledečimi prečnimi prerezi:



Slika 46: Različni tipi sestavljenih lesenih prerezov, ki so obravnavani v EC5

V računu so privzete naslednje predpostavke:

- pri računu efektivnih togosti elementov pomeni dolžina l razpetino pri prostoležečem nosilcu. V kolikor obravnavamo kontinuirni nosilec, upoštevamo za efektivno dolžino nosilca $0.85 \cdot l$, kjer je l razpetina polja kontinuirnega nosilca. Pri konzolah pa za efektivno dolžino privzamemo dvakratno dolžino konzole.
- po dolžini so sestavni elementi iz enega kosa lesa ali pa so med seboj ustrezno zlepljeni.
- podnosilci so medsebojno spojeni z mehanskimi veznimi sredstvi. Togost oz. zdrsni modul veznih sredstev je označen s K .
- razdalje med veznimi sredstvi so konstantne ali pa se enakomerno spreminjajo. Pogoj pri enakomernem spreminjanju razdalje med veznimi sredstvi je $s_{max} \leq 4 \cdot s_{min}$, ki predpisuje maksimalno razmerje med največjo in najmanjšo razdaljo. Vrednost s predstavlja računsko razdaljo med veznimi sredstvi.

- obtežba deluje v smeri osi Z, povzroča pa v prerezu moment ($M(x) = M_y(x)$) in prečno silo $V(x) = V_z(x)$. Momentna obremenitev se vzdolž osi X sestavljenega nosilca spreminja parabolčno ali sinusoidno.

Efektivna upogibna togost sestavljenega lesenega nosilca

Pri izračunu povosov sestavljenih lesenih nosilcev moramo izračunati nadomestno oziroma efektivno upogibno togost prečnega prereza. Izračunamo jo po naslednjem obrazcu:

$$(EI_{ef}) = \sum_{i=1}^3 (E_i \cdot I_i + \gamma_i \cdot E_i \cdot A_i \cdot a_i^2) \quad (3.14)$$

$E_i = E_{mean,i}$... srednja karakteristična vrednost elastičnega modula.

$A_i = b_i \cdot h_i$... prečni prerez posameznega dela i,

$I_i = \frac{b_i \cdot h_i^3}{12}$... lokalni vztrajnostni moment posameznega dela i,

$\gamma_2 = 1.0$... za del 2 (podnosilec) privzememo, da je osnovni del, na katerega so priključeni ostali deli,

$$\gamma_i = \left[\frac{1 + \pi^2 \cdot E_i \cdot A_i \cdot s_i}{K_i \cdot l^2} \right]^{-1} \quad (3.15)$$

(za $i=1$ in $i=3$) ... faktor podajnosti veznih sredstev v spoju med delom i in 2.

Pri tem je:

$\frac{K_i}{s_i}$... togost posameznega spoja.

Za mejno stanje uporabnosti velja:

$$K_i = K_{u,i} = \frac{2}{3} K_{ser,i} \quad (3.16)$$

s_i ... računaska razdalja veznih sredstev,

K_u ... zdrsni modul za mejna stanja nosilnosti in

K_{ser} ... zdrsni modul za mejna stanja uporabnosti.

S parametrom γ zajamemo v enačbah vpliv podajnosti veznih sredstev na upogibno togost sestavljenih nosilcev. Vrednosti parametra se gibljejo v sledečih mejah:

- $\gamma = 0$ v primeru nepovezanih sestavnih elementov,
- $0 < \gamma < 1$ v primeru podajne povezave sestavnih elementov in
- $\gamma = 1$ v primeru togo povezanih sestavnih elementov.

Za račun napetosti v prerezu in račun sile, ki odpade na posamezno vezno sredstvo, izračunamo nadomestno upogibno togost $(EI)_{ef}$ z uporabo K_u . Pri računu pomikov z upoštevanjem podajnosti veznih sredstev pri uporabni obtežbi pa izračunamo $(EI)_{ef}$ s pomočjo modula zdrsa K_{ser} .

Nevtralna os sestavljenega lesenega prereza

Nevtralno os sestavljenega prereza izračunamo po naslednjem izrazu

$$a_2 = \frac{\gamma_1 \cdot E_1 \cdot A_1 \cdot (h_1 + h_2) - \gamma_3 \cdot E_3 \cdot A_3 \cdot (h_2 + h_3)}{2 \cdot \sum_{i=1}^3 \gamma_i \cdot E_i \cdot A_i}, \quad (3.17)$$

pri tem za T prereze upoštevam $h_3 = 0$.

Zdrsni modul K_i

Vrednost K_i predstavlja zdrsni modul veznega sredstva, t.j. povezavo med obremenitvijo in zamikom veznega sredstva v stikih lesenih konstrukcij. Na voljo imamo enačbe za izračun zdrsnega modula veznega sredstva, ki so bile pridobljene na podlagi eksperimentalno dobljenih rezultatov. Glede na tip veznega sredstva imamo na voljo naslednje enačbe:

- za moznike, vijake in uvtane žeblice: $K_i = \frac{\rho_k^{1.5} \cdot d}{20} \sqrt{\frac{N}{mm^2}}$. (3.18)

• za zabite žeblje:
$$K_i = \frac{\rho_k^{1.5} \cdot d^{0.8}}{25} \vee \frac{N}{mm^2}. \quad (3.19)$$

• za tesarske sponse:
$$K_i = \frac{\rho_k^{1.5} \cdot d^{0.8}}{60} \vee \frac{N}{mm^2}. \quad (3.20)$$

Pri tem je:

ρ_k ... karakteristična gostota lesa (v $\frac{kg}{m^3}$) in

d ... premer veznega sredstva (v mm).

V kolikor imamo opravka z lesenimi elementi z različnimi karakterističnimi gostotami, privzamemo za karakteristično gostoto geometrijsko povprečje karakterističnih gostot:

$$\rho_k = \sqrt{\rho_{k,1} \cdot \rho_{k,2}}. \quad (3.21)$$

3.2.2 Kontrola napetosti v lesenem sestavljenem prerezu

Kontrola normalnih napetosti

- Normalne napetosti v težišču posameznega sestavnega dela ($i = 1, 2, 3$)

V težišču posameznega sestavnega dela morajo normalne napetosti zadostiti pogoju:

$$\frac{\sigma_{i,d}}{f_{i,c(t),d}} \leq 1, \quad (3.22)$$

($i = 1, 2, 3$)

$f_{i,c(t),d}$... računski tlačni (natezni) trdnosti posameznega sestavnega dela i .

Normalno težiščno napetost posameznega sestavnega dela ($i = 1, 2, 3$) izračunamo po naslednjem izrazu

$$\sigma_i = \frac{\gamma_i \cdot E_i \cdot a_i \cdot M}{(EI_{ef})}. \quad (3.23)$$

- Robne normalne napetosti posameznega sestavnega dela ($i = 1, 2, 3$)

Robne napetosti morajo zadostiti pogoju:

$$\frac{\sigma_{i,m,d}}{f_{i,m,d}} \leq 1, \quad (3.24)$$

($i = 1, 2, 3$).

Robne napetosti posameznih sestavnih elementov določimo po izrazu:

$$\sigma_{i,m,d} = \sigma_{i,d} + \sigma_{m,i,d} = \frac{M_d}{(EI)_{ef}} E_i \left(\gamma_i a_i + \frac{h_i}{2} \right), \quad (3.25)$$

($i = 1, 2, 3$).

Pri tem je:

$\sigma_{i,d}$... normalna napetost v težišču podprereza,

$\sigma_{i,m,d}$... normalna napetost na robovih podprereza,

$f_{i,m,d}$... računski upogibna trdnost posameznega sestavnega dela i .

Kontrola strižnih napetosti

Maksimalna strižna napetost se pojavi na mestu, kjer so normalne napetosti enake 0, torej v težišču sestavljenega prereza.

Izpolnjen mora biti naslednji pogoj:

$$\frac{\tau_{\max,d}}{f_{v,d}} \leq 1. \quad (3.26)$$

Maksimalno strižno napetost v osnovnem elementu izračunamo po izrazu:

$$\tau_{2,\max} = \frac{(\gamma_3 \cdot E_3 \cdot A_3 \cdot a_3 + 0.5 \cdot E_2 \cdot b_2 \cdot h^2) \cdot V_d}{b_2 \cdot (EI)_{ef}}, \quad (3.27)$$

kjer je

h ... oddaljenost skupnega težišča oz. y osi od spodnjega roba dela 2,

V_d ... računski prečna sila $V_d = V_d(x)$ in

$f_{v,d}$... računski strižna trdnost osnovnega sestavnega dela.

3.2.3 Obremenitev posameznih veznih sredstev

Vezna sredstva

Pri stikovanju lesenih nosilcev v osnovi poznamo različne vrste veznih sredstev. V tej diplomski nalogi smo se odločili za podrobnejšo predstavitev žeblicev, saj se z njimi srečamo tudi pri obravnavi računskih primerov. Ostala vezna sredstva, ki se pojavljajo v lesenih konstrukcijah, so bila samo opisno predstavljena v prvem poglavju.

Kontrola nosilnosti veznih sredstev

Računsko obremenitev posameznega veznega sredstva v posamezni strižni ravnini izračunamo po naslednji enačbi:

$$F_{i,d} = \frac{\gamma_i \cdot E_i \cdot A_i \cdot \alpha_i \cdot s_i \cdot V_d}{(EI_{ef})}, \quad (3.28)$$

pri tem je:

s_i ... računsko razdalja med veznimi sredstvi in

V_d ... računsko prečna sila.

Skladno s standardom Eurocode 5 velja, da v primeru, ko razdalja med veznimi sredstvi ni konstantna, smemo privzeti nadomestno računsko razdaljo med veznimi sredstvi, dobljeno po naslednjem izrazu:

$$s_{ef} = 0.25 \cdot s_{max} + 0.75 \cdot s_{min}. \quad (3.29)$$

Za vsako vezno sredstvo mora biti za posamezno strižno ravnino izpolnjen naslednji pogoj:

$$\frac{F_{i,d}}{R_{i,d}} \leq 1. \quad (3.30)$$

Pri tem je:

$R_{i,d}$... računsko strižna odpornost posameznega veznega sredstva.

Računska odpornost strižno obremenjenega veznega sredstva

Za izračun odpornosti strižno obremenjenih veznih sredstev so podani izrazi v standardu Eurocode 5. Pri tem so podani izrazi tako za vezna sredstva, ki prečkajo eno, kot tudi za tista, ki prečkajo dve strižni ravnini. Ker v naši diplomski nalogi obravnavamo dvoslojne sestavljene nosilce, se omejimo na vezna sredstva, ki prečkajo le eno strižno ravnino.

Po standardu Eurocode 5 je nosilnost žebeljev, ki prečkajo samo eno strižno ravnino, določena z naslednjim izrazom:

$$R_d = \min \left\{ \begin{array}{l} f_{h,1,d} \cdot t_1 \cdot d \\ f_{h,1,d} \cdot t_2 \cdot d \cdot \beta \\ \frac{f_{h,1,d} \cdot t_1 \cdot d}{1 + \beta} \cdot \left[\sqrt{\beta + 2 \cdot \beta^2 \cdot \left[1 + \frac{t_2}{t_1} + \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^2 \right] + \beta^3 \cdot \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^2} - \beta \cdot \left(1 + \frac{t_2}{t_1} \right) \right] \\ 1.1 \cdot \frac{f_{h,1,d} \cdot t \cdot d}{2 + \beta} \cdot \left[\sqrt{2 \cdot \beta \cdot (1 + \beta) + \frac{4 \cdot \beta \cdot (2 + \beta) \cdot M_{y,d}}{f_{h,1,d} \cdot d \cdot t_1^2}} - \beta \right] \\ 1.1 \cdot \frac{f_{h,1,d} \cdot t_2 \cdot d}{1 + 2 \cdot \beta} \cdot \left[\sqrt{2 \cdot \beta^2 \cdot (1 + \beta) + \frac{4 \cdot \beta \cdot (1 + 2 \cdot \beta) \cdot M_{y,d}}{f_{h,1,d} \cdot d \cdot t_2^2}} - \beta \right] \\ 1.1 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \beta}{1 + \beta}} \cdot \sqrt{2 \cdot M_{y,d} \cdot f_{h,1,d} \cdot d} \end{array} \right. , (3.31)$$

pri tem velja:

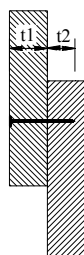
d ... premer žebnja,

t_1, t_2 ... debelina elementa oz. globina zabijanja (slika 47),

$f_{h,1,d}, f_{h,2,d}$... projektne vtisne trdnosti lesa,

$\beta = \frac{f_{h,2,d}}{f_{h,1,d}}$... razmerje vtisnih trdnosti in

$M_{y,d}$... projektna vrednost momenta plastifikacije veznega sredstva.



Slika 47: Debeline t_1 in globine zabijanja t_2

Projektne vtisne trdnosti lesa z oznako 1 oziroma 2 se računajo po sledečih enačbah:

$$f_{h,1,d} = \frac{k_{mod,1} \cdot f_{h,1,k}}{\gamma_m} \text{ in} \quad (3.32)$$

$$f_{h,2,d} = \frac{k_{mod,2} \cdot f_{h,2,k}}{\gamma_m}. \quad (3.33)$$

Varnostni faktor γ_m predstavlja varnostni faktor lesa in je enak 1.3. S faktorjem k_{mod} upoštevamo trajanje obtežbe.

Karakteristični vrednosti vtisnih trdnosti lesa določimo po naslednji enačbi:

$$f_{h,i,k} = \begin{cases} 0.082 \cdot \rho_k \cdot d^{-0.3}, & \text{luknje predhodno niso izvrtane} \\ 0.082 \cdot (1 - 0.01 \cdot d) \cdot \rho_k, & \text{predhodno izvrtane luknje} \end{cases} \vee \left[\frac{N}{mm^2} \right]. \quad (3.34)$$

V izrazu (3.34) mora biti ρ_k podan v $\left[\frac{kg}{m^3} \right]$, d pa v $[mm]$.

Projektna vrednost momenta plastifikacije veznega sredstva je enaka:

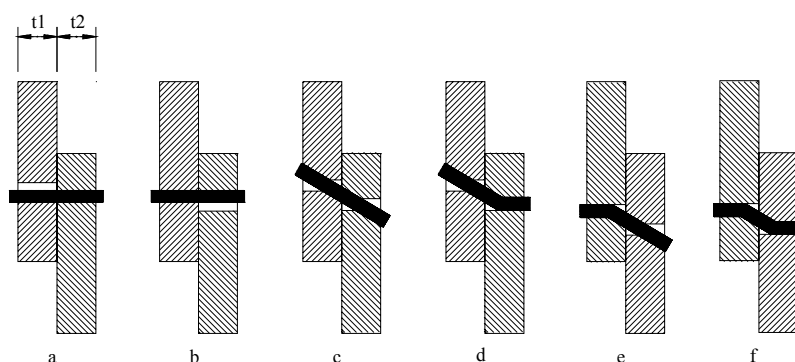
$$M_{y,d} = \frac{M_{y,k}}{\gamma_m}, \quad (3.35)$$

karakteristično vrednost momenta plastifikacije pa dobimo po izrazu:

$$M_{y,k} = \begin{cases} 180 \cdot d^{2.6}, & \text{okrogli žebli} \\ 270 \cdot d^{2.6}, & \text{kvadratni žebli} \end{cases} \vee [Nmm]. \quad (3.36)$$

Varnostni faktor γ_m v enačbi za projektno vrednost momenta plastifikacije je enak 1.1, saj gre za varnostni faktor jekla v stikih lesenih konstrukcij.

Kot je razvidno iz izraza (3.31), je potrebno za račun strižne nosilnosti veznega sredstva, ki prečka eno strižno ravnino, obravnavati šest porušnih mehanizmov. Ti porušni mehanizmi so prikazani na sliki 48:



Slika 48: Možni porušni mehanizmi veznih sredstev, ki prečkajo eno strižno ravnino

Nosilnost veznega sredstva na izvlek

V računu sestavljenih nosilcev (po standardu Eurocode 5) ni potrebno kontrolirati veznih sredstev na izvlek. Razumljivo pa je, da se ob delovanju zunanje obtežbe na sestavljeni nosilec lahko na stiku podprerezov pojavijo tudi razmik stičnih površin. Na ta način so vgrajena vezna sredstva obremenjena natezno (na izvlek), kar pa je pri podrobnejši obravnavi sestavljenih nosilcev vsekakor potrebno upoštevati. Le natezno so vezna sredstva obremenjena v primeru, ko so vgrajena pravokotno na stik podprerezov. Skladno s standardom Eurocode 5 določimo računsko nosilnost žebeljev na izvlek po naslednji enačbi:

$$R_d = \min \begin{cases} f_{1,d} \cdot d \cdot l, & \text{za gladke žebelje} \\ f_{1,d} \cdot d \cdot h + f_{2,d} \cdot d^2, & \text{za vse žebelje} \\ f_{2,d} \cdot d^2, & \text{za ohrapavljene žebelje} \end{cases} \quad (3.37)$$

V prvem kriteriju upoštevamo možnost izvleka žebelja iz lesa. Drugi in tretji kriterij pa zajameta možnost preboja priključenega elementa z glavo žebelja.

Nastopajoče količine v gornji enačbi so:

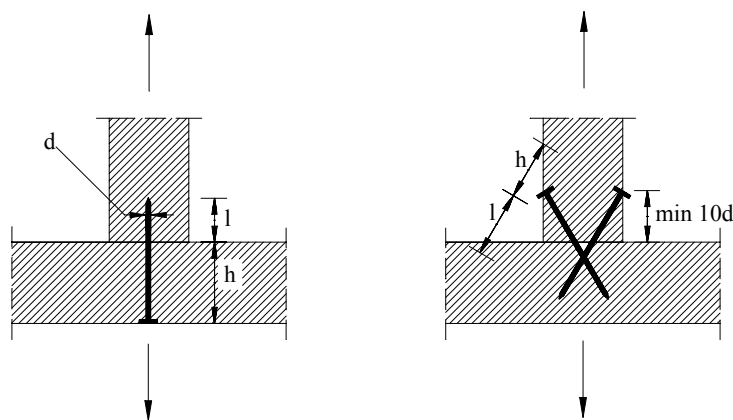
d ... premer žebelja,

h in l sta prikazani na sliki 49,

$f_{1,d}$, $f_{2,d}$... projektni nosilnosti določeni z izrazom

$$f_{1,d} = \frac{k_{mod,1} \cdot f_{1,k}}{\gamma_m}, \quad (3.38)$$

$$f_{2,d} = \frac{k_{mod,2} \cdot f_{2,k}}{\gamma_m} \quad (3.39)$$



Slika 49: Varianta zabijanja osno obremenjenih žbljev

Parametra $f_{1,d}$ in $f_{2,d}$ se spreminjata v odvisnosti od vrste lesa (predvsem njegove gostote) in vrste žblja. V osnovi ju določamo eksperimentalno, pri gladkih žbljih pa so podani tudi računski izrazi:

$$f_{1,k} = (18 \cdot 10^{-6}) \cdot \rho_k^2 \cdot v \left[\frac{N}{mm^2} \right], \quad (3.40)$$

$$f_{2,k} = (300 \cdot 10^{-6}) \cdot \rho_k^2 \cdot v \left[\frac{N}{mm^2} \right]. \quad (3.41)$$

Pri tem je:

$$\rho_k \dots \text{karakteristična gostota lesa v } \left[\frac{kg}{m^3} \right].$$

Za γ_m upoštevamo vrednosti, ki so podane v predhodnem poglavju Računska odpornost strižno obremenjenega veznega sredstva. Vrednosti k_{mod} pa so podane v standardu Eurocode 5 in se razlikujejo glede na trajanje obtežbe ter vlažnost lesa.

Kombinacija strižne in osne obremenitve

Za osno ($F_{ax,d}$) in strižno ($F_{la,d}$) obremenjen priključek z osno ($R_{ax,d}$) in strižno ($R_{la,d}$) nosilnostjo mora biti izpolnjen pogoj:

$$\frac{F_{ax,d}}{R_{ax,d}} + \frac{F_{la,d}}{R_{la,d}} \leq 1 \quad \dots \text{ za gladke žeblje} \quad (3.42)$$

$$\left(\frac{F_{ax,d}}{R_{ax,d}} \right)^2 + \left(\frac{F_{la,d}}{R_{la,d}} \right)^2 \leq 1 \quad \dots \text{ za ohrapvljene žeblje} \quad (3.43)$$

3.3 Dimenzioniranje stikov kompozitnih nosilcev iz lesa in betona

Pri korektnem dimenzioniranju kompozitnih elementov, v katerih nastopata les in beton bi bilo potrebno upoštevati nastale zamike na stikih elementov. To je mogoče le v primeru, da poznamo karakteristike stika, t.j. zdrsni modul in nosilnost veznih sredstev. Karakteristike stika ponavadi lahko običajno določimo le eksperimentalno.

Navodila za dimenzioniranje stikov med betonom in lesom so podana v evropskem predstandardu ENV 1995 – 2: Mostovi. Skladno s tem standardom ni potrebno opraviti preiskav za strižno obremenjene jeklene moznike, ki so vgrajeni pravokotno na stično površino. V kolikor med lesom in betonom ni vmesne plasti, izračunamo nosilnost vijakov, moznikov in hrapavih žbljev po standardu Eurocode 5 za vezna sredstva v sestavljenih lesenih elementih in jo povečamo za 20%. Za zdrsne module veznih sredstev privzamemo vrednosti zdrsnih modulov veznih sredstev v sestavljenih lesenih elementih, ki jih povečamo za 100%. V primeru, da poznamo strižno nosilnost vijakov ali hrapavih žbljev v stikih lesa in betona, pa lahko po standardu Eurocode 5 izračunamo še strižno nosilnost teh veznih sredstev, če so le-ti vgrajeni pod določenim kotom.

V kolikor dobimo kot rezultat eksperimentalne preiskave veznih sredstev izrazito elastično – plastične diagrame sila – zamik, se obremenitev prerazporeja z bolj obremenjenih na manj obremenjena vezna sredstva v trenutku, ko pride do plastifikacije v bolj obremenjenih veznih sredstvih. V kolikor moramo na stikih podprerezov vzdolž nosilcev uporabiti veliko število veznih sredstev, lahko o obnašanju stika sklepamo le na podlagi skupnega obnašanja večjega števila veznih sredstev.

4 MATEMATIČNI MODEL KOMPOZITNEGA NOSILCA

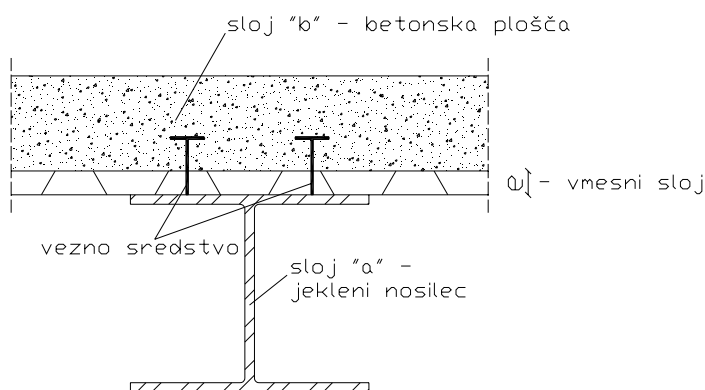
V tem poglavju predstavimo matematični model in analitični postopek za analizo obnašanja kompozitnih nosilcev. Pri izpeljavi matematičnega modela predpostavimo:

- pomiki in zasuki so majhne količine (geometrijsko linearna teorija nosilcev);
- sloja kompozitnega nosilca se lahko zamakneta in razmakneta;
- sloja kompozitnega nosilca sta lahko iz različnih materialov, oba se obnašata linearno elastično;
- deformiranje nosilca je ravninsko, torej so prečni prerezi simetrični in obtežba deluje simetrično v ravnini deformiranja in
- konstitucijska modela za zamik in razmik sta linearna.

Dodatno za vsak sloj kompozitnega nosilca predpostavimo znano Bernoullijevo predpostavko o ravninskih nosilcih. Ta pravi, da ostane raven in pravokoten prečni prerez na referenčno os v nedeformirani legi raven in pravokoten na referenčno os tudi v deformirani legi. Prav tako se velikost in oblika prečnih prerezov med deformiranjem ne spreminjata.

4.1 Osnovne enačbe

Opazujemo raven ravninski kompozitni nosilec z dolžino L . Značilni prečni prerez sovprežnega nosilca prikazujemo na sliki 50.



Slika 50: Prečni prerez sovprežnega nosilca

Na sliki 50 smo predpostavili, da se interakcija med slojema »a« in »b« vzpostavi preko vmesnega sloja debeline e . Glede na kvaliteto veznega sredstva se lahko povezava med slojema ustvari na tri načine:

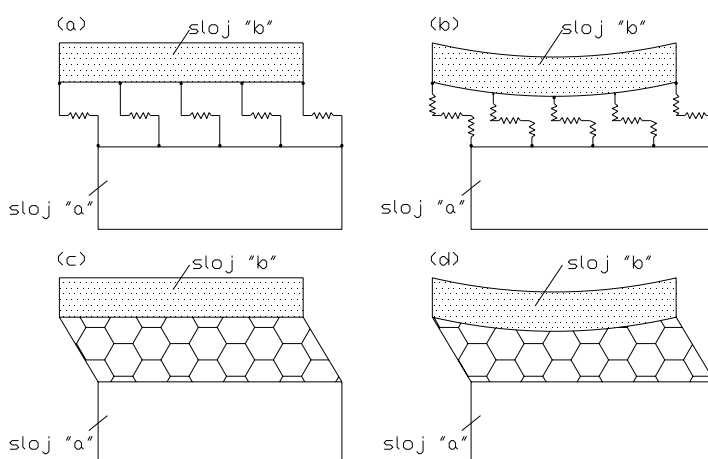
- sloja se ne razmakneta in ne zamakneta;
- sloja se zamakneta, se pa ne razmakneta

in najbolj splošen:

- sloja se zamakneta in tudi razmakneta.

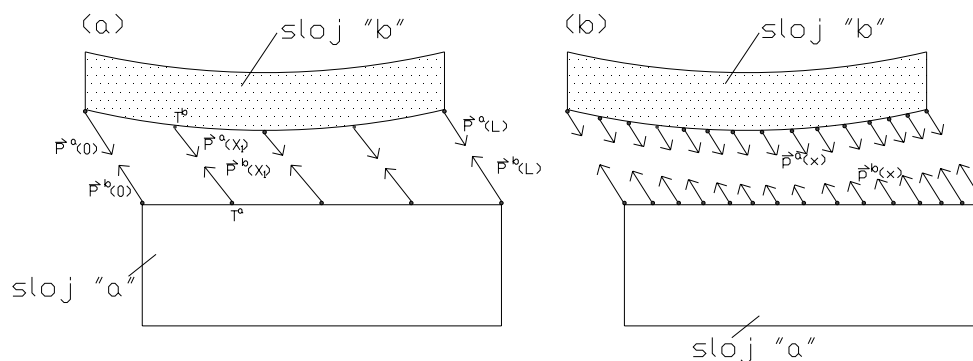
Matematično modeliranje prve možnosti je trivialno in je tu ne obravnavamo. Tudi modeliranja druge možnosti v diplomski nalogi ne obravnavamo (Čas, 2004). Detajlno pa obravnavamo tretjo možnost, ki je tudi najzahtevnejša in najbolj splošna. Vsebuje pa ta predstavljeni matematični model tudi oba prejšnja matematična modela kot posebna primera.

V literaturi zasledimo dva inženirska načina modeliranja stika med slojema kompozitnega nosilca, ki so ju predstavili Čas, Bratina, Saje in Planinc (2004). Pri prvem vsako vezno sredstvo modeliramo kot vzmet (slika 51a in b). Pri drugem, ki je numerično učinkovitejši, pa vezno sredstvo »razmažemo« po celotni stični površini kompozitnega nosilca (slika 51c in d) in predstavlja zvezno vzmet.



Slika 51: Matematično modeliranje stika. Vezno sredstvo modeliramo kot vzmet: (a) samo zamik, (b) zamik in razmik. Vezno sredstvo je »razmazano« vzdolž stika: (c) samo zamik, (d) zamik in razmik.

Skladno s predpostavljjenima matematičnima modeloma stika prikazujemo na sliki 52 ustrezne kontaktne sile.



Slika 52: Kontaktne sile: (a) diskretno razporejene vzmeti, (b) zvezno razporejene vzmeti

Za model stika, kjer predstavlja vsako vezno sredstvo svojo vzmet (diskretno razporejene vzmeti), predstavljajo kontaktne sile točkovne sile $\bar{P}^a(0), \bar{P}^b(0), \bar{P}^a(x_1), \dots, \bar{P}^b(L)$ (slika 52a).

Za zvezno razporejene vzmeti pa predstavlja kontaktne sile zvezna linijska obtežba $\bar{p}^a(x)$ in $\bar{p}^b(x)$ (slika 52b), ki ima komponenti v vzdolžni smeri $\bar{p}_x^a(x)$ in $\bar{p}_x^b(x)$ in v prečni smeri $\bar{p}_z^a(x)$ in $\bar{p}_z^b(x)$.

Skladno s tretjim Newtonovim zakonom pa velja za oba modela stika:

$$\begin{aligned} \bar{P}^a(x_1) + \bar{P}^b(x_1) &= \vec{0}, \\ \bar{p}^a(x) + \bar{p}^b(x) &= \vec{0}. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Opozorimo pa na pomembno razliko med inženirskim modeliranjem stika, kot ga predstavljamo v diplomski nalogi, in modeliranjem kontakta med telesi, značilnim za kontaktno mehaniko. Medtem ko v našem primeru predpostavimo, da sta tudi v deformirani legi v stiku istoležna delca v nedeformirani legi, obravnava kontaktna mehanika istoležna delca v deformirani legi. V nadaljevanju se omejimo na model stika z zvezno razporejeno vzmetjo. V komponentni obliki lahko enačbi (4.44) zapišemo kot

$$\begin{aligned} p^{ax}(x) + p^{bx}(x) &= 0, \\ p^{az}(x) + p^{bz}(x) &= 0, \end{aligned} \tag{4.45}$$

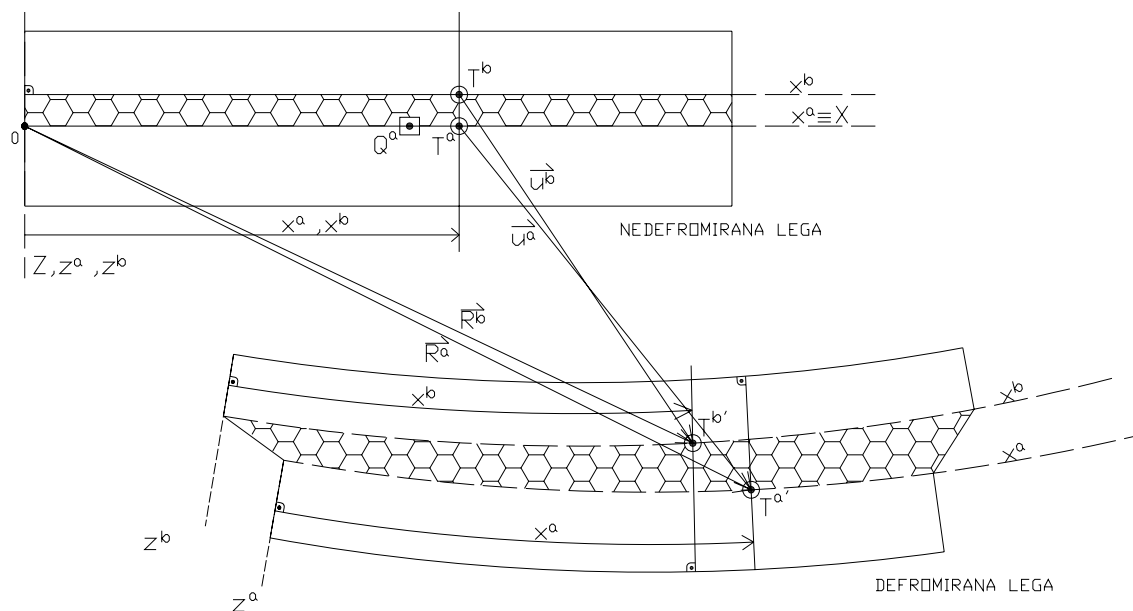
kjer so $p^{ax}(x), p^{bx}(x), p^{az}(x)$ in $p^{bz}(x)$ komponente linijske obtežbe v prostorski bazi \vec{E}_x in \vec{E}_z . Zvezo med kontaktnimi silami ter kinematičnima količinama na stiku (zamik in razmik) zapišemo s t. i. konstitucijskimi enačbami stika. Te določimo z eksperimenti in so v največji meri odvisne od lastnosti veznega sredstva. Splošno jih zapišemo v obliki

$$p_t^a = f(\Delta, p_n^a, \dots) \quad (4.46)$$

$$p_n^a = h(d, p_t^a, \dots), \quad (4.47)$$

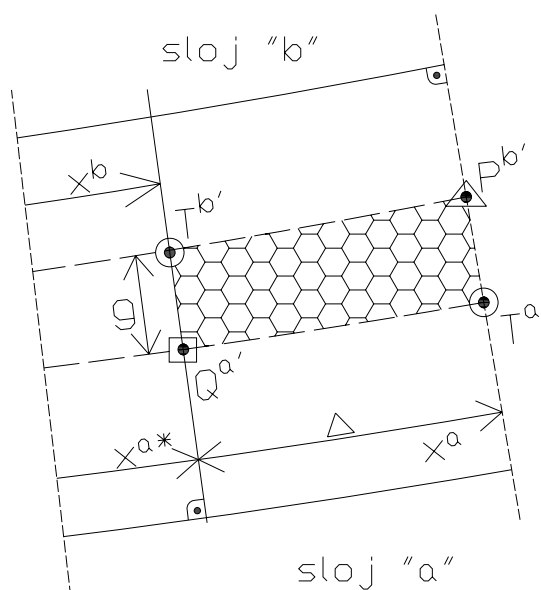
kjer smo s p_t^a in p_n^a označili komponenti linijske kontaktne sile v smeri tangente (p_t^a) in normale (p_n^a) na stično ploskev sloja 'a' kompozitnega nosilca.

Deformiranje kompozitnega nosilca opazujemo v ravnini (X, Z) desnosučnega koordinatnega sistema X, Y, Z z baznimi vektorji \vec{E}_x, \vec{E}_y in \vec{E}_z . Materialne koordinate sloja 'a' označimo z x^a, y^a, z^a , sloja 'b' pa z x^b, y^b, z^b . Premik kompozitnega nosilca iz nedeformirane lege v deformirano lego določata krajevna vektorja \vec{R}^a in \vec{R}^b oziroma pomika referenčnih osi \vec{u}^a in \vec{u}^b (slika 53).



Slika 53: Nedeformirana in deformirana lega kompozitnega nosilca.

Geometrijski pomen zdrsa Δ in razmika d med slojema kompozitnega nosilca prikazujemo na sliki 54.



Slika 54: Geometrijski pomen zdrsa in razmika kompozitnega nosilca

Skladno s sliko 54 je razmik med točkama T^a in T^b definiran z enačbo

$d = g - e$, zamik pa z enačbo

$$\Delta = \int_{x^{a*}}^{x^a} (1 + \varepsilon^a) dx, \quad (4.48)$$

kjer je ε^a specifična sprememba dolžine materialnega vlakna referenčne osi sloja 'a'.

Ker sta krajevna vektorja

$$\bar{R}^b = (x^b + u^b) \bar{E}_x + w^b \bar{E}_z, \quad (4.49)$$

$$\bar{R}^b = (x^{a*} + u^{a*} - g \sin \varphi^{a*}) \bar{E}_x + (w^{a*} - g \cos \varphi^{a*}) \bar{E}_z \quad (4.50)$$

na stiku enaka, dobimo

$$\bar{R}^b = (x^b + u^b) \bar{E}_x + w^b \bar{E}_z = (x^{a*} + u^{a*} - g \sin \varphi^{a*}) \bar{E}_x + (w^{a*} - g \cos \varphi^{a*}) \bar{E}_z \quad (4.51)$$

oziroma vezni enačbi na stiku kompozitnega nosilca

$$x^b + u^b = x^{a*} + u^{a*} - g \sin \varphi^{a*}, \quad (4.52)$$

$$w^b = w^{a*} - g \cos \varphi^{a*}. \quad (4.53)$$

Zgornji dve enačbi predstavljata dve nelinearni enačbi za določitev koordinate točke Q^a , ki jo označimo z x^{a*} , in razmika g . Ker se ukvarjamo z geometrijsko linearno teorijo nosilcev,

moramo tudi zgornji enačbi linearizirati okoli začetne nedeformirane lege, t.j. okoli $u^a = 0, w^b = 0, \dots, x^{a*} = x^a, g = e$, Planinc (2006).

Najprej lineariziramo izraze u^{a*}, w^{a*} in φ^{a*} . Detajlneje predstavimo samo linearizacijo vzdolžnega pomika. Ker je

$$u^{a*} = u^a(x^a + x^{a*}) = u^a(x^a) + u^{a'}(x^a)(x^a + x^{a*}) + \dots \quad (4.54)$$

je tudi

$$\delta u^{a*} = \delta u^a + \delta u^{a'}(x^{a*} - x^a) + u^{a''} \delta x^{a*} + \dots \quad (4.55)$$

Ker lineariziramo okoli nedeformirane lege, je $u^{a'} = 0$ in $x^{a*} - x^a = 0$, dobimo za variacijo izraz

$$\delta u^{a*} = \delta u^a. \quad (4.56)$$

Podobno velja:

$$\delta w^{a*} = \delta w^a, \quad (4.57)$$

$$\delta \varphi^{a*} = \delta \varphi^a. \quad (4.58)$$

Sedaj lineariziram še izraza $g \sin \varphi^{a*}$ in $g \cos \varphi^{a*}$. Po kratkem računu dobimo:

$$\delta(g \sin \varphi^{a*}) = \delta g \sin \varphi^{a*} + g \cos \varphi^{a*} \delta \varphi^{a*}, \quad (4.59)$$

$$\delta(g \cos \varphi^{a*}) = \delta g \cos \varphi^{a*} - g \sin \varphi^{a*} \delta \varphi^{a*}. \quad (4.60)$$

Ker je $\sin \varphi^{a*} = 0$, $\cos \varphi^{a*} = 1$ in $\delta \varphi^{a*} = \delta \varphi^a$, je

$$\delta(g \sin \varphi^{a*}) = g \delta \varphi^a = e \delta \varphi^a, \quad (4.61)$$

$$\delta(g \cos \varphi^{a*}) = \delta g. \quad (4.62)$$

Sedaj še upoštevamo oz. uvedemo nove oznake $\delta g = g$ in $\delta \varphi^a = \varphi^a$. Linearizirane vezne enačbe (4.52) in (4.53) so tako

$$x^b + u^b = x^{a*} + u^a - e \cdot \varphi^a, \quad (4.63)$$

$$w^b = w^a - g. \quad (4.64)$$

Poenostavimo oz. drugače zapišemo še enačbo za zamik (4.48) $\Delta(x^a)$

$$\Delta = \int_{x^{a*}}^{x^a} (1 + \varepsilon^a) dx = x^a - x^{a*} + \int_{x^{a*}}^{x^a} u^{a'} dx \quad (4.65)$$

$$\text{Kjer smo upoštevali } u^{a'} - \varepsilon^a = 0. \quad (4.66)$$

Po integraciji dobimo za zamik preprost izraz

$$\Delta = x^a - x^{a*} + u^a - u^{a*}. \quad (4.67)$$

Ko ga lineariziramo, pa dobimo

$$\Delta = x^a - x^{a*}. \quad (4.68)$$

Ker smo predpostavili $x^a = x^b$, dobi vezna enačba (4.63) obliko

$$\Delta = u^a - u^b - e \cdot \varphi^a. \quad (4.69)$$

Za določitev Δ , g in x^{a*} smo tako izpeljali enačbe

$$\Delta = u^a - u^b - e \cdot \varphi^a = x^a - x^{a*} \quad (4.70)$$

$$x^b + u^b = x^{a*} + u^a - e \cdot \varphi^a \quad (4.71)$$

$$d = w^a - w^b - e, \quad (4.72)$$

kjer smo označili $g = d + e$.

Z enačbama (4.46) in (4.47) smo definirali splošni konstitucijski enačbi na stiku med slojema kompozitnega nosilca, ki sta

$$p_i^a = f(\Delta, p_n^a, \dots),$$

$$p_n^a = h(d, p_i^a, \dots).$$

Ker analiziramo obnašanje dvoslojnih kompozitnih nosilcev z linearnim modelom ravninskega nosilca, v nadaljevanju predpostavimo tudi linearne konstitucijske enačbe stika.

Najpreprostejše so linearne zveze

$$p_i^a = K\Delta, \quad (4.73)$$

$$p_n^a = \begin{cases} C_1 d; g > e, \\ C_2 d; g < e. \end{cases} \quad (4.74)$$

Znano je, da je napetostno in deformacijsko stanje dvoslojnega kompozitnega nosilca sestavljeno iz kinematičnih, ravnotežnih in konstitucijskih enačb ter ustreznih statičnih ali kinematičnih robnih pogojev za vsak sloj posebej. Še enačbe, povzeto po Čas (2004):

- kinematične enačbe

$$\begin{aligned} u^{a'} - \varepsilon^a &= 0, & u^{b'} - \varepsilon^b &= 0, \\ w^{a'} + \varphi^a &= 0, & w^{b'} + \varphi^b &= 0, \\ \varphi^{a'} - \kappa^a &= 0, & \varphi^{b'} - \kappa^b &= 0, \end{aligned} \quad (4.75)$$

- ravnotežne enačbe

$$\begin{aligned} N^{a'} + \mathcal{P}_x^a &= 0, & N^{b'} + \mathcal{P}_x^b &= 0, \\ Q^{a'} + \mathcal{P}_z^a &= 0, & Q^{b'} + \mathcal{P}_z^b &= 0, \\ M^{a'} - Q^a + \mathcal{M}_y^a &= 0, & M^{b'} - Q^b + \mathcal{M}_y^b &= 0, \end{aligned} \quad (4.76)$$

ter

- konstitucijske enačbe

$$\begin{aligned} N^a &= C_{11}^a \varepsilon^a + C_{12}^a \kappa^a, & N^b &= C_{11}^b \varepsilon^b + C_{12}^b \kappa^b, \\ M^a &= C_{21}^a \varepsilon^a + C_{22}^a \kappa^a, & M^b &= C_{21}^b \varepsilon^b + C_{22}^b \kappa^b. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Konstitucijske enačbe (4.77) pogosto rabimo v obliki:

$$\begin{aligned} \varepsilon^a &= D_{11}^a N^a + D_{12}^a M^a, & \varepsilon^b &= D_{11}^b N^b + D_{12}^b M^b, \\ \kappa^a &= D_{21}^a N^a + D_{22}^a M^a, & \kappa^b &= D_{21}^b N^b + D_{22}^b M^b. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Zgornjim diferencialnim enačbam pripadajo statični ali kinematični robni pogoji.

Statični robni pogoji so:

- na levem robu kompozitnega nosilca

$$\begin{aligned} S_1^a + N^a(0) &= 0, & S_1^b + N^b(0) &= 0, \\ S_2^a + Q^a(0) &= 0, & S_2^b + Q^b(0) &= 0, \\ S_3^a + M^a(0) &= 0, & S_3^b + M^b(0) &= 0. \end{aligned} \quad (4.79)$$

- na desnem robu kompozitnega nosilca

$$\begin{aligned} \delta_4^a - N^a(L) &= 0, & \delta_4^b - N^b(L) &= 0, \\ \delta_5^a - Q^a(L) &= 0, & \delta_5^b - Q^b(L) &= 0, \\ \delta_6^a - M^a(L) &= 0, & \delta_6^b - M^b(L) &= 0. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Kinematični robni pogoji so:

- na levem robu nosilca

$$\begin{aligned} u^a(0) &= U_1^a, & u^b(0) &= U_1^b, \\ w^a(0) &= U_2^a, & w^b(0) &= U_2^b, \\ \varphi^a(0) &= U_3^a, & \varphi^b(0) &= U_3^b, \end{aligned} \quad (4.81)$$

- na desnem robu nosilca

$$\begin{aligned} u^a(L) &= U_4^a, & u^b(L) &= U_4^b, \\ w^a(L) &= U_5^a, & w^b(L) &= U_5^b, \\ \varphi^a(L) &= U_6^a, & \varphi^b(L) &= U_6^b. \end{aligned} \quad (4.82)$$

V enačbah (4.79) – (4.82) smo s S_i^a, S_i^b označili predpisane posplošene točkovne sile in z U_i^a, U_i^b predpisane posplošene pomike ($i = 1, 2, \dots, 6$).

Sistem enačb (4.75), (4.76), (4.77) sestavlja 16 enačb za 16 neznank. Te sestavlja skupaj z veznimi enačbami (4.70), (4.71), (4.72), (4.73), (4.74), (4.75), (4.76) in (4.77) sistem 21 enačb za prav toliko neznank.

Neznanke so: $u^a, w^a, \varphi^a, N^a, Q^a, M^a, \varepsilon^a, \kappa^a, u^b, w^b, \varphi^b, N^b, Q^b, M^b, \varepsilon^b, \kappa^b, \Delta, d, x^{a*}, p_i$ in p_n .

Pri tem smo upoštevali znane zveze:

$$p_i(x) = p_i^a(x^a) = p_i^b(x^b), \quad (4.83)$$

$$p_n(x) = p_n^a(x^a) = p_n^b(x^b) \quad (4.84)$$

in

$$\mathcal{P}_x^a(x^a) = p_x^a(x^a) + p_t(x^a), \quad (4.85)$$

$$\mathcal{P}_z^a(x^a) = p_z^a(x^a) + p_n(x^a), \quad (4.86)$$

$$\mathcal{M}_y^a(x^a) = m_y^a(x^a), \quad (4.87)$$

$$\mathcal{P}_x^b(x^b) = p_x^b(x^b) - p_t(x^b), \quad (4.88)$$

$$\mathcal{P}_z^b(x^b) = p_z^b(x^b) - p_n(x^b), \quad (4.89)$$

$$\mathcal{M}_y^b(x^b) = m_y^b(x^b). \quad (4.90)$$

Ne izgubimo na splošnosti, če v nadaljevanju za materialni koordinati sloja 'a' in sloja 'b' označimo s skupno oznako

$$x^b = x^a = x.$$

4.2 Reševanje

V tem podpoglavju detajlno opišemo analitično reševanje posplošenih ravnotežnih enačb (4.75) – (4.82) kompozitnega nosilca, ki smo jih predstavili v poglavju 4.1. Najprej enačbi (4.70) in (4.72) trikrat oz. štirikrat odvajamo

$$\Delta''' = u^{a'''} - u^{b'''} - e\varphi^{a'''} \quad (4.91)$$

$$d^{(IV)} = w^{a(IV)} - w^{b(IV)}. \quad (4.92)$$

V nadaljevanju dvakrat odvajamo enačbe (4.78):

$$\varepsilon^{a''} = D_{11}^a N^{a''} + D_{12}^a M^{a''},$$

$$\kappa^{a''} = D_{21}^a N^{a''} + D_{22}^a M^{a''},$$

$$\varepsilon^{b''} = D_{11}^b N^{b''} + D_{12}^b M^{b''},$$

$$\kappa^{b''} = D_{21}^b N^{b''} + D_{22}^b M^{b''}. \quad (4.93)$$

Sedaj v enačbah (4.93) upoštevamo ravnotežne enačbe (4.76) in dobimo

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^{a''} &= -D_{11}^a \mathcal{P}_x^{a'} - D_{12}^a \mathcal{P}_z^a - \mathcal{M}_y^{a'} D_{12}^a, \\
 \kappa^{a''} &= -D_{21}^a \mathcal{P}_x^{a'} - D_{22}^a \mathcal{P}_z^a - \mathcal{M}_y^{a'} D_{22}^a, \\
 \varepsilon^{b''} &= -D_{11}^b \mathcal{P}_x^{b'} - D_{12}^b \mathcal{P}_z^b - \mathcal{M}_y^{b'} D_{12}^b, \\
 \kappa^{b''} &= -D_{21}^b \mathcal{P}_x^{b'} - D_{22}^b \mathcal{P}_z^b - \mathcal{M}_y^{b'} D_{22}^b.
 \end{aligned} \tag{4.94}$$

Obtežbo \mathcal{P}_x^a , \mathcal{P}_z^a , \mathcal{P}_x^b in \mathcal{P}_z^b sestavljajo zunanja linijska obtežba in kontaktna linijska obtežba

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_x^a &= p_x^a - p_t = p_x^a - K\Delta, \\
 \mathcal{P}_z^a &= p_z^a - p_n = p_z^a - Cd, \\
 \mathcal{P}_x^b &= p_x^b + p_t = p_x^b + K\Delta, \\
 \mathcal{P}_z^b &= p_z^b + p_n = p_z^b + Cd,
 \end{aligned} \tag{4.95}$$

kjer smo predpostavili, da je zakon stika

$$\begin{aligned}
 p_t &= K\Delta, \\
 p_n &= Cd.
 \end{aligned} \tag{4.96}$$

Posplošene ravnotežne enačbe se še dodatno poenostavijo, če predpostavimo, da je zunanja linijska obtežba konstantna. V tem primeru je

$$p_x^{a'} = p_x^{b'} = \mathcal{M}_y^{a'} = \mathcal{M}_y^{b'} = 0.$$

Tako dobimo s pomočjo enačb (4.85) – (4.90), ter (4.96) zveze

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^{a''} &= +D_{11}^a K\Delta' - D_{12}^a p_z^a + D_{12}^a Cd, \\
 \kappa^{a''} &= +D_{21}^a K\Delta' - D_{22}^a p_z^a + D_{22}^a Cd, \\
 \varepsilon^{b''} &= -D_{11}^b K\Delta' - D_{12}^b p_z^b - D_{12}^b Cd, \\
 \kappa^{b''} &= -D_{21}^b K\Delta' - D_{22}^b p_z^b - D_{22}^b Cd.
 \end{aligned} \tag{4.97}$$

Ko v enačbah (4.91) in (4.92) upoštevamo enačbe (4.97), dobimo

$$\begin{aligned}
 \Delta''' &= \varepsilon^{a''} - \varepsilon^{b''} - e \cdot \kappa^{a''} = \\
 &= +D_{11}^a K \Delta' - D_{12}^a p_z^a + D_{12}^a C d + \\
 &+ D_{11}^b K \Delta' - D_{12}^b p_z^b + D_{12}^b C d + \\
 &+ e(-D_{21}^a K \Delta' + D_{22}^a p_z^a - D_{22}^a C d) \\
 &= k_1 \Delta' + k_2 d + k_3, \\
 d^{(IV)} &= \kappa^{b''} - \kappa^{a''} = \\
 &= -(D_{21}^b + D_{21}^a) K \Delta' - (D_{22}^b + D_{22}^a) C d - D_{22}^b p_z^b + D_{22}^a p_z^a, \\
 &= k_4 \Delta' + k_5 d + k_6,
 \end{aligned} \tag{4.98}$$

kjer je

$$\begin{aligned}
 k_1 &= (D_{11}^a + D_{11}^b - e D_{21}^a) K, \\
 k_2 &= (D_{11}^a + D_{11}^b - e D_{21}^a) C, \\
 k_3 &= -D_{12}^a p_z^a + D_{12}^b p_z^b + e D_{22}^a p_z^a,
 \end{aligned} \tag{4.99}$$

$$\begin{aligned}
 k_4 &= -(D_{21}^b + D_{21}^a) K, \\
 k_5 &= -(D_{22}^b + D_{22}^a) C, \\
 k_6 &= -D_{22}^b p_z^b + D_{22}^a p_z^a.
 \end{aligned} \tag{4.100}$$

Sistem enačb (4.98) predstavlja navadne diferencialne enačbe s konstantnimi členi, katerega rešitev je v literaturi dobro znana (Deo in Ragnavendra, 1994). K diferencialnima enačbama (4.98) pripadajoči robni pogoji so:

$$\Delta(0) = u^a(0) - u^b(0) - e \varphi^a(0), \tag{4.101}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta'(x) &= \varepsilon^a - \varepsilon^b - e \kappa^a \rightarrow \\
 \rightarrow \Delta'(0) &= D_{11}^a N^a(0) + D_{12}^a M^a(0) - D_{11}^b N^b(0) - D_{12}^b M^b(0) - \\
 &- e D_{21}^a N^a(0) - e D_{22}^a M^a(0)
 \end{aligned} \tag{4.102}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta''(x) &= u^{a''} - u^{b''} - e \varphi^{a''} = \varepsilon^{a'} - \varepsilon^{b'} - e \kappa^{a'} = \\
 &= -(e D_{21}^a - D_{11}^a - D_{11}^b) K \Delta(x) + (D_{12}^a - e D_{22}^a) Q^a(x) - D_{12}^b Q^b(x) + \\
 &(e D_{22}^a - D_{12}^a) \mathcal{M}_y^a(x) + D_{12}^b \mathcal{M}_y^b(x).
 \end{aligned} \tag{4.103}$$

Če predpostavimo, da je zunanja linijska momentna obtežba $\mathcal{M}_y^a(x)$ in $\mathcal{M}_y^b(x)$ enaka nič, se enačba (4.103) poenostavi:

$$\Delta''(0) = -(e \cdot D_{21}^a - D_{11}^a - D_{11}^b) \cdot k \cdot [u^a(0) - u^b(0) - e \cdot \varphi^a(0)] + (D_{12}^a - e \cdot D_{22}^a) \cdot Q^a(0) - D_{12}^b \cdot Q^b(0), \quad (4.103)$$

Robni pogoji k drugi diferencialni enačbi (4.98) so:

$$d(0) = w^a(0) - w^b(0) - e, \quad (4.104)$$

$$d'(0) = \varphi^b(0) - \varphi^a(0), \quad (4.105)$$

$$d'' = \kappa^b - \kappa^a = D_{21}^b N^b(x) + D_{22}^b M^b(x) - D_{21}^a N^a(x) - D_{22}^a M^a(x) \rightarrow \\ \rightarrow d''(0) = D_{21}^b N^b(0) + D_{22}^b M^b(0) - D_{21}^a N^a(0) - D_{22}^a M^a(0), \quad (4.106)$$

$$d'''(x) = D_{21}^b N^{b'} + D_{22}^b M^{b'} - D_{21}^a N^{a'} - D_{22}^a M^{a'} = \\ - (D_{21}^a + D_{21}^b) K \Delta(x) + D_{22}^b Q^b(x) - D_{22}^a Q^a(x) + D_{22}^a \mathcal{M}_y^a(x) - D_{22}^b \mathcal{M}_y^b(x). \quad (4.107)$$

Tudi sedaj predpostavimo, da je $\mathcal{M}_y^a(x) = \mathcal{M}_y^b(x) = 0$, s tem se enačba (4.107) poenostavi

$$d'''(0) = -(D_{21}^a + D_{21}^b) K \Delta(0) + D_{22}^b Q^b(0) - D_{22}^a Q^a(0). \quad (4.108)$$

Če prvo enačbo (4.98) štirikrat odvajamo

$$\Delta^{(VII)} = k_1 \Delta^{(V)} + k_2 d^{(IV)} + k_3^{(IV)} \quad (4.109)$$

in uporabimo drugo enačbo sistema (4.98) ter vstavimo dobljeni izraz v (4.109), dobimo

$$\Delta^{(VII)} = k_1 \Delta^{(V)} + k_2 k_4 \Delta' + k_2 k_5 d + k_2 k_6 + k_3^{(IV)}. \quad (4.110)$$

Nato vstavimo v enačbo (4.110) še zvezo $k_2 d = \Delta''' - k_1 \Delta' - k_3$ in po kratkem računu dobimo iz dveh diferencialnih enačb tretjega in četrtega reda (4.98) diferencialno enačbo sedmega reda s konstantnimi koeficienti

$$\Delta^{(VII)} - k_1 \cdot \Delta^{(V)} - k_5 \cdot \Delta''' + (k_5 \cdot k_1 - k_2 \cdot k_4) \cdot \Delta' + k_5 \cdot k_3 - k_2 \cdot k_6 = 0. \quad (4.111)$$

Znano je, da je rešitev navadnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti odvisna od ničel karakterističnega polinoma (Deo in Ragnavendra, 1994)

$$y^7 - k_1 y^5 - k_5 y^3 + (k_5 k_1 - k_2 k_4) y' + k_5 k_3 - k_2 k_6 = 0. \quad (4.112)$$

S pomočjo matematičnega programa Mathematica smo s parametrično analizo ugotovili, da ima karakteristični polinom (4.112) za inženirsko zanimive materialne parametre 3 realne in 2 konjugirano kompleksni ničli. Karakteristični polinom lahko zapišemo v obliki

$$(y - r_1)(y - r_2)(y - r_3)(y - c_1)(y - \bar{c}_1)(y - \bar{c}_2)(y - \bar{c}_2) = 0, \quad (4.113)$$

kjer so r_1, r_2, r_3 realne ničle, $c_1 = \alpha_1 + \alpha_2 i, \bar{c}_1 = \alpha_1 - \alpha_2 i, c_2 = \beta_1 + \beta_2 i, \bar{c}_2 = \beta_1 - \beta_2 i$ pa konjugirano kompleksne ničle. Skladno z Deo in Raghavendra (1994) je splošna rešitev diferencialne enačbe naslednja

$$\Delta(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x} + e^{\alpha_1 x} (C_4 \cos \alpha_2 x + C_5 \sin \alpha_2 x) + e^{\beta_1 x} (C_6 \cos \beta_2 x + C_7 \sin \beta_2 x). \quad (4.114)$$

5 RAČUNSKI PRIMERI

5.1 Kompozitni prostoležeči nosilec – analiza natančnosti

S prvim računskim primerom analiziramo pravilnost predstavljene analitične rešitve za napetostno in deformacijsko stanje dvoslojnih kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa in razmika med slojema. To ocenimo s primerjavo med našimi analitičnimi rešitvami in dvema rešitvama, ki sta predstavljeni v literaturi. Prva je analitična rešitev in sta jo predstavila Robinson in Naraine (1988). Druga je numerična, predstavili pa so jo Gara, Ranzi in Leoni (2006).

5.1.1 Newmarkov sovprežni nosilec

Opazujemo sovprežni prostoležeči nosilec dolžine $L = 955$ cm, ki so ga prvi analizirali Newmark, Siess in Viest (1951). Zato ga v nadaljevanju imenujemo Newmarkov kompozitni nosilec. Poleg Newmarka in sodelavcev sta omenjeni nosilec za analizo skupnega delovanja betonske plošče in jeklenega nosilca uporabila tudi Robinson in Naraine (1988). Detajlno ju je zanimalo, kako vplivata zdrs in razmikanje slojev kompozitnega nosilca na napetostno in deformacijsko stanje. To sta ocenila s pomočjo izpeljanih analitičnih izrazov.

Geometrijske podatke betonske plošče prikazujemo v preglednici 1, geometrijske podatke jeklenega nosilca v preglednici 2, pomen geometrijskih količin jeklenega nosilca pa na sliki 55.

Preglednica 1: Geometrijski podatki betonske plošče

Dimenzije	Širina (b)	Debelina (t)
	183 cm	15.24 cm
	(6 foot)	(6 inch)

Ker v članku Robinson in Naraine (1988) zasledimo od potrebnih materialnih podatkov samo karakteristično trdnost betona, ki je

$$f_{ck} = 6400 \text{ psi} = 6400 \cdot 6894.757 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 44.13 \text{ MPa}$$

smo skladno s standardom Eurocode 2 določili elastični modul betonske plošče z enačbo

$$E = E_{cm} = 9500 \cdot (f_{ck} + 8)^{\frac{1}{2}} [\text{MPa}] \cong 3500 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}. \quad (5.115)$$

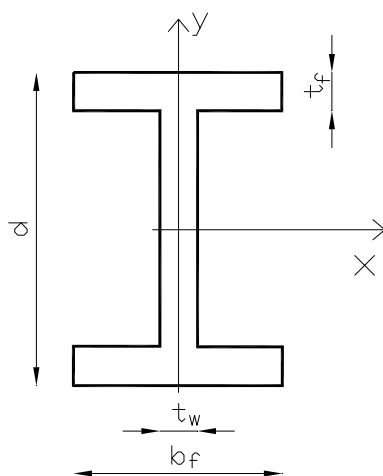
Tudi vrednost za elastični modul jekla smo izbrali skladno s standardom Eurocode 3, ki je

$$E_s = 21000 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}. \text{ Ker Robinson in Naraine (1988) v izpeljanem matematičnem modelu}$$

nista vpeljala debeline vmesnega sloja, izberemo v analizi $e = 0$.

Preglednica 2: Geometrijski podatki jeklenega nosilca

$A(\text{cm}^2)$	$d(\text{cm})$	$b_f(\text{cm})$	$t_f(\text{cm})$	$t_w(\text{cm})$	$I_{xx}(\text{cm}^4)$
144.52	60.96	22.83	1.73	1.12	87408.6
(22.4 in ²)	(23.92 in)	(8.99 in)	(0.68 in)	(0.44 in)	(2100 in ⁴)

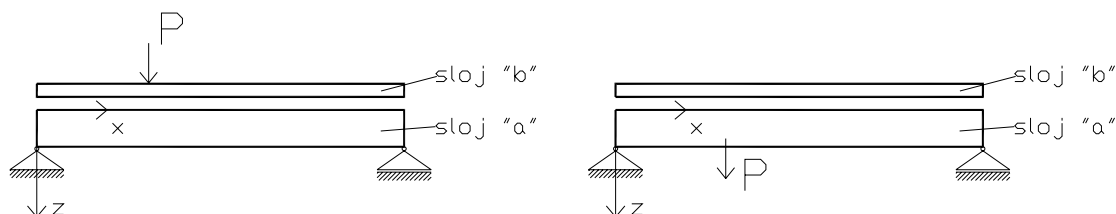


Slika 55: Prečni prerez jeklenega podnosilca

Obtežni primeri

Da sta Robinson in Naraine (1988) prikazala vpliv razmikanja med sloji na obnašanje kompozitnega nosilca, sta obravnavala dva obtežna primera. V obeh primerih je sovprežni nosilec obremenjen s točkovno silo $P = 10 \text{ kN}$ na oddaljenosti 300 cm od levega roba nosilca.

V prvem obtežnem primeru (primer 3 - A) je prijemališče sile na referenčni osi betonske plošče, v drugem (primer 3 - B) pa na referenčni osi jeklenega nosilca (slika 56).



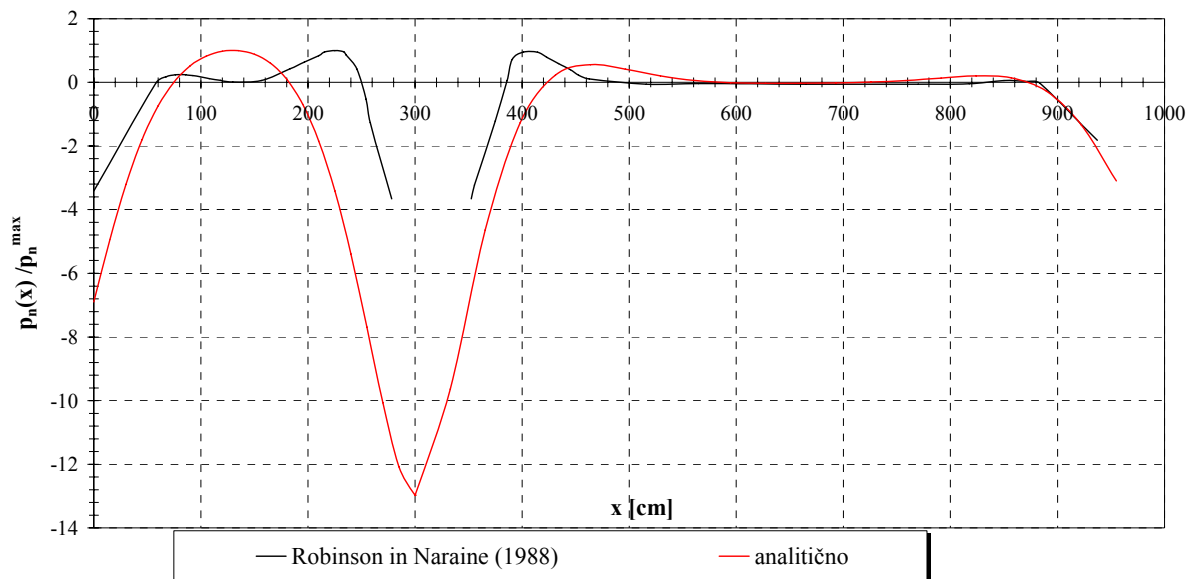
Slika 56: Lega točkovne sile $P = 10\text{kN}$: (levo) primer z oznako 3 - A, (desno) primer z oznako 3 - B

Zelo pomembna materialna podatka pri analizi dvoslojnih kompozitnih nosilcev sta strižna togost K in prečna (normalna) togost stika, ki smo jo označili s C . Ker Robinson in Naraine (1988) podajata samo strižno togost stika

$$K = 5.5 \cdot 10^6 \frac{\text{lbs}}{\text{in}} = 9823 \frac{\text{kN}}{\text{cm}},$$

smo za primerjavo rezultatov za prečno togost stika izbrali $C = 100 \frac{\text{kN}}{\text{cm}}$. Za izbrani C so se naši rezultati in rezultati Robinsona in Naraine (1988) najbolj ujemali.

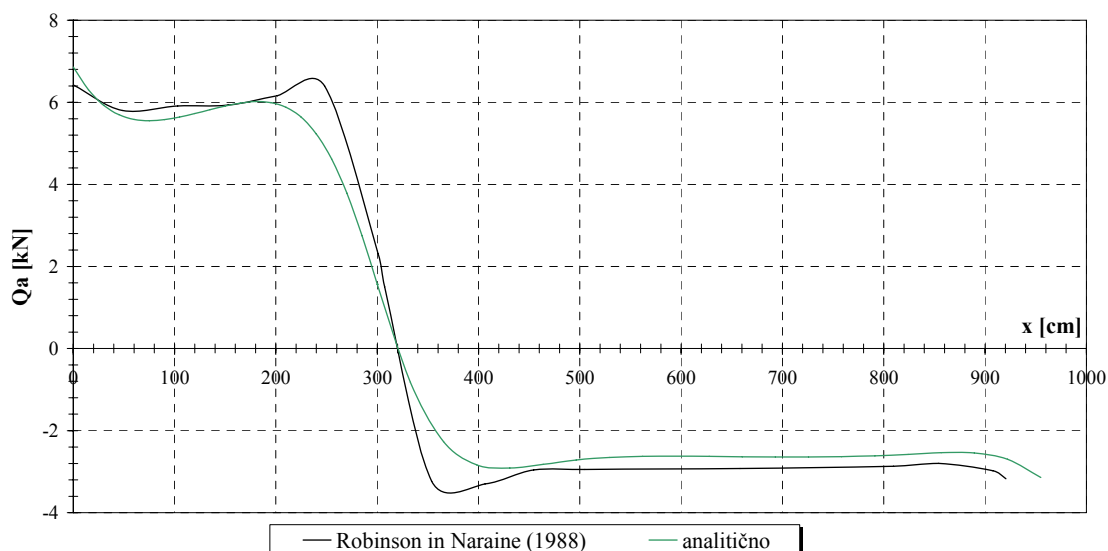
V nadaljevanju prikazujemo primerjavo med našimi rezultati in rezultati, ki jih podajata Robinson in Naraine (1988). Za obtežni primer 3 - A primerjamo vrednosti za kontaktno linijsko obtežbo v prečni smeri p_n ter vrednosti za prečno silo jeklenega nosilca Q_a ter betonske plošče Q_b . Na grafikonu 2 prikazujemo primerjavo normirane kontaktne linijske obtežbe p_n .



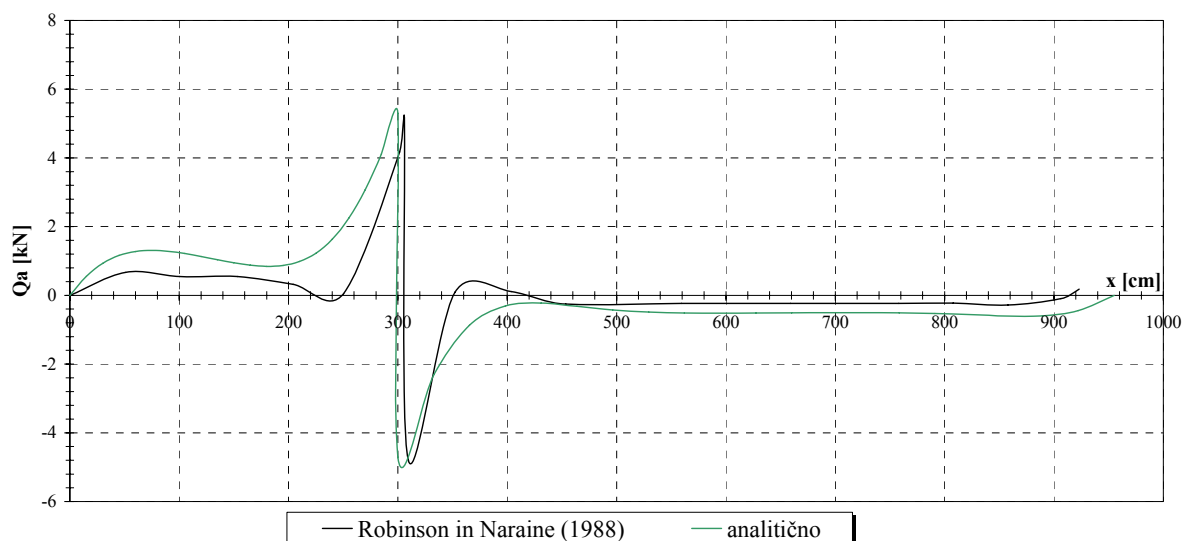
Grafikon 2: Primerjava kontaktne prečne linijske obtežbe p_n (primer 3 – A)

Na grafikonu 2 opazimo relativno kvalitetno dobro ujemanje rezultatov in presenetljivo zelo slabo kvantitativno ujemanje. To odstopanje je lahko posledica slabo izbranih, v članku nedoločenih materialnih parametrov kot tudi odčitavanj, vendar so ta odstopanja kljub temu prevelika.

Podobna so odstopanja tudi prečnih sil Q_a in Q_b , katerih primerjavo prikazujemo na grafikonih 3 in 4.

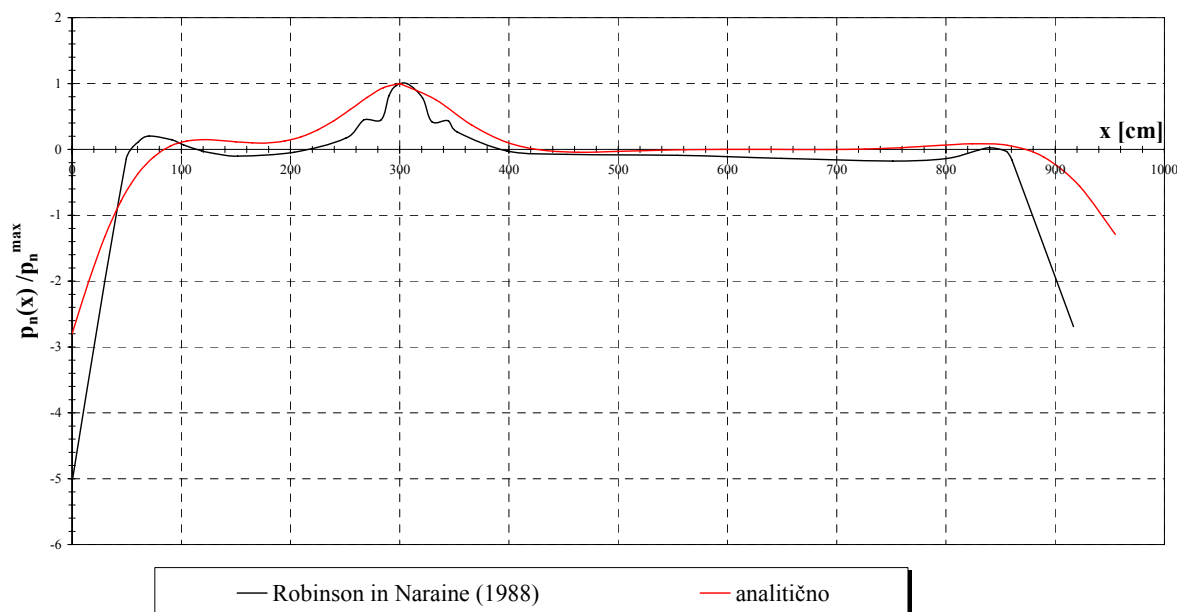


Grafikon 3: Primerjava prečne sile jeklenega nosilca Q_a (primer 3 – A)



Grafikon 4: Primerjava prečne sile betonske plošče Q_b (primer 3 – A)

Na koncu prikazujemo na grafikonu 5 še primerjavo normirane kontaktne linijske prečne sile p_n za obtežni primer 3 – B.



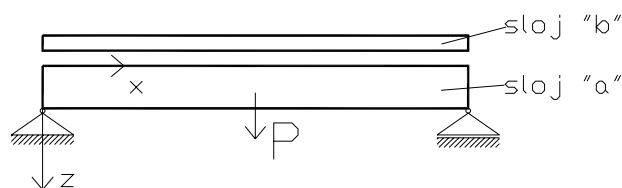
Grafikon 5: Primerjava kontaktne prečne linijske obtežbe p_n (primer 3 – B)

Kljub temu, da se sedaj rezultati bolje ujemajo, je napaka še vedno zelo velika. Ker so odstopanja med našimi analitičnimi rešitvami in analitičnimi rešitvami Robinsona in Narainea (1988) za značilne količine sovprežnih nosilcev prevelike, ne moremo oceniti ali je naša rešitev pravilna. Zato v nadaljevanju našo analitično rešitev primerjamo še z drugimi v

literaturi dostopnimi rešitvami. Žal so to samo numerične rešitve. Primerjavo z numerično rešitvijo, ki so jo predstavili Gara, Ranzija in Leoni (2006), prikazujemo v naslednjem primeru.

5.1.2 Primerjava z numerično rešitvijo Gare, Ranzija in Leonija (2006)

V tem primeru primerjamo naše analitične rezultate z numeričnimi rezultati Gare, Ranzija in Leonija (2006). Avtorji so v članku Gara et al. (2006) analizirali z metodo končnih elementov obnašanje točkovno obteženega sovprežnega prostoležečega nosilca. Pomembna novost predstavljenega matematičnega modela je v tem, da omogoča analizo obnašanja sovprežnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa in razmika med slojema nosilca. Konstitutivna modela stika v vzdolžni in prečni smeri sta linearna, le da je togost v prečni smeri različna med razmikanjem in stiskanjem. Tudi v tem primeru obravnavamo preprost primer prostoležečega sovprežnega nosilca, ki je obremenjen s točkovno silo na sredini razpona jeklenega nosilca (slika 57).



Slika 57: Lega točkovne sile

Skladno z dostopnimi rezultati v članku primerjamo analitične in numerične rezultate za različne vrednosti prečne in vzdolžne togosti stika. Te so s pomočjo brezdimenzionalnega parametra αL (Girhammar in Pan, 1993) predstavljene v preglednici 3. Geometrijski in materialni parametri obravnavanega sovprežnega nosilca so: betonska plošča z dimenzijami $220\text{cm} \times 23\text{cm}$ z 1% armiranjem, spodnji prefabriciran jeklen profil z dimenzijami pasnic $250\text{mm} \times 16\text{mm}$ in stojino $660\text{mm} \times 10\text{mm}$, elastični modul armature in jekla je 210000MPa , karakteristična trdnost betona (f_{ck}) je 32MPa , pripadajoče materialne karakteristike betona pa so bile določene skladno s standardom Eurocode 2 za beton pri starosti 28 dni.

Preglednica 3: Vzdolžne (strižne) in prečne vrednosti togosti stika (Gara et al., 2006)

	αL za prečno togost stika	αL za strižno togost stika
Primer A	1	1
Primer B	1	100
Primer C	100	1
Primer D	100	100

Podane karakteristike stika obravnavajo značilne vrednosti med zelo podajnim in togim stikom.

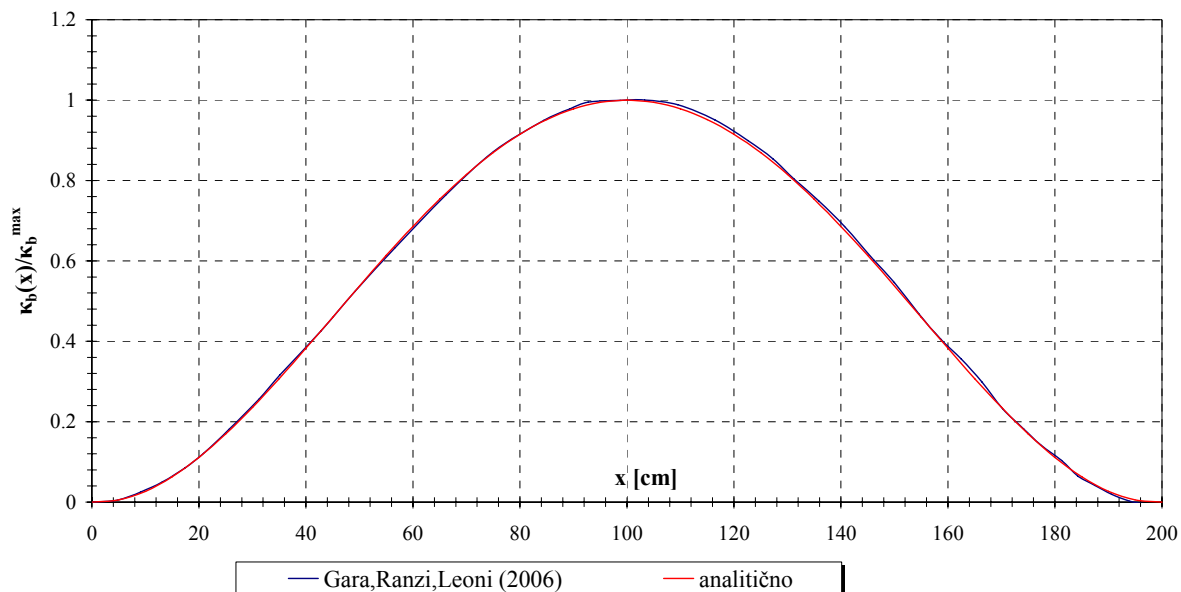
Zaradi slabe pogojenosti matrike sistema enačb za določitev ustreznih konstant, smo morali vrednosti za strižno in prečno togost stika nekoliko prilagoditi. Tako smo v obravnavanih primerih upoštevali vrednosti podane v preglednici 4.

Preglednica 4: Računske vzdolžne (strižne) in prečne vrednosti togosti stika

	prečna togost stika (kN/cm)	strižna togost stika (kN/cm)
Primer A	10	1
Primer B	1000	100000
Primer C	100000000	1
Primer D	1000000000000	100

Primer A

Na grafikonu 6 prikazujemo primerjavo normirane ukrivljenosti betonske plošče. Opozorimo pa, da je v tem primeru interakcija med betonsko ploščo in jeklenim nosilcem zelo majhna.

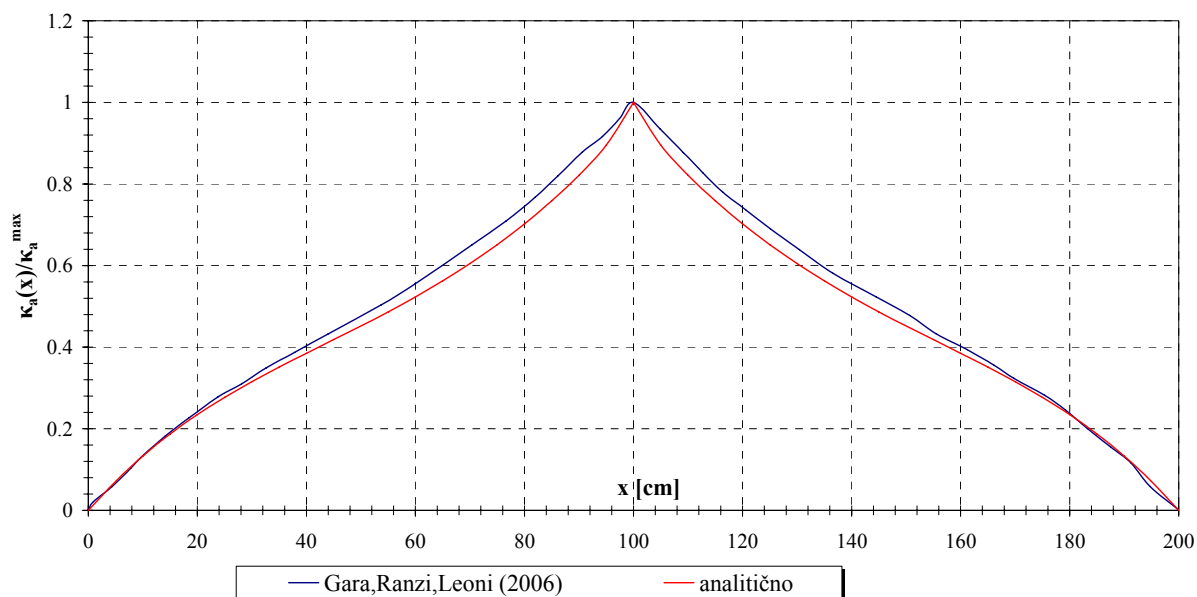


Grafikon 6: Primerjava normirane ukrivljenosti betonske plošče (primer A).

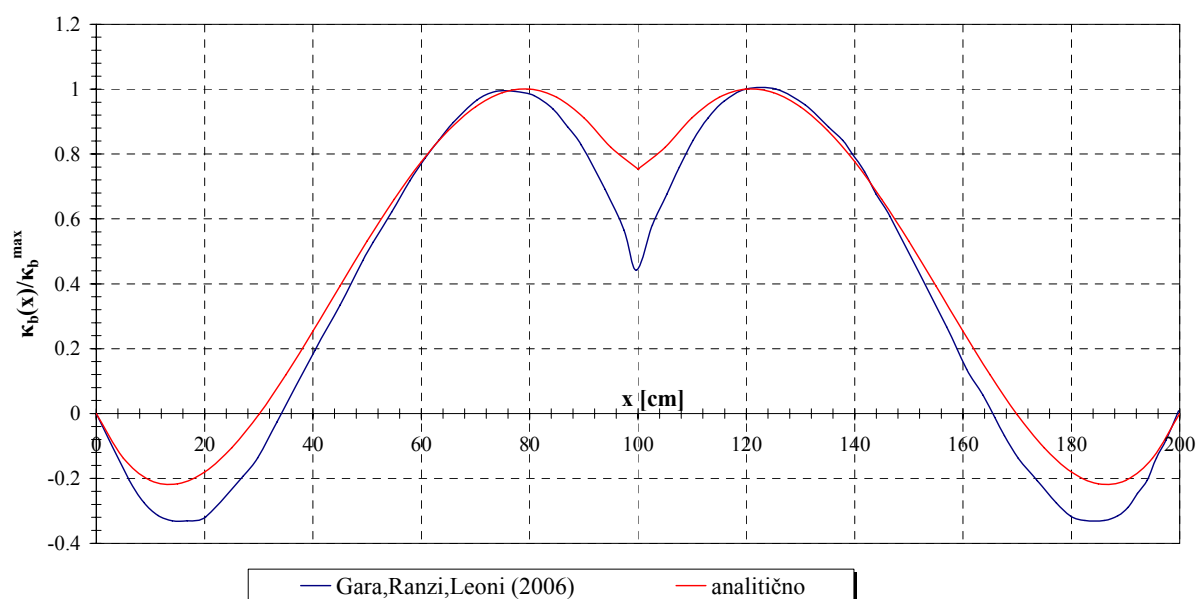
Kot vidimo na grafikonu 6, je ujemanje praktično popolno. To pa pravzaprav že potrjuje pravilnost naše analitične rešitve.

Primer B

V primeru B povečamo, glede na primer A samo strižno togost stika betonske plošče in jeklenega nosilca. V analizi primerjamo ukrivljenosti podnosilcev ter zamik na stiku. Kot vidimo na grafih, so rezultati primerljivi, vendar to ujemanje ni več tako dobro kot prej. Razlika je v tem, da v računu nismo upoštevali istih togosti stika kot so jih upoštevali avtorji članka, ampak smo zaradi slabe pogojenosti matrike sistema enačb te vrednosti nekoliko prilagodili (glej preglednica 3 in 4).

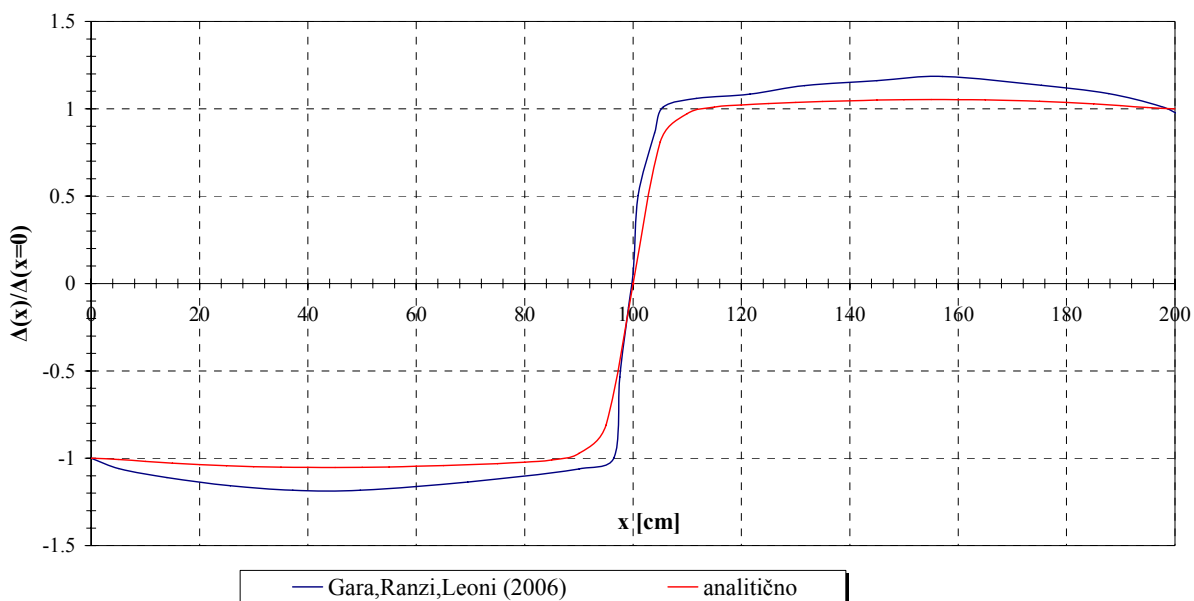


Grafikon 7: Primerjava normirane ukrivljenosti nosilca (primer B)



Grafikon 8: Primerjava normirane ukrivljenosti betonske plošče (primer B)

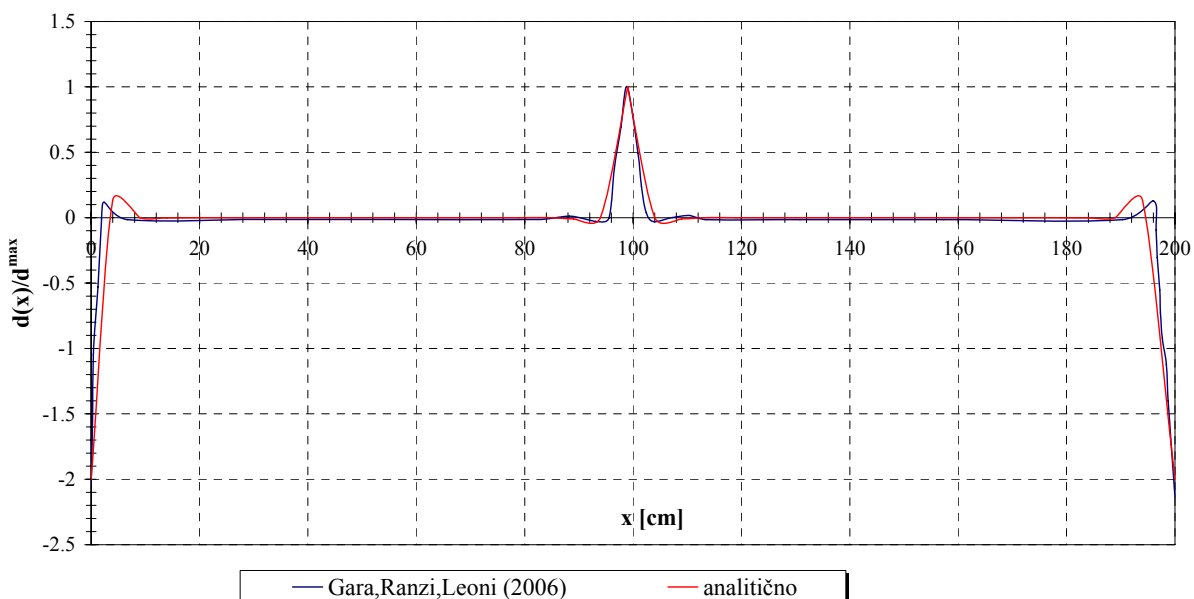
V nadaljevanju na grafikonu 9 prikazujemo primerjavo normiranega zamika na stiku sovprežnega nosilca. Tudi tu so odstopanja relativno majhna in so verjetno posledica različnih vrednosti togosti stika in ne mogoče netočne numerične ali analitične rešitve.



Grafikon 9: Primerjava normiranega zamika med slojema na stiku (primer B)

Primer C

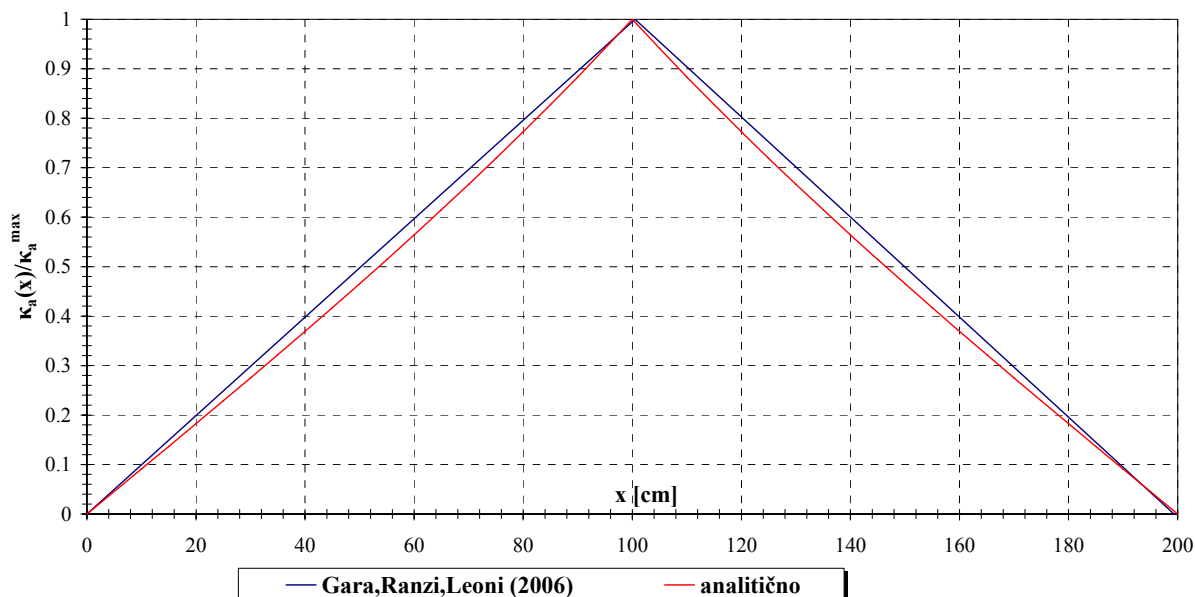
V računskem primeru C povečamo prečno togost stika glede na vrednosti v primeru A. Na grafikonu 10 prikazujemo primerjavo normiranega razmika na stiku. Tudi sedaj opazimo dobro ujemanje rezultatov. Zanimiva je koncentracija razmika med slojema ob točkovni sili in ob podporah.



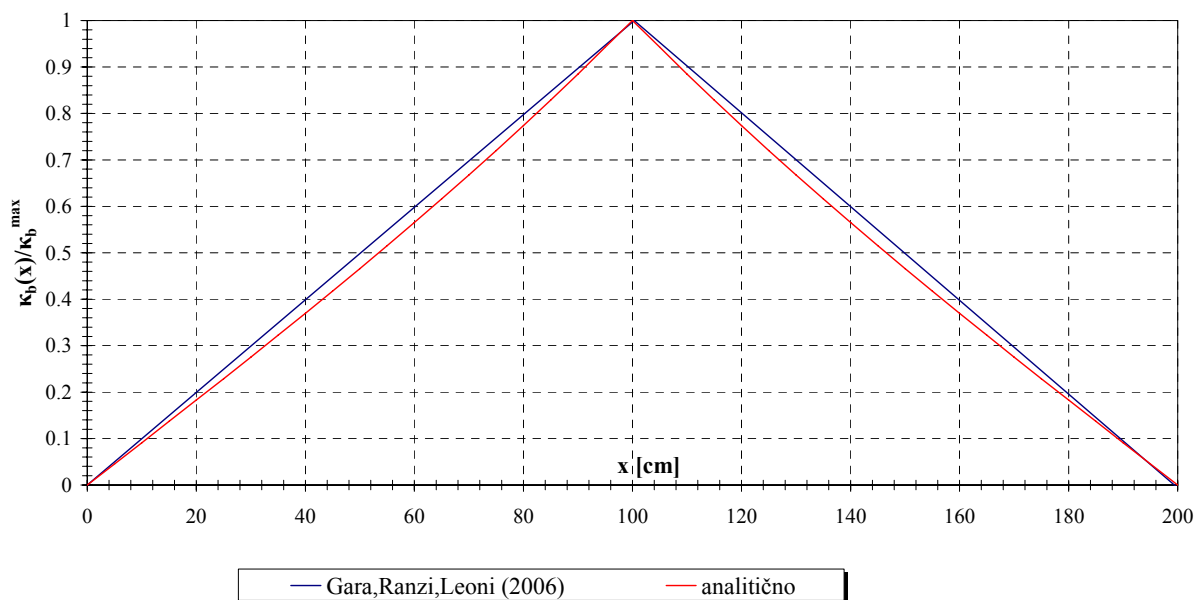
Grafikon 10: Primerjava normiranega razmika na stiku (primer C)

Primer D

S tem računskim primerom analiziramo obnašanje sovprežnega nosilca s togim stikom. V analizi primerjamo normirane ukrivljenosti jeklenega nosilca (grafikonu 11) in betonske plošče (grafikonu 12).



Grafikon 11: Primerjava normirane ukrivljenosti jeklenega nosilca (primer D)



Grafikon 12: Primerjava normirane ukrivljenosti betonske plošče (primer D)

Tudi sedaj na grafikonih 11 in 12 opazimo zelo dobro ujemanje med našimi analitičnimi rešitvami in numeričnimi rešitvami, ki so jih predstavili Gara, Ranzi in Leoni (2006).

Iz prikazanega lahko sklepamo, da je analitična rešitev, ki smo jo predstavili za določitev obnašanja dvoslojnih elastičnih kompozitnih nosilcev, pravilna in zato primerna za analizo vseh vrst elastičnih dvoslojnih kompozitnih ravninskih linijskih konstrukcij.

5.2 Dvoslojni leseni prostoležeči nosilec – parametrična študija

V tem računskem primeru prikažemo primerjavo med matematičnim modelom in analitično rešitvijo, ki ju predstavljamo v diplomski nalogi, in eksperimentalnimi rezultati. Detajlno nas zanima, kako vplivata prečna togost stika med slojema in debelina vmesnega sloja na napetostno in deformacijsko stanje dvoslojnega lesenega prostoležečega nosilca.

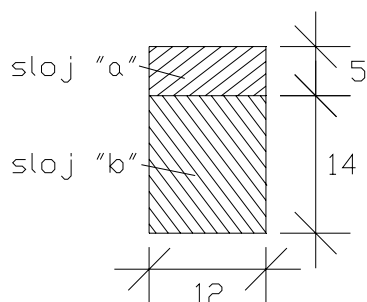
Parametrično študijo prikažemo na dvoslojnem lesenem prostoležečem nosilcu, ki ga je v svoji diplomski nalogi eksperimentalno in numerično analiziral Čas (1999). Nosilec je bil preizkušen v konstrukcijsko prometnem laboratoriju Fakultete za gradbeništvo in geodezijo, Univerze v Ljubljani. Med preizkusom so merili prečne pomike nosilca in zamike med slojema. Poleg teh meritev pa so predhodno izmerili tudi materialne karakteristike lesa in stika med slojema:

- preiskave tlačne trdnosti lesa vzporedno z vlakni,
- preiskave natezne trdnosti lesa vzporedno z vlakni,
- preiskave strižne togosti in nosilnosti veznih sredstev oziroma stika med slojema in
- preiskave veznih sredstev na izvlek.

V nadaljevanju so obravnavani dvoslojni leseni nosilec analizirali tudi s komercialnim računalniškim programom Nonfran. Pri tem so stik med slojema modelirali z diskretnimi vzmetmi v vzdolžni in prečni smeri (Čas, 1999).

5.2.1 Geometrijski in materialni podatki dvoslojnega lesenega nosilca

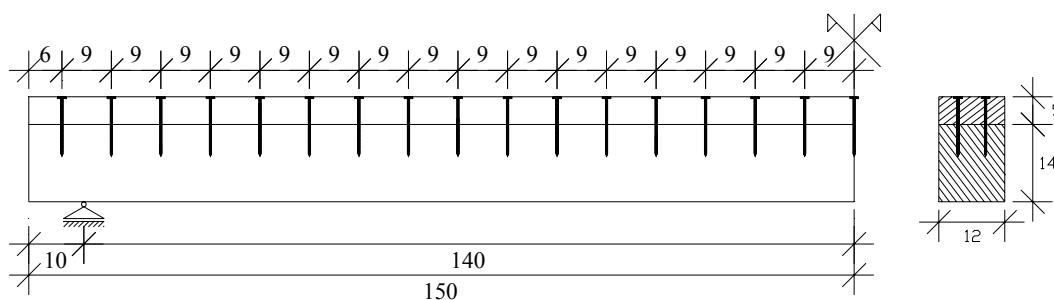
Prečni prerez obravnavanega dvoslojnega lesenega nosilca prikazujemo na sliki 58.



Slika 58: Prečni prerez sestavljenega lesenega nosilca

Preizkušanci so bili izdelani iz lesa, ki je po klasifikaciji standarda Eurocode 5 uvrščen v trdnostni razred C24. Za vezna sredstva, ki povezujejo zgornji in spodnji pas so bili izbrani standardni žebliji 4/100, ki so razporejeni v dveh vzporednih vrstah. S pomočjo standarda Eurocode 5 pa so nato določili optimalno razporeditev veznih sredstev.

Preiskovali so tri različne razporeditve žebeljev na stiku med slojema. V vseh treh primerih so bili žebliji v dveh vrstah, spreminjala se je le razdalja med žebliji. Za primerjalno analizo smo izbrali primer, kjer so žebliji pritrjeni v vzdolžni smeri na razdalji 9 cm, razen na robovih, kjer so razmaknjeni za 6 cm. Razporeditev žebeljev je prikazana tudi na sliki 59.

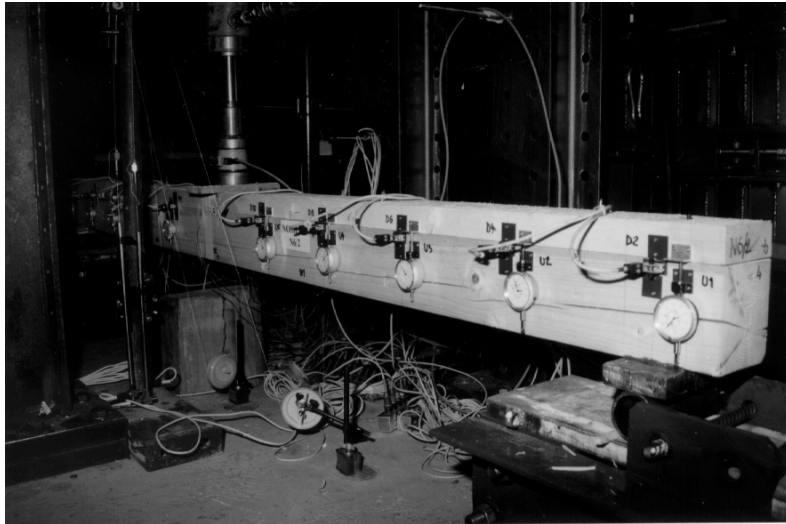


Slika 59: Razporeditev veznih sredstev

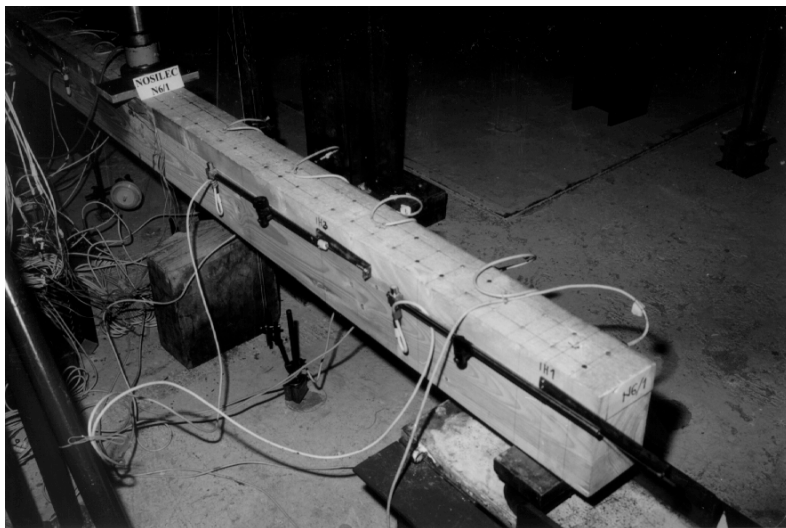
Opozorimo na razliko med eksperimentalnim in našim računskim modelom, ki je v tem, da smo previsni del nosilca v našem računskem primeru zanemarili. Prav tako smo predpostavili, da so žebliji enakomerno razporejeni vzdolž nosilca in tudi topredstavlja manjše neskladje z eksperimentalnim modelom.

5.2.2 Opis eksperimenta in določitev materialnih karakteristik za računsko analizo

Dvoslojni prostoležeči leseni nosilec so upogibno obremenjevali s pomočjo hidravličnega bata. Ta je bil nameščen na sredini razpona. Na nosilec so namestili vso potrebno merilno opremo, razporeditev merilne opreme pa je vidna na slikah 60 in 61.



Slika 60: Razporeditev merilne opreme na prednji strani dvoslojnega lesenega nosilca



Slika 61: Razporeditev merilne opreme na zadnji strani dvoslojnega lesenega nosilca

Obtežba

Obtežbo obravnavanega dvoslojnega lesenega nosilca sestavljata:

- lastna teža (nespremenljivi del obtežbe),

- točkovna sila na sredini razpona, ki jo nanašamo s pomočjo hidravličnega bata (spremenljivi del obtežbe).

Točkovno silo so med eksperimentom nanašali po predpisanem postopku, same meritve pa so izvedli za tri značilne vrednosti obtežbe:

- delovna obtežba ($P = 7.624kN$),
- računski obtežba ($P = 11.055kN$) in
- karakteristična – rušna obtežba ($P = 16.123kN$).

Velikosti vseh značilnih obtežnih nivojev so določili skladno s standardom Eurocode 5.

Glede na to, da je naš matematični model zasnovan na elastičnem materialnem modelu za les, smo lahko primerjavo rezultatov smiselno določili samo za najnižji nivo obtežbe, t.j. pri obtežbi $P = 7.624kN$, saj se je pri tej obtežbi dvoslojni leseni nosilec še vedno obnašal elastično.

Elastični modul lesa

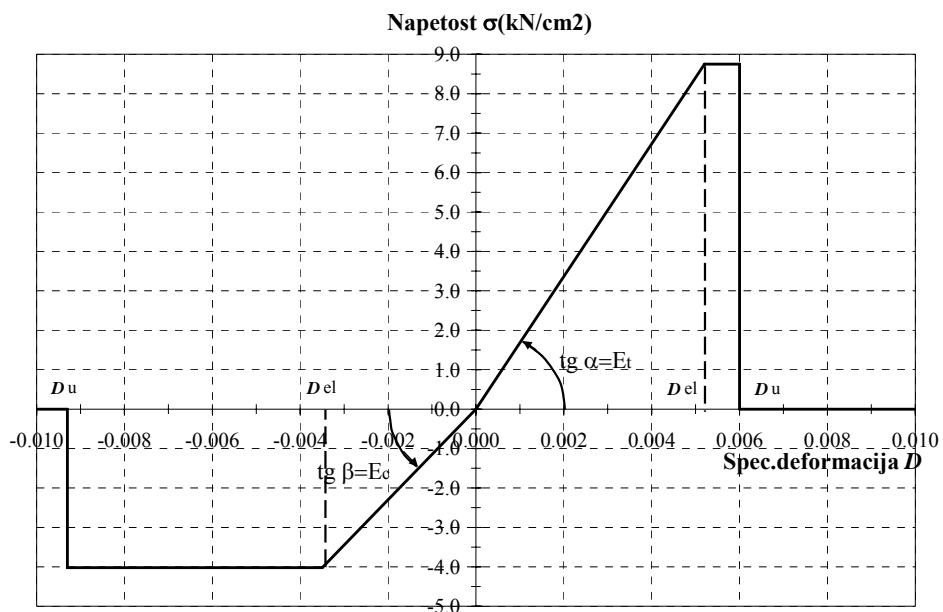
S preizkusi so določili vrednost elastičnega modula lesa v tlaku:

$$E_c = 1148.87 \frac{kN}{cm^2}$$

in vrednost elastičnega modula lesa v nategu:

$$E_t = 1677.62 \frac{kN}{cm^2}.$$

S pomočjo tlačnih in nateznih preizkusov so v nadaljevanju določili konstitutivni zakon lesa, ki ga prikazujemo na grafikonu 13.

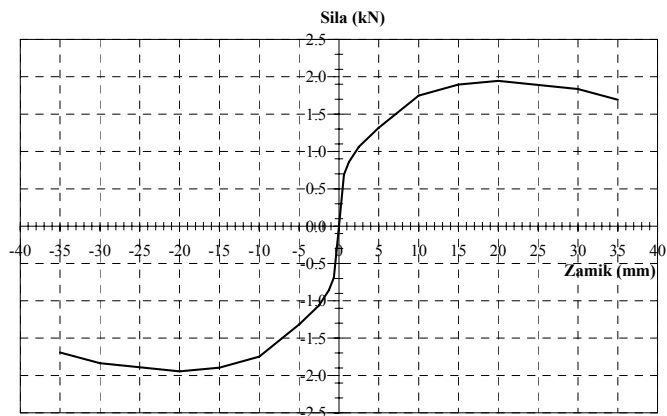


Grafikon 13: Konstitutivni zakon lesa v vzdolžni smeri za računsko analizo dvoslojnega lesenega nosilca

Kot vidimo na grafikonu 13, je konstitutivni zakon lesa nelinearen. Da ga lahko smiselno uporabimo v našem matematičnem modelu, ga lineariziramo, hkrati pa predpostavimo tako v tlaku kot v nategu tlačni elastični modul.

Strižna nosilnost veznih sredstev

Eksperimentalno določen konstitutivni model stika za strižno obremenjen žebelj prikazujemo na grafikonu 14.



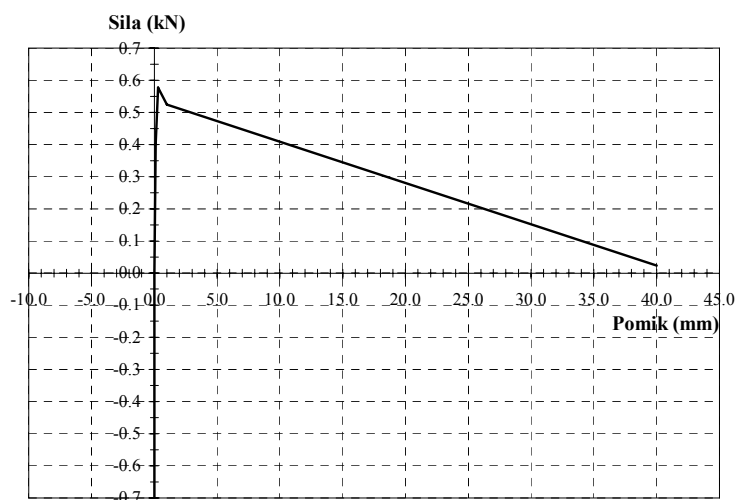
Grafikon 14: Konstitutivni model stika med slojema v vzdolžni smeri

Tudi ta model je nelinearen, zato ga sedaj lineariziramo, in sicer okoli začetne nedeformirane lege. Tako je togost enega žebnja v vzdolžni smeri $\bar{K} = 11,016 \frac{kN}{cm}$. Ker pa v našem modelu strižne povezave ne modeliramo s točkovnimi vzmetmi, ampak vzmet zvezno razmažemo – povprečimo po celem vmesnem sloju, privzamemo za strižno togost stika vrednost

$$K = \frac{2(\text{vrsti}) \cdot 11,016 \frac{kN}{cm}}{9cm} = 2,448 \frac{kN}{cm},$$
 ki je merjena na dolžinsko enoto (cm) v vzdolžni smeri.

Nosilnost veznih sredstev na izvlek (razmik oziroma stisk)

Eksperimentalno določen konstitutivni zakon stika na izvlek (razmik) za en žebelj prikazujemo na grafikonu 15. Ker je tudi ta nelinearen, ga moramo za uporabo v našem matematičnem modelu linearizirati. Hkrati pa predpostavimo enako obnašanje stika za izvlek (razmik) in za stisk.



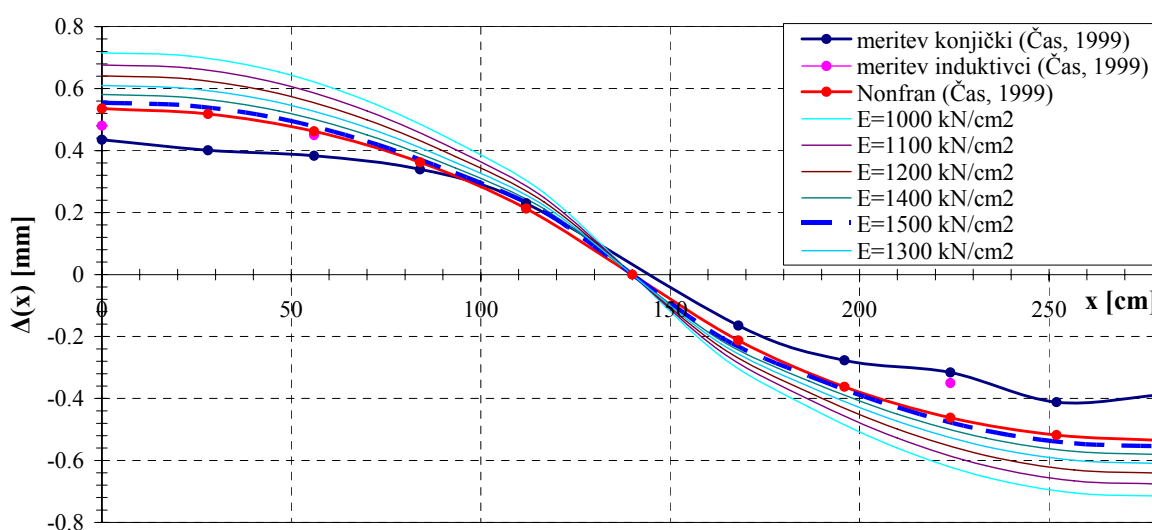
Grafikon 15: Konstitutivni model stika v prečni smeri

Togost enega žebnja v prečni smeri (pri natezni sili) je $\bar{C} = 40,2 \frac{kN}{cm}$, kar je enako začetni togosti žebnja pri izvleku. Ker tudi sedaj upoštevamo vzmet, ki je enakomerno razmazana vzdolž stika, dobimo

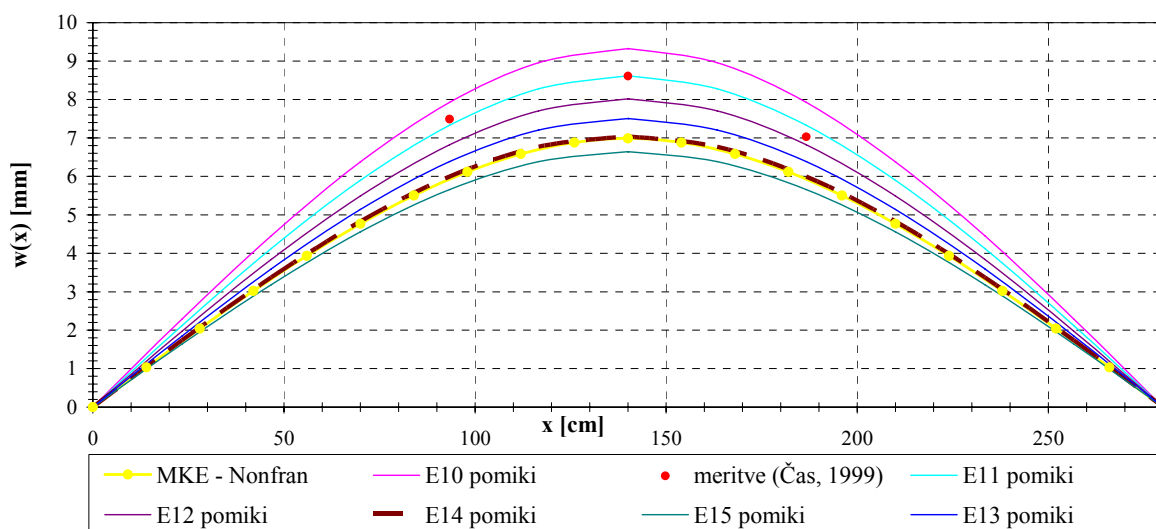
$$C = \frac{2(\text{vrsti}) \cdot 40.2 \frac{kN}{cm}}{9cm} = 8.93 \frac{kN}{cm^2}$$
, ki je zopet merjena na dolžinsko enoto (cm) v vzdolžni smeri.

5.2.3 Analiza primernosti predstavljenega matematičnega modela

Kot smo že povedali, analiziramo primernost predstavljenega matematičnega modela in pripadajoče analitične rešitve za določitev napetostnega in deformacijskega stanja dvoslojnih lesenih nosilcev s primerjavo med eksperimentalnimi in računskimi rezultati. Primerjavo za zamik na stiku prikazujemo na grafikonu 16, za prečni pomik pa na grafikonu 17. Kot opozarja že Čas (1999) v svoji diplomski nalogi, je izmerjeni elastični modul lesa praktično neustrezen za analizo obravnavanega dvoslojnega lesenega nosilca. Neustreznost izmerjenega elastičnega modula za analizo je verjetno posledica spremenjenih vlažnostnih razmer med merjenjem modula in med izvajanjem eksperimenta. Zato na grafionih 16 in 17 prikazujemo rezultate za različne vrednosti elastičnega modula. Ta se spreminja od $E = 1000 \frac{kN}{cm^2}$ do $E = 1500 \frac{kN}{cm^2}$. Zaradi lažjega pisanja smo označili elastični modul z Eab (ab = 10,11,12,13,14 in 15), kjer na primer E10 pomeni $E = 1000 \frac{kN}{cm^2}$. V vseh prikazanih rezultatih smo privzeli debelino vmesnega sloja enako 0 ($e = 0$) in velikost točkovne obtežbe $P = 7.624kN$.



Grafikon 16: Primerjava zamika na stiku dveh nosilcev za $P = 7.624kN$ in $C = 8.93 kN/cm$



Grafikon 17: Primerjava prečnega pomika spodnjega nosilca za $P = 7.624\text{kN}$ in $C = 8.93\text{kN/cm}$

Na grafikonu 16 vidimo, da se analitična rešitev za zamik zelo dobro ujame z eksperimentalno pri vrednosti elastičnega modula $1500 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$. Podobno vidimo na grafikonu 17 - da se analitične vrednosti za prečne pomike najbolj ujamejo z izmerjenimi pomiki pri vrednosti elastičnega modula $1100 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$. V nadaljevanju izdelamo parametrično študijo vpliva prečne togosti stika C in debeline vmesnega sloja e na napetostno in deformacijsko stanje dvoslojnega lesenega nosilca. V vseh primerih bomo za elastični modul lesa izbrali vrednost $E = 1500 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$.

5.2.4 Analiza vpliva parametrov C in e na obnašanje dvoslojnega lesenega nosilca

Vpliv parametra C

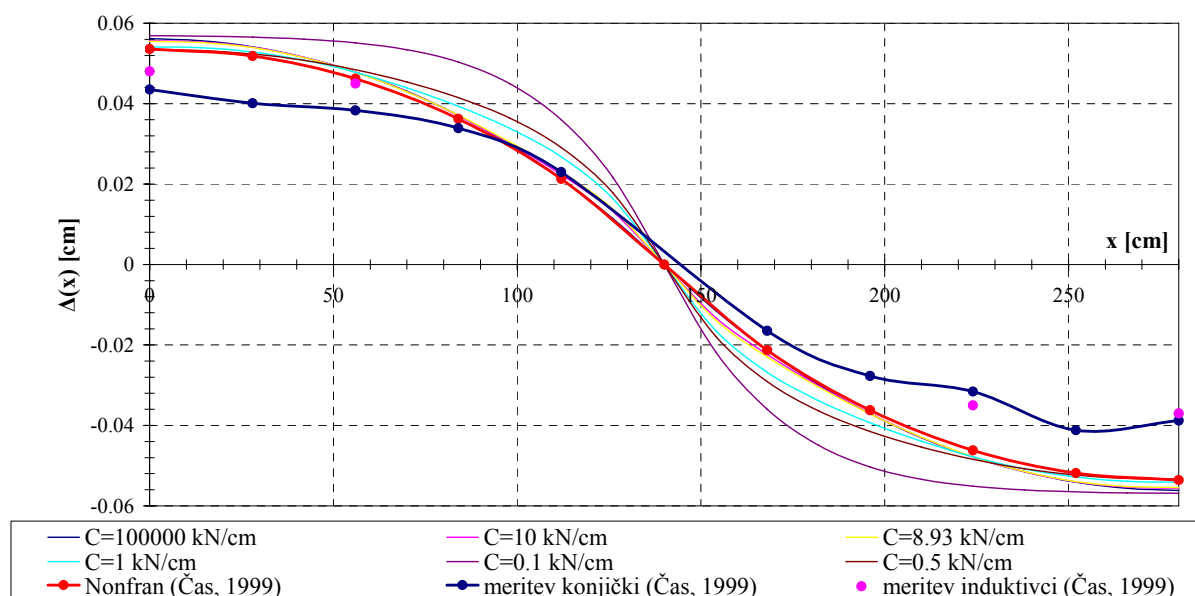
V prvem koraku analiziramo vpliv prečne togosti stika na notranje statične in kinematične količine v obravnavanem dvoslojnem lesenem nosilcu. Izbrane prečne togosti stika so predstavljene v preglednici 5.

Preglednica 5: Izbrane vrednosti prečnih togosti stika

Parameter	Izbrane vrednosti (kN/cm)					
C	100000	10	8.93 (eksperiment)	1	0.5	0.1

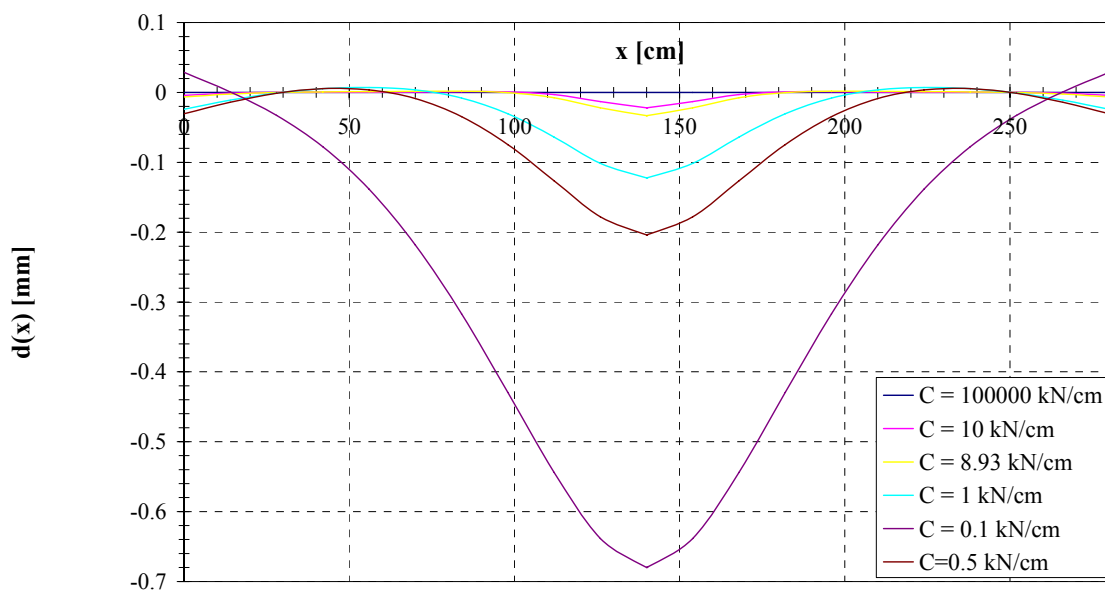
V vseh primerih smo za debelino vmesnega sloja izbrali $e = 0cm$.

Najprej na grafikonu 18 prikazujemo spreminjanje zamika na stiku v odvisnosti od prečne togosti stika. Kot vidimo je vpliv prečne togosti stika na zamike ob robovih nosilca minimalen. Se pa z zmanjševanjem prečne togosti stika zamik povečuje proti sredini nosilca.



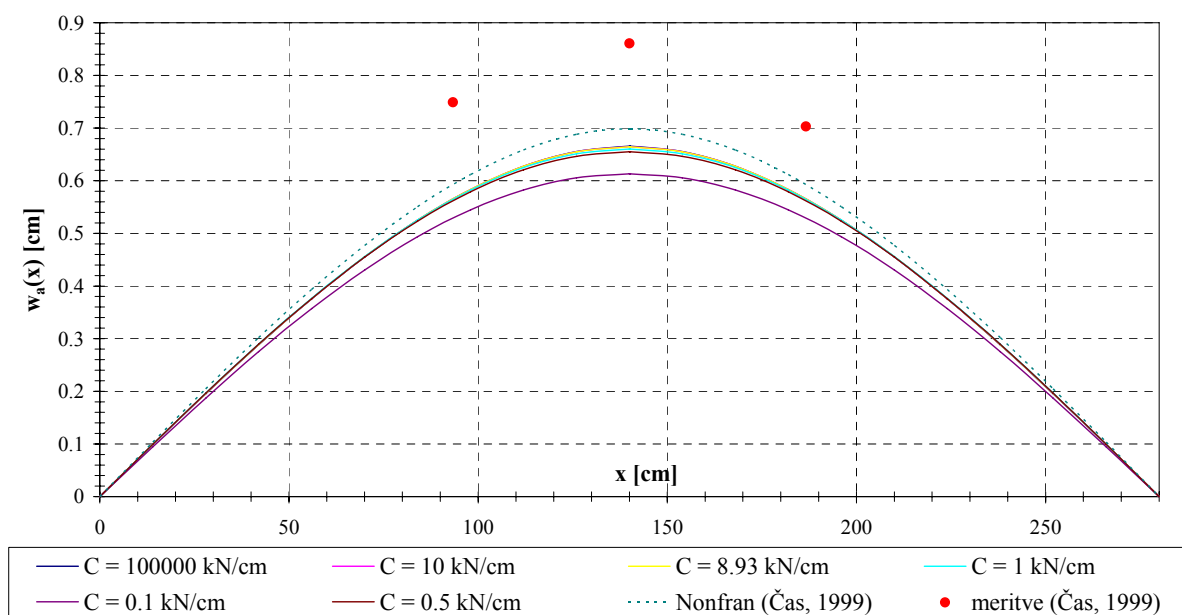
Grafikon 18: Spreminjanje zamika na stiku v odvisnosti od prečne togosti stika

V nadaljevanju na grafikonu 19 prikazujemo spreminjanje razmika oziroma vtisa v odvisnosti od prečne togosti stika. Na grafikonu 19 vidimo, da se nosilca ne razmakneta, ampak se zgornji nosilec vtisne v spodnjega. Manjša kot je prečna togost stika, bolj se zgornji nosilec vtisne v spodnjega. Iz rezultatov je razvidno, da pride do največjega vtisa na mestu delovanja točkovne sile, kar je tudi fizikalno smiselno.

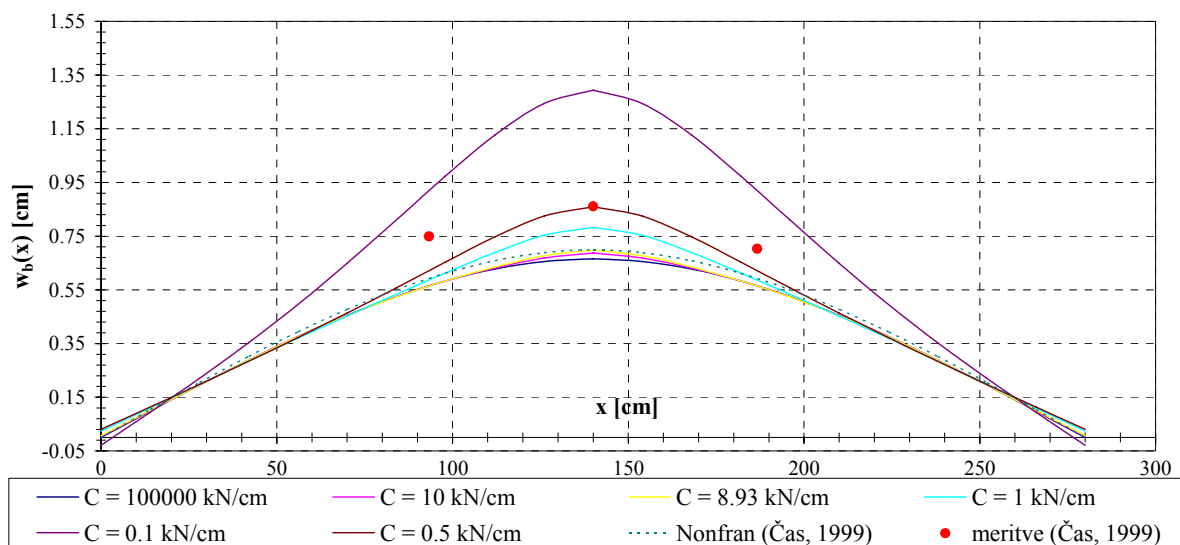


Grafikon 19: Spreminjanje razmika oziroma vtisa v odvisnosti od prečne togosti stika

Spreminjanje prečnih pomikov spodnjega in zgornjega lesenega nosilca v odvisnosti od prečne togosti stika prikazujeta grafikona 20 in 21. Na grafih opazimo relativno majhen vpliv prečne togosti stika na prečne pomike. Je pa ta vpliv nekoliko večji na prečne pomike zgornjega nosilca (grafikon 21). Zanimivo je, da se eksperimentalni prečni pomiki zelo dobro ujemajo z analitičnimi za $C = 0.5 \text{ kN/cm}$.

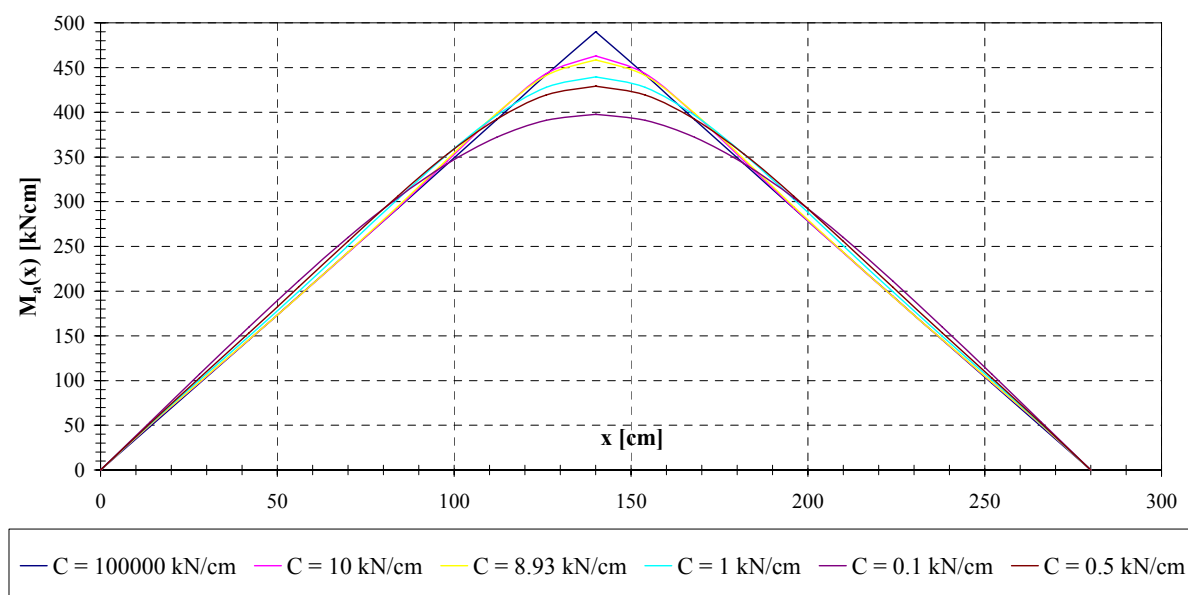


Grafikon 20: Spreminjanje prečnega pomika spodnjega lesenega nosilca v odvisnosti od prečne togosti stika



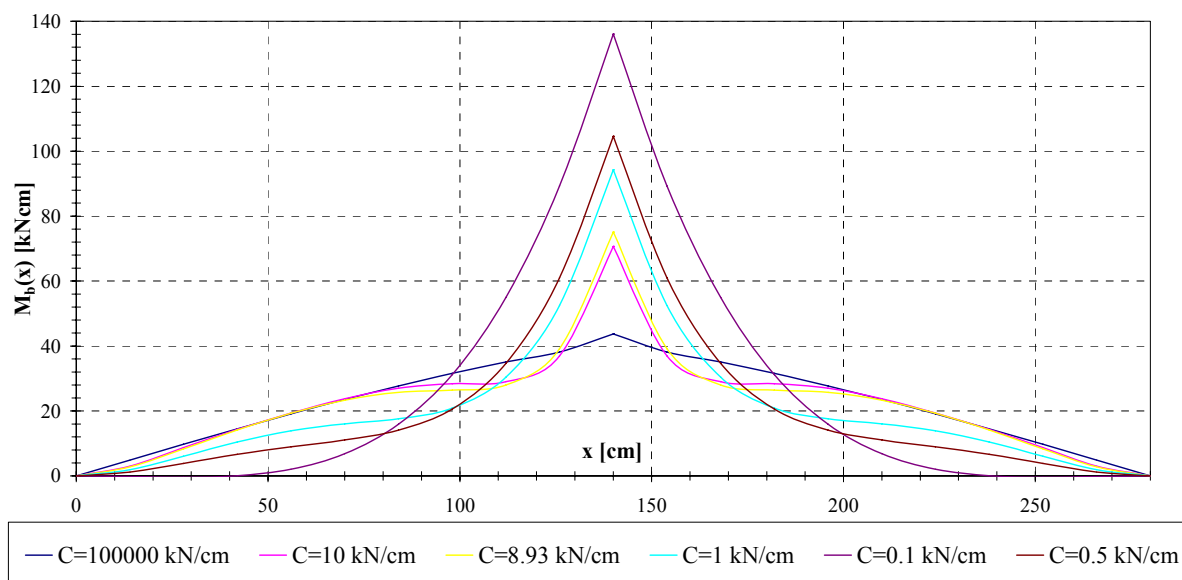
Grafikon 21: Spreminjanje prečnega pomika zgornjega nosilca v odvisnosti od prečne togosti stika

Spreminjanje upogibnih momentov spodnjega in zgornjega nosilca v odvisnosti od prečne togosti stika prikazujeta grafikona 22 in 23. Pri spodnjem nosilcu se maksimalna vrednost upogibnega momenta z zmanjševanjem prečne togosti stika manjša. Prav tako prehaja oblika grafa iz tipične trikotne v parabolično. Pri zelo velikih prečnih togostih stika je oblika grafikona praktično enaka obliki momentne linije navadnega enoslojnega nosilca.



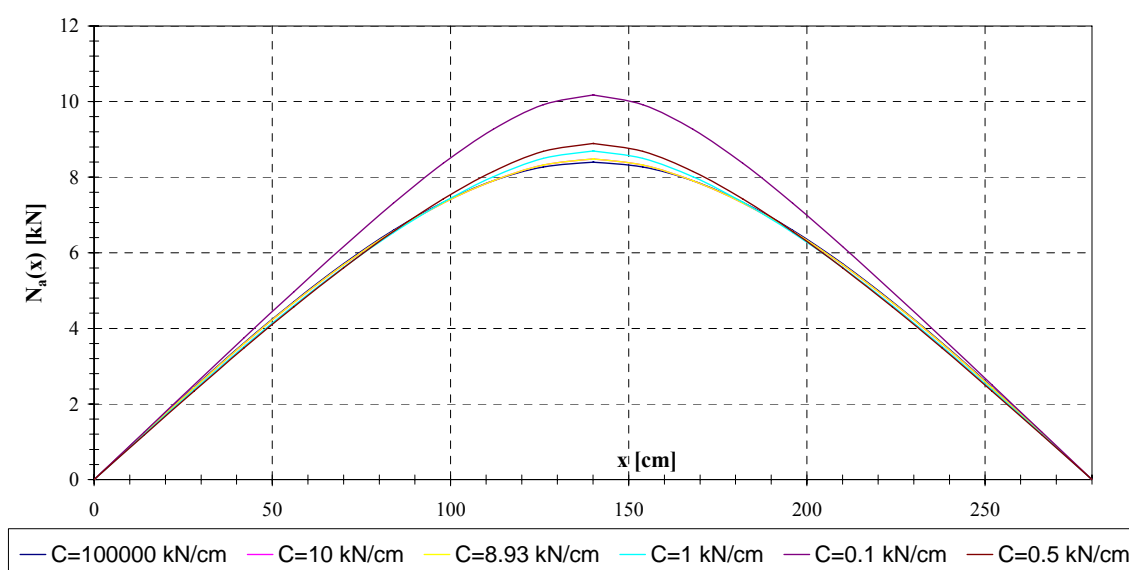
Grafikon 22: Spreminjanje upogibnega momenta spodnjega nosilca v odvisnosti od prečne togosti stika

Na grafikonu 23 vidimo, da je pri velikih prečnih togostih obremenitev zgornjega nosilca manjša. Se pa z zmanjševanjem prečne togosti stika obremenitev zgornjega nosilca povečuje na mestu delovanja točkovne sile, proti robovom prostoležečega nosilca pa se obremenitev manjša. Prav tako je jasno vidna sprememba oblike poteka upogibnega momenta.

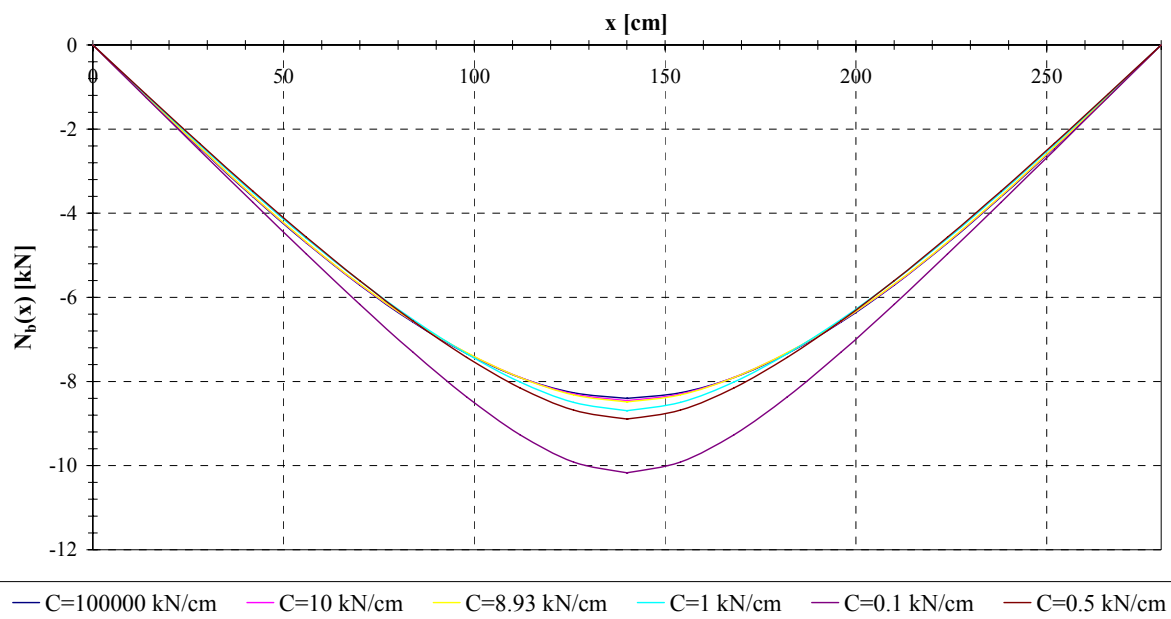


Grafikon 23: Spreminjanje upogibnega momenta zgornjega nosilca v odvisnosti od prečne togosti stika

Spreminjanje osne sile spodnjega in zgornjega nosilca v odvisnosti od prečne togosti stika prikazujemo na grafikonih 24 in 25.

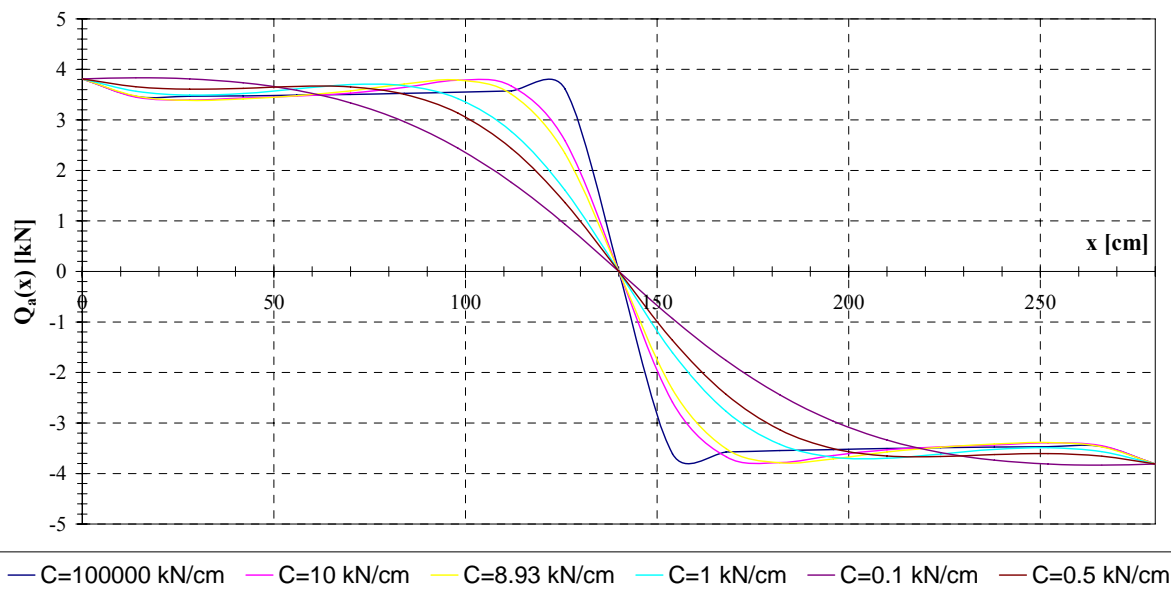


Grafikon 24: Spreminjanje osnih sil spodnjega nosilca v odvisnosti od prečne togosti stika

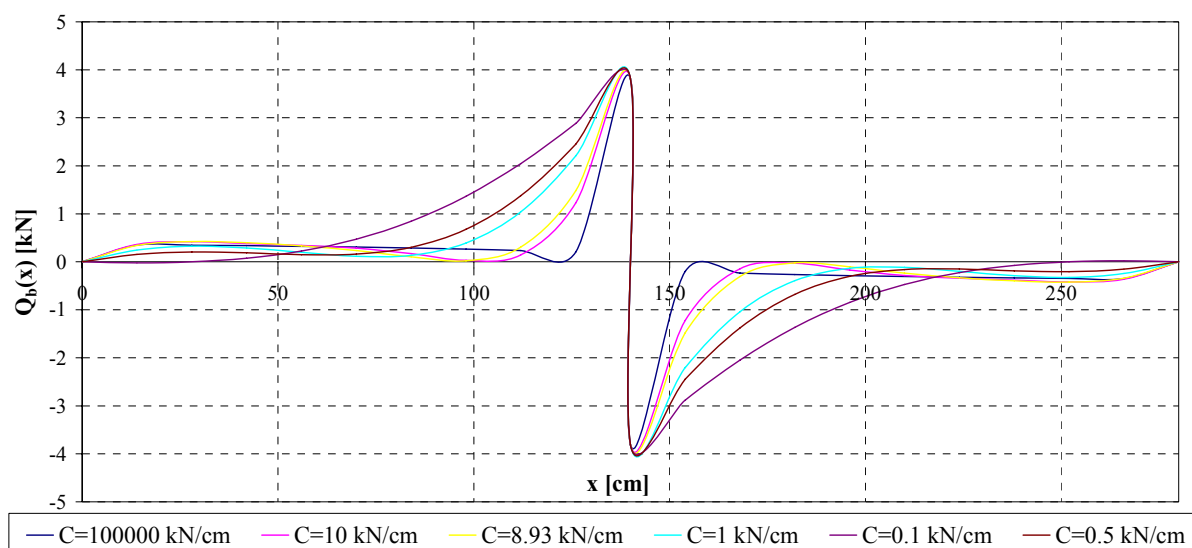


Grafikon 25: Spreminjanje osnih sil zgornjega nosilca v odvisnosti od prečne togosti stika

Na obeh grafikonih opazimo praktično minimalni vpliv prečne togosti stika na velikost osnih sil. Na koncu na grafikonih 26 in 27 prikazujemo še spreminjanje prečnih sil spodnjega in zgornjega nosilca v odvisnosti od prečne togosti stika.



Grafikon 26: Spreminjanje prečne sile spodnjega nosilca v odvisnosti od prečne togosti stika

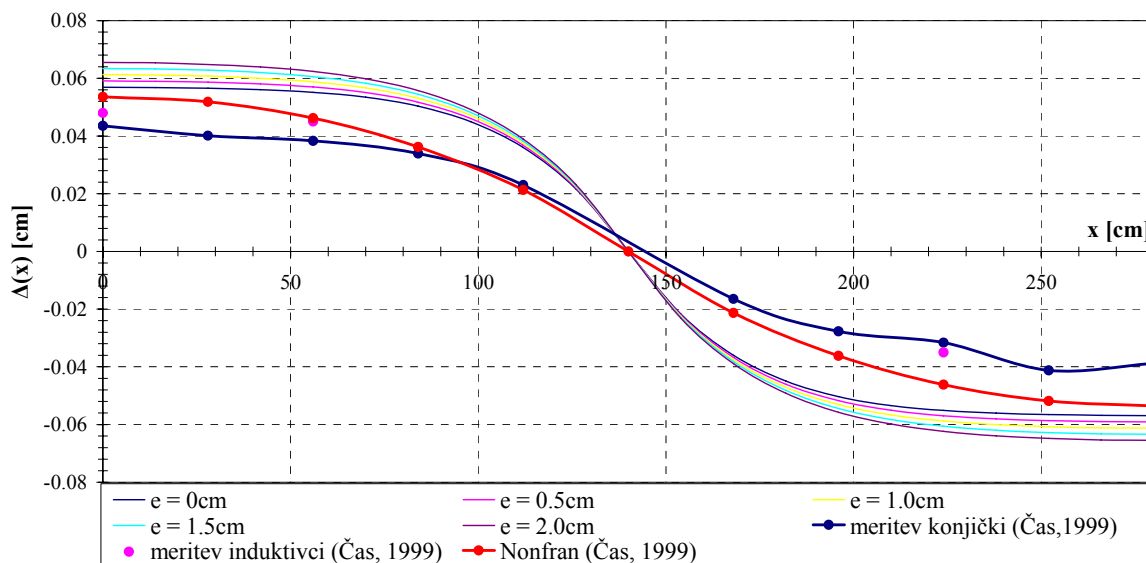


Grafikon 27: Spreminjanje prečne sile zgornjega nosilca v odvisnosti od prečne togosti stika

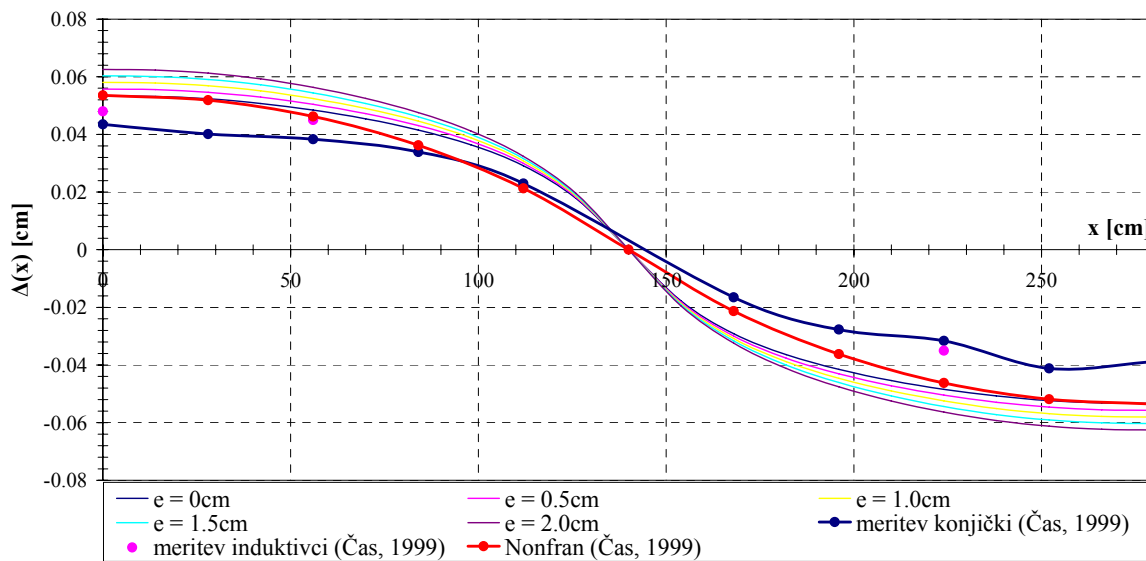
Na grafikonih 26 in 27 opazimo, da za velike prečne togosti stika večino prečne sile prevzame spodnji nosilec. Z manjšanjem prečne togosti stika pa pod točkovno silo narašča tudi velikost prečne sile zgornjega nosilca. Na robovih nosilca se prečne sile s spreminjanjem prečne togosti stika ne spreminjajo bistveno.

Vpliv parametra e

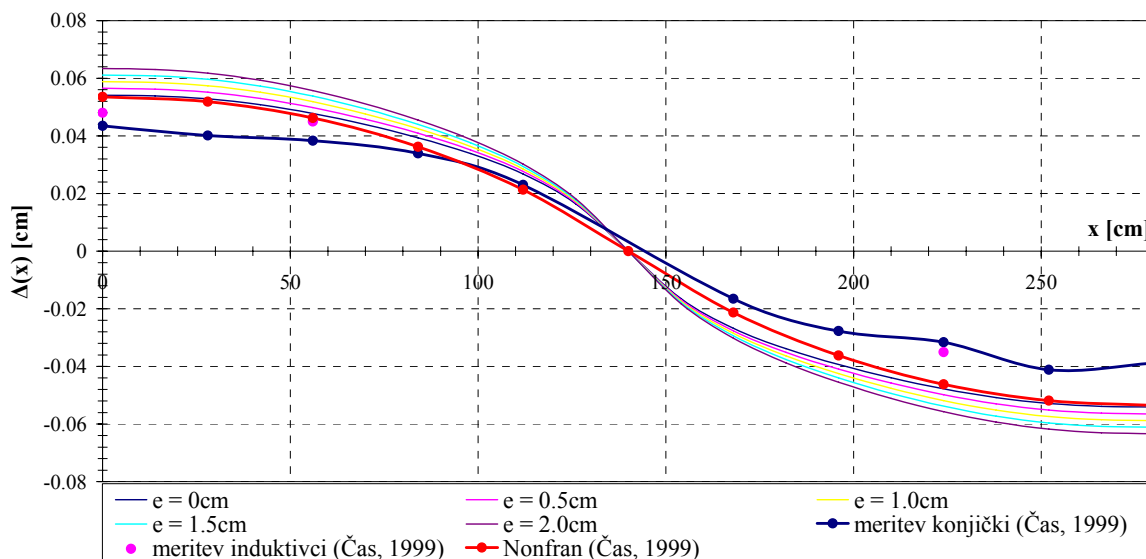
V nadaljevanju izdelamo parametrično študijo vpliva debeline vmesnega sloja na napetostno in deformacijsko stanje dvoslojnega lesenega nosilca. Debeline vmesnega sloja so: 0 cm, 0.5 cm, 1 cm, 1.5 cm in 2 cm. Spreminjanje zamika vzdolž stika v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za različne vrednosti prečne togosti stika prikazujemo na grafikonih 28 do 33.



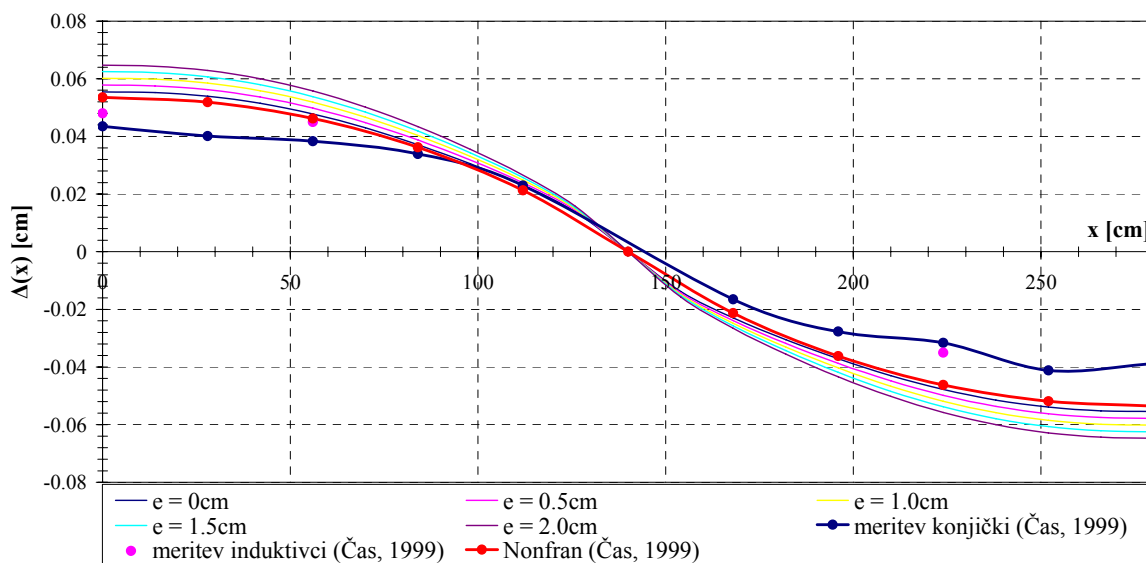
Grafikon 28: Spreminjanje zamika v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za $C = 0.1 \text{ kN/cm}$



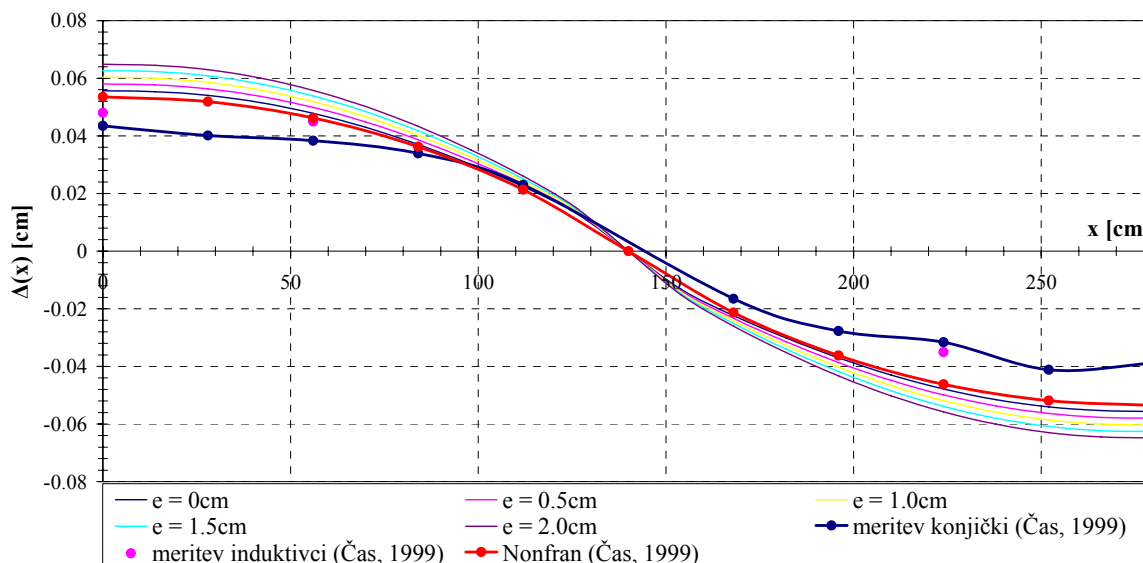
Grafikon 29: Spreminjanje zamika v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za $C = 0.5 \text{ kN/cm}$



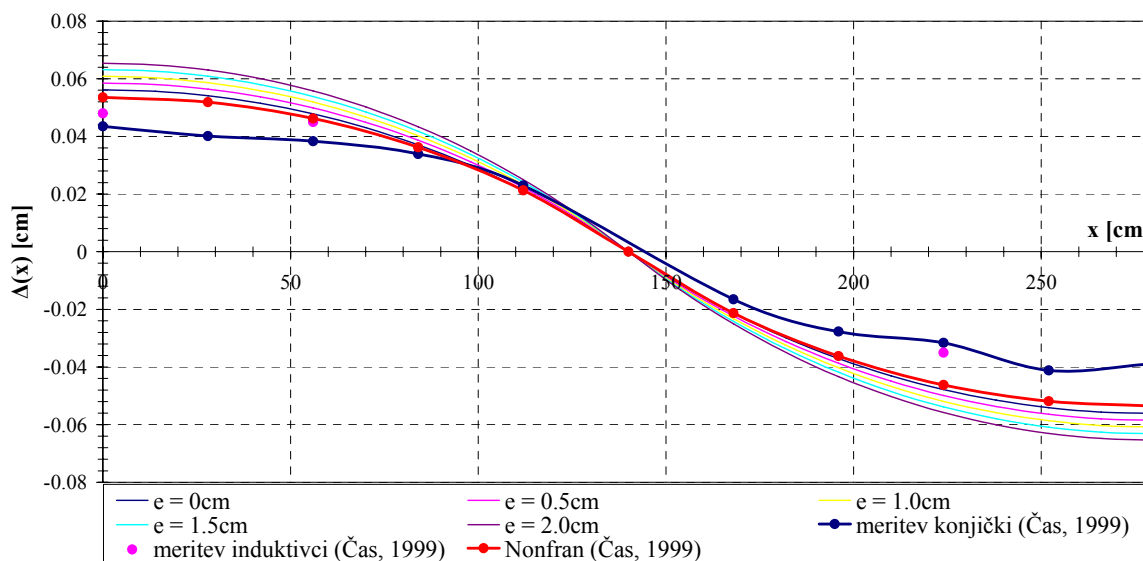
Grafikon 30: Spreminjanje zamika v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za $C = 1 \text{ kN/cm}$



Grafikon 31: Spreminjanje zamika v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za $C = 8.93 \text{ kN/cm}$



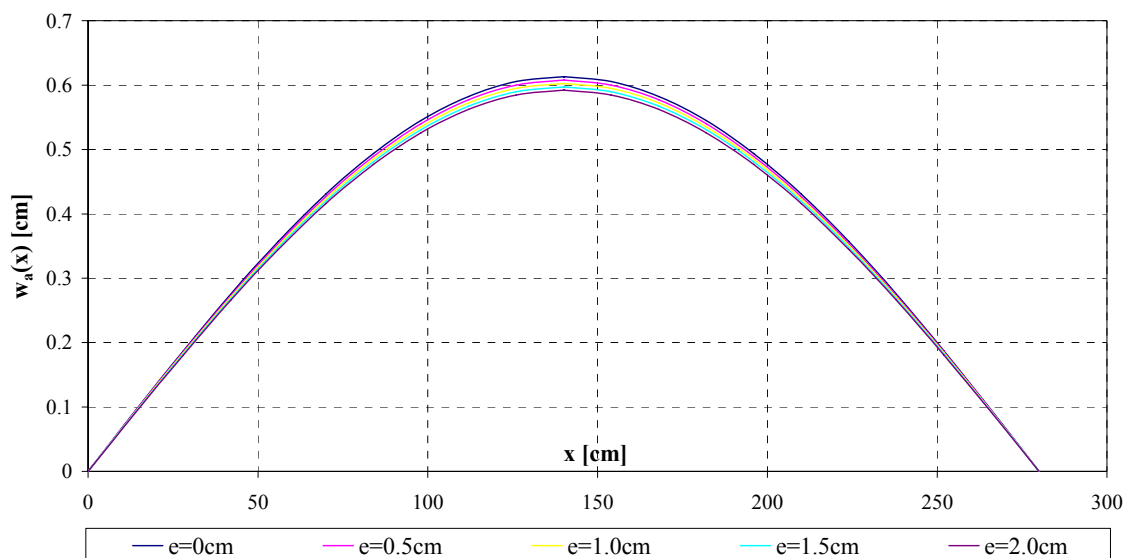
Grafikon 32: Spreminjanje zamika v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za $C = 10 \text{ kN/cm}$



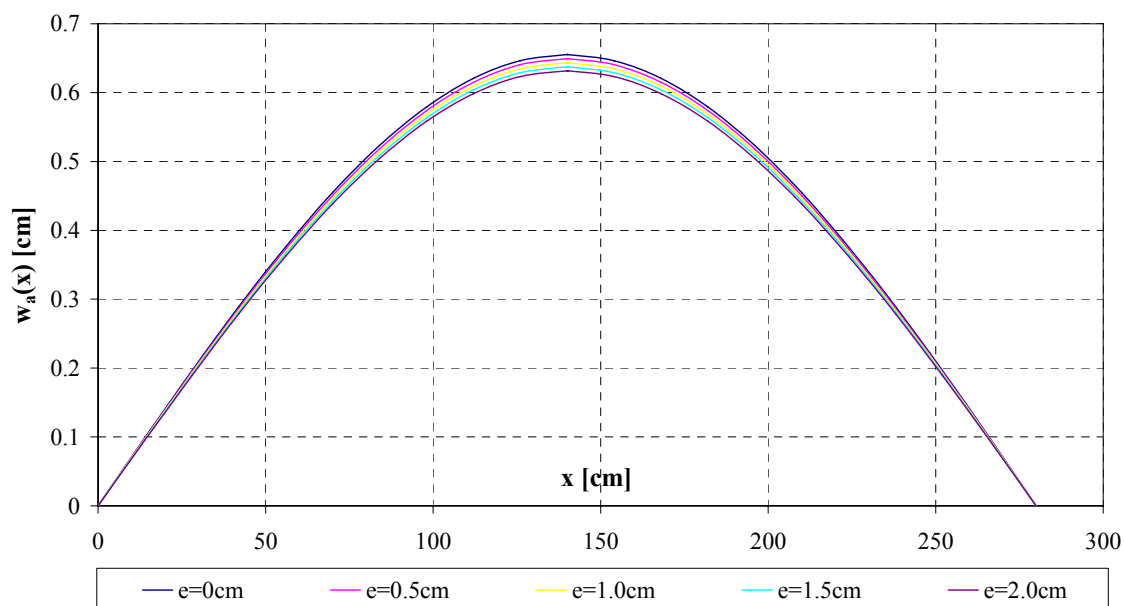
Grafikon 33: Spreminjanje zamika v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za $C = 100000 \text{ kN/cm}$

Na grafikonih 28 do 33 opazimo, da debelina vmesnega sloja na stiku praktično nima vpliva na zamike med slojema obravnavanega dvoslojnega lesenega nosilca.

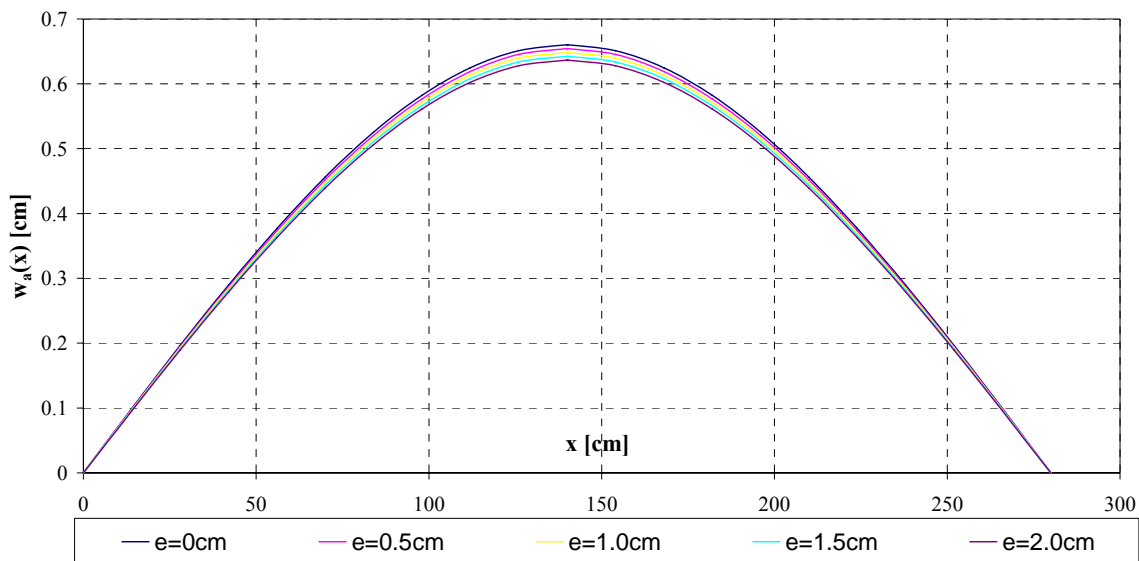
Na grafikonih 34 do 39 prikazujemo spreminjanje prečnega pomika spodnjega nosilca v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za različne prečne togosti stika.



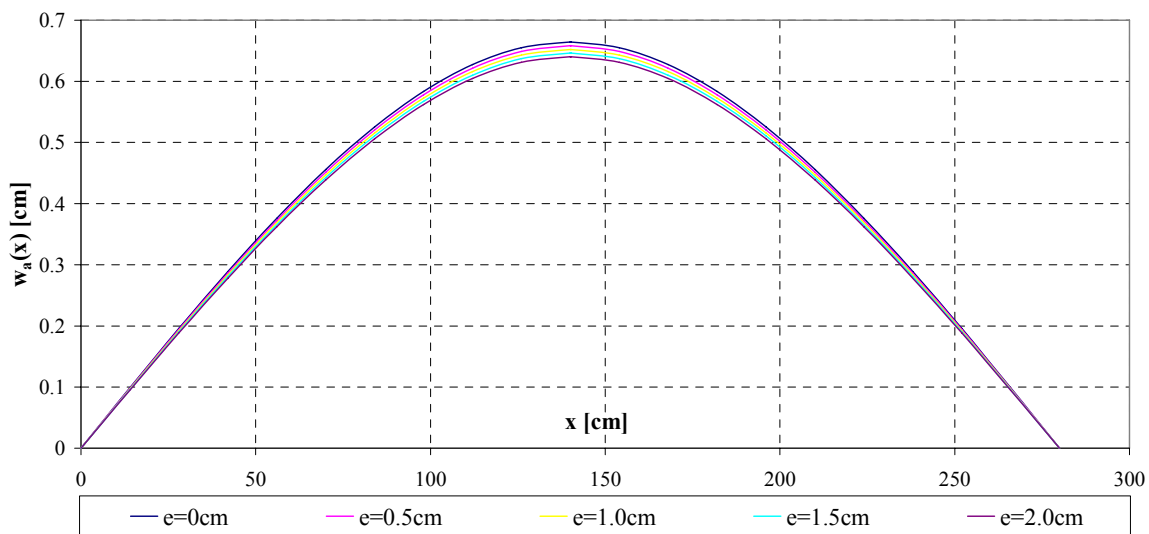
Grafikon 34: Spreminjanje prečnega pomika v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za $C = 0.1$ kN/cm



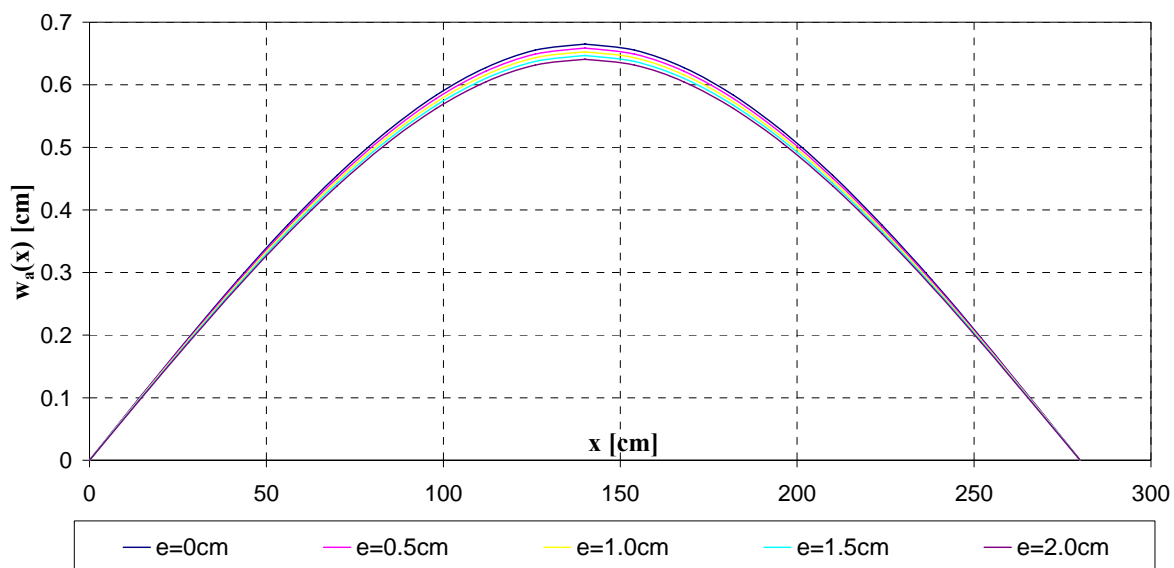
Grafikon 35: Spreminjanje prečnega pomika v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za $C = 0.5$ kN/cm



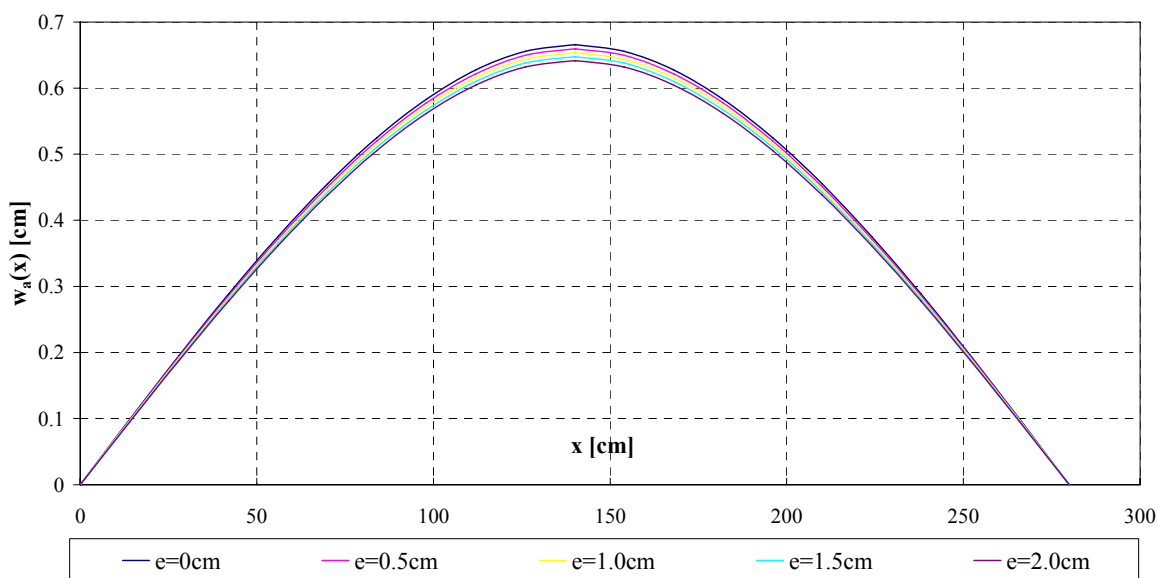
Grafikon 36: Spreminjanje prečnega pomika v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za $C = 1 \text{ kN/cm}$



Grafikon 37: Spreminjanje prečnega pomika v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za $C = 8.93 \text{ kN/cm}$



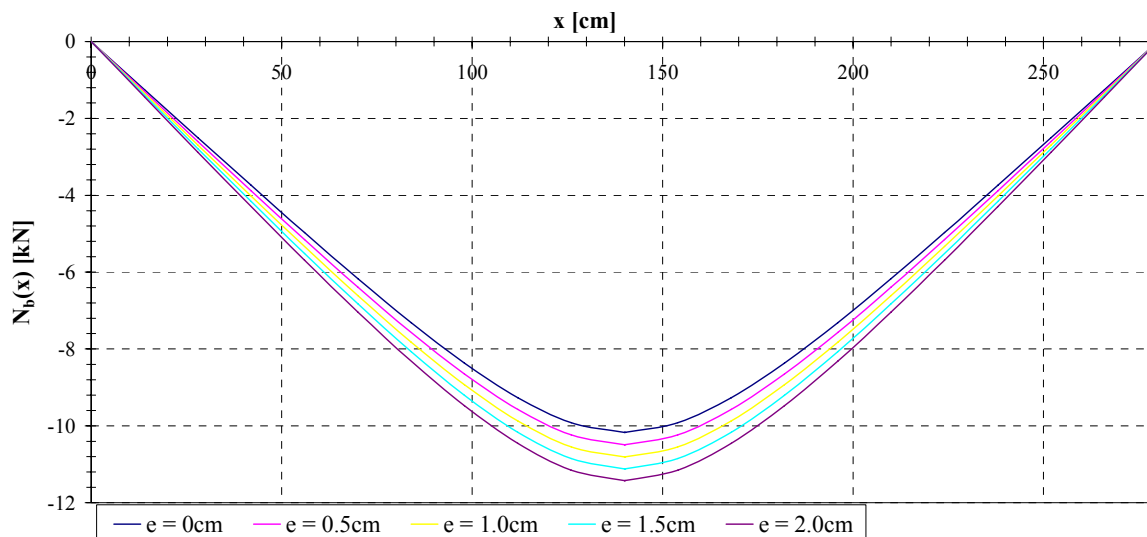
Grafikon 38: Spreminjanje prečnega pomika v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za $C = 10$ kN/cm



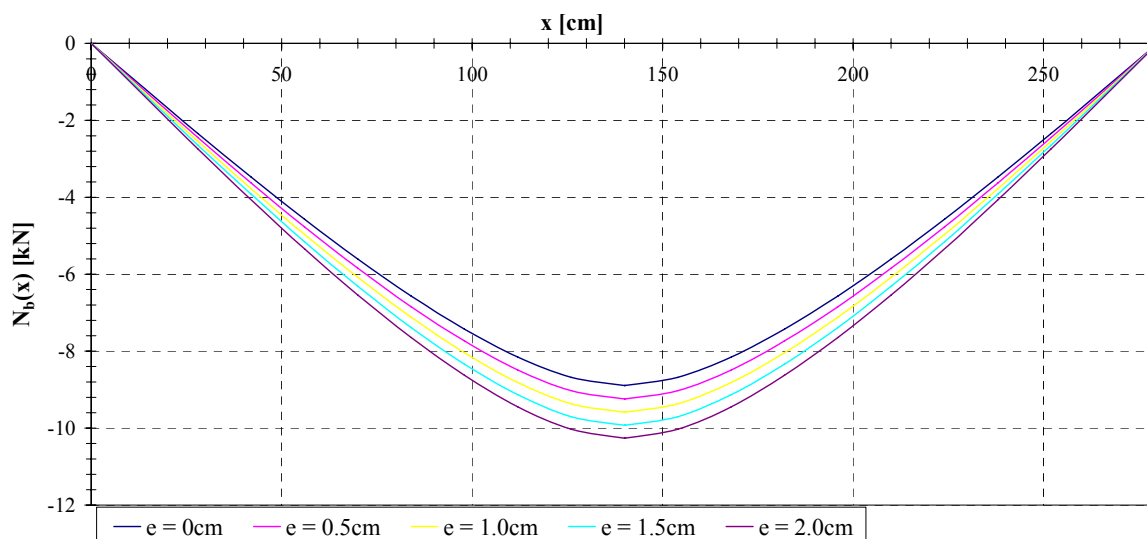
Grafikon 39: Spreminjanje prečnega pomika v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za $C = 1000000$ kN/cm

Na grafikonih 34 do 39 opazimo minimalen vpliv debeline vmesnega sloja na velikost prečnega pomika spodnjega nosilca.

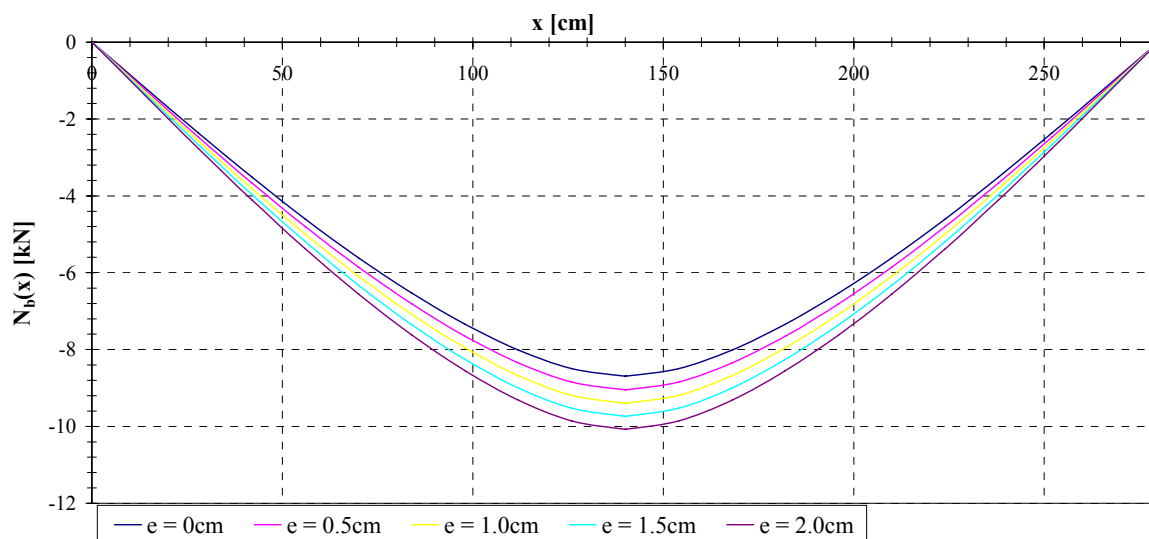
Na koncu opazujemo na grafikonih 40 do 45 še spreminjanje osne sile zgornjega nosilca v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za različne prečne togosti stika.



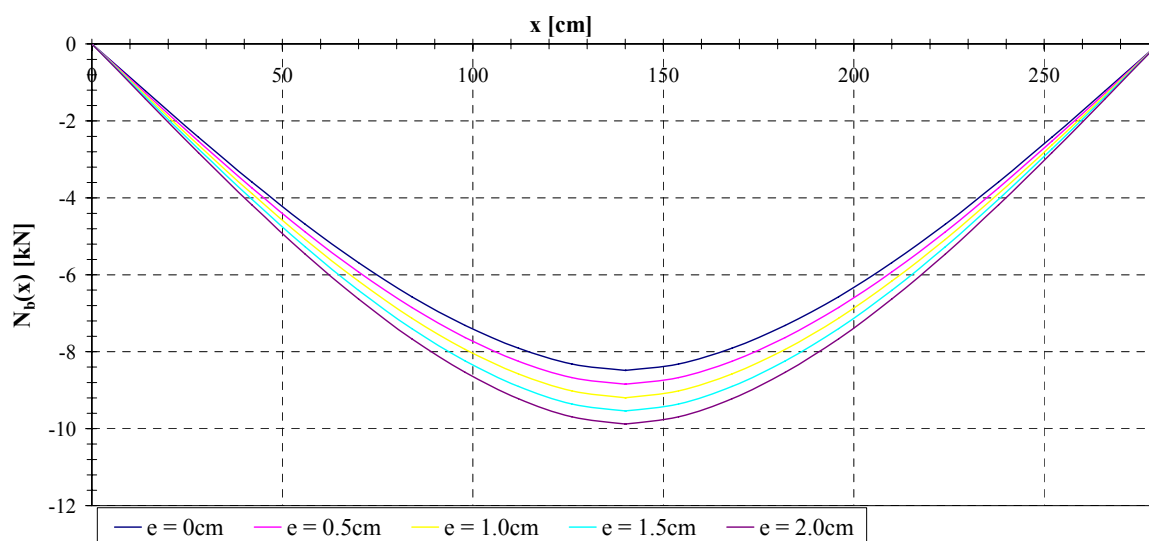
Grafikon 40: Spreminjanje osne sile $N_b(x)$ v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za $C = 0.1$ kN/cm



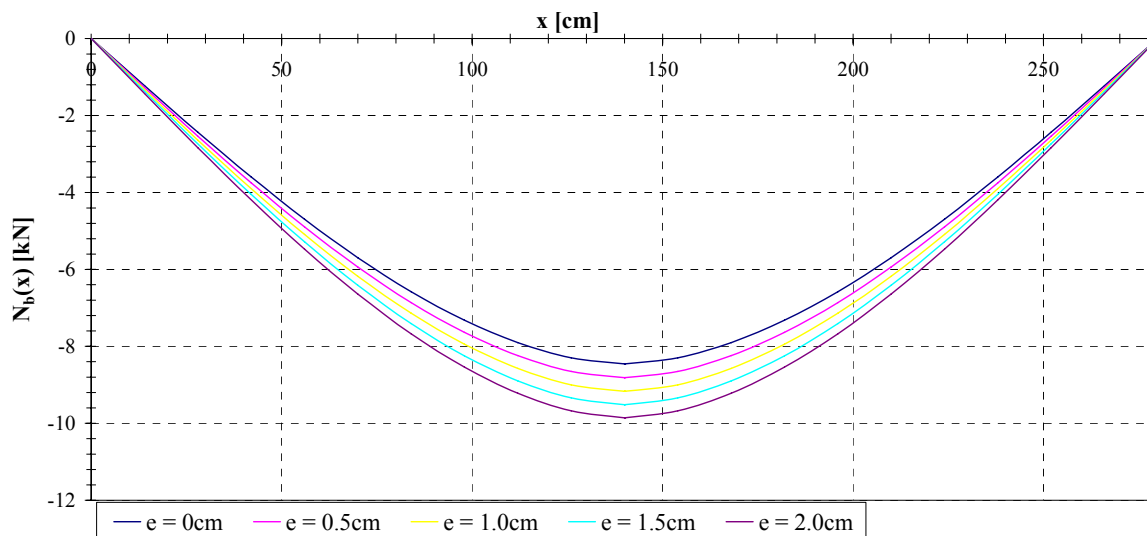
Grafikon 41: Spreminjanje osne sile $N_b(x)$ v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za $C = 0.5$ kN/cm



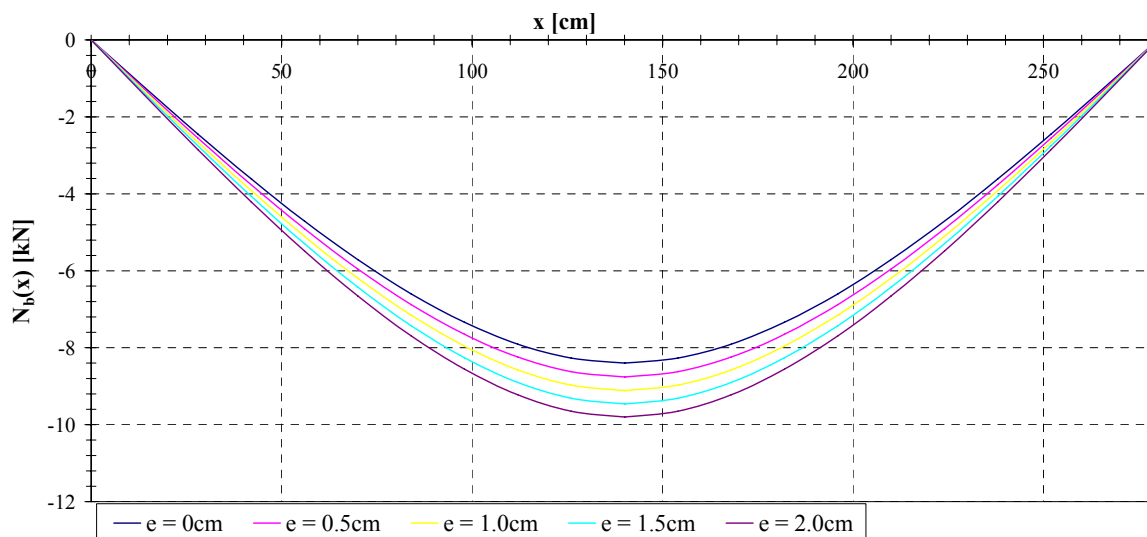
Grafikon 42: Spreminjanje osne sile $N_b(x)$ v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za $C = 1$ kN/cm



Grafikon 43: Spreminjanje osne sile $N_b(x)$ v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za $C = 8.93$ kN/cm



Grafikon 44: Spreminjanje osne sile $N_b(x)$ v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za $C = 10$ kN/cm



Grafikon 45: Spreminjanje osne sile $N_b(x)$ v odvisnosti od debeline vmesnega sloja za $C = 100000$ kN/cm

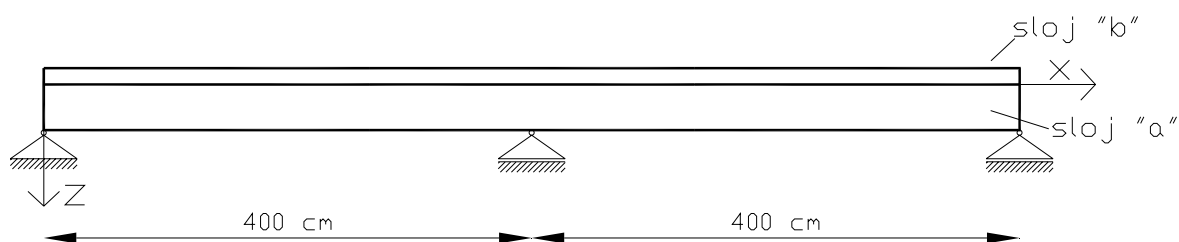
Tudi na grafikonih 40 do 45 opazimo minimalen vpliv debeline vmesnega sloja na velikost osne sile zgornjega nosilca. Se pa osna sila povečuje z večanjem debeline vmesnega sloja. Ker je vpliv debeline vmesnega sloja na ostale statične količine podoben ali pa manjši, jih detajlno v diplomski nalogi ne prikazujemo.

Na podlagi izdelane parametrične študije lahko zaključimo, da je predstavljen matematični model in pripadajoča analitična rešitev ustrezna za elastično analizo dvoslojnih lesenih nosilcev. Vpliv prečne togosti stika in debeline vmesnega sloja pa je na velikost napetostnega in deformacijskega stanja praktično zanemarljiv.

5.3 Kontinuirni nosilec – primerjava z Eurocode 5

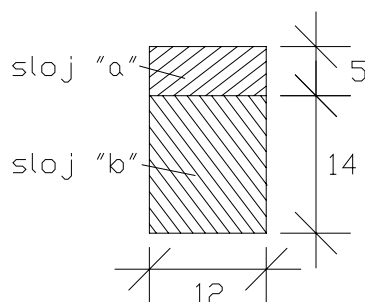
V zadnjem računskem primeru bomo analizirali leseni dvoslojni kontinuirni nosilec z razponom preko dveh polj. Detajlno nas bo zanimala primerjava med prečnimi pomiki, ki jih izračunamo skladno z evropskim standardom za lesene konstrukcije Eurocode 5, in pomiki, ki jih izračunamo z našimi analitičnimi izrazi.

Geometrijske podatke obravnavanega dvoslojnega kontinuirnega nosilca prikazujeta sliki 62 in 63.



Slika 62: Geometrijski podatki dvoslojnega kontinuirnega nosilca

Kot vidimo na sliki 63, smo dimenzije prečnega prereza kot tudi povezavo med sloji izbrali enako, kot je v računskem primeru 2. Torej smo nosilca med seboj povezali s standardnimi žebli 4/100. Razporedili smo jih v dveh vzporednih vrstah. Za medsebojni razmik med žebli smo izbrali razdaljo $s_{dej} = 9\text{ cm}$. Skladno s standardom Eurocode 5 smo predpostavili, da so nosilci izdelani iz lesa trdnostnega razreda C30.



Slika 63: Prečni prerez kontinuirnega dvoslojnega lesenega nosilca

Nosilec je v mejnem stanju uporabnosti obtežen s konstantno prečno linijsko obtežbo $q_z = 1.0 \text{ kN/m}$. Zaradi preglednosti upoštevamo v analizi samo vpliv koristne obtežbe.

V nadaljevanju najprej prikažemo analizo mejnega stanja uporabnosti skladno s standardom Eurocode 5, na koncu pa dobljene prečne pomike primerjamo z analitičnimi.

Izračun podajnosti veznih sredstev

Zaradi skladnosti z izračunom po standardu Eurocode 5 označimo vse količine, ki se nanašajo na zgornji nosilec (sloj »b«) z indeksom 1, količine spodnjega osnovnega nosilca (sloj »a«) pa z indeksom 2. Strižni modul stika izračunamo z izrazom:

$$k_{ser} = k^{MSU} = \frac{\rho_k^{1.5} \cdot d^{0.8}}{25} = \frac{380^{1.5} \cdot 4^{0.8}}{25} = 898.2 \frac{N}{mm} \quad (5.116)$$

Pri tem je:

k_{ser} ... strižni modul stika za mejno stanje uporabnosti $\left[\frac{N}{mm} \right]$;

ρ_k ... karakteristična gostota lesa v $\left[\frac{kg}{m^3} \right]$;

d ... debelina veznega sredstva v $[mm]$.

Podajnost veznih sredstev na stiku izračunamo skladno s standardom Eurocode 5 z enačbo:

$$\gamma_1 = \left(1 + \frac{\pi^2 \cdot E_{0,mean,1} \cdot A_1 \cdot s_1}{k_{ser,1} \cdot I_u^2} \right)^{-1} = \left(1 + \frac{\pi^2 \cdot 1200 \cdot 5 \cdot 14 \cdot 4.5}{8.982 \cdot 320^2} \right)^{-1} = 0.198, \quad (5.117)$$

kjer je:

$$\gamma_2 = 1;$$

$$l_u = 0.8 \cdot l = 0.8 \cdot 4m = 3.2m \text{ za kontinuirni nosilec};$$

$$l = 4m \text{ ... dolžina nosilca med podporami};$$

$$s_1 = \frac{s_{dej}}{n} = \frac{9cm}{2} = 4.5cm \text{ ... razdalja med veznimi sredstvi};$$

$$n = 2 \text{ ... število žebeljev v liniji}.$$

Tudi efektivno upogibno togost sestavljenega prečnega prereza izračunamo skladno s standardom Eurocode 5

$$\begin{aligned} (EI)_{eff} &= \sum_{i=1}^2 (E_i \cdot I_i + \gamma_i \cdot E_i \cdot A_i \cdot a_i^2) = (E_1 \cdot I_1 + \gamma_1 \cdot E_1 \cdot A_1 \cdot a_1^2) + (E_2 \cdot I_2 + \gamma_2 \cdot E_2 \cdot A_2 \cdot a_2^2) = \\ &= (1200 \cdot 125 + 0.198 \cdot 1200 \cdot 125 \cdot 8.873^2) + \\ &= (1200 \cdot 2744 + 1 \cdot 1200 \cdot 168 \cdot 0.627^2) = 3755883 kNcm^2 \end{aligned} \quad (5.118)$$

Pri tem je:

$$I_1 = \frac{12 \cdot 5^3}{12} = 125cm^4 \text{ ... vztrajnostni moment zgornjega nosilca};$$

$$I_2 = \frac{12 \cdot 14^3}{12} = 2744cm^4 \text{ ... vztrajnostni moment spodnjega nosilca};$$

$$A_1 = 60cm^2 \text{ ... ploščina prečnega prereza zgornjega nosilca};$$

$$A_2 = 168cm^2 \text{ ... ploščina prečnega prereza spodnjega nosilca};$$

$$a_2 = \frac{\gamma_1 \cdot E_1 \cdot A_1 \cdot (h_1 + h_2)}{2 \cdot \sum_{i=1}^2 \gamma_i \cdot E_i \cdot A_i} = \frac{0.198 \cdot 1200 \cdot 60 \cdot (5 + 14)}{2 \cdot (0.198 \cdot 1200 \cdot 60 + 1 \cdot 1200 \cdot 168)} = 0.627cm \quad (5.119)$$

... razdalja od težišča prečnega prereza spodnjega nosilca do težišča prečnega prereza celotnega (homogenega) nosilca;

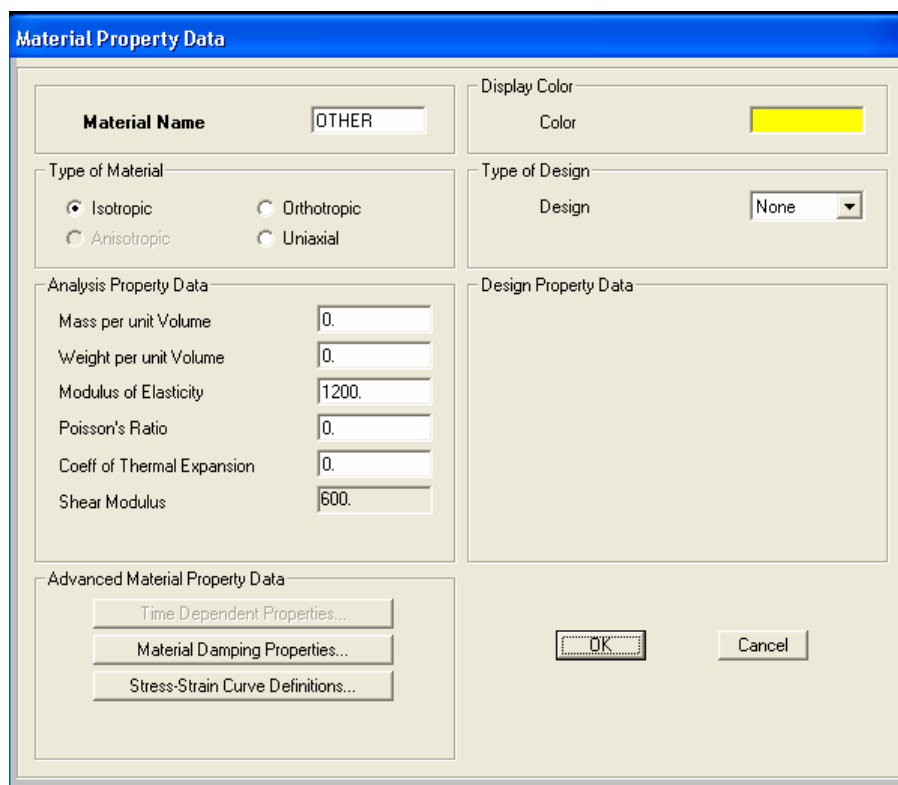
$$a_1 = 5 + \frac{14}{2} - 0.627 = 8.873cm \text{ ... razdalja od težišča prečnega prereza zgornjega nosilca do}$$

težišča prečnega prereza celotnega nosilca;

$$E = E_1 = E_2 = E_{0,mean} = 1200 \frac{kN}{cm^2} \text{ ... elastični modul lesa}.$$

Prečne pomike v mejnem stanju uporabnosti (Eurocode 5) smo za obravnavani dvoslojni kontinuirni leseni nosilec s prej določenimi ravninskimi parametri izračunali po metodi končnih elementov s pomočjo programa SAP2000.

Materialne karakteristike lesa, ki smo jih upoštevali v računu, prikazujemo na sliki 64.

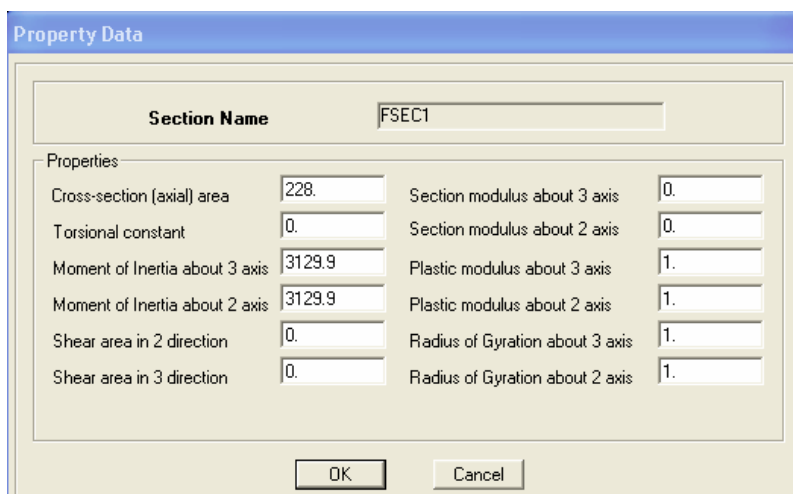


Slika 64: Materialne karakteristike lesa za račun prečnih pomikov s programom SAP2000

Prečni prerez smo v računu modelirali tako, da smo v programu izbrali splošno obliko prečnega prereza ("General"). Pri tem potrebno vrednost za efektivni vztrajnostni moment prereza pa smo izračunali s pomočjo enačbe (5.120).

$$I_{eff} = \frac{(EI)_{eff}}{E} = \frac{3755883}{1200} = 3129.9cm^4. \quad (5.120)$$

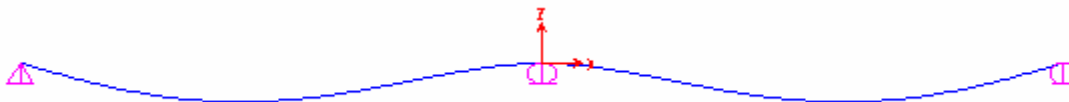
Podane karakteristike prečnega prereza, ki smo jih uporabili v programu, prikazuje slika 65.



Slika 65: Geometrijske karakteristike prečnega prereza za račun prečnih pomikov s programom SAP2000

Vpliv strižnih napetosti smo v računu prečnih pomikov zanemarili.

Deformirano obliko lesenega kontinuirnega nosilca preko dveh polj, izračunano skladno s standardom Eurocode 5, prikazujemo na sliki 66.



Slika 66: Deformirana oblika lesenega kontinuirnega nosilca skladno z Eurocode 5

Ker smo za prečni prerez in vezna sredstva obravnavanega lesenega kontinuirnega nosilca izbrali enake karakteristike kot v drugem računskem primeru, lahko za strižno togost stika izberemo

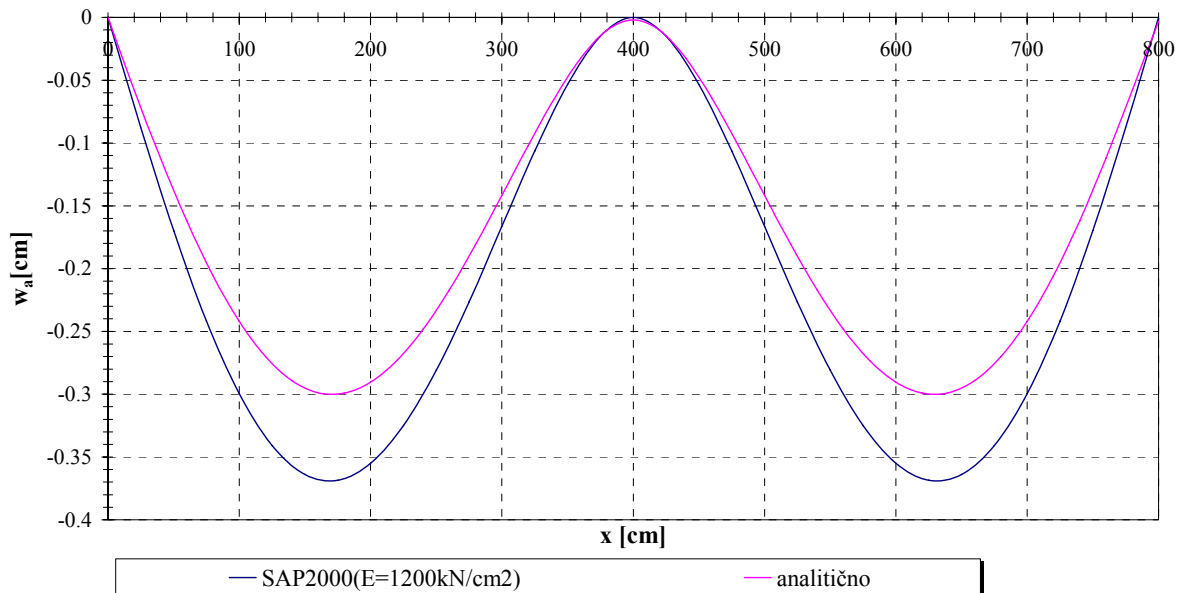
$$K = \frac{2(\text{vrsti}) \cdot 11.016 \frac{kN}{cm}}{9cm} = 2.45 \frac{kN}{cm}, \quad (5.121)$$

za prečno togost stika pa vrednost

$$C = \frac{2(\text{vrsti}) \cdot 40.2 \frac{kN}{cm}}{9cm} = 8.93 \frac{kN}{cm}. \quad (5.122)$$

Ker debelina vmesnega sloja praktično ne vpliva na rezultate, smo izbrali $e = 0cm$, ki je računsko najugodnejša.

Primerjavo med prečnimi (skladno z Eurocode 5) in analitičnimi pomiki spodnjega nosilca prikazuje grafikonu 46.



Grafikon 46: Primerjava prečnih pomikov spodnjega nosilca

Na grafikonu 46 vidimo, da so analitični pomiki manjši, kot pa so pomiki, ki jih izračunamo skladno s standardom Eurocode 5. Tak rezultat je pričakovan, saj »morajo« biti prečni pomiki, izračunani po standardu Eurocode 5, na varni strani.

Maksimalni povos dvoslojnega lesenega kontinuirnega nosilca je na razdalji $x = 175\text{cm}$ od roba in je skladno z Eurocode 5:

$w_{\max}(x = 175\text{cm}) = 0.37\text{cm}$. Ta je manjši od predpisanega, ki je

$$w_{inst,\max} = 0.37\text{cm} \leq w_{dov} = l/300 = 0.8 \cdot 400\text{cm}/300 = 1.33\text{cm}.$$

6 ZAKLJUČKI

V začetku diplomske naloge podamo splošno problematiko uporabe večslojnih nosilcev, ki se v gradbeni praksi najpogosteje uporabljajo. V nadaljevanju predstavljamo matematični model in pripadajočo analitično rešitev za analizo napetostnega in deformacijskega stanja dvoslojnih elastičnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa in razmika oziroma stiska (delaminacija) med slojema. Novost te diplomske naloge je prikazana analitična rešitev, ki je do sedaj v svetovni literaturi v taki obliki nismo zasledili. Pomembna dopolnitev standardnim matematičnim modelom in s tem druga novost je tudi vpeljava dodatnega materialnega parametra, ki določa debelino vmesnega sloja na stiku dveh nosilcev. Tega so v nekoliko spremenjeni obliki prvi predstavili Čas, Saje in Planinc (2004) pri analizi sovprežnih nosilcev.

Z analitično rešitvijo smo v nadaljevanju izdelali obširno parametrično študijo. Analizirali smo vpliv prečne togosti stika in debeline vmesnega sloja na napetostno in deformacijsko stanje dvoslojnih lesenih nosilcev. Ugotovili smo:

- Prečna togost stika med slojema nosilca ima bistven vpliv samo na normalno linijsko kontaktno obtežbo in posledično na velikost razmika med slojema. Presenetljivo pa nima v okviru inženirske natančnosti bistvenega vpliva na ostale statične, deformacijske in kinematične količine elastičnih dvoslojnih kompozitnih nosilcev. Zato lahko v inženirski analizi kompozitnih nosilcev upoštevamo le zdrs med slojema, delaminacijo med slojema pa lahko zanemarimo.
- Debelina vmesnega sloja na stiku med slojema nima bistvenega vpliva na napetostno in deformacijsko stanje dvoslojnih kompozitnih nosilcev v okviru inženirske natančnosti. Zato lahko debelino tega sloja v analizi dvoslojnih kompozitnih nosilcev prav tako zanemarimo.

V nadaljevanju smo ocenili tudi natančnost določitve prečnih pomikov dvoslojnih lesenih nosilcev skladno z evropskimi predpisi za lesene konstrukcije Eurocode 5 (mejno stanje uporabnosti). To smo ocenili s primerjavo med izračunanimi prečnimi pomiki skladno s standardom Eurocode 5 in našimi analitičnimi prečnimi pomiki. Ugotovili smo, da so prečni pomiki dvoslojnih lesenih nosilcev, ki jih določimo skladno s standardom Eurocode 5 na varni strani.

VIRI

Uporabljeni viri

Bratina, S., 1998. Slojeviti in sestavljeni nosilci. Diplomaska naloga. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Oddelek za gradbeništvo, Konstrukcijska smer.

Composite steel beam design.

www.bison.co.uk/pdf/BisonCompositeBeamDesign.pdf (14.5.2007)

Čas, B., 1999. Vpliv podajnosti stika na togost in nosilnost sestavljenih nosilcev. Diplomaska naloga. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Oddelek za gradbeništvo, Konstrukcijska smer.

Čas, B., 2004. Nelinearna analiza kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med sloji. Doktorska disertacija. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.

Čas, B., Bratina, S., Saje, M., Planinc, I. 2004. Non – linear analysis of composite steel – concrete beams with incomplete interaction, Steel and Composite Structures, Vol. 4, No. 6, str. 489 – 507.

Deo, S. G., Raghavendra, V., 1994. Ordinary differential equations and stability theory. Eight reprint. New Delhi, Tata McGraw – Hill Publishing Company Limited.

EUROCODE 4, Design of composite steel and concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings. EN 1994-1-1, 2004.

EUROCODE 5, Design of timber structures - Part 1-1: General Rules, General rules and rules for buildings. prEN 1995-1-1.

Evropski predstandard za lesene konstrukcije ENV 1995-2: mostovi

Gara, F., Ranzi, G., Leoni, G. 2006. Displacement-based formulations for composite beams with longitudinal slip and vertical uplift. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; 65: str. 1197-1220.

Girhammer, U. A., Gopu, V. K. A., 1993. Composite beam-columns with interlayer slip – exact analysis. *Journal of Structural Engineering ASCE*, Vol. 119, No. 4: str. 1265-1282.

Girhammar, U., Pan, D., 1993. Dynamic analysis of composite members with interlayer slip. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 30, No. 6, str. 797 – 823.

Kržič, F., 1994. Jeklene konstrukcije I. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo: 208 str.

Matta, F., Nanni, A., Ringelstetter, T., Bank, L., Nelson, B., Jones, S., Orr, B., 2006. Don't Cross That Bridge Until We Fix It!, *Composites Manufacturing*, str. 18-23, 57.

<http://www.cfa-hq.org/pic/articles/2006%20August%20CM.pdf> (12.5.2007)

Nedog, A., 2006. Mapeijev FRP sistem. *Gradbenik* 1/2006: str. 11-13

Newmark, N. M., Siess, C. P., Viest, I. M. 1951. Tests and analysis of composite beams with incomplete interaction. *Proceeding of the Society for Experimental Stress Analysis*, Vol. 9, No. 1, str. 75-92.

Planinc, I., 2006. Dvoslojni kompozitni nosilec, študijsko gradivo. Ljubljana, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.

Robinson, H., Naraine, K. S. 1988. Slip and uplift effects in composite beams, *International Conference on Composite Construction in Steel and Concrete. Proceedings of an Engineering Foundation Conference ASCE*, New England College, Henniker, New Hampshire: str. 487 – 497.

SEPA GROUP - Wood-concrete composite floor brochure.

http://www.sepa.fi/media/esitteet/englanti/sepa2000_eng_net.pdf (14.5.2007)

SEPA GROUP – Bridge mould brochure.

<http://www.sepa.fi/media/esitteet/siltamuottiesite.pdf> (14.5.2007)

Telford, T., CEB-FIP Model Code 1990, Design Code.

Trombeva, A., 2004. Modeliranje utrditve armiranobetonskih konstrukcij s trakovi FRP s prekinjenim veznim stikom. Magistrska naloga. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.

Wolfram, S. 2003, Mathematica. Addison – Wesley Publishing Company.

Žagar, Z., 2002. Drvene konstrukcije 2. Zagreb: Pretei: 538 str.

Ostali viri

Clarke, J. L., 2003. Strengthening concrete structures with fibre composites. Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Structures & Buildings 156, Issue I: str. 49-50.

Čas, B., Saje, M., Planinc, I., 2004. Non – linear finite element analysis of composite planar frames with an interlayer slip, Computers and Structures, Vol. 82: str. 1901 – 1912.

Hulatt, J. A., Hollaway, L. C., Thorne, A., 2004. A novel advanced polymer composite/concrete structural element. Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Structures & Buildings 157, Issue SBI: str. 9-17.

Sebastian, W. M., 2005. Design of FRP strengthening in metal yield zones. Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Structures & Buildings 158, Issue SB5: str. 303-310.

Van der Linden, M. L. R., 1999. Timber-Concrete Composite Floor Systems. Delft, Delft University of Technology: 364 str.