

Univerza
v Ljubljani
Fakulteta
*za gradbeništvo
in geodezijo*

*Janova 2
1000 Ljubljana, Slovenija
telefon (01) 47 68 500
faks (01) 42 50 681
fgg@fgg.uni-lj.si*



Univerzitetni program Gradbeništvo,
Konstrukcijska smer

Kandidatka:

Urša Šolinc

Razvoj stabilnih končnih elementov za velike deformacije

Diplomska naloga št.: 3078

Mentor:
prof. dr. Jože Korelc

Ljubljana, 10. 9. 2009

POVZETEK

V diplomskem delu je podana formulacija novega končnega elementa z neodvisnimi deformacijami (enhanced strain) za probleme velikih deformacij. Najprej je razloženo teoretično ozadje metode končnih elementov za opis mehanskih problemov. Opisana sta matematični model problema in avtomatska simbolna metoda za izpeljavo nelinearnih enačb za analizo primarnega problema. Nato z analizo lastnih vrednosti tangentne togostne matrike elementa pri velikih deformacijah ugotavljamo notranje nestabilnosti v elementu. Le-te lahko povzročijo pojav nefizikalnih deformacijskih oblik (hourglassing). Rezultati so v tem primeru povsem napačni, problem pa je od leta 1996, ko so ga odkrili, ostal nerešen. V nalogi je podan nov pristop k reševanju problema nefizikalnih deformacijskih oblik kot kombinacija metode konsistentnega gradienta in razvoja oblikovnih funkcij v Taylorjevo vrsto. Zaključimo z numeričnim testiranjem različnih končnih elementov. Testi nudijo vpogled v obnašanje formulacije novega končnega elementa.

ABSTRACT

The thesis introduces a new enhanced strain finite element for problems at large inelastic deformations. First, the theoretical background of the finite element method is explained. The mathematical model of the problem, and the automatic symbolic method for deriving nonlinear equations and the primary analysis of the problem are described. Next, the formulation of the new enhanced strain finite element is introduced. Performing the eigenvalue analysis of the element tangent stiffness matrix at large deformations, we can spot internal instabilities in the element. These instabilities can cause development of non-physical hourglass patterns. A new approach for solving this problem, which combines consistent gradient method and Taylor expansion of the shape functions, is introduced. Finally, a set of numerical tests on several finite elements is performed. These tests provide insight into the performance of the new finite element.

KAZALO VSEBINE

1	UVOD	1
2	PREGLED NELINEARNE MEHANIKE KONTINUUMA	3
2.1	Uvodne besede	3
2.2	Kinematične enačbe	3
2.3	Ravnotežni zakoni	5
2.4	Konstitutivni zakoni	6
2.5	Variacijski princip	6
3	DISKRETIZACIJA IN FORMULACIJA KONČNIH ELEMENTOV	8
3.1	Uvodne besede	8
3.2	Lagrangejeva formulacija končnih elementov	8
4	AVTOMATSKO REŠEVANJE PRIMARNEGA PROBLEMA METODE KONČNIH ELEMENTOV	12
4.1	Uvodne besede	12
4.2	Hibridni simbolni pristop	12
4.3	Princip avtomatskega odvajanja AD	14
4.4	Formulacija in avtomatizacija primarnega problema	15
4.5	Primer avtomatizacije primarne analize za 3D hiperelastičen element	17
4.6	Kratki opis AceGen sintakse	19
4.7	AceGen vhod za hiperelastičen material	21
5	KONČNI ELEMENTI Z NEODVISNIMI DEFORMACIJAMI (ENHANCED STRAIN ELEMENTS)	22
5.1	Uvodne besede	22
5.2	Elementi z neodvisnimi deformacijami	23
5.3	Splošna formulacija elementov z neodvisnimi deformacijami	24
5.4	Formulacija elementa z neodvisnimi deformacijami z metodo konsistentnega gradienta in razvojem oblikovnih funkcij v Taylorjevo vrsto	28
5.4.1	Izpeljava konsistentnega gradienta	29
5.4.2	Razvoj oblikovnih funkcij v Taylorjevo vrsto	37

5.4.3	Modificirana integracijska formula	42
6	UGOTAVLJANJE USTREZNOSTI FORMULACIJ KONČNIH ELEMENTOV Z NUMERIČNIMI TESTI	45
6.1	Uvodne besede	45
6.2	Kratek opis različnih formulacij končnih elementov za primerjavo na testih	45
6.3	Seznam in namen numeričnih testov	48
6.4	Patch test	50
6.5	Test objektivnosti	52
6.6	Test občutljivosti končnega elementa na distorzijo mreže	54
6.7	Tanek obroč	57
6.8	Sfera	61
6.9	Nestisljiv kvader	66
6.10	Test stabilnosti končnih elementov	69
6.11	Togo vpeta membrana	76
6.12	Testi za elasto - plastične formulacije končnih elementov	81
7	ZAKLJUČEK	95
8	VIRI	97
9	PRILOGA: KODA ELEMENTA TSCG12 ZA ACEGEN	99

KAZALO PREGLEDNIC

Preglednica 1: Definicije različnih tipov izjem pri postopku avtomatskega odvajanja	15
Preglednica 2: Koordinate vozlišč in robni pogoji za standardizirani patch test.....	51
Preglednica 3: Distorzirano mrežen nosilec: Vertikalni pomik točke P , w_p [mm], za vse testne elemente glede na število prostostnih stopenj DOF	55
Preglednica 4: Tanek obroč: Vertikalni pomik točke A, w_A [mm], glede na število prostostnih stopenj DOF za vse testne elemente	58
Preglednica 5: Tanek obroč: Vertikalni pomik točke B, w_B [mm], glede na število prostostnih stopenj DOF za vse testne elemente	59
Preglednica 6: Sfera: Sila ob vpetju F [kN] glede na število prostostnih stopenj za vse testne elemente	62
Preglednica 7: Nestisljiv kvader: vertikalni pomik točke P, w_p [mm], glede na število prostostnih stopenj za vse testne elemente.....	67
Preglednica 8: Stabilnost končnih elementov pri testu s palico: Kritični pomik w_{kr} [mm] in število valov pri končni deformirani legi glede na število prostostnih stopenj	71
Preglednica 9: Test stabilnosti končnih elementov s kocko: Kritični pomik središčne točke glede na število prostostnih stopenj	74
Preglednica 10: Tanka plošča: Upogibek pri linearni analizi na sredini plošče (v točki P v [mm]), glede na vitkost plošče od 100 do 500	78
Preglednica 11: Tanka plošča: Upogibek pri linearni analizi na sredini plošče (v točki P v [mm]), glede na vitkost plošče od 600 do 1000	78
Preglednica 12: Tanka plošča: Velikost pomikov v točki P [mm] po točni kinematiki, glede na vitkost plošče od 100 do 500.....	79
Preglednica 13: Tanka plošča: Velikost pomikov v točki P [mm] po točni kinematiki, glede na vitkost plošče od 600 do 1000.....	80
Preglednica 14: Natezni test s palico: Relativna sprememba radija ob koncu deformiranja ...	84
Preglednica 15: Natezni test s ploščico: Relativna sprememba radija ob koncu deformiranja	88
Preglednica 16: Uspešnost končnih elementov na numeričnih testih (zelen krog pomeni dobro obnašanje elementa pri določenem testu, rdeč krog pa slabo obnašanje).....	96

KAZALO SLIK

Slika 1: Gibanje telesa B.....	3
Slika 2: Izoparametrična preslikava iz globalnega v referenčni koordinatni sistem na 3D, osemvozliščnem končnem elementu	9
Slika 3: Hibridni simbolni numerični pristop k avtomatizaciji metode končnih elementov ...	13
Slika 4: Algoritem za primarno analizo hiperelastičnega problema	16
Slika 5: Skica primera z enim končnim elementom obremenjenim s pomikom v smeri Y.....	31
Slika 6: Lastne vrednosti tangentne matrike elementov CG4 in Q1E4 za primer z enim končnim elementom.....	34
Slika 7: Karakteristično vedenje funkcij A in B	34
Slika 8: Skica primera z enim 3D končnim elementom obremenjenim s pomikom v smeri Z	36
Slika 9: Numerična integracija paralelepipeda z Gaussovimi točkami.....	44
Slika 10: Konfiguracija mreže končnih elementov za standarizirani patch test	50
Slika 11: Rezultat rotacijskega patch testa.....	51
Slika 12: Geometrija testnega nosilca.....	52
Slika 13: Rezultat testa objektivnosti.....	53
Slika 14: Graf sile ob vpetju v odvisnosti od zasuka	53
Slika 15: Geometrijski, obtežbeni in materialni podatki za distorzirano mrežen nosilec.....	55
Slika 16: Distorzirano mrežen nosilec: Graf pomika točke P w_p [mm] glede na število prostostnih stopenj DOF	56
Slika 17: Distorzirano mrežen nosilec: Rezultat za TSCG12 pri mreži 64 x 16 x 8	56
Slika 18: Geometrijski, obtežbeni in materialni podatki za tanek obroč	58
Slika 19: Tanek obroč: Vertikalni pomik točke A, w_A [mm], glede na število prostostnih stopenj DOF za vse testne elemente	59
Slika 20: Tanek obroč: Vertikalni pomik točke B, w_B [mm], glede na število prostostnih stopenj DOF za vse testne elemente	60
Slika 21: Končna deformacijska oblika TSCG12 pri mreži 2 x 6 x 30	60
Slika 22: Geometrijski, obtežbeni in materialni podatki za sfero.....	62
Slika 23: Sfera: Sila ob vpetju F [kN] glede na število prostostnih stopenj za vse testne elemente.....	63
Slika 24: Sfera: Končni rezultat TSCG12 pri mreži 1 x 16 x 16.....	64
Slika 25: Sfera: Primerjava grafov sila-pomik za mrežo 1x 16 x 16 med vsemi testnimi elementi.....	64
Slika 26: Sfera: Graf sila-pomik za vse gostote mrež za končni element TSCG12.....	65
Slika 27: Sfera: Graf sila-pomik za vse gostote mrež za končni element H1	65
Slika 28: Geometrijski, obtežbeni in materialni podatki za nestisljiv kvader.....	67
Slika 29: Nestisljiv kvader: Deformacijska oblika TSCG12 pri mreži 16 x 16 x 16.....	68
Slika 30: Nestisljiv kvader: vertikalni pomik točke P, w_p [mm], glede na število prostostnih stopenj za vse testne elemente	68
Slika 31: Geometrijski in materialni podatki za test stabilnosti končnega elementa s palico .	70
Slika 32: Stabilnost končnih elementov pri testu s palico: Prve tri lastne oblike pripadajoče prvim trem lastnim vektorjem tangentne matrike za TSCG12 pri mreži 6 x 6 x 60.	71
Slika 33: Stabilnost končnih elementov pri testu s palico: Prve tri lastne oblike pripadajoče prvim trem lastnim vektorjem tangentne matrike za H1E9 pri mreži 6 x 6 x 60. Očiten pojav nefizikalnih lastnih oblik.....	72

Slika 34: Geometrijski in materialni podatki za test stabilnosti končnih elementov s kocko ..	73
Slika 35: Test stabilnosti končnih elementov s kocko: Kritični pomik središčne točke glede na število prostostnih stopenj	74
Slika 36: Test stabilnosti končnih elementov s kocko: Rezultati testa za elemente H1E21, TSCG12, CG9, H1E9 in H1	75
Slika 37: Test stabilnosti končnih elementov s kocko: Rezultati testa za elemente O1, H2 in O2	76
Slika 38: Geometrijski, obtežbeni in materialni podatki za tanko ploščo	77
Slika 39: Tanka plošča: Upogibek na sredini plošče (v točki P v [mm]) pri linearni analizi v odvisnosti od vitkosti plošče	79
Slika 40: Tanka plošča: Velikost pomikov v točki P [mm] po točni kinematiki v odvisnosti od vitkosti plošče	80
Slika 41: Tanka plošča: Deformirana oblika TSCG12	81
Slika 42: Geometrijski, obtežbeni in materialni podatki za natezni test s palico	82
Slika 43: Natezni test s palico: Relativna sprememba radija v odvisnosti od raztezka palice .	83
Slika 44: Natezni test s palico: Končna deformacijska oblika in pripadajoče Missesove napetosti za TSCG12	84
Slika 45: Natezni test s palico: Končna deformacijska oblika in pripadajoče Missesove napetosti za H1E9	85
Slika 46: Natezni test s palico: Končna deformacijska oblika in pripadajoče Missesove napetosti za O1	85
Slika 47: Natezni test s palico: Končna deformacijska oblika in pripadajoče Missesove napetosti za H1	86
Slika 48: Geometrijski, obtežbeni in materialni podatki za natezni test s ploščico	87
Slika 49: Natezni test s ploščico: Relativna sprememba radija v odvisnosti od raztezka	88
Slika 50: Natezni test s ploščico: Rezultati za TSCG12	89
Slika 51: Natezni test s ploščico: Rezultati za CG9	90
Slika 52: Natezni test s ploščico: Rezultati za H1	91
Slika 53: Natezni test s ploščico: Rezultati za H1E9	92
Slika 54: Natezni test s ploščico: Rezultati za O1	93
Slika 55: Natezni test s ploščico: Rezultati za H2	94

1 UVOD

Z razvojem računalništva, ko postajajo računalniki zmogljivejši in cenejši, se je razmahnilo tudi računalniško podprto inženirstvo. Na tržišču so razna orodja, s katerimi lahko analiziramo kompleksne inženirske procese. Inženirji iz raznih področij uporabljajo pri svojih raziskavah orodja za numerične simulacije. Modeliranje inženirskih problemov v mnogih primerih vodi do navadnih in parcialnih diferencialnih enačb, ki so običajno nelinearne narave. Metoda končnih elementov je močno orodje za reševanje teh diferencialnih enačb, ki so jo razvili pred petdesetimi leti. Aplikacije v inženirstvu vključujejo okvirje, lupine, dvodimenzionalne in trodimenzionalne elemente pri analizah konstrukcij znotraj disciplin gradbeništva, letalstva in mehanike. S končnimi elementi lahko analiziramo probleme, povezane z deformiranjem trdnin, s segrevanjem, magnetnim in električnim poljem kot tudi simulacije fluidov.

Na to zahtevo je bilo razvitih veliko različnih formulacij končnih elementov, ki se uporabljajo pri specifičnih vrstah problemov, in takih, s katerimi lahko rešujemo splošne vrste problemov. Veliko jih rešuje nelinearne probleme. Uporabnik nelinearnih končnih elementov mora poznati teoretično ozadje problemov, njihovo diskretizacijo s končnimi elementi in računalniške algoritme za reševanje nelinearnih enačb, ki so v programskih kodah teh elementov, saj mu le to omogoča ocenjevanje in preverjanje rezultatov, ki jih dobi z nelinearno analizo. Razlogov je več. Nelinearne simulacije lahko vodijo do rešitev, ki niso enolične, npr. pojav lokalizacije pri analizah konstrukcij ali pa limitne točke in bifurkacija. Konvergenca numerične analize ni vedno zagotovljena. Običajno za nelinearne probleme ni na voljo nobene analize napak, ki se lahko pojavijo pri postopku reševanja.

Nelinearnosti, ki se pojavijo pri praktičnih primerih iz gradbeništva, so različne narave. Npr. pri jeklenih konstrukcijah so za določitev kritične obtežbe okvirjev ali paličja potrebne elastoplastične analize. V primeru kabelskih konstrukcij je potrebno za opis velikih deformacij upoštevati geometrijsko nelinearnost. Pri betonskih konstrukcijah ali mehaniki zemljin je za realistični opis inženirskega problema potrebno uporabiti zapletene nelinearne materialne zakone. Prav tako potrebujemo nelinearne modele pri kontaktnih problemih sidranja konstrukcij, kjer pride do stika jekla in betona, kot tudi pri termodinamičnih procesih pri strjevanju betona. Metoda končnih elementov pokriva široko področje inženirskih

problemov. Uporablja se tudi pri simulaciji trkov v avtomobilski industriji. Vsi naštetih primeri zahtevajo razsežne modele iz nelinearnih končnih elementov z več tisoč do več deset milijonov prostostnih stopenj. Torej je za uporabno formulacijo končnega elementa poleg pravilnosti formulacije z gledišča mehanike kontinuuma potrebna tudi stabilnost in učinkovitost.

V zadnjih letih je bil dosežen velik napredek pri formulacijah novih končnih elementov na vseh področjih nelinearnih problemov. Cilj razvoja je izpeljava elementov za nelinearne probleme, ki so stabilni, natančni in učinkoviti. Z dosego tega cilja bo uporaba metode končnih elementov na nelinearnih primerih iz inženirstva varnejša. Danes lahko standardne probleme majhnih do zmernih deformacij rešimo z običajnimi kodami končnih elementov, medtem ko za velike deformacije, materialne nestabilnosti in kontaktne probleme še vedno ni zadovoljivega končnega elementa.

V sledečih poglavjih je opisana formulacija novega končnega elementa za velike deformacije, ki sodi v skupino elementov z neodvisnimi deformacijami (enhanced strain elements). Te elemente sta prva formulirala Simo in Rifai leta 1990. Izkazali so se za zelo ustrezne, saj izboljšajo natančnost in učinkovitost elementov, formuliranih po metodi pomikov, hkrati pa so osnovne spremenljivke deformacije, kar omogoča enostavno implementacijo nelinearnih materialnih zakonov. Elementi z neodvisnimi deformacijami žal niso povsem idealni, saj v določenih situacijah (npr. pod vplivom velikih deformacij), ne glede na gostoto mreže in red integracije, opisujejo nefizikalne deformacijske oblike (hourglassing). Rezultati so v tem primeru povsem napačni. Ta pojav sta prva opisala Wriggers in Reese leta 1996 in je do danes ostal nerešen problem. V nalogi je sistematsko obravnavan nerešen fenomen pojavljanja nefizikalnih deformacijskih oblik in podan je izboljššan pristop k reševanju tega problema. Za nelinearne probleme ne moremo analitično dokazati, da končni element v vsakem primeru konvergira k pravi rešitvi, zato obnašanje novega končnega elementa preiskujemo s karakterističnimi numeričnimi testi. Te teste izvednotimo z različnimi končnimi elementi in rezultate medsebojno primerjamo. Tako ocenimo stabilnost, natančnost in učinkovitost novega končnega elementa.

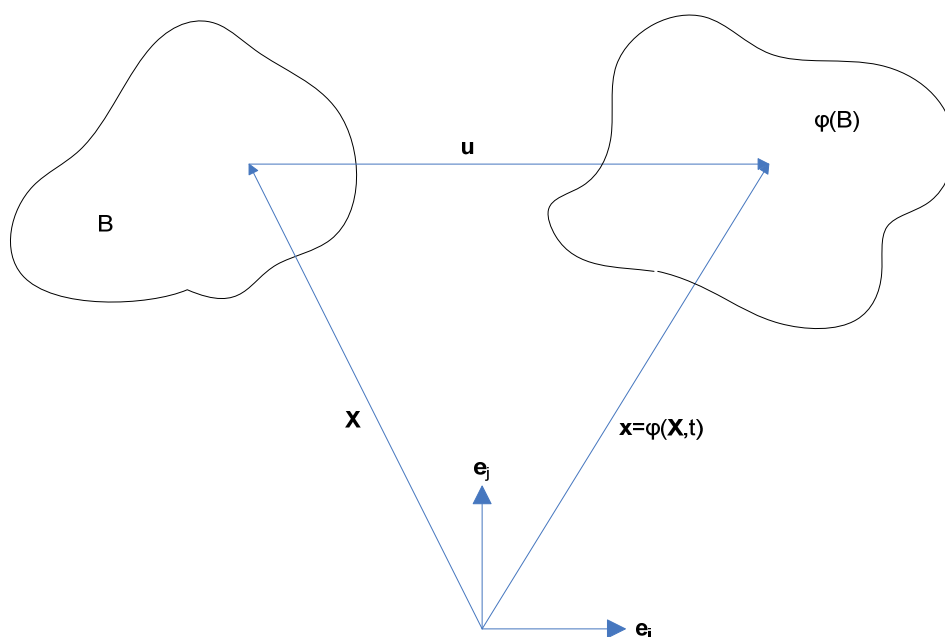
2 PREGLED NELINEARNE MEHANIKE KONTINUUMA

2.1 Uvodne besede

V tem poglavju je podana kratka obnova mehanike trdnih teles. Natančneje, podan je opis gradnikov, ki so potrebni za opis izotermalnega mehanskega procesa. Ti gradniki so: kinematične enačbe, ravnotežne enačbe in konstitutivne enačbe. Omejimo se na Lagrangejev opis gibanja in pripadajoče mere deformacij. V nadaljevanju je opisana šibka oblika ravnotežnih enačb, ki je osnova za formulacijo končnih elementov. Kot primer konstitutivnih enačb je izbran izotropičen hiperelastičen neo - Hookejev material, s katerim opišemo poleg geometrijske nelinearnosti tudi implikacijo nelinearnega materialnega obnašanja.

2.2 Kinematične enačbe

Naj bo B začetna konfiguracija telesa v prostoru in naj bo nek delec $X \in B$. Deformacija telesa je opisana z bijektivno preslikavo φ , ki vsakemu delcu $X \in B$ enolično priredi delec x v deformirani obliki $\varphi(B)$ (Slika1).



Slika 1: Gibanje telesa B

Delec X v nedeformirani obliki je enolično določen z vektorjem $\mathbf{X} = X_A \mathbf{e}_A$. Ob času t položaj delca X opiše enačba:

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t) = x_i \mathbf{e}_i. \quad (2.1)$$

Gradient deformacij \mathbf{F} je tenzor, ki povezuje infinitezimalno majhen vektor dX z vektorjem dx z enačbo $dx = \mathbf{F}dX$. Komponente \mathbf{F} so parcialni odvodi $\frac{\partial x_i}{\partial X_A} = F_{iA}$. Ob upoštevanju (2.1) dobimo:

$$\mathbf{F} = F_{iA} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_A = \text{Grad} \mathbf{x}. \quad (2.2)$$

Z $J = \det \mathbf{F}$ definiramo determinanto deformacijskega gradienta. Deformacije omejimo tako, da je matrika gradienta deformacij vedno pozitivno definitna, torej $J > 0$. Ta pogoj potrebujemo za zagotavljanje polnega ranga matrike ter fizikalne zahteve, da je volumen telesa vedno pozitiven.

Enačbe v mehaniki kontinuuma se lahko napišejo v odvisnosti od začetne ali deformirane oblike telesa. Izbran zapis ne spremeni teorije, a se lahko pozna pri učinkovitosti numeričnega postopka.

Izbrali smo Lagrangejev zapis količin, ki se sklicuje na začetno obliko telesa.

Ko imamo \mathbf{F} lahko zapišemo levi in desni Cauchyjev tenzor:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T. \quad (2.3)$$

Te mere deformacij se običajno uporabijo za definicijo Green - Lagrangejevega tenzorja deformacij \mathbf{E} :

$$\mathbf{E} = E_{AB} \mathbf{e}_A \otimes \mathbf{e}_B = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}), \quad E_{AB} = \frac{1}{2}(C_{AB} - \delta_{AB}). \quad (2.4)$$

2.3 Ravnotežni zakoni

V tem razdelku so zbrane diferencialne enačbe, ki izražajo lokalno ohranjanje mase in momenta. Te enačbe so povezane z osnovnimi postavkami mehanike kontinuuma. Znotraj materialnega opisa je ohranjanje mase podano z $\rho_0 = J\rho$, kjer sta ρ_0 in ρ začetna in trenutna gostota. Iz te enačbe sledi povezava med volumskim elementom v začetni in trenutni obliki:

$$dv = \frac{\rho_0}{\rho} dV = JdV. \quad (2.5)$$

Ohranjanje momenta ali lokalna oblika enačbe gibanja glede na začetno obliko:

$$\text{Div}\mathbf{P} + \rho_0 \bar{\mathbf{b}} = \rho_0 \ddot{\mathbf{x}}, \quad P_{Ai,A} + \rho_0 \bar{b}_i = \rho_0 \ddot{x}_i. \quad (2.6)$$

V zgornji enačbi je \mathbf{P} nesimetričen prvi Piola - Kirchhoffov tenzor napetosti, ki povezuje vektor napetosti \mathbf{t} , ki deluje na površino telesa z normalo na površino telesa \mathbf{n} z enačbo $\mathbf{t} = \mathbf{P} \mathbf{n}$. Zadnja relacija je znana kot Cauchyjev teorem. $\rho \bar{\mathbf{b}}$ predstavlja volumsko silo (npr. gravitacijska sila), $\rho_0 \ddot{\mathbf{x}}$ pa inercialno silo, ki jo pri statičnih primerih lahko zanemarimo. Ravnotežje momentov vodi do naslednje relacije, ki kaže nesimetričnost prvega Piola - Kirchhoffovega tenzorja napetosti:

$$\mathbf{P}\mathbf{F}^T = \mathbf{F}\mathbf{P}^T. \quad (2.7)$$

Veliko lažje je delo s simetričnimi tenzorji, zato vpeljemo drugi Piola - Kirchhoffov tenzor napetosti, ki je odvisen od začetne oblike telesa B :

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P}, \quad S_{AB} = F_{Ai} P_{Bi}. \quad (2.8)$$

\mathbf{S} ne predstavlja nobene fizikalno pomembne napetosti, igra pa pomembno vlogo v konstitutivni teoriji, saj je to konjungirana mera napetosti k Green - Lagrangejevemu tenzorju deformacij (2.4).

2.4 Konstitutivni zakoni

Konstitutivna teorija opisuje makroskopsko obnašanje materiala. V konstitutivnih enačbah so deformacije povezane z napetostmi v telesu. Ker je obnašanje realnih materialov zelo kompleksno, moramo najti ustrezne približke za dejanski odziv materiala. Tako aproksimacijo lahko naredimo ločeno za vsak odziv materiala (npr. elastično, plastično, viskoplastično obnašanje).

V tem razdelku se omejimo samo na elastično obnašanje materialov. Konstitutivna enačba za drugi Piola - Kirchhoffov tenzor napetosti za hiperelastičen material je izpeljana s potencialom ψ , ki predstavlja deformacijsko energijo telesa. Odvod ψ po Green - Lagrangejevem tenzorju deformacij da iskani konstitutivni zakon:

$$\mathbf{S} = \rho_0 \frac{\partial \psi(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}; \quad S_{AB} = \rho_0 \frac{\partial \psi(\mathbf{E})}{\partial E_{AB}}. \quad (2.9)$$

2.5 Variacijski princip

Variacijska ali pa šibka oblika enačb izpeljanih v prejšnjih poglavjih pomagata pri študiji obstoja in enoličnosti rešitve in sta baza mnogih numeričnih postopkov (npr. metode končnih elementov). Energijski funkcional za elastične probleme v formulaciji izraženi s pomiki ob predpostavki, da je obtežba konzervativna, torej so sile neodvisne od poti:

$$\Pi(\varphi) = \int_B \rho_0 \psi(\mathbf{C}) dV - \int_B \rho_0 \bar{\mathbf{b}} \cdot \varphi dV - \int_{\partial B_\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \varphi dA \quad \Rightarrow \quad Min \quad (2.10)$$

Tu predstavlja $\rho_0 \psi(\mathbf{C})$ funkcijo shranjene energije. Potencialna energija $\Pi(\varphi)$ mora biti minimalna za deformacijo φ , da bo φ rešitev pripadajočega problema robnih vrednosti. Za to potrebujemo odvod Π po deformaciji. V ta namen izračunamo smerni odvod Π v φ v smeri η , kar se imenuje tudi prva variacija Π -ja:

$$D\Pi(\varphi) \cdot \eta = \frac{d}{d\alpha} \Pi(\varphi + \alpha\eta) \Big|_{\alpha=0} \quad (2.11)$$

Ko vstavimo to enačbo v (2.10), dobimo:

$$G(\varphi, \eta) = D\Pi(\varphi) \cdot \eta = \int_B \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{C}} \cdot (D\mathbf{C} \cdot \eta) dV - \int_B \rho_0 \bar{\mathbf{b}} \cdot \eta dV - \int_{\partial B_\sigma} \hat{\mathbf{t}} \cdot \eta dA = 0 \quad (2.12)$$

Smerni odvod $G(\varphi, \eta)$ mora biti enak nič v φ , če Π minimalna.

Prvi člen v (2.12) predstavlja divergenco napetosti, druga dva pa označujeta virtualno delo zunanje obtežbe. Formulacijo (2.12) imenujemo princip virtualnega dela ali šibka oblika problema robnih vrednosti za elastostatiko.

Variacija \mathbf{C} pomeni:

$$\delta \mathbf{C} = D\mathbf{C} \cdot \eta = \mathbf{F}^T \text{Grad} \eta + \text{Grad}^T \eta \cdot \mathbf{F} \quad (2.13)$$

V splošnem je (2.13) nelinearna in moramo uporabiti numerične postopke, da najdemo rešitev variacijske enačbe:

$$G(\varphi, \eta) = \frac{1}{2} \int_B \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{C} dV - \int_B \rho_0 \bar{\mathbf{b}} \cdot \eta dV - \int_{\partial B_\sigma} \hat{\mathbf{t}} \cdot \eta dA = 0 \quad (2.14)$$

3 DISKRETIZACIJA IN FORMULACIJA KONČNIH ELEMENTOV

3.1 Uvodne besede

To poglavje je posvečeno aproksimaciji problema robnih vrednosti v elastostatiki s končnimi elementi. Izpeljan je primarni problem metode končnih elementov, ki temelji na formulaciji iz prejšnjega poglavja, torej glede na začetno nedeformirano obliko telesa. Za model končnih elementov je izbrana formulacija izražena s pomiki.

3.2 Lagrangejeva formulacija končnih elementov

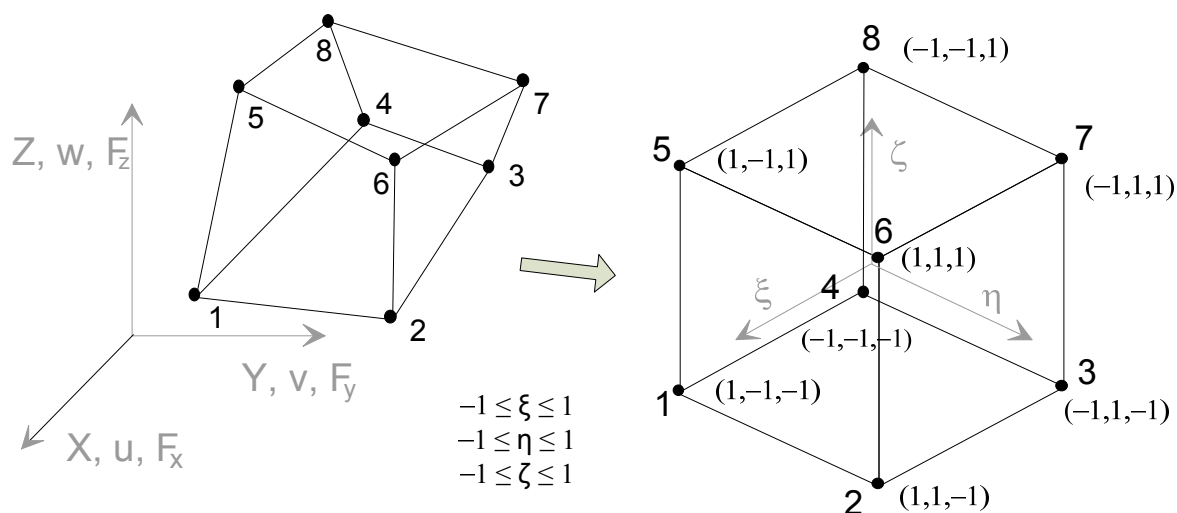
Standardna diskretizacija B^h telesa B s končnimi elementi:

$$B^h = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Omega_e \quad (3.1)$$

V zgornji enačbi je n_e število elementov, Ω_e pa volumen elementa.

Tako v 2D kot v 3D aplikacijah v mehaniki trdnin se široko uporabljajo izoparametrični elementi. Njihova prednost je v dobrem modeliranju zahtevnih geometrij. Izoparametričen koncept pomeni, da se geometrija X , polje pomikov u in variacije η interpolirajo znotraj elementa Ω_e z istimi funkcijami:

$$\begin{aligned} X_e^h &= \sum_{I=1}^n N_I X_I & \eta_e^h &= \sum_{I=1}^n N_I \eta_I \\ u_e^h &= \sum_{I=1}^n N_I u_I \end{aligned} \quad (3.2)$$



Slika 2: Izoparametrična preslikava iz globalnega v referenčni koordinatni sistem na 3D, osemvozliščnem končnem elementu

V nadaljevanju se omejimo na 3D sistem, izpeljava pa je enaka za 2D in 3D aplikacije. V (3.2) se N_I imenujejo oblikovne funkcije, n je število vozlišč v enem elementu in $(\dots)_I$ so vrednosti v vozliščih interpolacijskega polja $(\dots)^h$. Za trdne snovi veljajo določene zahteve pri izbiri N_I . N_I naj bo funkcija razreda C^0 , torej mora biti zvezna in zvezno odvedljiva na območju kjer je definirana, to sledi iz dejstva, da se v (2.12) pojavijo le prvi odvodi. Nadalje mora biti popoln polinom za X, Y, Z , da izpolni pogoje konvergence.

Obstaja več načinov generacije funkcij N_I . Tu se omejimo na Lagrangejevo družino. Primer take funkcije za osemvozliščni element oblike heksaedra:

$$N_I = \frac{1}{2}(1 + \xi_I \xi) \frac{1}{2}(1 + \eta_I \eta) \frac{1}{2}(1 + \zeta_I \zeta) ; \quad I = 1, \dots, 8 \quad (3.3)$$

V zgornji enačbi so ξ_I, η_I in ζ_I koordinate vozlišč končnega elementa v referenčnem koordinatnem sistemu. Te imajo naslednje vrednosti: $\xi_I = \{1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1\}$, $\eta_I = \{-1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1\}$ in $\zeta_I = \{-1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1\}$.

Oblikovne funkcije so definirane v referenčnem koordinatnem sistemu ξ, η, ζ , zato je potrebna transformacija v globalne koordinate X, Y, Z (Slika 2). Pišimo X, Y, Z kot

X_1, X_2, X_3 . V šibki obliki (2.12) se pojavijo odvodi deformacij ali variacije. V izoparametričnem konceptu uporabimo odvode aproksimiranega polja pomikov:

$$\frac{\partial u_e^h}{\partial X_A} = \sum_{I=1}^n \frac{\partial N_I(\xi, \eta, \zeta)}{\partial X_A} u_I \quad (3.4)$$

Za izračun parcialnih odvodov N_I po X_A uporabimo verižno pravilo:

$$\begin{Bmatrix} N_{I,1} \\ N_{I,2} \\ N_{I,3} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} N_{I,\xi} \\ N_{I,\eta} \\ N_{I,\zeta} \end{Bmatrix} \quad \text{kjer} \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} X_{1,\xi} & X_{1,\eta} & X_{1,\zeta} \\ X_{2,\xi} & X_{2,\eta} & X_{2,\zeta} \\ X_{3,\xi} & X_{3,\eta} & X_{3,\zeta} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Z $\det \mathbf{J}$ označimo determinanto Jacobijeve transformacije med $d\xi, d\eta$ in dX_1, dX_2 .

Tako pripravljeni lahko izpeljemo končni element. Po parametrizaciji desnega Cauchy-Greenovega tenzorja \mathbf{C} z vektorjem neznank \mathbf{p}_e , se variacija \mathbf{C} glasi:

$$\delta \mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{p}_e} \delta \mathbf{p}_e \quad (3.6)$$

Če to variacijo upoštevamo v variacijski enačbi (2.14) dobimo šibko obliko končnega elementa Ω_e :

$$G(\mathbf{p}_e, \delta \mathbf{p}_e) = \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{p}_e} d\Omega \right) \delta \mathbf{p}_e - \left(\int_{\Omega_e} \rho_0 \bar{\mathbf{b}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{p}_e} d\Omega \right) \delta \mathbf{p}_e - \left(\int_{\partial \Omega_e} \hat{\mathbf{t}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{p}_e} d\partial \Omega \right) \delta \mathbf{p}_e \quad (3.7)$$

V zgornji enačbi je \mathbf{S} drugi Piola - Kirchhoffov tenzor napetosti, \mathbf{u} so pomiki vozlišč, \mathbf{b} in \mathbf{t} pa obtežbeni vektorji v vozliščih.

Z operatorjem $*\sum$, ki nadgrajuje običajni operator za vsoto tako, da se prispevki elementov ne le seštejejo, pač pa se upošteva tudi kinematična kompatibilnost med elementi, definiramo globalni algebraični sistem enačb danega problema:

$$\begin{aligned}\mathbf{G}(\mathbf{p}) &= \mathbf{R}(\mathbf{p}) - \mathbf{P} = 0 \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^N \\ \mathbf{R}(\mathbf{p}) &= * \sum_{e=1}^{n_e} \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{p}_e} d\Omega \\ \mathbf{P} &= * \sum_{e=1}^{n_e} \left(\int_{\Omega_e} \rho_0 \bar{\mathbf{b}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{p}_e} d\Omega - \int_{\partial\Omega_e} \hat{\mathbf{t}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{p}_e} d\partial\Omega \right)\end{aligned}\tag{3.8}$$

V zgornji enačbi, ki jo imenujemo tudi primarni problem, N predstavlja skupno število prostostnih stopenj, \mathbf{p} pa označuje vektor neznank sistema.

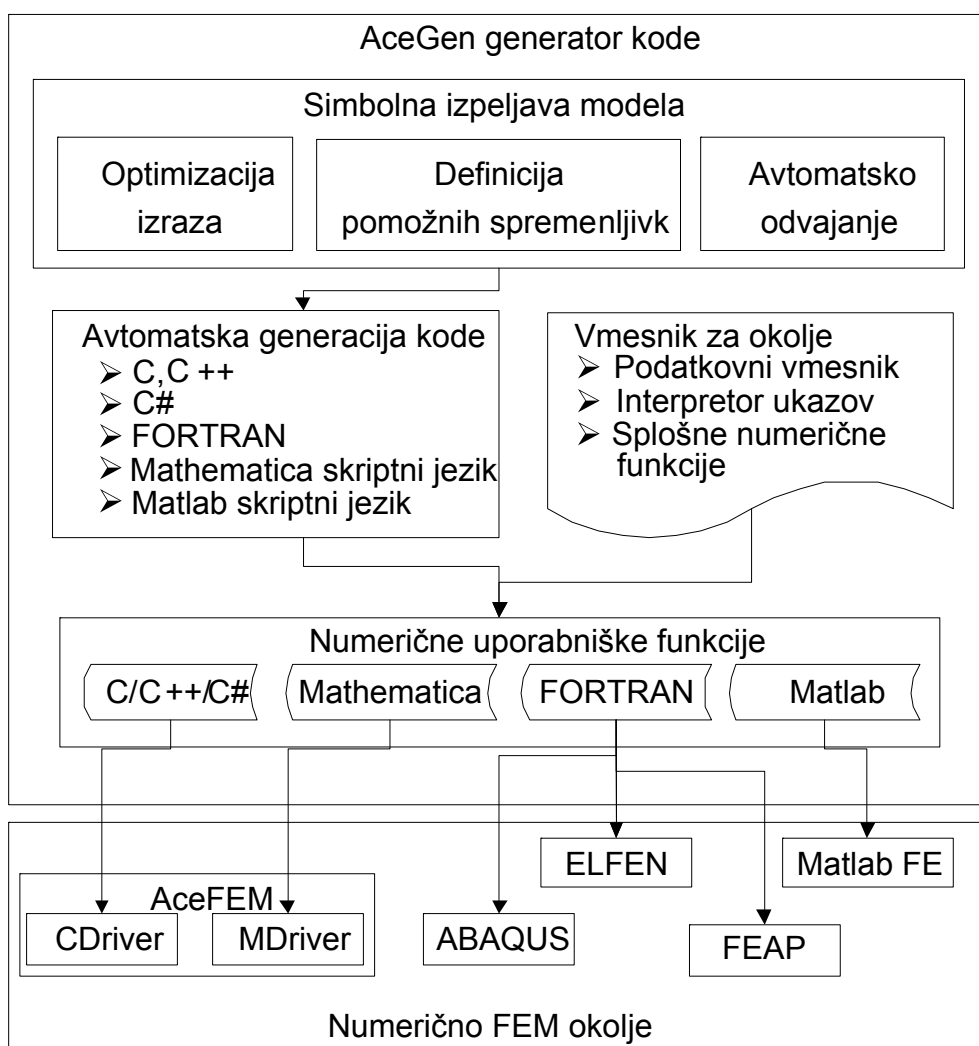
4 AVTOMATSKO REŠEVANJE PRIMARNEGA PROBLEMA METODE KONČNIH ELEMENTOV

4.1 Uvodne besede

V tem poglavju je predstavljen simbolni numerični pristop k avtomatski analizi hiperelastičnega problema formuliranega in rešenega z metodo končnih elementov. Zaradi enostavnosti simbolne formulacije potrebujemo jasno zvezo med matematično formulacijo in računalniško kodo. Pomembno je tudi, da avtomatizacija vključuje le korake, ki so z numeričnega stališča enolični, medtem ko prave odločitve opravi raziskovalec. Potrebni aparat za avtomatizacijo je kombinacija simbolnega računskega sistema, tehnike avtomatskega odvajanja in avtomatsko generiranje kode.

4.2 Hibridni simbolni pristop

Računalniški algebraični sistemi so orodja za manipulacijo z matematičnimi izrazi v simbolni obliki. Eno teh je Mathematica, ki poleg omenjenega izvrši tudi numerične operacije. Simbolni sistemi se uporabijo pri avtomatskem razvoju primernih formul in generiranju numeričnih kod. Omejitev je eksponenta rast fizične velikosti izrazov pri problemih, ki imajo veliko število prostostnih stopenj ali pa zahtevajo razne transformacije, odvajanja, matrične operacije, kar vodi k neučinkovitosti algoritma. Ena od rešitev je hibridni simbolni pristop. Ideja je uporaba splošnega računalniškega algebraičnega sistema za razvoj karakterističnih količin končnega elementa na nivoju posameznega končnega elementa in za avtomatsko generiranje uporabniških funkcij. Avtomatsko generirana koda je nato vgrajena v izbrano okolje za končne elemente in uporabljena znotraj globalnega postopka za numerično reševanje. Splošen postopek je opisan na Sliki 3.



Slika 3: Hibridni simbolni numerični pristop k avtomatizaciji metode končnih elementov

Postopek na Sliki 3 temelji na generatorju kod AceGen. Pristop vgrajen v AceGen se imenuje Simultana Stohastična Simplifikacija Numerične Kode. S tem pristopom se izognemo prekomerni rasti izrazov s kombinacijo simbolne in algebraične zmožnosti računalniškega algebraičnega sistema Mathematica, avtomatičnega odvajanja in simultane optimizacije izrazov z avtomatsko selekcijo in vpeljavo pomožnih spremenljivk. Formula je optimizirana, poenostavljena in nadomeščena s pomožnimi spremenljivkami simultano z razvojem problema.

Običajno funkcijo simbolno odvajamo ročno ali s pomočjo računalniškega algebraičnega sistema, če pa je odvede težko izračunati, pa uporabimo numerično odvajanje z metodo

končnih diferenc. Avtomatsko odvajanje AD je alternativna metoda, ki temelji na dejstvu, da vsak računalniški program izvrši zaporedje elementarnih operacij z znanimi odvodi, in s tem omogoči tudi izvedenost točnih odvodov z verižnim pravilom za poljubno kompleksno funkcijo. Z AD se izognemo rasti izrazov, ki je povezana z simbolnim odvajanjem.

4.3 Princip avtomatskega odvajanja AD

Naj bo \mathbf{a} množica paroma neodvisnih spremenljivk, f pa poljubna funkcija \mathbf{a} . Definicija operatorja odvajanja pri AD algoritmu je $\delta f(\mathbf{a})/\delta \mathbf{a}$, kjer slednji operator predstavlja odvod funkcije f po spremenljivkah \mathbf{a} . Z AD proceduro lahko predstavimo vse vrste odvodov kot so smerni odvodi, totalni odvodi, parcialni odvodi in konsistentni odvodi, ki so vsi del običajne formulacije končnih elementov. Rezultat procedure AD se ne ujema nujno z matematično formulacijo zgornjih odvodov, zato za te primere razširimo notacijo AD z dodatno informacijo k procesu avtomatskega odvajanja, ki definira izjemo.

Naj bo \mathbf{b} množica paroma neodvisnih pomožnih spremenljivk, ki se pojavijo pri izvedenosti funkcije f , \mathbf{G} množica poljubnih funkcij \mathbf{a} , tako da velja $\mathbf{b} := \mathbf{G}(\mathbf{a})$, \mathbf{M} pa poljubna matrika. Definiramo AD izjemo na naslednji način:

$$\square \left| \begin{array}{l} D(\mathbf{b}) \\ D(\mathbf{a}) \end{array} \right. = \mathbf{M} \quad (4.1)$$

V zgornji enačbi \square predstavlja eno od form AD operatorjev, ki so našteje v Preglednici 1. Zapis (4.1) pove, da so med tekom AD procedure totalni odvodi poljubne množice paroma neodvisnih pomožnih spremenljivk \mathbf{b} po neodvisnih spremenljivkah \mathbf{a} enaki matriki \mathbf{M} . Izjeme predstavljajo most v verižnem pravilu, ki gre direktno od \mathbf{b} do \mathbf{a} . Poznamo lokalno in globalno definicijo izjeme glede na točko v algoritmu, kjer definiramo izjemo. Če definiramo izjemo hkrati s klicom AD procedure, potem to definicijo imenujemo lokalna definicija AD izjeme. V primeru, da imamo v algoritmu veliko število odvajanj in več tipov spremenljivk, postane tak način definicije izjem zahteven. V takih situacijah informacije o vseh AD izjemah, ki se nanašajo na pomožne spremenljivke \mathbf{b} , definiramo skupaj z \mathbf{b} .

Slednje imenujemo globalna definicija AD izjeme. Če ni definiranih nobenih AD izjem, potem je operator odvajanja pri AD algoritmu enak parcialnemu odvodu:

$$\frac{\delta f(\mathbf{a})}{\delta \mathbf{a}} = \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} \quad (4.2)$$

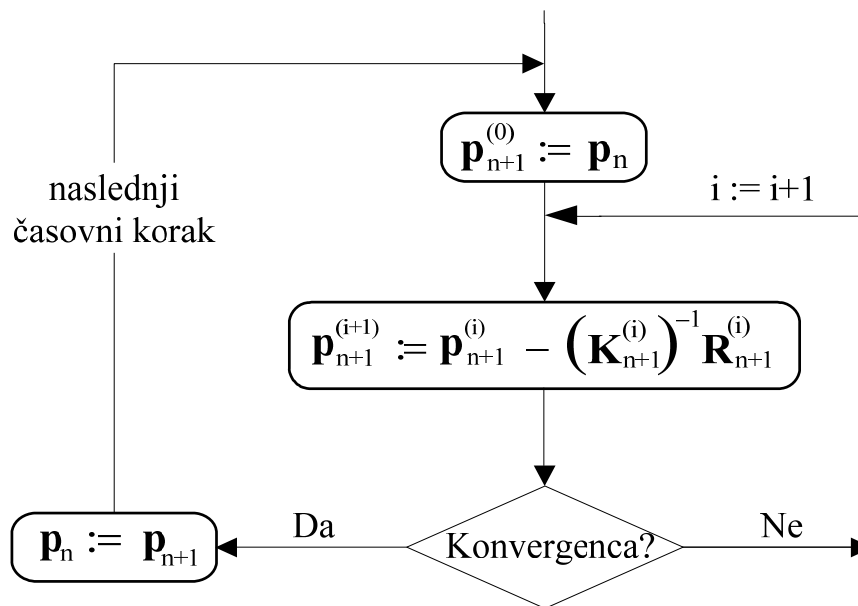
Torej, kadar kličemo AD proceduro uporabimo zapis $\delta f(\mathbf{a})/\delta \mathbf{a}$ namesto $\partial f(\mathbf{a})/\partial \mathbf{a}$.

Tip AD izjeme	Lokalna definicija AD izjeme	Globalna definicija AD izjeme
A	$\nabla f_A := \frac{\delta f(\mathbf{a}, \mathbf{b}(\mathbf{a}))}{\delta(\mathbf{a})} \Big _{\frac{D(\mathbf{b})}{D(\mathbf{a})}=\mathbf{M}}$	$\mathbf{b} := \mathbf{G}(\mathbf{a}) \Big _{\frac{D(\mathbf{b})}{D(\mathbf{a})}=\mathbf{M}(\mathbf{a})}$ $\nabla f_A := \frac{\delta f(\mathbf{a}, \mathbf{b}(\mathbf{a}))}{\delta(\mathbf{a})}$
B	$\nabla f_B := \frac{\delta f(\mathbf{a}, \mathbf{b}(\mathbf{a}))}{\delta(\mathbf{a})} \Big _{\frac{D(\mathbf{b})}{D(\mathbf{a})}=\mathbf{0}}$	$\mathbf{b} := \mathbf{G}(\mathbf{a}) \Big _{\frac{D(\mathbf{b})}{D(\mathbf{a})}=\mathbf{0}}$ $\nabla f_B := \frac{\delta f(\mathbf{a}, \mathbf{b}(\mathbf{a}))}{\delta(\mathbf{a})}$
C	$\nabla f_C := \frac{\delta f(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\delta(\mathbf{a})} \Big _{\frac{D(\mathbf{b})}{D(\mathbf{a})}=\mathbf{M}}$	$\mathbf{b} := \mathbf{G} \Big _{\frac{D(\mathbf{b})}{D(\mathbf{a})}=\mathbf{M}}$ $\nabla f_C := \frac{\delta f(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\delta(\mathbf{a})}$
D	$\nabla f_D := \frac{\delta f(\mathbf{a}, \mathbf{b}(\mathbf{c}(\mathbf{a})))}{\delta(\mathbf{a})} \Big _{\frac{D(\mathbf{b})}{D(\mathbf{c})}=\mathbf{M}}$	$\mathbf{c} := \mathbf{H}(\mathbf{a})$ $\mathbf{b} := \mathbf{G}(\mathbf{c}) \Big _{\frac{D(\mathbf{b})}{D(\mathbf{c})}=\mathbf{M}}$ $\nabla f_D := \frac{\delta f(\mathbf{a}, \mathbf{b}(\mathbf{c}(\mathbf{a})))}{\delta(\mathbf{a})}$

Preglednica 1: Definicije različnih tipov izjem pri postopku avtomatskega odvajanja

4.4 Formulacija in avtomatizacija primarnega problema

Čeprav je na voljo več postopkov za reševanje primarnega problema, je Newtonova iteracijska metoda največkrat uporabljena. Procedura je izpeljana s prvim redom Taylorjevega razvoja reziduala $\mathbf{G}(\mathbf{p})$ (en. 3.8) okoli trenutne rešitve. Kvadratno konvergenco dosežemo, če iz vrednotimo tangenti operator konsistentno z numeričnim postopkom. Sistem $\mathbf{G}(\mathbf{p}) = 0$ rešimo z gnezdeno iterativno proceduro opisano spodaj na Sliki 4.



Slika 4: Algoritem za primarno analizo hiperelastičnega problema

Na Sliki 4 indeks (i) označuje količine pri i-ti ponovitvi zanke, ista količina brez indeksa pa označuje skonvergirano vrednost. Linearizacija reziduala $\mathbf{G}(\mathbf{p})$ nam da:

$$\mathbf{K}^{(i)} \Delta \mathbf{p}^{(i)} + \mathbf{G}^{(i)} = 0 \quad (4.3)$$

Kjer je $\mathbf{K}^{(i)}$ tangenti operator dobljen po standardni metodi končnih elementov iz posameznih elementnih tangenti operatorjev $\mathbf{K}_e^{(i)}$ definiranih z izrazom:

$$\mathbf{K}_e^{(i)} = \frac{\partial \mathbf{G}_e^{(i)}}{\partial \mathbf{p}_e^{(i)}} \quad (4.4)$$

In velja $\mathbf{K}^{(i)} = \sum_e \mathbf{K}_e^{(i)}$. Iz lineranega sistema (4.3) dobimo neznani inkrement $\Delta \mathbf{p}$, ki ga uporabimo za novi približek vektorja rešitve \mathbf{p} :

$$\mathbf{p}^{(i+1)} = \mathbf{p}^{(i)} + \Delta \mathbf{p}^{(i)} \quad (4.5)$$

Avtomatizacija izpeljave rezidualov je odvisna od dejanskega problema, ki ga rešujemo, avtomatizacija izpeljave tangentnega operatorja pa ima fiksno obliko. Tangentni operator $\mathbf{K}_e^{(i)}$ lahko izpeljemo z direktno uporabo AD postopka na sistemu enačb $\mathbf{G}(\mathbf{p}) = 0$:

$$\mathbf{K}_e^{(i)} := \frac{\delta \mathbf{G}_e^{(i)}}{\delta \mathbf{p}_e^{(i)}} \quad (4.6)$$

4.5 Primer avtomatizacije primarne analize za 3D hiperelastičen element

Za hiperelastični material lahko formuliramo princip stacionarnega elastičnega potenciala. Kinematične enačbe v nadaljevanju ustrezajo standardnemu izoparametričnemu, tridimenzionalnemu, osemvozliščnemu heksaedru. Zvezno polje pomikov \mathbf{u} in globalne koordinate \mathbf{X} so interpolirane s standardnimi izoparametričnimi oblikovnimi funkcijami N_i (en. 3.3), vozliščnimi koordinatami X_i, Y_i, Z_i in neznanimi vozliščnimi pomiki u_i, v_i, w_i :

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \left\{ \sum_{i=1}^8 N_i X_i, \sum_{i=1}^8 N_i Y_i, \sum_{i=1}^8 N_i Z_i \right\} \\ \mathbf{u} &= \left\{ \sum_{i=1}^8 N_i u_i, \sum_{i=1}^8 N_i v_i, \sum_{i=1}^8 N_i w_i \right\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Formulacija tega elementa potrebuje poleg globalnega koordinatnega sistema \mathbf{X} tudi referenčni koordinatni sistem $\xi = (\xi, \eta, \zeta)$, v katerem so definirane interpolacijske funkcije N_i . Tako je tudi vektor pomikov \mathbf{u} eksplicitna funkcija referenčnih koordinat ξ (podrobneje v poglavju 3.2), zato deformacijski gradient $\mathbf{F} = \partial(\mathbf{X} + \mathbf{u})/\partial \mathbf{X}$ ne more biti pravilno izvrednoten z direktno uporabo AD postopka. Za ta primer razširimo notacijo AD z dodatno informacijo k procesu avtomatskega odvajanja, ki definira izjemo. Ta izjema naj pove, da je znotraj AD postopka totalni odvod referenčnih koordinat po globalnih koordinatah enak inverzni matriki parcialnih odvodov globalnih koordinat po referenčnih koordinatah.

Izjema torej definira transformacijo globalnih koordinat v referenčne koordinate. Sledi naslednja definicija deformacijskega gradienta:

$$\mathbf{F} := \frac{\delta(\mathbf{X} + \mathbf{u})}{\delta\mathbf{X}} \bigg|_{\frac{D\xi}{D\mathbf{X}} = \left[\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial\xi} \right]^{-1}}. \quad (4.8)$$

Zgornja enačba predstavlja avtomatizacijo enačb (3.4) in (3.5).

Neznanke v vozliščih elementa tvorijo vektor neznank $\mathbf{p}_e = \{u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4\}$.

Hiperelastična funkcija gostote deformacijske energije W je formulirana kot funkcija invariant desnega Cauchyjevega deformacijskega tenzorja $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ in Lamovejv konstant λ, μ :

$$W = \frac{\lambda}{2} (\det \mathbf{F} - 1)^2 + \mu \left(\frac{1}{2} (\text{tr}(\mathbf{C}) - 3) - \ln(\det \mathbf{F}) \right) \quad (4.9)$$

Rezidualni vektor elementa v standardni formulaciji za končne elemente dobimo z enostavno numerično integracijo:

$$\mathbf{G}_e = \sum_g w_g \mathbf{G}_g \quad (4.10)$$

V zgornji enačbi w_g predstavlja Gaussove uteži, \mathbf{G}_g pa je prispevek Gaussovih točk k rezidualu elementa. Z avtomatskim odvajanjem W po spremenljivkah \mathbf{p}_e in numerično integracijo po domeni elementa, dobimo prispevek vsakega elementa \mathbf{G}_e k globalnem rezidualu \mathbf{G} :

$$\mathbf{G}_e = \sum_g w_g \mathbf{J}_e \frac{\delta W(\mathbf{p}_e)}{\delta \mathbf{p}_e} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{J}_e = \det \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \xi} \right)$$

V enačbi (4.11) \mathbf{J}_e predstavlja Jacobijevo transformacijo referenčnega koordinatnega sistema v globalni koordinatni sistem. Ko je rezidual zapisan v zgornji formulaciji lahko direktno uporabimo postopek opisan v poglavju 4.4 za avtomatsko primarno analizo hiperelastičnih problemov.

4.6 Kratki opis AceGen sintakse

Sintaksa AceGen skriptnega jezika je enaka sintaksi skriptnega jezika Mathematice z nekaj dodatnimi funkcijami. Osnovni vhod za AceGen predstavljen v poglavju 4.7 ima 6 karakterističnih komponent:

- V programu Mathematica z ukazom `SMSInitialize` postavimo AceGen sistem in nastavimo `AceFem` za izbrano okolje končnih elementov. `SMSTemplate` nastavi osnovne karakteristike končnega elementa, ki ga bomo generirali.
- `SMSStandardModule` definira parametre vhoda in izhoda `AceFem` funkcije `Tangent and Residual`.
- `SMSReal` in `SMSInteger` poveže realna in cela števila v parametrih vhoda neke funkcije s simboli v Mathematici. Vhodni in izhodni parametri funkcije so prepoznani v vhodu po nizu `$$` na koncu imena.
- Med opisom problema uporabimo posebni AceGen operator `|=` namesto standardnega operatorja `=` v Mathematici. Operator `|=` opravi simultano optimizacijo izrazov in jim priredi nove pomožne spremenljivke.
- Rezultati odvajanja so prirejeni izhodnim parametrom funkcij s klicem `SMSExport`.
- `SMSWrite` na koncu zapiše zgeneriran program v datoteko predpisanega formata.

`SMSD[f,a]` izvede avtomatsko odvajanje enega ali več izrazov `f` po poljubni spremenljivki `a` ali vektorju spremenljivk `a` in simultano nadgradi že izpeljano kodo. Opcija `SMD` funkcije `Dependency -> {b, a, M}` nastavi enakost matrike `M` s totalnimi odvodi množice pomožnih

spremenljivk b po spremenljivkah a . V tem primeru torej opcija *Dependency* definira lokalno AD izjemo za spremenljivke b (kot je opisano v poglavju 4.3). *SMSFreeze* nastavi vse totalne odvode po argumentu funkcije na nič razen tistih, ki so definirani z opcijo *Dependency*. *SMSD* in *SMSFreeze* definirani na tak način zadoščata implementaciji vseh tipov lokalnih in globalnih AD izjem.

Primer definicije lokalne AD izjeme v AceGenu:

$$\nabla f \Big| = \text{SMSD}[f, a, "Dependency" \rightarrow \{b, a, M\}] \quad (4.12)$$

Primer definicije globalne AD izjeme v AceGenu:

$$\begin{aligned} b \Big| &= \text{SMSFreeze}[G, "Dependency" \rightarrow \{a, M\}] \\ \nabla f \Big| &= \text{SMSD}[f, a] \end{aligned} \quad (4.13)$$

V obeh primerih je rezultat enak in ustreza formalnemu zapisu v obliki:

$$\nabla f := \frac{\delta f}{\delta a} \Big| \frac{Db}{Da} = M \quad (4.14)$$

4.7 AceGen vhod za hiperelastičen material

```
Get["AceGen`"];

SMSInitialize["Hiperelasticen3D", "Environment" → "AceFEM"];
SMSTemplate["SMSTopology" → "H1",
  "SMSgroupDataNames" → {"λ -Lamejeva konstanta", "μ -strižni parameter",
  "t -debelina"}];
Nodeξηζ = {{-1, -1, -1}, {1, -1, -1}, {1, 1, -1}, {-1, 1, -1}, {-1, -1, 1},
  {1, -1, 1}, {1, 1, 1}, {-1, 1, 1}};
Definitions := [
  Xi = SMSReal[Array[nd$$[#1, "X", 1] &, 8]];
  Yi = SMSReal[Array[nd$$[#1, "Y", 1] &, 8]];
  Zi = SMSReal[Array[nd$$[#1, "Z", 1] &, 8]];
  ui = SMSReal[Array[nd$$[#1, "at", 1] &, 8]];
  vi = SMSReal[Array[nd$$[#1, "at", 1] &, 8]];
  wi = SMSReal[Array[nd$$[#1, "at", 1] &, 8]];
  p = Flatten[Transpose[{ui, vi, wi}]];
  {λ, μ, t} = SMSReal[Array[es$$["Data", #1] &, 3]];
  {ξ, η, ζ, wGauss} = Array[SMSReal[es$$["IntPoints", #1, IpIndex]] &, 4];
  Ni = MapThread[ $\frac{1}{8} (1 + \xi \#1) (1 + \eta \#2) (1 + \zeta \#3) \&$ , Transpose[Nodeξηζ]];
  X = {SMSFreeze[Ni.Xi], SMSFreeze[Ni.Yi], SMSFreeze[Ni.Zi]};
  Jm = SMSD[X, {ξ, η, ζ}];
  Jd = Det[Jm];
  u = {Ni.ui, Ni.vi, Ni.wi};
  F = SMSD[X + u, X, "Dependency" → {{ξ, η, ζ}, X, Inverse[Jm]}};
  C = Transpose[F].F;
  J = Det[F];
  W =  $\frac{1}{2} \lambda (J - 1)^2 + \mu \left( \frac{1}{2} (\text{Tr}[C] - 3) - \text{Log}[J] \right)$ ;
];
SMSStandardModule["Tangent and residual"];
SMSDo[
  Gg = t Jd wGauss SMSD[W, p];
  SMSExport[Gg, p$$, "AddIn" → True];
  Kg = SMSD[Gg, p];
  SMSExport[Kg, s$$, "AddIn" → True];
  , {ipIndex, 1, SMSInteger[es$$["id", "NoIntPoints"]]}
];
SMSWrite[];
```

5 KONČNI ELEMENTI Z NEODVISNIMI DEFORMACIJAMI (ENHANCED STRAIN ELEMENTS)

5.1 Uvodne besede

Splošni tridimenzionalni končni elementi se danes še vedno le redko uporabljajo za analizo inženirskih konstrukcij, saj njihova uporaba pogosto zahteva bistveno več računalniškega časa in pomnilnika kot uporaba bolj specializiranih linijskih in lupinastih elementov. Osnovna ideja naloge je razvoj splošnega tridimenzionalnega elementa s katerim lahko modeliramo tridimenzionalne konstrukcije (stiki, vozlišča) in usmerjene konstrukcijske elemente (plošče, nosilci). Numerične simulacije velikih inženirskih problemov zahtevajo uporabo stabilnih končnih elementov, ki dajejo zadovoljive rezultate (brez blokiranja) tudi v primeru grobih mrež, upogibno dominantnih deformacijskih stanj in nestisljivih materialov. Element mora biti tudi neobčutljiv na veliko distorzijo oblike, ki se pojavi pri avtomatski generaciji mreže končnih elementov ter v primeru velikih deformacij. Pri diskretizaciji lupin samo z enim elementom po debelini lupine oziroma preseku nosilca v primeru linijskih nosilcev mora element dajati rezultate, ki so primerljivi z rezultati, ki jih dobimo z uporabo lupinastih elementov oziroma linijskih nosilcev. Zadostiti mora tudi testom, ki v primeru zgoščevanja mreže končnih elementov zagotavljajo konvergenco rezultatov k pravilni rešitvi (npr. patch test, test objektivnosti). Rešitev ne sme vsebovati nefizikalnih deformacijskih oblik. Pojav nefizikalnih deformacijskih oblik se pogosto imenuje hourglassing zaradi značilnega vzorca v obliki peščenih ur, ki se pojavi namesto deformirane mreže končnih elementov. Rezultati so v tem primeru popolnoma napačni. S stališča splošnosti formulacije končnega elementa in enostavne implementacije različnih nelinearnih materialnih modelov je ugodno, da v formulaciji kot osnovne neodvisne spremenljivke nastopajo deformacije oziroma količine, na podlagi katerih jih lahko enostavno določimo.

Standardni elementi, ki temeljijo na metodi interpolacije pomikov, ne ustrezajo praktično nobenemu od zgoraj naštetih kriterijev. Rešitev nudijo mešani variacijski principi. Ker variacijsko konsistentno izpeljani tetraedri (štirivozliščni elementi v prostoru) degenerirajo v element, izpeljan po metodi pomikov in posledično blokirajo, se je izkazalo, da so

najprimernejši osemvozliščni elementi z dodatnimi notranjimi prostostnimi stopnjami. Numerična učinkovitost takih elementov je neposredno odvisna od števila dodatnih notranjih prostostnih stopenj.

5.2 Elementi z neodvisnimi deformacijami

Leta 1990 sta Simo in Rifai vpeljala Enhanced Assumed Strain (EAS) formulacijo, ki omogoča izpeljavo končnih elementov, pri katerih so osnovne spremenljivke deformacije. Formulacija temelji na Hu - Washitzujevem variacijskem principu. Deformacije, ki so posledica pomikov elementa, dopolnimo z neodvisnimi (enhanced) deformacijami. S pravilno izbranimi dodatnimi deformacijami dobimo končne elemente, katerih rang se ohranja in se dobro obnašajo v primeru upogibno dominantnih deformacij kot tudi v primeru nestisljivih materialov. Taki elementi so splošno uporabni, po vrhu pa imajo v primerjavi z drugimi formulacijami zelo dobro natančnost rezultatov pri grobih mrežah končnih elementov. Konstrukcija elementa omogoča enostavno implementacijo neelastičnih materialnih modelov. Za majhne deformacije so Andelfinger, Ramm in Roehl (1992) ustvarili elemente s podobno formulacijo, ki se odlično obnašajo in izpolnjujejo skoraj vse zgoraj navedene kriterije za linearne probleme. Korelc in Wriggers (1995) sta te formulacije izpopolnila tako, da so tudi numerično učinkovite. Kljub temu ima ta koncept tudi nekaj slabosti.

Prvi problem so dodatne prostostne stopnje, ki zmanjšajo učinkovitost postopka. Neodvisne deformacije lahko uporabimo le pri štirikotnih elementih (Reddy in Simo, 1995). Splošno je sprejeto, da štiri neodvisne deformacije zadostujejo za konstrukcijo dvodimenzionalnega elementa, ki ne blokira, je objektiven in zadosti patch testu. Izkazalo se je, da za tridimenzionalne elemente potrebujemo najmanj devet neodvisnih deformacij, če hočemo, da element volumetrično ne blokira za nedistorzirane mreže končnih elementov, šele element z 21 neodvisnimi deformacijami strižno in volumetrično ne blokira za distorzirane mreže, ta pa je izrazito neučinkovit (Korelc in Wriggers, 1995). Uporaba simbolnih in algebrskih sistemov je omogočila formulacijo elementa z razvojem odvodov oblikovnih funkcij v Taylorjevo vrsto, ki je z 12 neodvisnimi deformacijami enakovreden klasični EAS formulaciji z 21 neodvisnimi deformacijami (Korelc in Wriggers, 1996b).

Drugi problem povezan z EAS formulacijami pa so neželene nefizikalne deformacijske oblike (hourglassing), ki se pojavijo pri velikih deformacijah zaradi znižanja ranga elementa. Pojav se pokaže v obliki negativnih lastnih vrednosti tangentne togostne matrike elementa. Reese in Wriggers (1996) sta predstavila stabilizacijsko tehniko, ki reši ta problem, vendar je rešitev odvisna od stabilizacijskih parametrov, kar vpliva na natančnost rezultatov. En način, kako se ognemo pojavu nefizikalnih deformacijskih oblik, je znižanje števila neodvisnih deformacij na samo dve, kar pa poveča togost elementa in se izrazi v strižnem in volumetričnem blokiranju. Najboljšo rešitev sta našla Korelc in Wriggers (1996a) v formulaciji elementov z neodvisnimi deformacijami, ki uporablja metodo konsistentnih gradientov, ki temelji na spremembi osnovne EAS interpolacije neodvisnih deformacij.

V nadaljevanju je predstavljena formulacija novega elementa z neodvisnimi deformacijami, ki je kombinacija metode konsistentnih gradientov in razvoja oblikovnih funkcij v Taylorjevo vrsto.

5.3 Splošna formulacija elementov z neodvisnimi deformacijami

Variacijsko osnovo EAS formulacije predstavlja Hu - Waschitzujev princip, zapisan v odvisnosti od pomikov \mathbf{u} , deformacijskega polja \mathbf{A} in konjugiranega napetostnega polja \mathbf{T} :

$$\Pi(\mathbf{u}, \mathbf{A}, \mathbf{T}) = \int_B [W(\mathbf{A}) + \mathbf{T} \cdot (\mathbf{D}(\mathbf{u}) - \mathbf{A})] dV - \int_B \mathbf{u} \cdot \rho_0 \hat{\mathbf{b}} dV - \int_{\partial B} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{t}} dA \quad (5.1)$$

$W(\mathbf{F})$ predstavlja funkcijo deformacijske energije, $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ mero kompatibilnih deformacij (npr. deformacijski gradient, Greenov tenzor deformacij), zadnja dva člena pa predstavljata prispevek zunanjih sil. Taka oblika Hu - Waschitzujevega funkcionala omogoča aditivni razcep mere deformacij \mathbf{A} na komplementarni dvojici, mero kompatibilnih deformacij $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ in neodvisni (enhanced) gradient $\bar{\mathbf{A}}$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{D}(\mathbf{u}) + \bar{\mathbf{A}} \quad (5.2)$$

Neodvisni gradient je lahko nekompatibilen z dejanskimi deformacijami. Iz (5.1) sledi:

$$\Pi(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{A}}, \mathbf{T}) = \int_B \left[W(\mathbf{D}(\mathbf{u}) + \bar{\mathbf{A}}) - \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{A}} \right] dV - \Pi^{\text{zunanjih sil}} \quad (5.3)$$

Prva variacija (5.3) nam da:

$$\begin{aligned} \int_B \delta \mathbf{D}(\mathbf{u}) \cdot \frac{\partial W}{\partial \mathbf{D}} dV - \delta \Pi^{\text{zunanjih sil}} &= 0 \\ \int_B \delta \bar{\mathbf{A}} \cdot \left(-\mathbf{T} + \frac{\partial W}{\partial \bar{\mathbf{A}}} \right) dV &= 0 \\ \int_B \delta \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{A}} dV &= 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Prva od zgornjih enačb je standardna šibka oblika ravnotežnih enačb, iz druge sledijo konstitutivni zakoni, tretja pa je pogoj ortogonalnosti, kateremu morata zadostiti napetostni tenzor \mathbf{T} in neodvisni gradient $\bar{\mathbf{A}}$. Ker mora biti tudi virtualno delo neodvisnega gradienta $\bar{\mathbf{A}}$ enako nič, velja $\int_B \mathbf{T} \cdot \delta \bar{\mathbf{A}} dV = 0$. Če to upoštevamo v (5.4) dobimo nov, poenostavljen

funkcional:

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{A}) &= \int_B W(\mathbf{A}) dV + \Pi^{\text{zunanjih sil}} \\ \text{in pripadajoči pogoj ortogonalnosti:} & \\ \int_B \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{A}} dV &= 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

Zgornji enačbi omogočita konsistentno vključitev neodvisnega gradienta v formulacijo končnega elementa. V skladu s standardnim postopkom metode končnih elementov aproksimiramo neznani funkciji \mathbf{u} in $\bar{\mathbf{A}}$ po domeni elementa z linearno kombinacijo oblikovnih funkcij in neznanih parametrov:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{N}(\xi) \mathbf{d}_e \\ \bar{\mathbf{A}} &= \mathbf{G} \boldsymbol{\alpha}_e \end{aligned} \quad (5.6)$$

V (5.6) $\mathbf{N}(\xi)$ predstavlja matriko izoparametričnih oblikovnih funkcij, \mathbf{d}_e vektor vozliščnih pomikov elementa, \mathbf{G} interpolacijsko matriko neodvisnih deformacij in $\boldsymbol{\alpha}_e$ vektor deformacijskih parametrov. $\boldsymbol{\alpha}_e$ so lokalni parametri vsakega elementa, ki jih eliminiramo s statično kondenzacijo.

Konvergenca metode končnih elementov je zagotovljena že, če je pogoj ortogonalnosti $\int_B \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{A}} dV = 0$ zadoščen le za konstanten potek napetosti po elementu ($\mathbf{T} \Rightarrow \mathbf{T}_0$). Če bi zahtevali zadostitev pogoja pri poljubnem napetostnem polju, bi dobili nazaj osnovno formulacijo elementa po metodi pomikov, saj sledi $\bar{\mathbf{A}} = 0$. Torej upoštevamo, da je pogoj ortogonalnosti zadoščen le za konstantne napetosti in dobimo pogoj:

$$\mathbf{T}_0 \int_B \bar{\mathbf{A}} dV = 0 \Rightarrow \int_B \mathbf{G} dV = 0 \quad (5.7)$$

Pogoj (5.7) omogoča enostavno kreiranje matrike \mathbf{G} . Izbira ustreznih oblikovnih funkcij neodvisnih deformacij je ključnega pomena za obnašanje končnega elementa. Da zadostimo pogoj ortogonalnosti v referenčnih in globalnih koordinatah, moramo interpolacijsko

matriko izraženo v referenčnih koordinatah \mathbf{G}_ξ pomnožiti s faktorjem $\frac{J_0}{J}$, kjer je

J determinanta Jacobijeve matrike \mathbf{J} , ki predstavlja transformacijo globalnih v referenčne koordinate, J_0 pa je determinanta Jacobijeve matrike, izračunana v središču elementa ($\xi, \eta, \zeta = 0$). Dodatna transformacija neodvisnega gradienta v referenčne koordinate sicer ni potrebna za konsistentnost metode, vendar izboljša obnašanje elementa pri upogibno dominantnih situacijah in zagotavlja objektivnost elementa. Tako dobimo končno obliko za \mathbf{G} :

$$\mathbf{G} = \frac{J_0}{J} \mathbf{J}_0^{-T} \mathbf{G}_\xi \mathbf{J}_0^{-1} \quad (5.8)$$

Osnovne možnosti za interpolacijsko matriko neodvisnih gradientov po standardnem 3D, osemvozliščnem, EAS elementu so:

$$\mathbf{G}(\xi) = \begin{bmatrix} \xi\alpha_1 + \xi\eta\alpha_{16} + \xi\zeta\alpha_{17} & \xi\alpha_4 + \xi\zeta\alpha_{10} & \xi\alpha_6 + \xi\eta\alpha_{12} \\ \eta\alpha_5 + \eta\zeta\alpha_{11} & \eta\alpha_2 + \xi\eta\alpha_{18} + \eta\zeta\alpha_{19} & \eta\alpha_8 + \xi\eta\alpha_{14} \\ \zeta\alpha_7 + \eta\zeta\alpha_{13} & \zeta\alpha_9 + \xi\zeta\alpha_{15} & \zeta\alpha_3 + \xi\zeta\alpha_{20} + \eta\zeta\alpha_{21} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

V zgornji enačbi so α_i dodatne prostostne stopnje. Prvih devet dodatnih prostostnih stopenj je potrebnih, da se dopolnijo izoparametrični interpolacijski polinomi za vse potence ξ, η, ζ (EAS 9), naslednjih šest dodatnih prostostnih stopenj izboljša obnašanje končnih elementov pri upogibno dominantnih situacijah (EAS 15), zadnjih šest pa izboljša obnašanje elementa pri nestisljivih materialih (EAS 21). Učinkovitost elementov se večja z večanjem števila dodatnih prostostnih stopenj, vendar je njihovo izvedenjenje dražje.

Interpolacija neodvisnega gradienta konstruira deformacijsko polje \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}(\xi, \eta)\mathbf{d}_e + \mathbf{G}(\xi, \eta)\mathbf{a}_e \quad (5.10)$$

Eulerjeve enačbe elementa dobimo s prvo variacijo funkcionala $\Pi(\mathbf{A})$, ko v enačbo (5.5) vstavimo funkcijo deformacijske energije $W(\mathbf{A})$, enačbo (5.6) in (5.8):

$$\delta\Pi_e = \frac{\partial\Pi_e}{\partial\mathbf{d}_e}\delta\mathbf{d}_e + \frac{\partial\Pi_e}{\partial\mathbf{a}_e}\delta\mathbf{a}_e \Rightarrow \mathbf{G}_e = \begin{Bmatrix} \frac{\partial\Pi_e}{\partial\mathbf{d}_e} \\ \frac{\partial\Pi_e}{\partial\mathbf{a}_e} \end{Bmatrix} \quad (5.11)$$

Iz Hessejeve matrike odvodov Π_e po \mathbf{d}_e in \mathbf{a}_e dobimo tangentno togostno matriko elementa, ki jo potrebujemo za Newtonovo iteracijsko metodo:

$$\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{dd} & \mathbf{K}_{d\alpha} \\ \mathbf{K}_{d\alpha}^T & \mathbf{K}_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\Pi}{\partial\mathbf{d}_e^2} & \frac{\partial^2\Pi}{\partial\mathbf{d}_e\partial\mathbf{a}_e} \\ sim. & \frac{\partial^2\Pi}{\partial\mathbf{a}_e^2} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Dodatne prostostne stopnje \mathbf{a}_e so lokalne spremenljivke vsakega elementa, zato je najučinkovitejši pristop preden sestavimo globalno togostno matriko, statična kondenzacija tangentne togostne matrike elementa, s katero izločimo dodatne parametre. S tem postopkom

znižamo red togostne matrike elementa za število dodatnih prostostnih stopenj. Struktura tangentne togostne matrike in rezidualnega vektorja pred eliminacijo dodatnih parametrov α_e :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{dd}^n & \mathbf{K}_{d\alpha}^n \\ \mathbf{K}_{\alpha d}^n & \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{d}^n \\ \Delta \boldsymbol{\alpha}^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{G}_d^n \\ -\mathbf{G}_\alpha^n \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{K}_{kond} \Delta \mathbf{d}^n = -\mathbf{G}_{kond} \quad (5.13)$$

V zgornji enačbi zgornji indeks n predstavlja zaporedno številko iteracije, $\Delta \mathbf{d}$ prirastke kompatibilnih pomikov vozlišč končnega elementa, ki jih iščemo, $\Delta \boldsymbol{\alpha}$ prirastke nekompatibilnih pomikov vozlišč, ki predstavljajo množico spremenljivk za eliminacijo, z \mathbf{G} pa je označen rezidualni vektor.

Postopek kondenzacije lokalne tangentne matrike:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{kond} &= \mathbf{K}_{uu}^n - \mathbf{K}_{u\alpha}^n (\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^n)^{-1} \mathbf{K}_{\alpha u}^n \\ \mathbf{G}_{kond} &= \mathbf{G}_d^n - \mathbf{K}_{u\alpha}^n (\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^n)^{-1} \mathbf{G}_\alpha^n \end{aligned} \quad (5.14)$$

Približek nekompatibilnih pomikov za $(n+1)$. iteracijo dobimo po formuli

$$\boldsymbol{\alpha}^{n+1} = \boldsymbol{\alpha}^n - (\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^n)^{-1} \mathbf{G}_\alpha^n - (\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^n)^{-1} \mathbf{K}_{\alpha u}^n \Delta \mathbf{d}^n.$$

Kondenzirane matrike nato uporabimo v standardnem postopku opisanem v poglavju 4.4.

5.4 Formulacija elementa z neodvisnimi deformacijami z metodo konsistentnega gradienta in razvojem oblikovnih funkcij v Taylorjevo vrsto

V zgornji formulaciji Hu - Washitzovega funkcionala izberemo naslednje neodvisne parametre: $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ naj bo *Gradu*, \mathbf{A} naj bo neodvisen gradient pomikov označen z \mathbf{H} in \mathbf{T} naj bo k \mathbf{H} konjugiran prvi Piola - Kirchhoffov tenzor napetosti označen z \mathbf{P} :

$$\Pi(\mathbf{u}, \mathbf{H}, \mathbf{P}) = \int_B [W(\mathbf{H}) + \mathbf{P} \cdot (\text{Gradu} - \mathbf{H})] dV - \Pi^{\text{zunanjih sil}} \quad (5.15)$$

Enako kot v splošnem primeru razdelimo gradient pomikov \mathbf{H} na vsoto komplementarnih sumandov:

$$\mathbf{H} = \text{Grad} \mathbf{u} + \bar{\mathbf{H}} \quad (5.16)$$

$\bar{\mathbf{H}}$ predstavlja neodvisni gradient pomikov. Po enakem razmisleku kot v (5.5) dobimo poenostavljeni funkcional in pogoj ortogonalnosti:

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{H}) &= \int_B W(\mathbf{H}) dV + \Pi^{\text{zunanjih sil}} \\ \int_B \mathbf{P} \cdot \bar{\mathbf{H}} dV &= 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Pogoj ortogonalnosti zagotovimo le za konstanten potek napetosti po elementu, iz česar sledi:

$$\int_B \bar{\mathbf{H}} dV = 0 \quad (5.18)$$

Enačba (5.18) zadosti patch testu in zagotovi konvergenco pri linearni analizi, ne zagotovi pa stabilnosti elementa pri velikih deformacijah, za to potrebujemo dodatne pogoje ortogonalnosti. Te pogoje zagotovi metoda konsistentnega gradienta.

5.4.1 Izpeljava konsistentnega gradienta

Konsistentni gradient izpeljemo na primeru dvodimenzionalnega, štirivozliščnega, štirikotnega elementa. Polje pomikov \mathbf{u} po elementu interpoliramo s standardnimi oblikovnimi funkcijami N_i in neznanim vektorjem vozliščnih pomikov \mathbf{d}_e :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{d}_e) &= \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 \begin{Bmatrix} N_i u_i \\ N_i v_i \end{Bmatrix} \\ N_i &= \frac{1}{4}(1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i) \end{aligned} \quad (5.19)$$

Neodvisni gradient izrazimo v odvisnosti od deformacijskih parametrov $\boldsymbol{\alpha}_e$ v referenčnem koordinatnem sistemu:

$$\bar{\mathbf{H}}^{ref} = \begin{bmatrix} P_3(\xi, \eta)\alpha_1 & P_1(\xi, \eta)\alpha_2 \\ P_2(\xi, \eta)\alpha_3 & P_4(\xi, \eta)\alpha_4 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Pogoj $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_i d\xi d\eta = \int_{\square} P_i d\square = 0$ za oblikovne funkcije P_i zadosti pogoju ortogonalnosti (5.18)

v referenčnem koordinatnem sistemu, saj je ta definiran na kvadratu $\square = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Pogoj ortogonalnosti (5.18) pa mora biti izpolnjen tudi v globalnem koordinatnem sistemu. Iz

enačbe (5.8) nato sledi končna oblika $\bar{\mathbf{H}} = \frac{J_0}{J} \mathbf{J}_0^{-T} \bar{\mathbf{H}}^{ref} \mathbf{J}_0^{-1}$, kjer je J determinanta Jacobijeve matrike \mathbf{J} , $J_0 = J(\xi, \eta, \zeta = 0)$ je determinanta Jacobijeve matrike, izračunana v središču elementa in $\mathbf{J}_0 = \mathbf{J}(\xi, \eta, \zeta = 0)$.

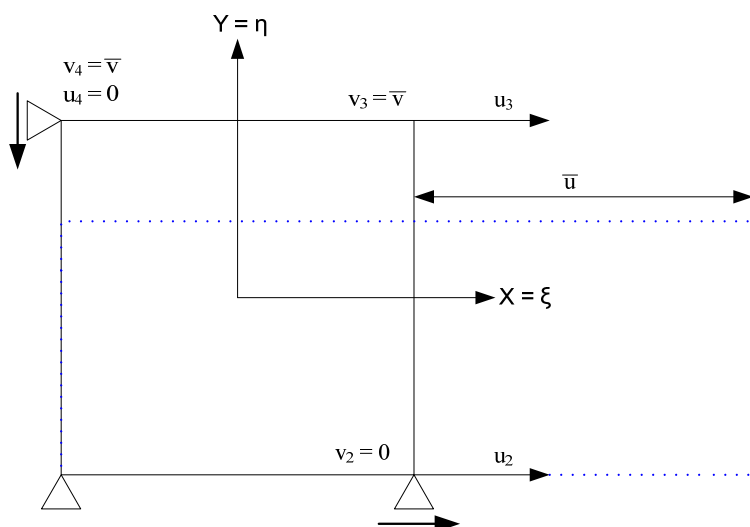
Opazovanje enega elementa je dovolj, da spoznamo pogoje za nastanek nefizikalnih deformacijskih oblik. Z analizo analitičnih izrazov lastnih vrednosti tangentne matrike lahko določimo pogoje, pri katerih se pojavijo nefizikalne nepozitivne lastne vrednosti tangentne matrike.

Na standarden dvodimenzionalen, štirivozliščen, kvadraten element vsilimo pomik v η smeri

$v = \frac{1}{2}v(1 + \eta)$, kar povzroči pomik elementa v ξ smeri $u = \frac{1}{2}u(1 + \xi)$ in konstantno

deformacijsko in napetostno stanje. Referenčne in trenutne koordinatne osi sovpadajo

(Slika 5), kar pomeni, da je Jacobijeva matrika \mathbf{J} konstantna in so vsi odvodi čisti polinomi.



Slika 5: Skica primera z enim končnim elementom obremenjenim s pomikom v smeri Y

Uporabimo hiperelastičen neo - Hookejev material, katerega funkcija deformacijske energije je izbrana v obliki:

$$W = \frac{\Lambda}{2} (\det \mathbf{F} - 1)^2 + \mu \left(\frac{1}{2} (\text{tr}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) - 2) - \ln(\det \mathbf{F}) \right) \quad (5.21)$$

Deformacijski gradient \mathbf{F} sledi iz predpostavljenih pomikov:

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} + \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\bar{u}}{2} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{\bar{v}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Iz robnih pogojev sledi, da je napetost v smeri X, torej P_{11} , enaka 0:

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} \Rightarrow P_{11} = \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} = \Lambda \lambda_2 (\lambda_1 \lambda_2 - 1) + \mu \left(\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1} \right) = 0 \quad (5.23)$$

Iz zgornje enačbe lahko izrazimo λ_1 :

$$\lambda_1 = \frac{\Lambda \lambda_2 + \sqrt{\Lambda \lambda_2^2 (\Lambda + 4\mu) + 4\mu^2}}{2(\Lambda \lambda_2^2 + \mu)} \quad (5.24)$$

Izberemo neodvisni gradient tako, da sta diagonalna člena enaka $P_3 = \xi$ in $P_4 = \eta$, kar zagotovi, da element volumetrično ne blokira:

$$\bar{\mathbf{H}}^{ref} = \begin{bmatrix} \xi\alpha_1 & P_1(\xi, \eta)\alpha_2 \\ P_2(\xi, \eta)\alpha_3 & \eta\alpha_4 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

P_1 in P_2 sta zapisana v splošni obliki. Za njiju naj velja naslednji pogoj, ki ima za posledico diagonalno togostno podmatriko $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}$, kar poenostavi analitično kondenzacijo:

$$\int_{\square} P_1(\xi, \eta)P_2(\xi, \eta)d\square = 0 \quad (5.26)$$

Diskretizacija primera enega elementa s Slike 5 vodi v sistem nelinearnih enačb (5.11) za neznanke $u_2, u_3, \alpha_1, \dots, \alpha_4$. Ker gre za konstantno napetostno in deformacijsko stanje, so $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ vsi enaki 0. Zato je analitična rešitev (5.24) prava, torej lahko upoštevamo naslednje:

$$\begin{aligned} u_2 &= u_3 = 2(\lambda_1 - 1) \\ \alpha_i &= 0 \quad \forall i \end{aligned} \quad (5.27)$$

V tem primeru ima tangentna togostna matrika posebno obliko:

$$\mathbf{K}_e(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} K_{u_2, u_2} & K_{u_2, u_3} & K_{u_2, \alpha_1} & K_{u_2, \alpha_2} & K_{u_2, \alpha_3} & K_{u_2, \alpha_4} \\ & K_{u_3, u_3} & K_{u_3, \alpha_1} & K_{u_3, \alpha_2} & K_{u_3, \alpha_3} & K_{u_3, \alpha_4} \\ & & K_{\alpha_1, \alpha_1} & 0 & 0 & 0 \\ & & & K_{\alpha_2, \alpha_2} & 0 & 0 \\ \text{sim} & & & & K_{\alpha_3, \alpha_3} & 0 \\ & & & & & K_{\alpha_4, \alpha_4} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Lastne vrednosti tangentne matrike elementa formuliranega po metodi pomikov ($\omega_1^{pom}, \omega_2^{pom}$) dobimo z analizo lastnih vrednosti 2 x 2 podmatrike \mathbf{K}_e , ki se nanaša na pomika u_2, u_3 :

$$\begin{aligned} \omega_1^{pom} &= \frac{1}{2}(\Lambda\lambda_2^2 + \mu + \frac{\mu}{\lambda_1^2}) \\ \omega_2^{pom} &= \frac{1}{6}(\Lambda\lambda_2^2 + 5\mu + \frac{\mu}{\lambda_1^2}) \end{aligned} \quad (5.29)$$

Očitno sta obe lastni vrednosti za element, formuliran po metodi pomikov, vedno pozitivni. Ko izpeljemo statično kondenzacijo tangentne matrike (5.28) po $\alpha_{1,\dots,4}$, nam analiza lastnih vrednosti za preostale koeficiente u_2, u_3 da eksplicitne izraze za lastni vrednosti ω_1^e in ω_2^e polne tangentne matrike elementa z neodvisnimi deformacijami:

$$\begin{aligned}\omega_1^e &= \omega_1^{pom} \\ \omega_2^e &= A(\lambda_1, \lambda_2) - \frac{\mu}{8} \frac{\left(\int_{\square} P_1(\xi, \eta) \xi d\square\right)^2}{\int_{\square} P_1(\xi, \eta)^2 d\square} - B(\lambda_1, \lambda_2) \frac{\left(\int_{\square} P_2(\xi, \eta) \xi d\square\right)^2}{\int_{\square} P_2(\xi, \eta)^2 d\square}\end{aligned}\quad (5.30)$$

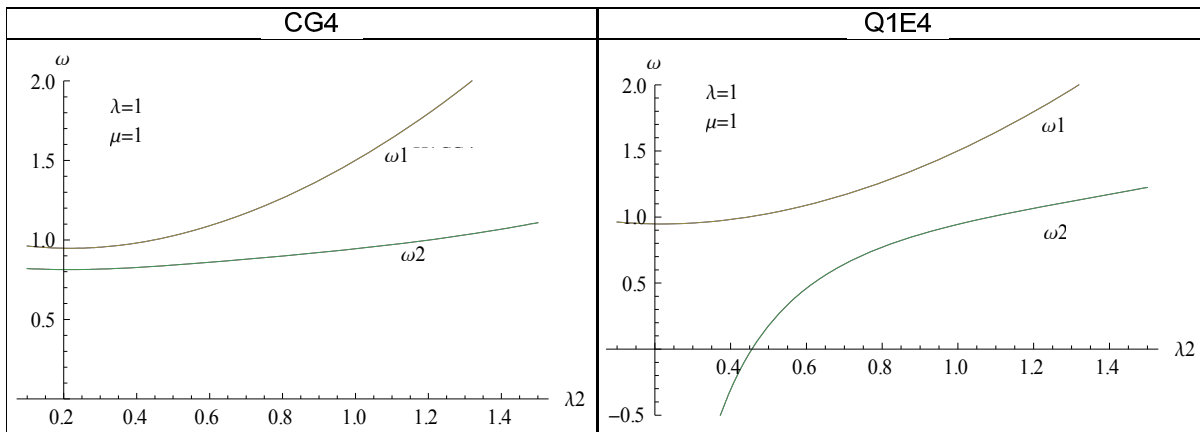
Kjer sta koeficienta A in B enaka:

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{6} \left(\Lambda \lambda_2^2 + 5\mu + \frac{\mu}{\lambda_1^2} - \frac{\Lambda^2 \lambda_2^2 (2\lambda_1 \lambda_2 - 1)^2}{\Lambda \lambda_2^2 \lambda_1^2 + \mu + \lambda_2^2 \mu} \right) \\ B &= \frac{(\Lambda \lambda_1 \lambda_2 (1 - \lambda_1 \lambda_2) + \mu)^2}{8\mu \lambda_2^2 \lambda_1^2}\end{aligned}\quad (5.31)$$

Na Sliki 6 so prikazane lastne vrednosti elementa z neodvisnimi deformacijami CG4 in elementa z neodvisnimi deformacijami Q1E4. Njuna neodvisna gradienta imata naslednjo obliko:

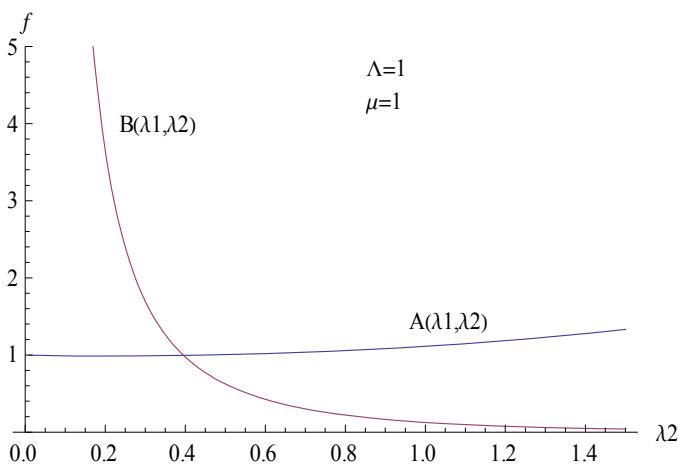
$$\bar{\mathbf{H}}_{Q1E4}^{ref} = \begin{bmatrix} \xi \alpha_1 & \eta \alpha_2 \\ \xi \alpha_3 & \eta \alpha_4 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{H}}_{CG4}^{ref} = \begin{bmatrix} \xi \alpha_1 & \xi \alpha_2 \\ \eta \alpha_3 & \eta \alpha_4 \end{bmatrix}\quad (5.32)$$

Prvi lastni vrednosti sta enaki po (5.30) in sta očitno nenegativni za materialne parametre realnega materiala. Druga lastna vrednost elementa CG4 je nenegativna, druga lastna vrednost elementa Q1E4 pa postane negativna pri tlačni deformaciji velikosti približno 0.45. Element, formuliran po metodi pomikov, ima obe lastni vrednosti vedno pozitivni (5.29). Ker se pri analizi enakega primera z gostejšo mrežo, pojavijo pri elementu Q1E4 nefizikalne deformacijske oblike ali hourglassing, lahko zaključimo, da nepozitivne lastne vrednosti nimajo fizikalnega ozadja.



Slika 6: Lastne vrednosti tangentne matrike elementov CG4 in Q1E4 za primer z enim končnim elementom

Lastna vrednost ω_2^e je pri izbranih interpolacijskih funkcijah P_1 in P_2 in izbranih materialnih parametrih odvisna le od pomožnih funkcij $A(\lambda_1, \lambda_2)$ in $B(\lambda_1, \lambda_2)$. Slika 7 predstavlja funkciji A in B za izbrani vrednosti $\Lambda = 1$ in $\mu = 1$.



Slika 7: Karakteristično vedenje funkcij A in B

Iz Slike 7 in enačbe (5.30) je razvidno, da lahko vedno najdemo deformacijsko stanje, ki ima negativno drugo lastno vrednost, če gre λ_2 proti nič. Tedaj namreč iz Slike 7 sledi:

$$\lim_{\lambda_2 \rightarrow 0} A = \mu, \quad \lim_{\lambda_2 \rightarrow 0} B = \infty \quad (5.33)$$

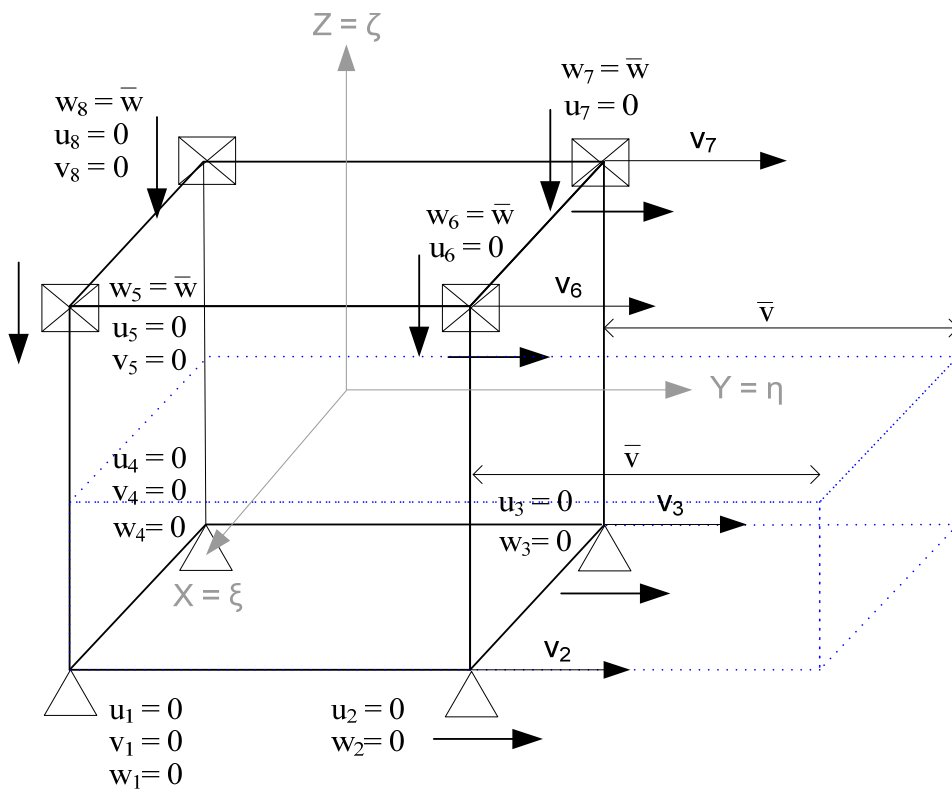
Najučinkovitejši način s katerim se ognemo negativnim lastnim vrednostim je izločitev funkcije B . Ker je B neodvisna od interpolacijskih funkcij, mora izginiti cel člen enačbe (5.30), ki vsebuje B . To vodi skupaj z enačbo (5.30) do novega pogoja ortogonalnosti, ki ga mora izpolnjevati interpolacijska funkcija nekompatibilnih pomikov:

$$\int_{\square} P_2(\xi, \eta) \xi d\square = 0 \quad (5.34)$$

Primer s Slike 5, ki predstavlja tlačno obremenitev elementa v smeri η , ponovimo še z obremenitvijo v drugi smeri in ponovimo cel postopek. Ta dodaten primer da za P_1 analogen pogoj ortogonalnosti kot je (5.34). Skupaj z osnovno predpostavko (5.26) dobimo vse pogoje ortogonalnosti, ki jih morajo izpolnjevati interpolacijske funkcije nekompatibilnih pomikov stabilnega elementa z neodvisnimi deformacijami:

$$\begin{aligned} \int_{\square} P_1(\xi, \eta) P_2(\xi, \eta) d\square &= 0 \\ \int_{\square} P_1(\xi, \eta) \eta d\square &= 0 \\ \int_{\square} P_2(\xi, \eta) \xi d\square &= 0 \end{aligned} \quad (5.35)$$

Ti pogoji so zadostni za stabilen štirivozliščen element, niso pa nujno potrebni. Element CG4 izpolnjuje zgornje pogoje. Če ni izpolnjena predpostavka (5.26) ali pa imamo več kot štiri dodatne prostostne stopnje, potem morajo biti izpeljani drugi pogoji. To je precej zahtevno, saj podmatrika tangentne togostne matrike $\mathbf{K}_{\alpha\alpha}$ ni več diagonalna. Zato za interpolacijske funkcije v treh dimenzijah privzamemo pogoje, analogne zgoraj izpeljanim pogojem za dve dimenziji.



Slika 8: Skica primera z enim 3D končnim elementom obremenjenim s pomikom v smeri Z

Na zgornji sliki je dvodimenzionalen primer iz Slike 5 preveden v primer ravninskega deformacijskega stanja v treh dimenzijah. Pripadajoča matrika neodvisnega gradienta se glasi:

$$\bar{\mathbf{H}}^{ref} = \begin{bmatrix} \xi\alpha_1 & P_1(\xi, \eta, \zeta)\alpha_2 & 0 \\ P_2(\xi, \eta, \zeta)\alpha_4 & \eta\alpha_5 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta\alpha_9 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Po enakem premisleku kot v dveh dimenzijah dobimo pogoj $\int_{\square} P_2(\xi, \eta, \zeta)\xi d\square = 0$. Nato

spreminjamo robne pogoje hkrati z vsiljenim pomikom tako, da vedno opisujemo ravninsko deformacijsko stanje v treh dimenzijah. Na ta način dobimo še ostale pogoje:

$$\bar{\mathbf{H}}^{ref} = \begin{bmatrix} \xi\alpha_1 & P_1(\xi, \eta, \zeta)\alpha_2 & P_5(\xi, \eta, \zeta)\alpha_3 \\ P_2(\xi, \eta, \zeta)\alpha_4 & \eta\alpha_5 & P_3(\xi, \eta, \zeta)\alpha_6 \\ P_6(\xi, \eta, \zeta)\alpha_7 & P_4(\xi, \eta, \zeta)\alpha_8 & \zeta\alpha_9 \end{bmatrix}$$

Dodatni pogoji ortogonalnosti:

$$\begin{aligned} \int_B P_2(\xi, \eta, \zeta)\xi dV &= 0, & \int_B P_1(\xi, \eta, \zeta)\eta dV &= 0, \\ \int_B P_3(\xi, \eta, \zeta)\zeta dV &= 0, & \int_B P_4(\xi, \eta, \zeta)\eta dV &= 0, \\ \int_B P_5(\xi, \eta, \zeta)\zeta dV &= 0, & \int_B P_6(\xi, \eta, \zeta)\xi dV &= 0, \end{aligned} \quad (5.37)$$

Te dodatne pogoje nato upoštevamo pri izbiri členov neodvisnega gradienta $\bar{\mathbf{H}}$. S tem postopkom se ognemo pojavu nefizikanih deformacijskih oblik. Primer elementa, ki zadosti pogojem (5.37) je CG9:

$$\bar{\mathbf{H}}_{CG9}^{ref} = \begin{bmatrix} \xi\alpha_1 & \xi\alpha_2 & \xi\alpha_3 \\ \eta\alpha_4 & \eta\alpha_5 & \eta\alpha_6 \\ \zeta\alpha_7 & \zeta\alpha_8 & \zeta\alpha_9 \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

5.4.2 Razvoj oblikovnih funkcij v Taylorjevo vrsto

Statična kondenzacija dodatnih prostostnih stopenj postane pri velikem številu prostostnih stopenj (21, da element ne blokira) numerično najzahtevnejši del sestavljanja tangentne matrike končnega elementa. Zato se lotimo alternativne formulacije z razvojem oblikovnih funkcij v Taylorjevo vrsto, ki sta jo predlagala Korelc in Wriggers (1996). Ta postopek zmanjša potrebno število prostostnih stopenj na 12. Pogoj ortogonalnosti (5.18) zadostimo z izborom takih oblikovnih funkcij nekompatibilnih pomikov, da so njihovi odvodi lihe funkcije in z razvojem odvodov oblikovnih funkcij v Taylorjevo vrsto okoli središča končnega elementa.

Gradient pomikov je zapisan z enačbo $\mathbf{H} = Grad\mathbf{u} + \bar{\mathbf{H}}$ (5.16), kjer je \mathbf{u} kompatibilno polje pomikov, interpolirano po elementu s standardnimi oblikovnimi funkcijami:

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i) \quad i = 1, \dots, 8 \quad (5.39)$$

Nastavek za neodvisni gradient $\bar{\mathbf{H}}$ se v tem primeru glasi:

$$\bar{\mathbf{H}} = T(\mathbf{Grad}\mathbf{u}) - \mathbf{Grad}\mathbf{u} + T(\mathbf{Grad}\mathbf{u}^e) \quad (5.40)$$

V zgornji enačbi so \mathbf{u}^e nekompatibilni pomiki, diskretizirani z uporabo nekompatibilnih oblikovnih funkcij:

$$\begin{aligned} N_9 &= 1 - \xi^2, & N_{10} &= 1 - \eta^2, & N_{11} &= 1 - \zeta^2, \\ N_{12} &= \xi^2(\eta + \zeta) + \eta^2(\xi + \zeta) + \zeta^2(\xi + \eta) \end{aligned} \quad (5.41)$$

$T(\dots)$ v (5.40) označuje razvoj odvodov oblikovnih funkcij v Taylorjevo vrsto. Drugi red Taylorjevega razvoja funkcije:

$$\begin{aligned} T(f) &= f|_0 + \frac{\partial f}{\partial \xi}|_0 \xi + \frac{\partial f}{\partial \eta}|_0 \eta + \frac{\partial f}{\partial \zeta}|_0 \zeta + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}|_0 \xi \eta + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \zeta}|_0 \xi \zeta + \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta \partial \eta}|_0 \eta \zeta + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}|_0 \xi^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}|_0 \eta^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2}|_0 \zeta^2 \right) + \dots \end{aligned} \quad (5.42)$$

Sodi členi razvoja in konstantni člen, ki so podčrtani v zgornji enačbi, ne izpolnjujejo pogoja ortogonalnosti (5.18), saj njihov integral po volumnu elementa ni enak nič. Sode člene v razvoju v vrsto zanemarimo (iz tega razloga ne upoštevamo višjih členov razvoja v vrsto), konstantni člen pa izgine, če so odvodi interpolacijskih funkcij nekompatibilnih pomikov lihe funkcije. Prvi in drugi člen razvoja v vrsto, ki izpolnjujeta pogoje ortogonalnosti, sta torej naslednja:

$$\begin{aligned} T_1(f) &= \frac{\partial f}{\partial \xi}|_0 \xi + \frac{\partial f}{\partial \eta}|_0 \eta + \frac{\partial f}{\partial \zeta}|_0 \zeta = \\ &= \sum_{k=1}^3 f_{,\xi_k}|_0 \xi_k \\ T_2(f) &= \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}|_0 \xi \eta + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \zeta}|_0 \xi \zeta + \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta \partial \eta}|_0 \eta \zeta = \\ &= \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^3 f_{,\xi_k \xi_l}|_0 \xi_k \xi_l \end{aligned} \quad (5.43)$$

V Taylorjevo vrsto razvijemo odvode oblikovnih funkcij po globalnih koordinatah.

Odvodi interpolacijskih funkcij po globalnih koordinatah \mathbf{X} :

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{i,\mathbf{X}} &= \{N_{i,X_k} ; k = 1, 2, 3\} = \{\mathbf{J}^{-T} N_{i,\xi_k} ; k = 1, 2, 3\}, \quad i = 1, \dots, 8 \\ \mathbf{N}_{\mathbf{X}} &= \{\mathbf{N}_{i,\mathbf{X}} ; i = 1, \dots, 8\} = [\mathbf{N}_X, \mathbf{N}_Y, \mathbf{N}_Z] \end{aligned} \quad (5.44)$$

V zgornji enačbi \mathbf{J} predstavlja Jacobijevo transformacijsko matriko med referenčnimi in globalnimi koordinatami.

Ničli člen Taylorjevega razvoja odvodov oblikovnih funkcij $\mathbf{N}_{i,\mathbf{X}}$ okoli središča končnega elementa je $\{\mathbf{T}_{0X}, \mathbf{T}_{0Y}, \mathbf{T}_{0Z}\} = \mathbf{N}_{\mathbf{X}}|_0 = [\mathbf{N}_X|_0, \mathbf{N}_Y|_0, \mathbf{N}_Z|_0]$.

Da je izpolnjen patch test, moramo za ničli člen Taylorjevega razvoja odvodov oblikovnih funkcij $\mathbf{N}_{i,\mathbf{X}}^m$ okoli središča končnega elementa uporabiti povprečno vrednost oblikovnih funkcij po elementu:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{i,\mathbf{X}}^m &= \{N_{i,X_k}^m ; k = 1, 2, 3\} = \frac{1}{V} \left\{ \int_B N_{i,X_k} dV ; k = 1, 2, 3 \right\} = \\ &= \frac{1}{V} \left\{ \int_B \mathbf{J}^{-T} N_{i,\xi_k} ; k = 1, 2, 3 \right\}, \quad i = 1, \dots, 8 \\ \mathbf{N}_{\mathbf{X}}^m &= \{\mathbf{N}_{i,\mathbf{X}}^m ; i = 1, \dots, 8\} = [\mathbf{N}_X^m, \mathbf{N}_Y^m, \mathbf{N}_Z^m] \end{aligned} \quad (5.45)$$

Ničli člen je enak nič za $i = 9, 10, 11, 12$, torej za oblikovne funkcije nekompatibilnih pomikov.

Prve odvode odvodov oblikovnih funkcij po referenčnih koordinatah ξ po formuli

$\mathbf{N}_{i,\mathbf{X}\xi} = \{\mathbf{J}_0^{-T} \mathbf{N}_{i,\mathbf{X}'\xi_k} ; k = 1, 2, 3\} \quad \forall i$ transformiramo v globalne koordinate in dobimo

$\mathbf{N}_{i,\mathbf{X}\xi} = \{\mathbf{N}_{X\xi_k}, \mathbf{N}_{Y\xi_k}, \mathbf{N}_{Z\xi_k} ; k = 1, 2, 3\}$. S temi oznakami zapišemo prvi člen razvoja odvodov oblikovnih funkcij v Taylorjevo vrsto okoli središča končnega elementa:

$$\{\mathbf{T}_{1X}, \mathbf{T}_{1Y}, \mathbf{T}_{1Z}\} = \left\{ \sum_{k=1}^3 \mathbf{N}_{X\xi_k} \Big|_0 \xi_k, \sum_{k=1}^3 \mathbf{N}_{Y\xi_k} \Big|_0 \xi_k, \sum_{k=1}^3 \mathbf{N}_{Z\xi_k} \Big|_0 \xi_k \right\}$$

Razdelitev na kompatibilni in nekompatibilni del: (5.46)

$$\{\widehat{\mathbf{T}}_{1X}, \widehat{\mathbf{T}}_{1Y}, \widehat{\mathbf{T}}_{1Z}\} = \{\mathbf{T}_{i,1X}, \mathbf{T}_{i,1Y}, \mathbf{T}_{i,1Z}\}; \quad i = 1, \dots, 8$$

$$\{\widetilde{\mathbf{T}}_{1X}, \widetilde{\mathbf{T}}_{1Y}, \widetilde{\mathbf{T}}_{1Z}\} = \{\mathbf{T}_{i,1X}, \mathbf{T}_{i,1Y}, \mathbf{T}_{i,1Z}\}; \quad i = 9, \dots, 12$$

Analogno označimo drugi člen razvoja v Taylorjevo vrsto:

$$\{\mathbf{T}_{2X}, \mathbf{T}_{2Y}, \mathbf{T}_{2Z}\} = \left\{ \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^3 \mathbf{N}_{X\xi_k\xi_l} \Big|_0 \xi_k \xi_l, \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^3 \mathbf{N}_{Y\xi_k\xi_l} \Big|_0 \xi_k \xi_l, \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^3 \mathbf{N}_{Z\xi_k\xi_l} \Big|_0 \xi_k \xi_l \right\}$$

Razdelitev na kompatibilni in nekompatibilni del: (5.47)

$$\{\widehat{\mathbf{T}}_{2X}, \widehat{\mathbf{T}}_{2Y}, \widehat{\mathbf{T}}_{2Z}\} = \{\mathbf{T}_{i,2X}, \mathbf{T}_{i,2Y}, \mathbf{T}_{i,2Z}\}; \quad i = 1, \dots, 8$$

$$\{\widetilde{\mathbf{T}}_{2X}, \widetilde{\mathbf{T}}_{2Y}, \widetilde{\mathbf{T}}_{2Z}\} = \{\mathbf{T}_{i,2X}, \mathbf{T}_{i,2Y}, \mathbf{T}_{i,2Z}\}; \quad i = 9, \dots, 12$$

Vsi izrazi za odvode oblikovnih funkcij se izražajo kot polinomske funkcije tako v referenčnem kot tudi v globalnem koordinatnem sistemu.

Če upoštevamo (5.40) lahko zapišemo gradient pomikov \mathbf{H} v končni obliki:

$$\mathbf{H} = T(\mathbf{Gradu}) + T(\mathbf{Gradu}^e) = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_u + \mathbf{F}_c \cdot \mathbf{H}_h$$

kjer je

$$\mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_X^m \mathbf{d}_X & \mathbf{N}_Y^m \mathbf{d}_X & \mathbf{N}_Z^m \mathbf{d}_X \\ \mathbf{N}_X^m \mathbf{d}_Y & \mathbf{N}_Y^m \mathbf{d}_Y & \mathbf{N}_Z^m \mathbf{d}_Y \\ \mathbf{N}_X^m \mathbf{d}_Z & \mathbf{N}_Y^m \mathbf{d}_Z & \mathbf{N}_Z^m \mathbf{d}_Z \end{bmatrix}; \quad \mathbf{d}_e = [\mathbf{d}_X, \mathbf{d}_Y, \mathbf{d}_Z] \quad (5.48)$$

$$\mathbf{H}_u = \begin{bmatrix} (\widehat{\mathbf{T}}_{1X} + \widehat{\mathbf{T}}_{2X}) \mathbf{d}_X & (\widehat{\mathbf{T}}_{1Y} + \widehat{\mathbf{T}}_{2Y}) \mathbf{d}_X & (\widehat{\mathbf{T}}_{1Z} + \widehat{\mathbf{T}}_{2Z}) \mathbf{d}_X \\ (\widehat{\mathbf{T}}_{1X} + \widehat{\mathbf{T}}_{2X}) \mathbf{d}_Y & (\widehat{\mathbf{T}}_{1Y} + \widehat{\mathbf{T}}_{2Y}) \mathbf{d}_Y & (\widehat{\mathbf{T}}_{1Z} + \widehat{\mathbf{T}}_{2Z}) \mathbf{d}_Y \\ (\widehat{\mathbf{T}}_{1X} + \widehat{\mathbf{T}}_{2X}) \mathbf{d}_Z & (\widehat{\mathbf{T}}_{1Y} + \widehat{\mathbf{T}}_{2Y}) \mathbf{d}_Z & (\widehat{\mathbf{T}}_{1Z} + \widehat{\mathbf{T}}_{2Z}) \mathbf{d}_Z \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

$$\mathbf{H}_h = \begin{bmatrix} (\widetilde{\mathbf{T}}_{1X} + \widetilde{\mathbf{T}}_{2X})\mathbf{a}_1 & (\widetilde{\mathbf{T}}_{1Y} + \widetilde{\mathbf{T}}_{2Y})\mathbf{a}_1 & (\widetilde{\mathbf{T}}_{1Z} + \widetilde{\mathbf{T}}_{2Z})\mathbf{a}_1 \\ (\widetilde{\mathbf{T}}_{1X} + \widetilde{\mathbf{T}}_{2X})\mathbf{a}_2 & (\widetilde{\mathbf{T}}_{1Y} + \widetilde{\mathbf{T}}_{2Y})\mathbf{a}_2 & (\widetilde{\mathbf{T}}_{1Z} + \widetilde{\mathbf{T}}_{2Z})\mathbf{a}_2 \\ (\widetilde{\mathbf{T}}_{1X} + \widetilde{\mathbf{T}}_{2X})\mathbf{a}_3 & (\widetilde{\mathbf{T}}_{1Y} + \widetilde{\mathbf{T}}_{2Y})\mathbf{a}_3 & (\widetilde{\mathbf{T}}_{1Z} + \widetilde{\mathbf{T}}_{2Z})\mathbf{a}_3 \end{bmatrix}; \begin{matrix} \mathbf{a}_1 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \\ \mathbf{a}_2 = \{a_5, a_6, a_7, a_8\} \\ \mathbf{a}_3 = \{a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}\} \end{matrix} \quad (5.50)$$

$$\mathbf{F}_C = \mathbf{I} + \mathbf{N}_x|_0 = \begin{bmatrix} 1 + \mathbf{N}_x|_0 d_x & \mathbf{N}_y|_0 d_x & \mathbf{N}_z|_0 d_x \\ \mathbf{N}_x|_0 d_y & 1 + \mathbf{N}_y|_0 d_y & \mathbf{N}_z|_0 d_y \\ \mathbf{N}_x|_0 d_z & \mathbf{N}_y|_0 d_z & 1 + \mathbf{N}_z|_0 d_z \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

V zgornji enačbi predstavljajo količine: \mathbf{d}_e kompatibilnih 3 x 8 pomikov vozlišč končnega elementa, s katerimi se povezuje prvih osem odvodov oblikovnih funkcij $N_{1...8}$, katerih

Taylorjev razvoj okoli središča elementa je označen z \widehat{T}_{1X_k} in \widehat{T}_{2X_k} , $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$

nekompatibilnih 12 pomikov s katerimi se povezujejo odvodi zadnjih štirih oblikovnih funkcij $N_{9...12}$, katerih Taylorjev razvoj v vrsto okoli središča elementa je označen z \widetilde{T}_{1X_k} in \widetilde{T}_{2X_k} .

Matrika \mathbf{F}_C , s katero je pomnožena matrika \mathbf{H}_h zaradi objektivnosti, je vsota enotske matrike in matrike odvodov oblikovnih funkcij po globalnih koordinatah, iz vrednotene v središču končnega elementa.

S spreminjanjem števila členov Taylorjeve vrste v matrikah \mathbf{H}_u in \mathbf{H}_h neposredno vplivamo na obnašanje elementa brez dodajanja novih prostostnih stopenj.

Polni razvoj vseh oblikovnih funkcij v Taylorjevo vrsto po (5.43) vodi v strižno blokiranje končnega elementa in ne zadošča pogojem ortogonalnosti za stabilen končni element (5.37).

Za izpeljavo elementa TSCG12 smo po opravljenih numeričnih testih izbrali taki matriki

\mathbf{H}_u in \mathbf{H}_h :

$$\mathbf{H}_u = \begin{bmatrix} (\widehat{\mathbf{T}}_{1X} + \widehat{\mathbf{T}}_{2X})\mathbf{d}_x & \widehat{\mathbf{T}}_{1Y}\mathbf{d}_x & \widehat{\mathbf{T}}_{1Z}\mathbf{d}_x \\ \widehat{\mathbf{T}}_{1X}\mathbf{d}_y & (\widehat{\mathbf{T}}_{1Y} + \widehat{\mathbf{T}}_{2Y})\mathbf{d}_y & \widehat{\mathbf{T}}_{1Z}\mathbf{d}_y \\ \widehat{\mathbf{T}}_{1X}\mathbf{d}_z & \widehat{\mathbf{T}}_{1Y}\mathbf{d}_z & (\widehat{\mathbf{T}}_{1Z} + \widehat{\mathbf{T}}_{2Z})\mathbf{d}_z \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

$$\mathbf{H}_h = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{T}}_{1X}\mathbf{a}_1 & \widetilde{\mathbf{T}}_{1Y}\mathbf{a}_1 & \widetilde{\mathbf{T}}_{1Z}\mathbf{a}_1 \\ \widetilde{\mathbf{T}}_{1X}\mathbf{a}_2 & \widetilde{\mathbf{T}}_{1Y}\mathbf{a}_2 & \widetilde{\mathbf{T}}_{1Z}\mathbf{a}_2 \\ \widetilde{\mathbf{T}}_{1X}\mathbf{a}_3 & \widetilde{\mathbf{T}}_{1Y}\mathbf{a}_3 & \widetilde{\mathbf{T}}_{1Z}\mathbf{a}_3 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{T}}_{2X}\mathbf{a}_1 & & \\ & \widetilde{\mathbf{T}}_{2Y}\mathbf{a}_2 & \\ & & \widetilde{\mathbf{T}}_{2Z}\mathbf{a}_3 \end{bmatrix}; \quad \begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \\ \mathbf{a}_2 &= \{a_5, a_6, a_7, a_8\} \\ \mathbf{a}_3 &= \{a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}\} \end{aligned} \quad (5.53)$$

S transponiranim prvim členom neodvisnega gradienta \mathbf{H}_h zadostimo pogojem (5.37) in neodvisni gradient \mathbf{H}_h elementa TSCG12 zadošča pogojem metode konsistentnega gradienta.

5.4.3 Modificirana integracijska formula

Gradient pomikov \mathbf{H} vstavimo v Hu - Washitzujev funkcional

$$\Pi(\mathbf{H}) = \int_B W(\mathbf{H}) dV + \Pi^{\text{zunanjih sil}}, \quad \text{integral } \int_B W(\mathbf{H}) dV \text{ pa rešimo s pomočjo numerične}$$

integracije z Gaussovimi utežmi w_g :

$$\int_B W(\mathbf{H}) dV = \int_{\square} J \cdot W(\mathbf{H}) d\square \approx \sum_g J \cdot w_g \cdot W(\mathbf{H}) \quad (5.54)$$

$$\text{kjer je } \int_{\square} d\square = \int_{\xi} \int_{\eta} \int_{\zeta} d\xi d\eta d\zeta$$

V zgornji enačbi je J determinanta Jacobijeve matrike, ki pa jo moramo, da bo pogoj ortogonalnosti (5.18) zadoščen, zamenjati z determinanto, iz vrednoteno v središču končnega elementa J_0 . Slednja trditev sledi iz dejstva, da moramo pogoj ortogonalnosti (5.18) zadostiti tako v referenčnih kot v globalnih koordinatah, zato definiramo modificiramo integracijo funkcij na tak način:

$$\int_B f(X, Y, Z) dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) \cdot J \cdot d\xi d\eta d\zeta \approx \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) \cdot J_0 \cdot d\xi d\eta d\zeta \quad (5.55)$$

Hkrati pa moramo poskrbeti, da zadostimo tudi patch testu, kar pomeni, da moramo poskrbeti, da se konstantni del tangentne togostne matrike ohranja pri transformaciji koordinat iz globalnih v referenčne. Nelinearni problemi pri majhnih deformacijah limitirajo k linearnim problemom, tangentna matrika pri linearnem problemu pa se izraža z enačbo

$\mathbf{K}^m = \int_B (\mathbf{B}^m)^T \mathbf{D} \mathbf{B}^m dV$, kjer je \mathbf{B} matrika oblikovnih funkcij N_i^m , \mathbf{D} pa konstantna elastična

konstitutivna matrika. Torej moramo poskrbeti, da bo veljala enakost

$\int_B N_i^m N_j^m dV = \int_{\square} k \cdot J_0 N_i^m N_j^m d\square$, kjer k neznani skalar. Z naslednjim računom izpeljemo faktor

k :

$$\int_B N_i^m N_j^m dV = \int_{\square} J \cdot N_i^m N_j^m d\square = \int_{\square} J \cdot \underbrace{\frac{1}{V} \left(\int_B N_i dV \right)}_{\overline{N_i}} \underbrace{\frac{1}{V} \left(\int_B N_j dV \right)}_{\overline{N_j}} d\square = \frac{1}{V} \overline{N_i} \cdot \overline{N_j} \quad (5.56)$$

$$\int_{\square} k \cdot J_0 \cdot N_i^m N_j^m d\square = \int_{\square} k \cdot J_0 \cdot \frac{1}{V} \overline{N_i} \frac{1}{V} \overline{N_j} d\square = k \cdot 8J_0 \cdot \frac{1}{V} \overline{N_i} \cdot \frac{1}{V} \overline{N_j} \quad (5.57)$$

Enačimo enačbi (5.56) in (5.57) in dobimo iskani faktor $k = \frac{V}{V_0}$, kjer V dejanski volumen

nedeformiranega elementa, $V_0 = 8J_0$ pa volumen referenčnega paralelepipeda. Iz te slednje

ugotovitve, enačbe (5.54) in (5.55) sledi končna formula za izračun integrala funkcije

deformacijske energije $W(\mathbf{H})$:

$$\int_B W(\mathbf{H}) dV \approx \int_{\square} \frac{V}{V_0} J_0 W(\mathbf{H}) d\square \approx \sum_g \frac{V}{V_0} J_0 \cdot w_g \cdot W(\mathbf{H})_g \quad (5.58)$$

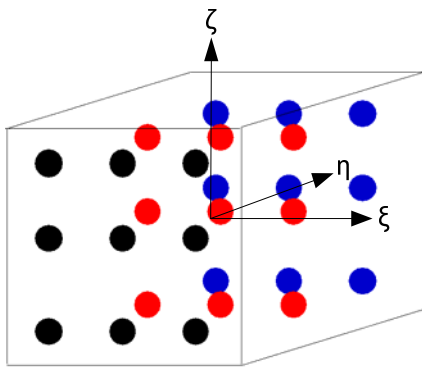
Numerična integracija se izvrši z 8 Gaussovimi integracijskimi točkami v katerih so

predpisane uteži w_g . Gaussova kubatura omogoča fleksibilnost pri izbiri uteži in točk v

katerih iz vrednotimo integracijsko funkcijo. Točke v katerih iz vrednotimo funkcijo so ničle

izbranih ortogonalnih polinomov, uteži pa so izračunane glede na izbrane ortogonalne

polinome. Običajni 8 in 27 točkovni integraciji imata naslednje parametre:



3 x 3 x 3 Gaussova integracija

$$\int_{\square} f(x) d\square = \sum_{k=1}^n f(x_k) w(x_k)$$

Lokacija integracijskih točk $x_k=(\xi, \eta, \zeta)$ za Gaussovo integracijo za paralelepipedne elemente		Uteži $w(x_k)$
2 x 2 x 2	$(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}})$	1
3 x 3 x 3	$(\pm \sqrt{\frac{3}{5}}, \pm \sqrt{\frac{3}{5}}, \pm \sqrt{\frac{3}{5}})$ $(0, \pm \sqrt{\frac{3}{5}}, \pm \sqrt{\frac{3}{5}})$ $(0, 0, \pm \sqrt{\frac{3}{5}})$ $(0, 0, 0)$	$(\frac{5}{9})^3$ $(\frac{5}{9})^2 (\frac{8}{9})$ $(\frac{5}{9}) (\frac{8}{9})^2$ $(\frac{8}{9})^3$

Slika 9: Numerična integracija paralelepipeda z Gaussovimi točkami

Ko izračunamo Hu - Washitzujev funkcional $\Pi(\mathbf{H})$, po enačbi (5.12) na $\Pi(\mathbf{H})$ dvakrat uporabimo postopek avtomatskega odvajanja po neznanih pomikih in izračunamo tangentno togostno matriko končnega elementa \mathbf{K}_e .

V prilogi je podana računalniška koda novega končnega elementa TSCG12 za AceGen.

6 UGOTAVLJANJE USTREZNOSTI FORMULACIJ KONČNIH ELEMENTOV Z NUMERIČNIMI TESTI

6.1 Uvodne besede

V tem poglavju preizkusimo in primerjamo uspešnost različnih formulacij končnih elementov na testih, ki so izbrani tako, da se pokažejo pomembne lastnosti posamezne formulacije. Te lastnosti so:

- občutljivost na distorzijo mreže končnih elementov
- red konvergence rezultatov oziroma učinkovitost
- volumetrično in strižno blokiranje
- opisovanje nefizikalnih deformacijskih oblik (hourglassing).

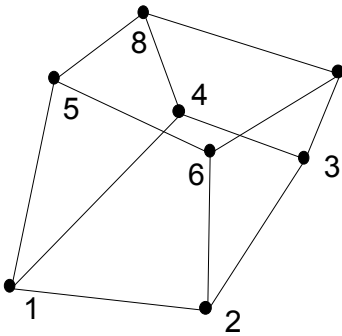
6.2 Kratek opis različnih formulacij končnih elementov za primerjavo na testih

V sledečih numeričnih primerih bomo primerjali obnašanje naslednjih formulacij končnih elementov:

H1 Je standarden izoparametričen, heksaeder z 8 vozlišči, 3D element, formuliran po metodi pomikov. Implementiran je neo - Hookejev nelinearni materialni zakon (4.9).

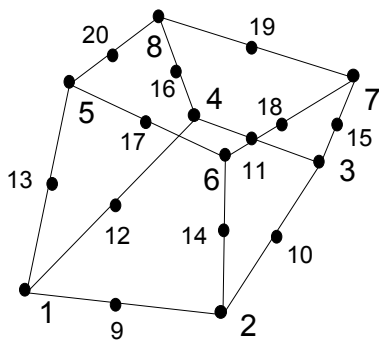
Metoda pomikov: $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{Grad}\mathbf{u}$

Topologija H1:



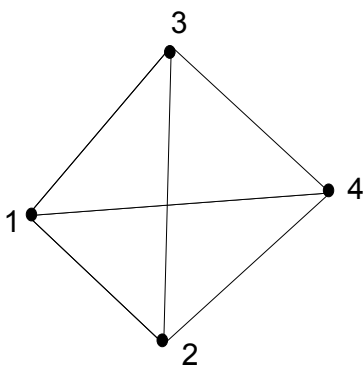
H2 Je izoparametričen, hekaseder z 20 vozlišči, 3D element, formuliran po metodi pomikov. Implementiran je neo - Hookejev nelinearni materialni zakon (4.9).

Topologija H2:



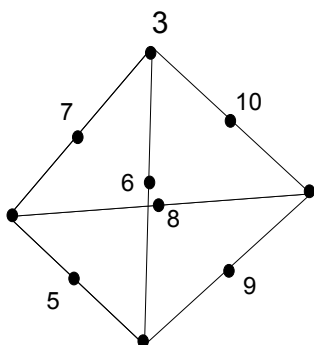
O1 Je izoparametričen, tetraeder s 4 vozlišči, 3D element, formuliran po metodi pomikov. Implementiran je neo - Hookejev nelinearni materialni zakon (4.9).

Topologija O1:



O2 Je izoparametričen, tetraeder z 10 vozlišči, 3D element, formuliran po metodi pomikov. Implementiran je neo - Hookejev nelinearni materialni zakon (4.9).

Topologija O2:



H1E9 Je izoparametričen, 3D, heksaeder z 8 vozlišči (topologija H1), standarden EAS element z 9 dodatnimi prostostnimi stopnjami. Implementiran je neo - Hookejev nelinearni materialni zakon (4.9).

EAS interpolacija:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \text{Grad}\mathbf{u} + \mathbf{H}_e, \mathbf{H}_e = \frac{J}{J_0} \mathbf{F}_c \cdot \mathbf{J}_0^{-T} \begin{bmatrix} \xi\alpha_1 & \eta\alpha_2 & \zeta\alpha_3 \\ \xi\alpha_4 & \eta\alpha_5 & \zeta\alpha_6 \\ \xi\alpha_7 & \eta\alpha_8 & \zeta\alpha_9 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{J}_0^{-1}, \mathbf{F}_c = \mathbf{I} + \text{Grad}\mathbf{u}|_{\xi,\eta,\zeta=0}$$

CG9 Je izoparametričen, 3D, heksaeder z 8 vozlišči (topologija H1), EAS element z 9 dodatnimi prostostnimi stopnjami. Je modificiran H1E9 element z metodo konsistentnega gradienta, kar se izrazi v transponirani matriki neodvisnega gradienta elementa H1E9. Implementiran je neo - Hookejev nelinearni materialni zakon (4.9).

CG9 interpolacija:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \text{Grad}\mathbf{u} + \mathbf{H}_e, \mathbf{H}_e = \frac{J}{J_0} \mathbf{F}_c \cdot \mathbf{J}_0^{-T} \begin{bmatrix} \xi\alpha_1 & \eta\alpha_2 & \zeta\alpha_3 \\ \xi\alpha_4 & \eta\alpha_5 & \zeta\alpha_6 \\ \xi\alpha_7 & \eta\alpha_8 & \zeta\alpha_9 \end{bmatrix}^T \cdot \mathbf{J}_0^{-1}, \mathbf{F}_c = \mathbf{I} + \text{Grad}\mathbf{u}|_{\xi,\eta,\zeta=0}$$

H1E21 Je izoparametričen, 3D, heksaeder z 8 vozlišči (topologija H1), standarden EAS element z 21 dodatnimi prostostnimi stopnjami. Implementiran je neo - Hookejev nelinearni materialni zakon (4.9).

H1E21 interpolacija: $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \text{Grad} \mathbf{u} + \mathbf{H}_e$, $\mathbf{H}_e = \frac{J_0}{J} \mathbf{F}_c \cdot \mathbf{J}_0^{-T} \cdot \mathbf{G}(\xi) \cdot \mathbf{J}_0^{-1}$, $\mathbf{F}_c = \mathbf{I} + \text{Grad} \mathbf{u}|_{\xi, \eta, \zeta=0}$

$$\mathbf{G}(\xi) = \begin{bmatrix} \xi\alpha_1 + \xi\eta\alpha_{16} + \xi\zeta\alpha_{17} & \xi\alpha_4 + \xi\zeta\alpha_{10} & \xi\alpha_6 + \xi\eta\alpha_{12} \\ \eta\alpha_5 + \eta\zeta\alpha_{11} & \eta\alpha_2 + \xi\eta\alpha_{18} + \eta\zeta\alpha_{19} & \eta\alpha_8 + \xi\eta\alpha_{14} \\ \zeta\alpha_7 + \eta\zeta\alpha_{13} & \zeta\alpha_9 + \xi\zeta\alpha_{15} & \zeta\alpha_3 + \xi\zeta\alpha_{20} + \eta\zeta\alpha_{21} \end{bmatrix}$$

TSCG12 Je oznaka končnega elementa, ki je izpeljan v prejšnjem poglavju, gre za modificiran izoparametričen, 3D, heksaeder z 8 vozlišči (topologija H1), EAS element z 12 dodatnimi prostostnimi stopnjami. Odvodi vseh oblikovnih funkcij so zapisani s Taylorjevo vrsto drugega reda, ki je razvita okoli središča elementa. Izbira oblikovnih funkcij nekompatibilnih pomikov zadošča pogojem metode konsistentnega gradienta. Implementiran je neo - Hookejev nelinearni materialni zakon (4.9).

TSCG12 interpolacija:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{H}, \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_u + \mathbf{F}_c \cdot \mathbf{H}_h, \text{ matrike } \mathbf{H}_0, \mathbf{H}_u, \mathbf{F}_c \text{ in } \mathbf{H}_h \text{ so definirane v poglavju 5.4.2}$$

6.3 Seznam in namen numeričnih testov

1) Patch test

S patch testom preverimo, če je končni element sposoben predstaviti konstantno napetostno stanje. Obravnavamo rotacijski patch test, kjer so vse napetosti pri rotaciji enake nič in deformacijski patch test, kjer so napetosti konstantne.

2) Test objektivnosti

S tem testom preverimo, če končni element pravilno opiše toge premike. Končni element je objektiv, če je deformacija telesa neodvisna od superponirane toge rotacije telesa.

3) Test občutljivosti elementa na distorzijo mreže

S tem testom preverimo, če je končni element občutljiv na distorzirane mreže končnih elementov.

4) Tanek obroč

Test s tankim obročem preveri strižno blokiranje končnega elementa v upogibno dominantnem stanju.

5) Sfera

Test s sfero preveri strižno blokiranje končnega elementa v primeru prostorsko distorzirane mreže.

6) Nestisljiv kvader

Test z nestisljivim kvadrom preveri volumetrično blokiranje končnega elementa.

7) Test opisovanja nefizikalnih deformacijskih oblik

Test opisovanja nefizikalnih deformacijskih oblik je test stabilnosti končnega elementa, s katerim preverimo, če končni element v točki nestabilnosti pokaže nefizikalne deformacijske oblike (hourglassing). Obravnavamo test s palico iz stisljivega materiala in test z kocko iz nestisljivega materiala.

8) Togo vpeta membrana

Test z membrano preveri blokiranje končnega elementa pri velikih vitkostih.

9) Testi za elasto - plastične formulacije končnih elementov

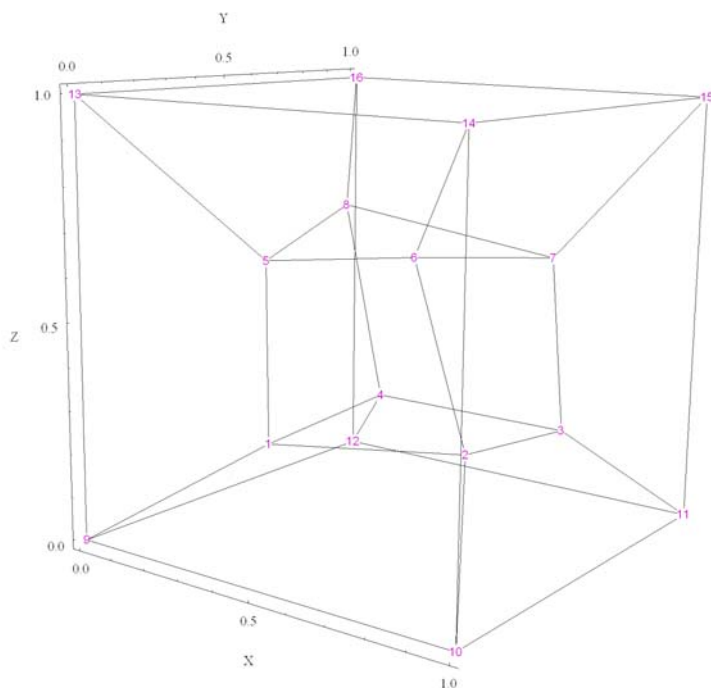
Testi elasto - plastične formulacije preverijo volumetrično blokiranje končnega elementa in njegovo stabilnost. Obravnavamo natezni test s palico in natezni test s ploščico, s katerima preverimo obnašanje končnega elementa pri velikih raztezkih za elasto - plastičen material v prostorskem in ravninskem deformacijskem stanju.

6.4 Patch test

Izpeljemo dve vrsti patch testa, deformacijski in rotacijski patch test. Standardizirani patch test se izvede na predpisani konfiguraciji mreže končnih elementov, ki je vidna na Sliki 10, točne koordinate vozlišč za paralelepipedni element z 8 elementi, pa so podane v Preglednici 2.

Za deformacijski patch test na standardno konfiguracijo mreže končnih elementov predpišemo v vsakem vozlišču točno določene pomike, ki povzročijo konstantno napetostno stanje v telesu. Izračunane vrednosti ustreznih pomikov vozlišč so za element s topologijo H1 podane v Preglednici 2. Test uspešno opravijo vsi elementi, ki jih primerjamo.

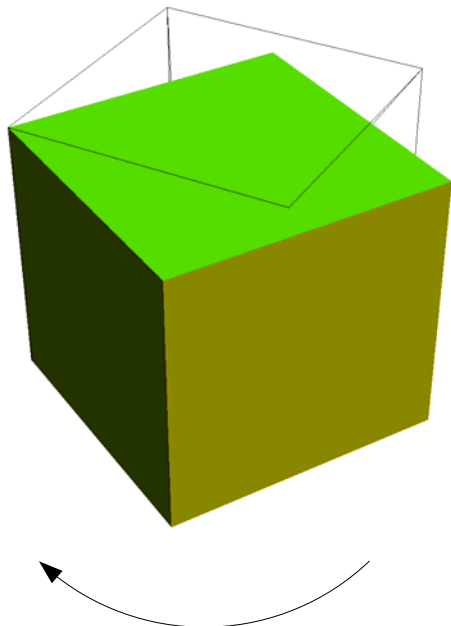
Za rotacijski patch test so robni pogoji taki, da je možna rotacija okrog osi Z, ostali togi pomiki pa so preprečeni. V smeri X vsilimo pomik točke P, kar povzroči togo rotacijo telesa okrog osi Z (Slika 11). Vsi končni elementi, ki smo jih uporabili za primerjavo, uspešno opravijo s tem testom, to pomeni, da so vse napetosti pri rotaciji enake nič.



Slika 10: Konfiguracija mreže končnih elementov za standardizirani patch test

Vozlišča	Koordinate vozlišč			Robni pogoji v vozliščih			Rešitev		
	X	Y	Z	u	v	w	U	v	w
1	0.249	0.342	0.192	-	-	-	0.000516	0.0005625	0.0004875
2	0.826	0.288	0.288	-	-	-	0.001114	0.000845	0.000845
3	0.85	0.649	0.263	-	-	-	0.001306	0.0012055	0.0010125
4	0.273	0.75	0.23	-	-	-	0.000763	0.0010015	0.0007415
5	0.32	0.186	0.643	-	-	-	0.0007345	0.0006675	0.000896
6	0.677	0.305	0.683	-	-	-	0.001171	0.000985	0.001174
7	0.788	0.693	0.644	-	-	-	0.0014565	0.001409	0.0013845
8	0.165	0.745	0.702	-	-	-	0.0008885	0.0011785	0.001157
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	1	0	0	0.001	0.0005	0.0005	0.001	0.0005	0.0005
11	1	1	0	0.0015	0.0015	0.001	0.0015	0.0015	0.001
12	0	1	0	0.0005	0.001	0.0005	0.0005	0.001	0.0005
13	0	0	1	0.0005	0.0005	0.001	0.0005	0.0005	0.001
14	1	0	1	0.0015	0.001	0.0015	0.0015	0.001	0.0015
15	1	1	1	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002
16	0	1	1	0.001	0.0015	0.0015	0.001	0.0015	0.0015

Preglednica 2: Koordinate vozlišč in robni pogoji za standardizirani patch test



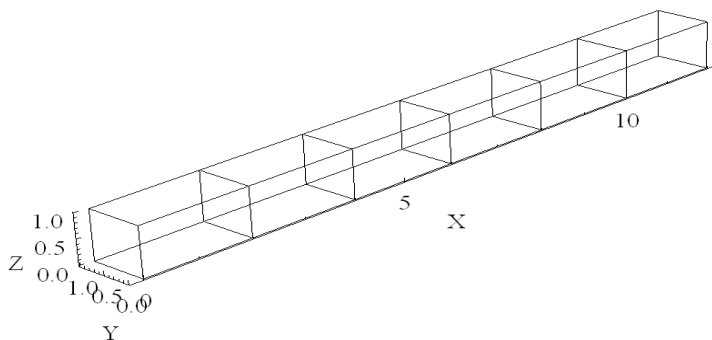
Slika 11: Rezultat rotacijskega patch testa

6.5 Test objektivnosti

Objektivnost izbrane formulacije končnega elementa ocenimo z modelom (Slika 12), ki ga obremenimo s predpisanim pomikom in zavrtimo kot togo telo za 2π . Nosilec je vpet na obeh koncih, nato pa mu na enem koncu vsilimo pomik. Tako deformirano obliko nato še večkrat zavrtimo kot togo telo okrog osi Y. Objektivnost končnega elementa je dosežena, če je deformacija nosilca neodvisna od superponirane toge rotacije telesa. To preverimo z izrisom grafa sile ob vpetju v odvisnosti od zasuka nosilca, ki mora biti ravna črta, kar pomeni togi premik (Slika 14). Tudi preizkus objektivnosti so uspešno prestali vsi testirani končni elementi.

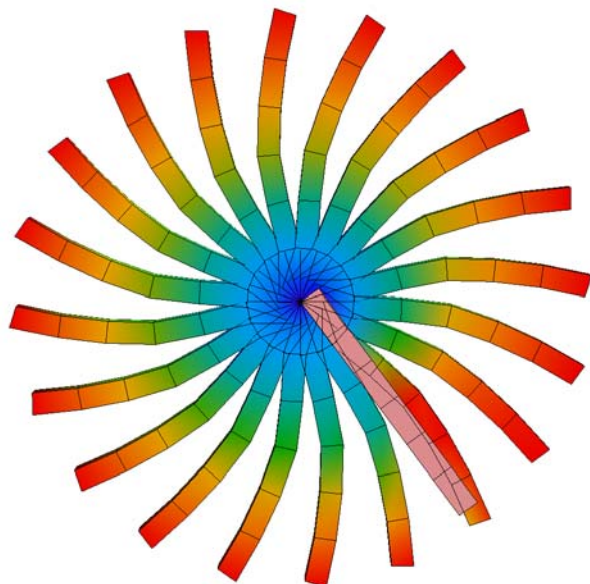
Na Sliki 12 je izrisan testni nosilec dolžine l , širine w in višine h , ki smo ga diskretizirali s 5 končnimi elementi in vpeli na obeh koncih.

Geometrija	Robni pogoji
$l = 12 \text{ mm}$	$X = 0: u_x = u_y = u_z = 0$
$w = 1 \text{ mm}$	$X = l: u_x = u_y = u_z = 0$
$h = 1 \text{ mm}$	$X = l/2: F_z = 10 \text{ N}$

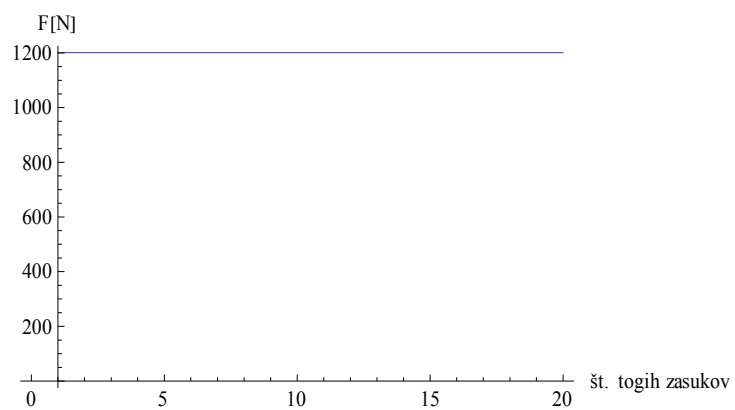


Slika 12: Geometrija testnega nosilca

Na Sliki 13 pa vidimo rezultat takega testa, če deformiran testni nosilec 20 krat po 18° togo zavrtimo okoli osi Y.



Slika 13: Rezultat testa objektivnosti



Slika 14: Graf sile ob vpetju v odvisnosti od zasuka

6.6 Test občutljivosti končnega elementa na distorzijo mreže

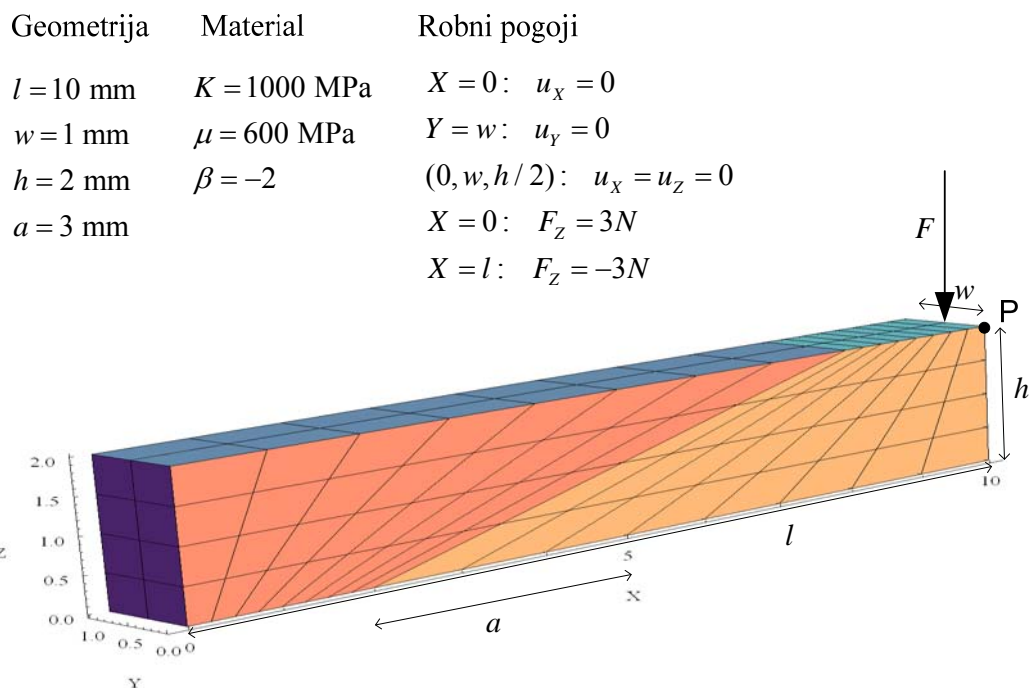
Konzolni nosilec dolžine l , širine $2w$ in višine h , zamrežimo z distorzirano mrežo končnih elementov, nato ga obremenimo na prostem koncu z enakomerno porazdeljeno silo $F = 6N$ po prerezu nosilca. Robni pogoji so taki, da je vpet konec nepomičen v smeri X, točka na sredini prereza vpetega konca pa je nepomična v vseh smereh. Da se izognemo singularnostim zaradi strižne sile, vpeti konec obremenimo z enakomerno porazdeljeno silo $F = 6N$ v nasprotni smeri kot na prostem koncu. Upoštevamo simetrijo po širini, zato diskretiziramo le polovico nosilca in temu primerno določimo robne pogoje. Geometrijski, obtežbeni in materialni podatki za distorzirano mrežen nosilec so podani na Sliki 15.

Za vse testne končne elemente v točki P primerjamo konvergenco pomika w_p v smeri Z.

Uporabimo štiri različno goste mreže z $16 \cdot 2^k \times 4 \cdot 2^k \times 2 \cdot 2^k$, $k = 0, 1, 2, 3$, končnimi elementi za topologijo H1. Za elemente O1, O2 in H2 je število elementov v posamezni mreži izbrano tako, da čim bolj sovпада s številom prostostnih stopenj, ki jih ima element H1. Preglednica 3 vsebuje rezultate numeričnega testa, torej vertikalni pomik točke P vseh testiranih elementov glede na število prostostnih stopenj. Slika 17 kaže deformirano obliko elementa TSCG12 pri mreži z $64 \times 16 \times 8$ elementi. Na Sliki 16 je graf pomika točke P v smeri obremenitve za vse testne elemente v odvisnosti od števila prostostnih stopenj. Po pričakovanjih elementa H1 in O1 blokirata, kar pomeni, da zaradi togosti zelo počasi konvergirata k rešitvi. Vsi elementi konvergirajo k isti rešitvi. Iz grafa je razvidno, da vsi elementi z neodvisnimi deformacijami konvergirajo k rešitvi hitreje kot H2 in O2. Za primerjavo je na Sliki 16 podan še pomik na

koncu konzole izračunan po Bernoullijevi teoriji nosilcev: $w_p = \frac{Fl^3}{3EI}$, kjer je E elastični

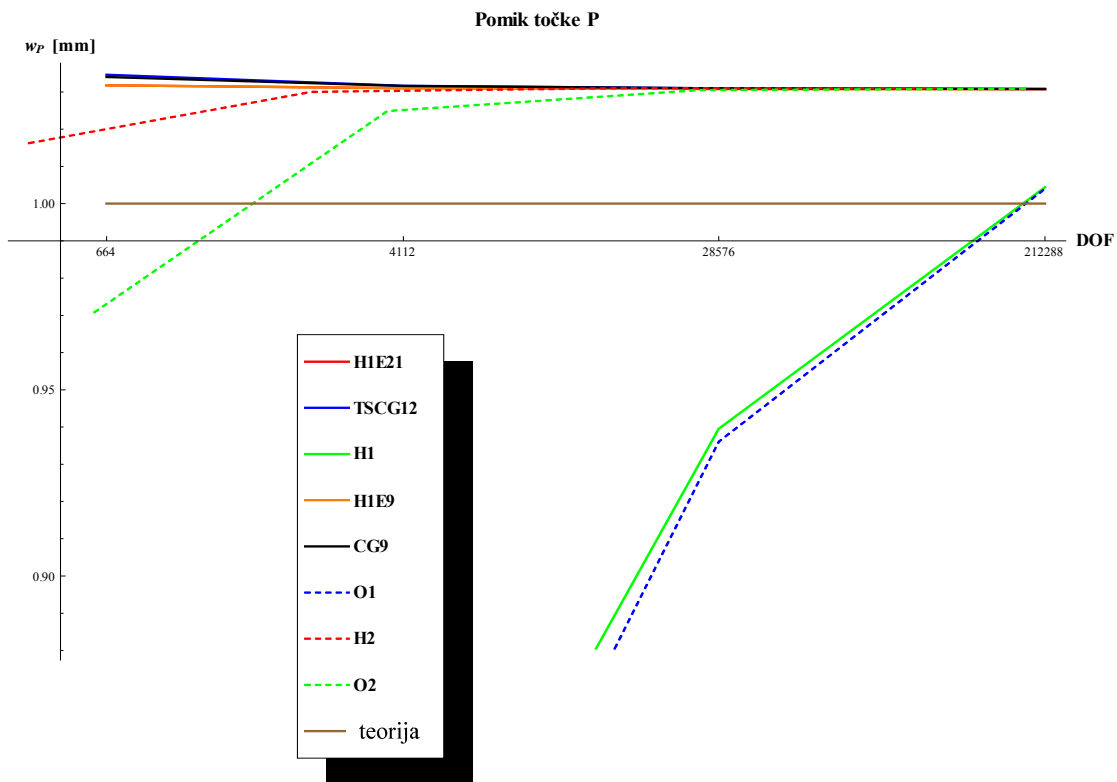
modul materiala, I pa vztrajnostni moment prečnega prereza nosilca glede na os Y.



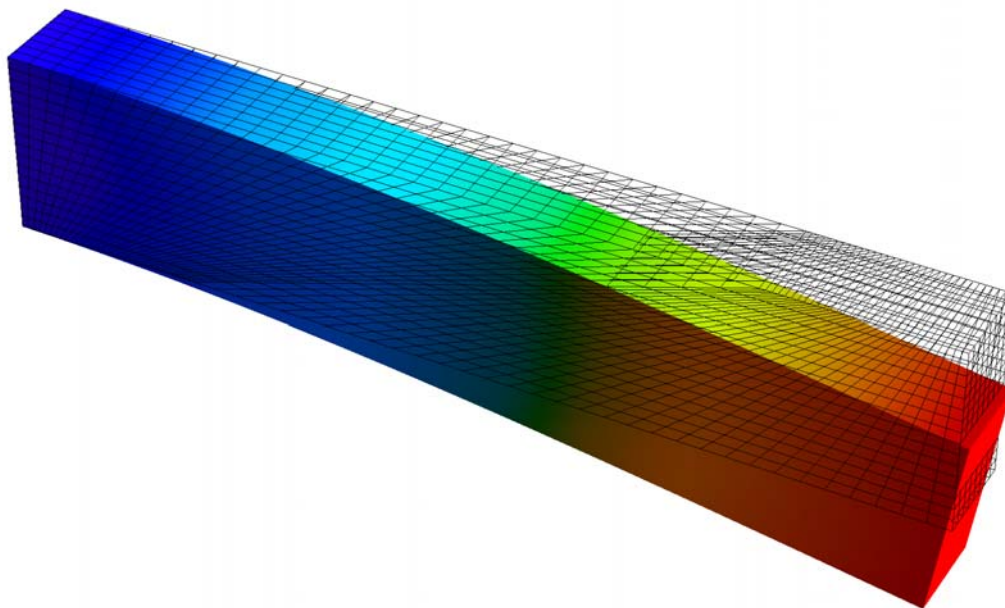
Slika 15: Geometrijski, obtežbeni in materialni podatki za distorzirano mrežen nosilec

DOF	TSCG12	H1	H1E9	CG9	O1	H1E21
664	1.03463	0.581067	1.03178	1.03405	0.525981	1.0318
4112	1.03166	0.787741	1.03103	1.03162	0.767533	1.03103
28 576	1.03097	0.939532	1.03081	1.03096	0.936066	1.03081
212 288	1.03082	1.00439	1.03078	1.03082	1.00403	1.03078
DOF	H2					
412	1.01626					
2336	1.03003					
15 328	1.03102					
110 144	1.03095					
DOF	O2					
616	0.970826					
3728	1.02488					
25 504	1.03053					
187 712	1.03087					

Preglednica 3: Distorzirano mrežen nosilec: Vertikalni pomik točke P, w_p [mm], za vse testne elemente glede na število prostostnih stopenj DOF



Slika 16: Distorzirano mrežen nosilec: Graf pomika točke P w_P [mm] glede na število prostostnih stopenj DOF



Slika 17: Distorzirano mrežen nosilec: Rezultat za TSCG12 pri mreži 64 x 16 x 8

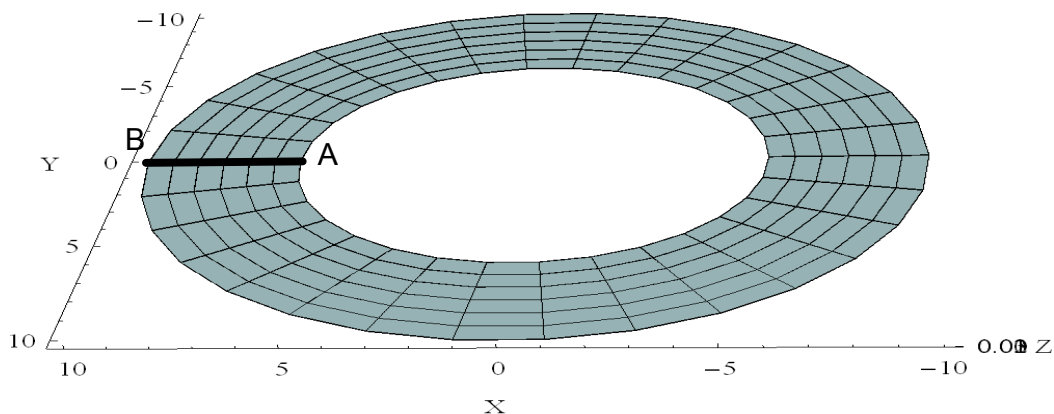
6.7 Tanek obroč

Obnašanje različnih formulacij končnih elementov preizkusimo na tankem obroču debeline h , notranjim radijem r_n in zunanjam radijem r_z , ki je na nekem poljubnem mestu prerezan tako, da imamo 2 prosta konca obroča. Tak obroč na enem prostem koncu obremenimo s površinsko obtežbo q po prerezu obroča, v smeri pravokotno na ravnino obroča. Na drugem prostem koncu pa preprečimo vse pomike prereza v obodni smeri, vsem točkam na spodnjem robu tega prereza preprečimo pomike v smeri Z osi, točko na spodnjem notranjem robu tega prereza pa fiksiramo v vseh smereh. Da se izognemo singularnostim zaradi strižne obremenitve, obremenimo vpeti konec obroča s površinsko obtežbo v nasprotni smeri kot na prostem koncu. Na Sliki 18 so geometrijski, materialni in obtežbeni podatki. Označen je prerez A-B, kjer obroč ni sklenjen, pri tem sta točki A in B na prostem koncu obroča. Med elementi primerjamo konvergenco pomikov w_A in w_B v smeri Z, v točkah A in B.

Uporabljene so mreže končnih elementov štirih različnih gostot, z

$2^k \times 3 \cdot 2^k \times 15 \cdot 2^k$; $k = 0, 1, 2, 3$ elementov za topologijo H1. Za elemente O1, O2 in H2 je število elementov v posamezni mreži izbrano tako, da čim bolj sovпада s številom prostostnih stopenj, ki jih ima element H1. Slika 21 kaže deformirano obliko obroča izračunano z elementom TSCG12 pri mreži z $2 \times 6 \times 30$ elementi. V Preglednici 4 in 5 so prikazani pomiki v točkah A in B, w_A in w_B , kot funkcija števila prostostnih stopenj za vse testne končne elemente. Na Sliki 19 in 20 so prikazani rezultati preglednic v grafični obliki. Elementi, ki blokirajo so H1, O1 in O2. O1 ostane skoraj v začetni nedeformirani legi, saj ima topologijo tetraedra, ki je pri tako tankem telesu zelo distorziran. O2 konvergira počasneje kot H1, vendar bolje kot O1, ker ima več vozlišč v katerih računamo pomike. H1E21 ne konvergira za najbolj grobo mrežo zaradi velikega števila dodatnih prostostnih stopenj zaradi katerih se močno zmanjša konvergenčni radij Newtonove iteracijske metode. Ostali elementi z neodvisnimi deformacijami kar hitro konvergirajo k rešitvi. H2 konvergira pri tem testu hitreje kot H1E9 in CG9, ki imata enake rešitve, zato se na grafu rezultati pokrivajo. Test najbolj opravi TSCG12.

Geometrija	Material	Obtežba	Podpore
$r_n = 6 \text{ mm}$	$K = 7000000 \text{ MPa}$	$q = 6.67 \text{ MPa}$	$Y = 0 \wedge X > 0 \wedge Z = 0: u_Y = u_Z = 0$
$r_z = 10 \text{ mm}$	$\mu = 10500000 \text{ MPa}$		$Y = 0 \wedge X > 0 \wedge Z > 0: u_Y = 0$
$h = 0.03 \text{ mm}$	$\beta = -2$		$(r_n, 0, 0): u_X = u_Y = u_Z = 0$

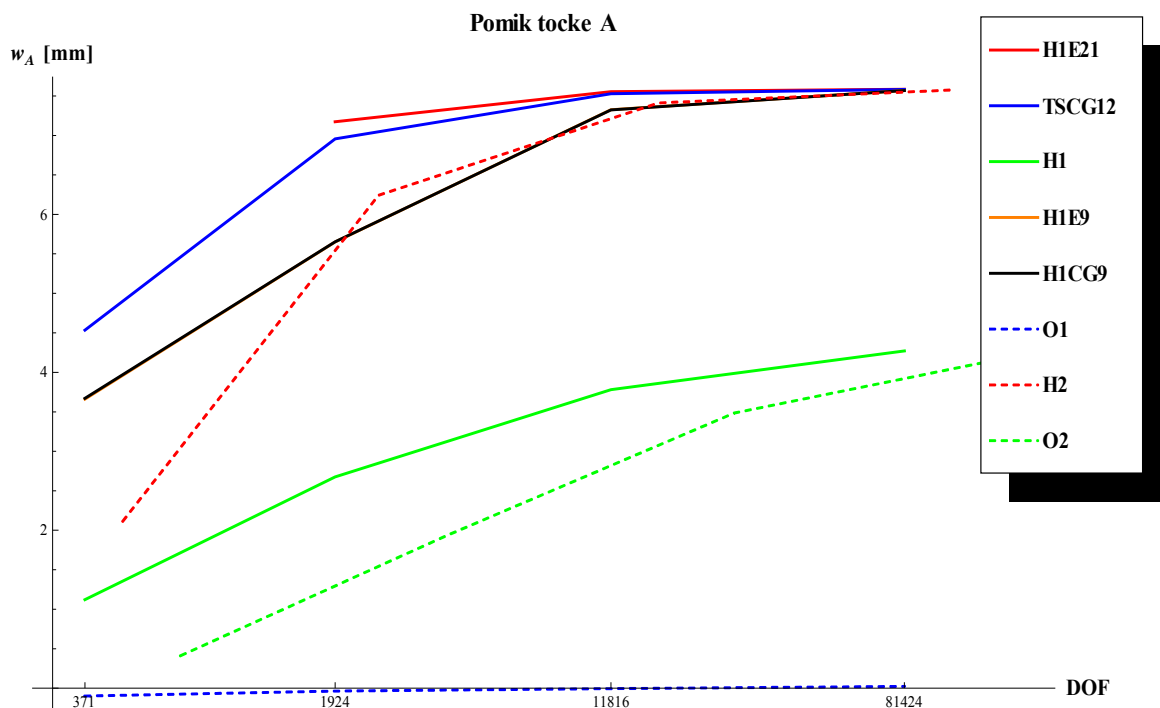


Slika 18: Geometrijski, obtežbeni in materialni podatki za tanek obroč

DOF	TSCG12	H1	H1E9	H1CG9	O1	H1E21
371	4.53397	1.12062	3.66075	3.67084	-0.0996278	ne konv.
1924	6.95746	2.67461	5.65138	5.65312	-0.036473	7.173
11 816	7.52865	3.7808	7.32515	7.32354	-0.0057665	7.55415
81 424	7.58349	4.2713	7.56896	7.56854	0.0225223	7.58547
DOF	H2					
476	2.11394					
2560	6.24192					
16 160	7.41161					
113 344	7.57729					
DOF	O2					
696	0.410487					
4016	1.9343					
26 592	3.48488					
191 936	4.25553					

Preglednica 4: Tanek obroč: Vertikalni pomik točke A, w_A [mm], glede na število prostostnih stopenj

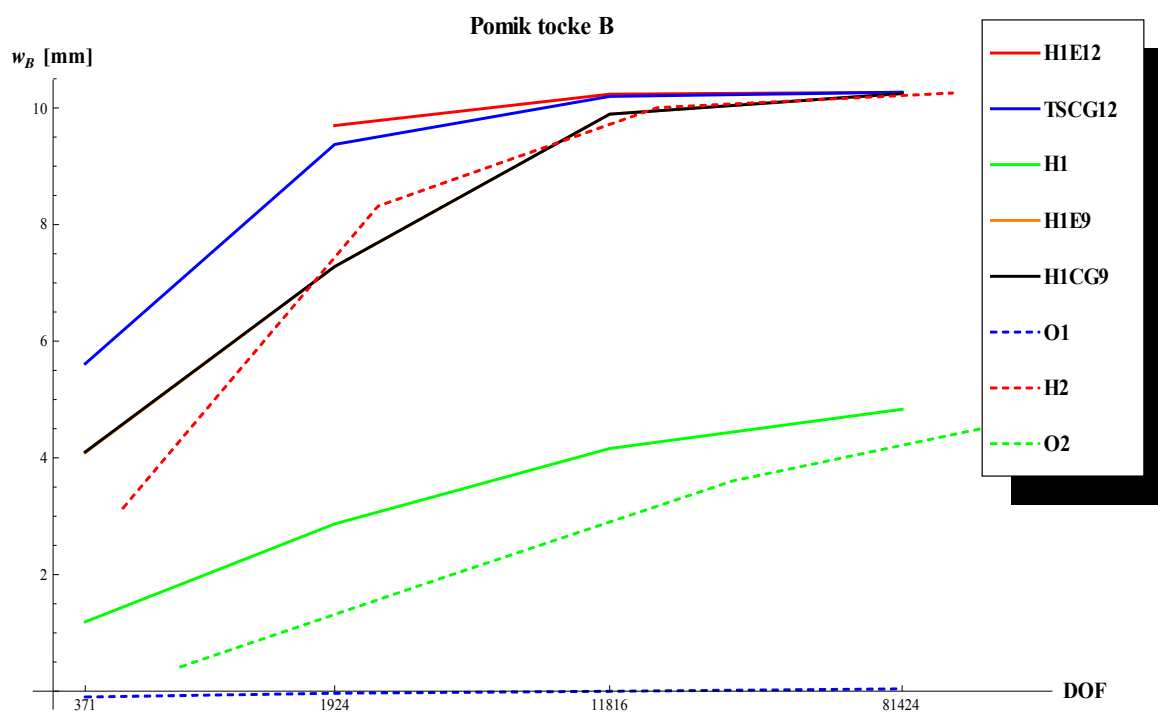
DOF za vse testne elemente



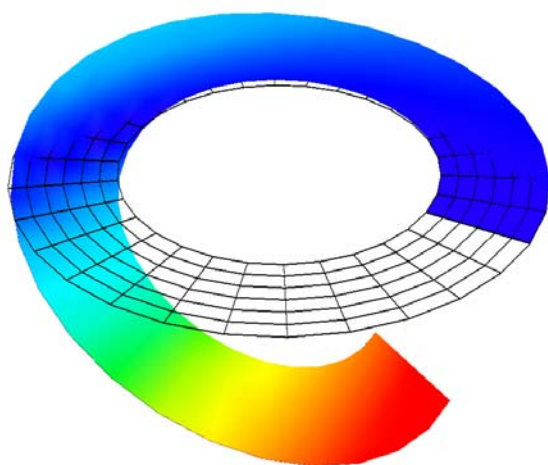
Slika 19: Tanek obroč: Vertikalni pomik točke A, w_A [mm], glede na število prostostnih stopenj DOF za vse testne elemente

DOF	TSCG12	H1	H1E9	H1CG9	O1	H1E21
371	5.61475	1.18948	4.08846	4.10252	-0.0993466	ne konv.
1924	9.37555	2.86665	7.27804	7.28067	-0.0353802	9.69656
11816	10.1961	4.15954	9.89468	9.89253	-0.00140729	10.234
81424	10.267	4.83393	10.2462	10.2456	0.039886	10.2699
DOF	H2					
476	3.13991					
2560	8.31559					
16160	10.0049					
113344	10.2549					
DOF	O2					
696	0.418566					
4016	1.96439					
26592	3.60414					
191936	4.68467					

Preglednica 5: Tanek obroč: Vertikalni pomik točke B, w_B [mm], glede na število prostostnih stopenj DOF za vse testne elemente



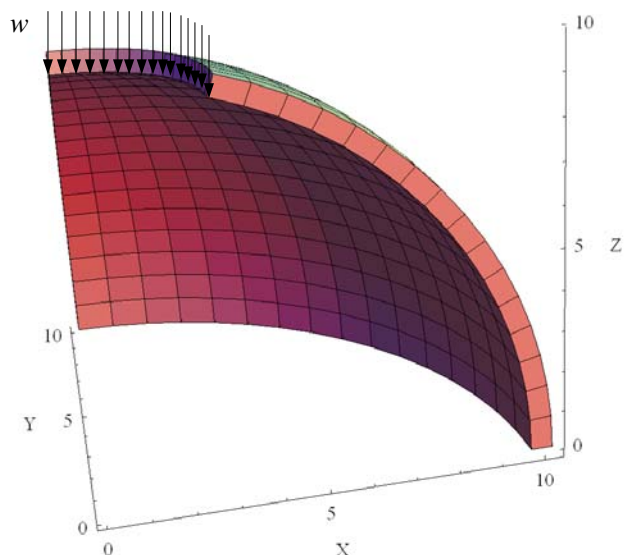
Slika 20: Tanek obroč: Vertikalni pomik točke B, w_B [mm], glede na število prostostnih stopenj DOF za vse testne elemente



Slika 21: Končna deformacijska oblika TSCG12 pri mreži 2 x 6 x 30

6.8 Sfera

Sfera z notranjim radijem r_n , zunanjim radijem r_z in krožno odprtino na vrhu in dnu je obremenjena z enakomernim pomikom w zgornjega roba odprtine v smeri $-Z$. Kot odprtine glede na os Z meri 18° . Upoštevamo simetrijo primera in diskretiziramo le osmino lupine ter skladno s tem izberemo ustrezne robne pogoje. Geometrijski, materialni in obtežbeni podatki so podani na Sliki 22. Uporabimo štiri različno goste mreže z $2^k \times 16 \cdot 2^k \times 16 \cdot 2^k$, $k = 0, 1, 2, 3$, končnimi elementi za topologijo H1. Za elemente O1, O2 in H2 je število elementov v posamezni mreži izbrano tako, da čim bolj sovпада s številom prostostnih stopenj, ki jih ima element H1. Med testnimi elementi primerjamo hitrost konvergence k rešitvi in rešitve za rezultanto sil ob vpetju F . Na Sliki 24 je prikazana deformirana oblika elementa TSCG12 pri mreži z $1 \times 16 \times 16$ elementi. TSCG12 se deformira pravilno, na tak način se deformirajo vsi elementi razen H1E21, ki ne konvergira. Preglednica 6 prikazuje velikost rezultante sil ob vpetju v odvisnosti od števila prostostnih stopenj za vse testne elemente. Ponovno O1 in H1 blokirata. H1E21 ne konvergira za nobeno mrežo. Ostali elementi z neodvisnimi deformacijami hitro konvergirajo k isti rešitvi. Slika 23 je graf, ki prikazuje velikost rezultante sil kot funkcijo števila prostostnih stopenj.



Geometrija

$$r_n = 9.75 \text{ mm}$$

$$r_z = 10.25 \text{ mm}$$

Material

$$K = 175000 \text{ MPa}$$

$$\mu = 80769.23 \text{ MPa}$$

$$\beta = -2$$

Obtežba

$$w = 10 \text{ mm}$$

Podpore

$$X = 0: u_x = 0$$

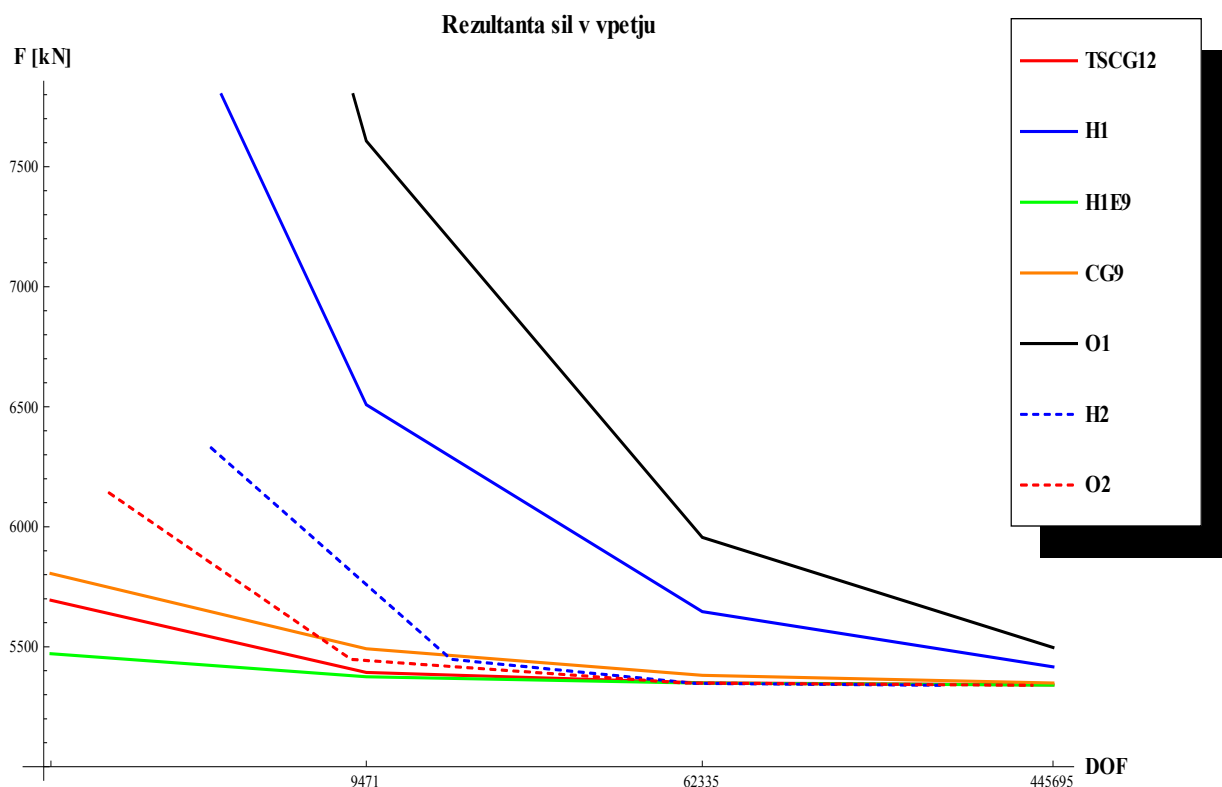
$$Y = 0: u_y = 0$$

$$Z = 0: u_z = 0$$

Slika 22: Geometrijski, obtežbeni in materialni podatki za sfero

DOF	TSCG12	H1	H1E9	H1CG9	O1	H1E21
1615	5693.83	9319.42	5470.97	5805.35	12215.5	ne konv.
9471	5392.75	6508.51	5374.87	5491.73	7607.43	ne konv.
62335	5349.24	5646.24	5348.05	5380.6	5955.75	ne konv.
445695	5340.63	5416.33	5340.55	5348.79	5496.56	ne konv.
DOF	H2					
3967	6328.65					
15231	5447.67					
59647	5347.58					
236031	5339.46					
DOF	O2					
2239	6140.72					
8703	5447.18					
56191	5348.98					
396543	5339.39					

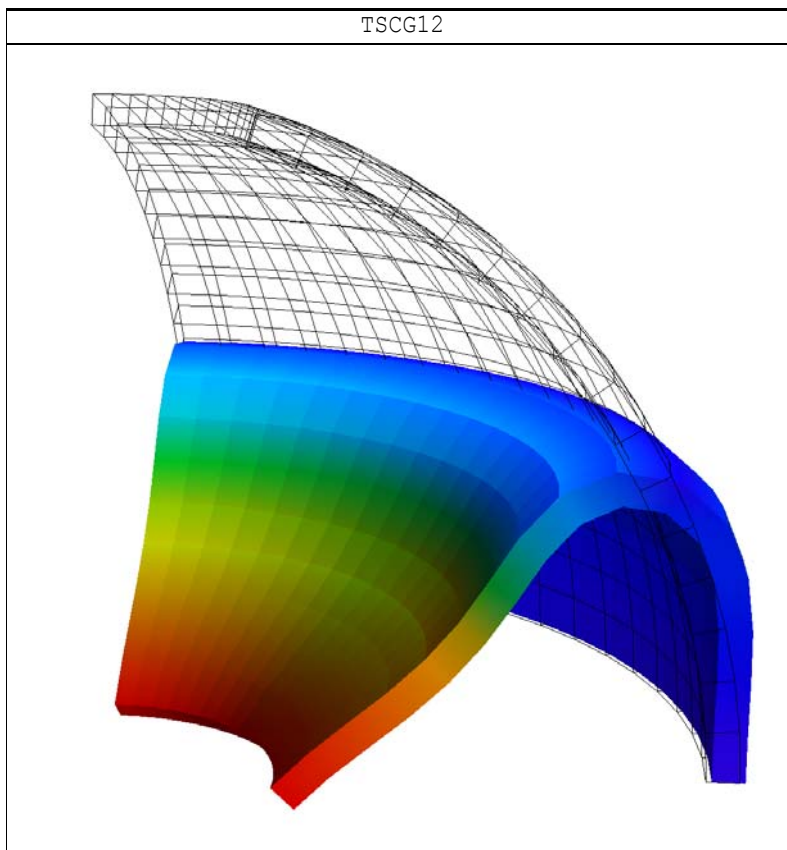
Preglednica 6: Sfera: Sila ob vpetju F [kN] glede na število prostostnih stopenj za vse testne elemente



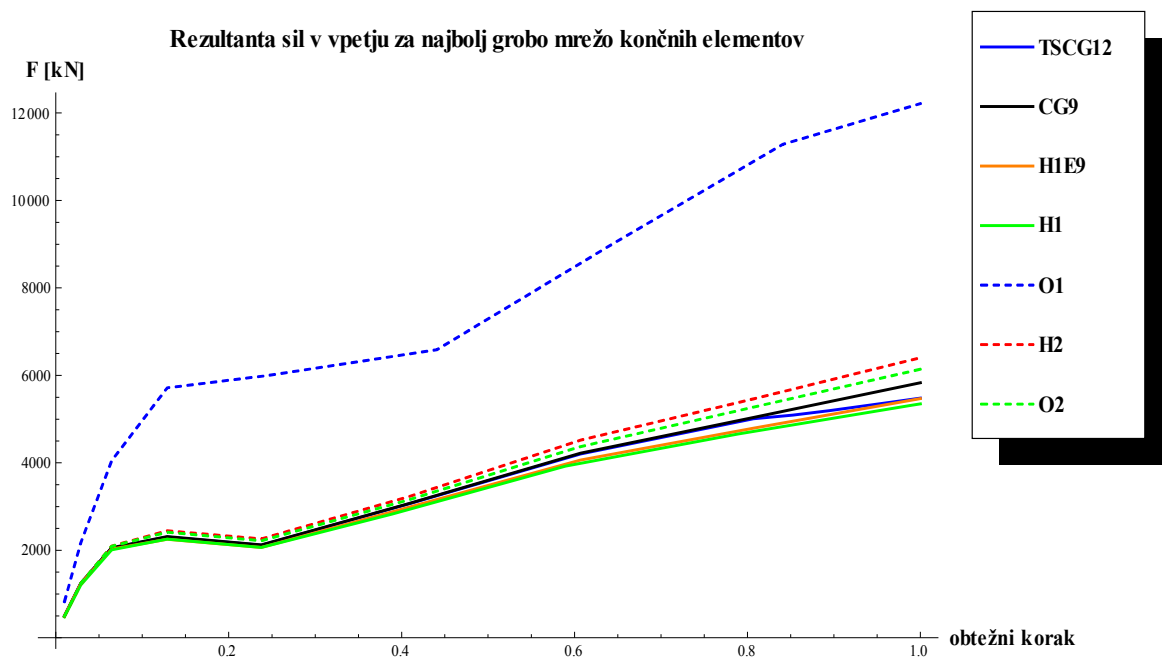
Slika 23: Sfera: Sila ob vpetju F [kN] glede na število prostostnih stopenj za vse testne elemente

Na Sliki 25, ki prikazuje graf sile ob vpetju v odvisnosti od pomika za vse elemente, ki pri mreži s $1 \times 16 \times 16$ končnimi elementi konvergirajo k rešitvi, opazimo, da na neki točki, ko pomik enakomerno narašča, začne sila ob vpetju padati. V tej točki pride do preskoka sistema. Nato se stanje stabilizira in sila ob vpetju začne ponovno rasti v razmerju z rastjo pomika. Na tem grafu se vidi, da imajo vsi elementi enak potek naraščanja sile glede na velikost pomika, tudi rešitve za velikost sile ob danem pomiku so podobne pri vseh, razen pri končnem elementu O1, ki zaradi svoje togosti dobi precej višje rezultate za silo ob vpetju.

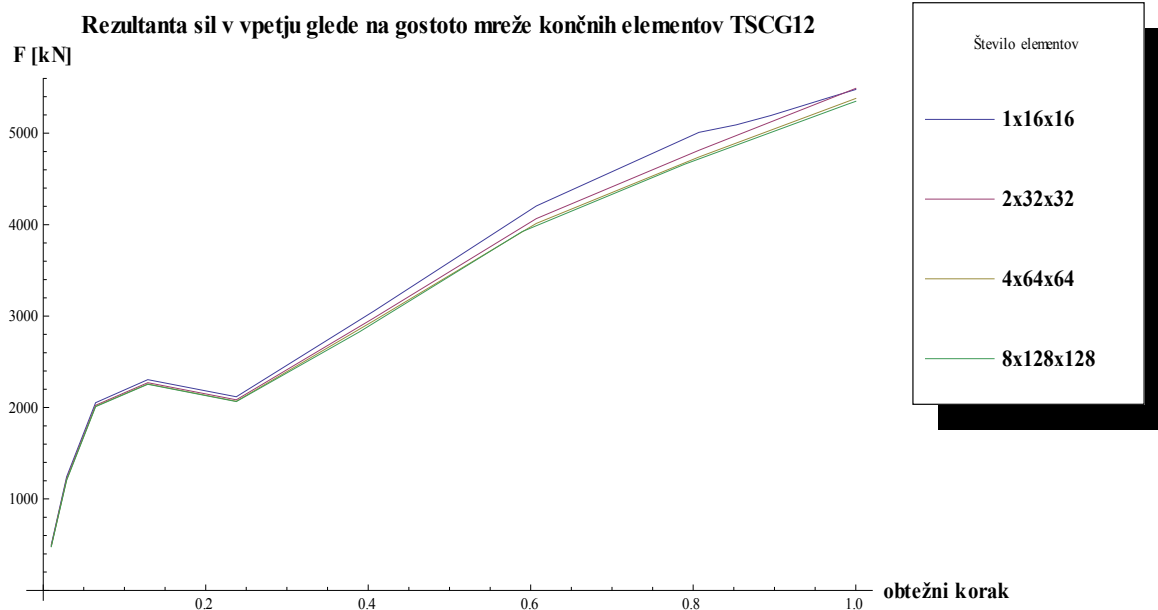
Ko primerjamo Sliki 26 in 27, ki za elementa TSCG12 in H1 prikazujeta grafa sila-pomik za vse gostote mrež končnih elementov, opazimo, da dobi TSCG12 pri najredkejši mreži rešitve zelo blizu rešitev pri gosti mreži, H1 pa rešitev z zgoščanjem mreže izboljša za 42%.



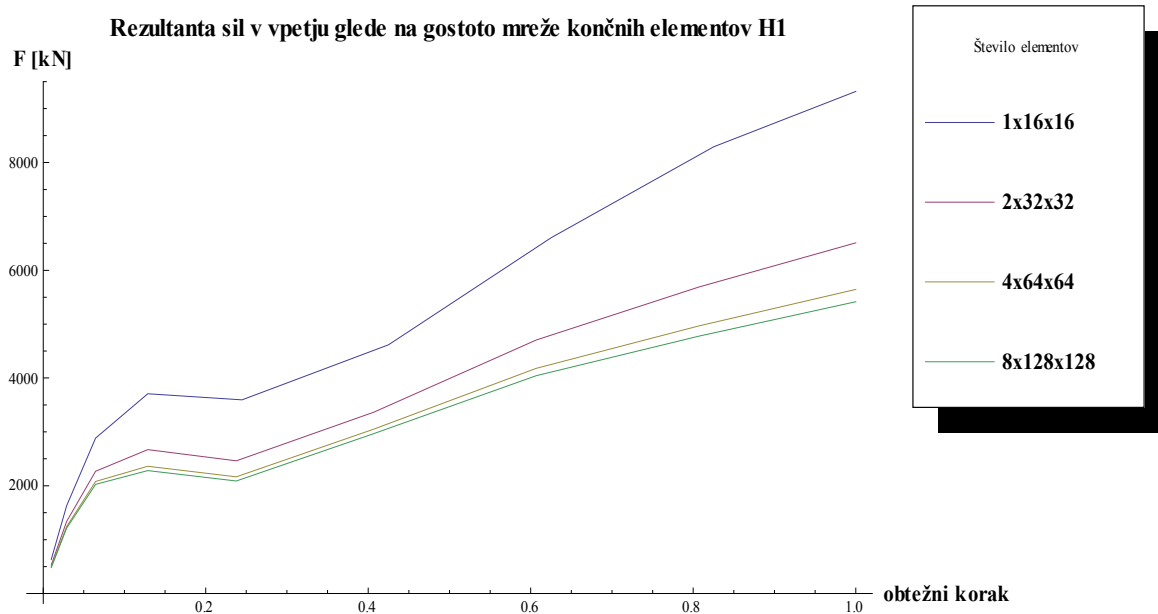
Slika 24: Sfera: Končni rezultat TSCG12 pri mreži 1 x 16 x 16.



Slika 25: Sfera: Primerjava grafov sila-pomik za mrežo 1x 16 x 16 med vsemi testnimi elementi



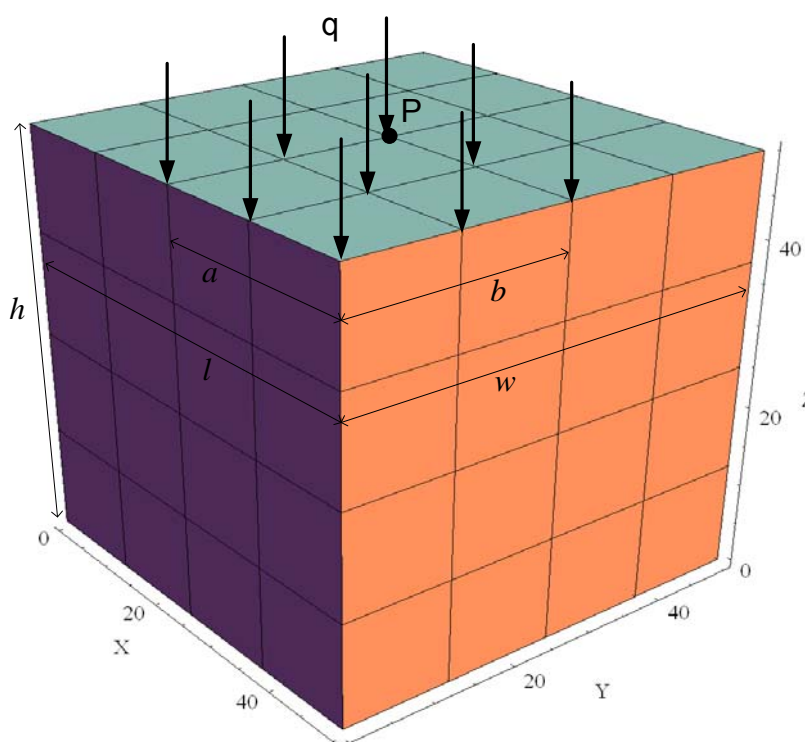
Slika 26: Sfera: Graf sila-pomik za vse gostote mrež za končni element TSCG12



Slika 27: Sfera: Graf sila-pomik za vse gostote mrež za končni element H1

6.9 Nestisljiv kvader

Kvader iz skoraj nestisljivega materiala dolžine $2l$, širine $2w$ in višine h je po sredinski četrtini zgornje ploskve obremenjen z enakomerno porazdeljeno površinsko obtežbo q . Vsa vozlišča na zgornji ploskvi so nepomična v smeri X in Y , vsa vozlišča na spodnji ploskvi pa so nepomična v smeri osi Z . Upoštevamo simetrijo, zato je diskretizirana le četrtina kvadra. Robni pogoji, ki sledijo iz upoštevanja simetrije, so s tem določeni: v ravnini $X = 0.5l$ so vozlišča podprta v smeri osi X , vozlišča v ravnini $Y = 0.5w$ so podprta v smeri osi Y . Materialni, geometrijski in obtežbeni podatki so podani na Sliki 28. Uporabljen je material vrste gume. Uporabimo štiri različno goste mreže z $4 \cdot 2^k \times 4 \cdot 2^k \times 4 \cdot 2^k$, $k = 0, 1, 2, 3$, končnimi elementi za topologijo H1. Za elemente O1, O2 in H2 je število elementov v posamezni mreži izbrano tako, da čim bolj sovпада s številom prostostnih stopenj, ki jih ima element H1. Med testnimi končnimi elementi primerjamo konvergenco pomika točke P v smeri osi Z , w_p , kar prikazuje Slika 30. Na Sliki 29 je prikazana deformirana oblika elementa TSCG12 pri mreži z $16 \times 16 \times 16$ elementi. Preglednica 7 prikazuje velikost pomika w_p v odvisnosti od števila prostostnih stopenj za vse testne elemente. Ponovno O1 in H1 blokirata, ostali elementi hitro konvergirajo k isti rešitvi.



Geometrija

$h = 50 \text{ mm}$
 $w = 50 \text{ mm}$
 $l = 50 \text{ mm}$
 $a = 25 \text{ mm}$
 $b = 25 \text{ mm}$

Material

$K = 501 \text{ MPa}$
 $\mu = 1.61148 \text{ MPa}$
 $\beta = -2$

Obtežba

$q = 3 \text{ MPa}$

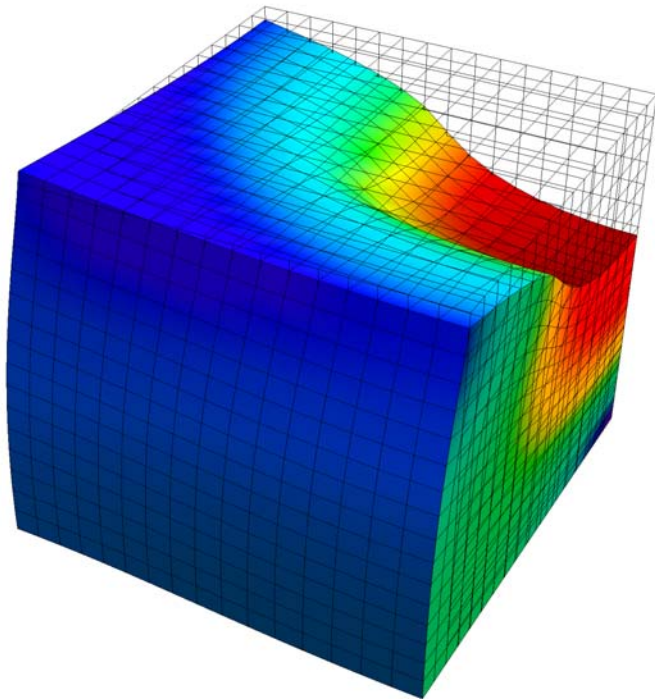
Podpore

$Z = 0: u_z = 0$
 $Z = h: u_x = u_y = 0$
 $X = l: u_x = 0$
 $Y = w: u_y = 0$

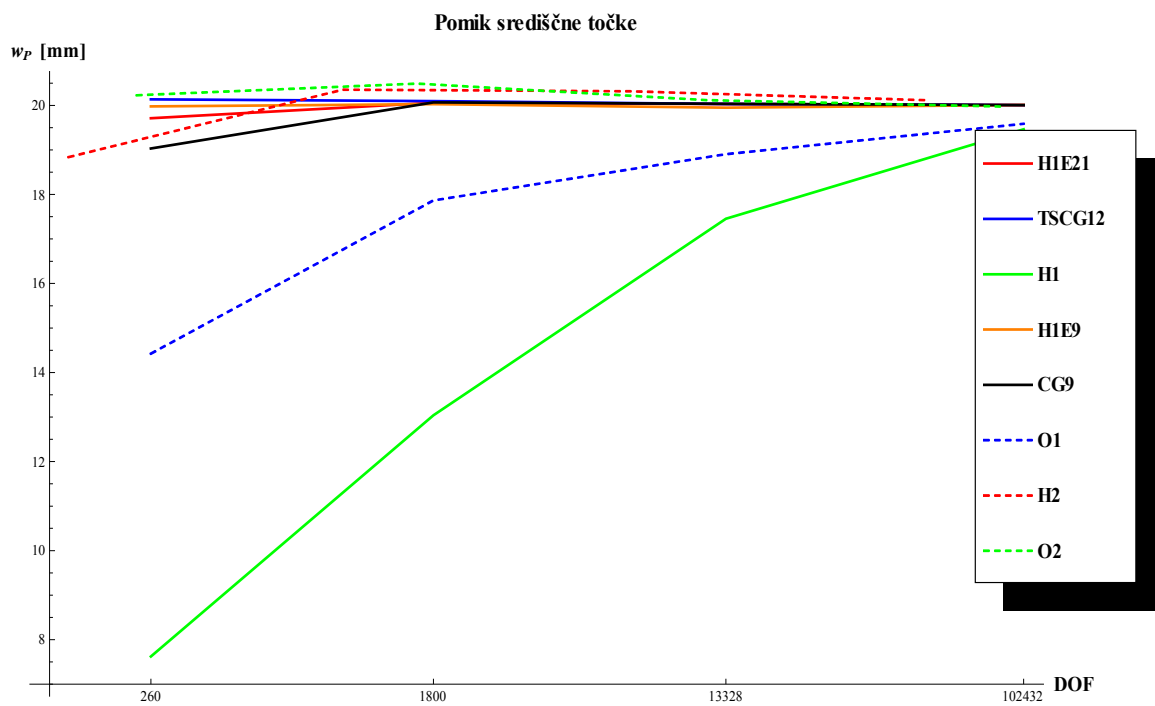
Slika 28: Geometrijski, obtežbeni in materialni podatki za nestisljiv kvader

DOF	TSCG12	H1	H1E9	H1CG9	O1	H1E21
260	20.1379	7.6198	19.9773	19.0326	14.424	19.7107
1800	20.0974	13.0375	20.026	20.066	17.8659	20.0582
13 328	20.0303	17.4522	19.95	20.0336	18.905	20.0297
102 432	20.0069	19.4629	20.0107	20.0072	19.587	20.0069
DOF	H2					
148	18.8387					
968	20.3535					
6928	20.3175					
52 256	20.1182					
DOF	O2					
236	20.2283					
1608	20.4907					
11 792	20.1177					
90 144	19.973					

Preglednica 7: Nestisljiv kvader: vertikalni pomik točke P, w_p [mm], glede na število prostostnih stopenj za vse testne elemente



Slika 29: Nestisljiv kvader: Deformacijska oblika TSCG12 pri mreži 16 x 16 x 16

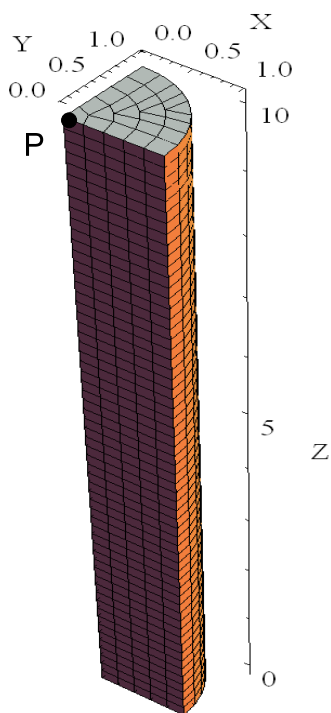
Slika 30: Nestisljiv kvader: vertikalni pomik točke P, w_p [mm], glede na število prostostnih stopenj za vse testne elemente

6.10 Test stabilnosti končnih elementov

Obravnavamo dva različna testa stabilnosti končnih elementov. Palici iz stisljivega materiala in kocki iz nestisljivega materiala vsilimo pomik na zgornji ploskvi in s tem homogeno napetostno in deformacijsko stanje. Pri obeh testih iščemo minimalen pomik w_{kr} , pri katerem se pojavijo fizikalne geometrijske nestabilnosti. Ta pojav bi morala označiti prva negativna lastna vrednost tangentne togostne matrike, vendar veliko formulacij končnih elementov pokaže nefizikalne deformacijske oblike (hourglassing) preden se pojavi geometrijska nestabilnost. Zato lahko ta test uporabimo za ugotavljanje ali neka formulacija končnih elementov zazna pravilne fizikalne točke nestabilnosti ali pa pokaže nefizikalne deformacijske oblike.

Pri prvem testu obremenjujemo palico višine v in radija R , s pomikom v smeri osi $-Z$, ki povzroči tlačne napetosti. Upoštevamo simetrijo, zato diskretiziramo le četrtino valja in določimo temu ustrezne robne pogoje. Vozlišča v ravnini $X=0$ so nepomična v X smeri, vozlišča v ravnini $Y=0$, pa so nepomična v Y smeri. Vozlišča na spodnji ploskvi so podprta v smeri Z . Geometrijski in materialni podatki so podani na Sliki 31. Uporabimo dve različno gosti mreži z $3 \cdot 2^k \times 3 \cdot 2^k \times 30 \cdot 2^k$, $k = 0,1$, končnimi elementi za topologijo H1. Za elemente O1, O2 in H2 je število elementov v posamezni mreži izbrano tako, da čim bolj sovпада s številom prostostnih stopenj, ki jih ima element H1. Valj obremenjujemo s povečevanjem vsiljenega pomika na zgornji ploskvi dokler determinanta tangentne togostne matrike ne postane nepozitivna. Pri tem pomiku izrišemo lastne vektorje in sklepamo ali je nestabilnost fizikalna, torej posledica geometrijske nestabilnosti, ali pa je posledica nefizikalnih deformacijskih oblik, kar pomeni nestabilnost formulacije končnih elementov. Preglednica 8 predstavlja velikost kritičnih pomikov točke P, w_{kr} , vseh testnih elementov in število valov pri lastni deformacijski obliki palice, pripadajoči lastni vrednosti tangentne matrike pri kritičnem pomiku, glede na število prostostnih stopenj. Deformacijske oblike, ki pripadajo prvim trem lastnim vektorjem elementov TSCG12 in H1E9 pri mreži $3 \times 3 \times 30$, so prikazane na Sliki 32 in Sliki 33. Element H1E9 pokaže nefizikalne deformacijske oblike, kar se vidi na Sliki 33. Nefizikalne deformacijske oblike pokaže tudi H1E21. Ostali testni elementi zaznajo točke nestabilnosti pravilno. Pri gostejši mreži postane obnašanje elementov mehkejše, kar se

izrazi z večjim številom valov pri deformirani obliki, ki ustreza lastnim vektorjem tangentne matrike pri kritičnem pomiku. O1 in H1 sta toga, kar se izrazi z nižjim številom valov pri deformirani obliki. Razen elementa H1E9 in H1E21, ki pokažeta nefizikalne nestabilnosti, vsi elementi dosežejo kritični pomik reda velikosti polovice višine valja.



Geometrija

$$v = 10 \text{ mm}$$

$$R = 1 \text{ mm}$$

Material

$$K = 277.7778 \text{ MPa}$$

$$\mu = 92.59259 \text{ MPa}$$

$$\beta = -2$$

Podpore

$$Z = 0: u_z = 0$$

$$Y = 0: u_y = 0$$

$$X = 0: u_x = 0$$

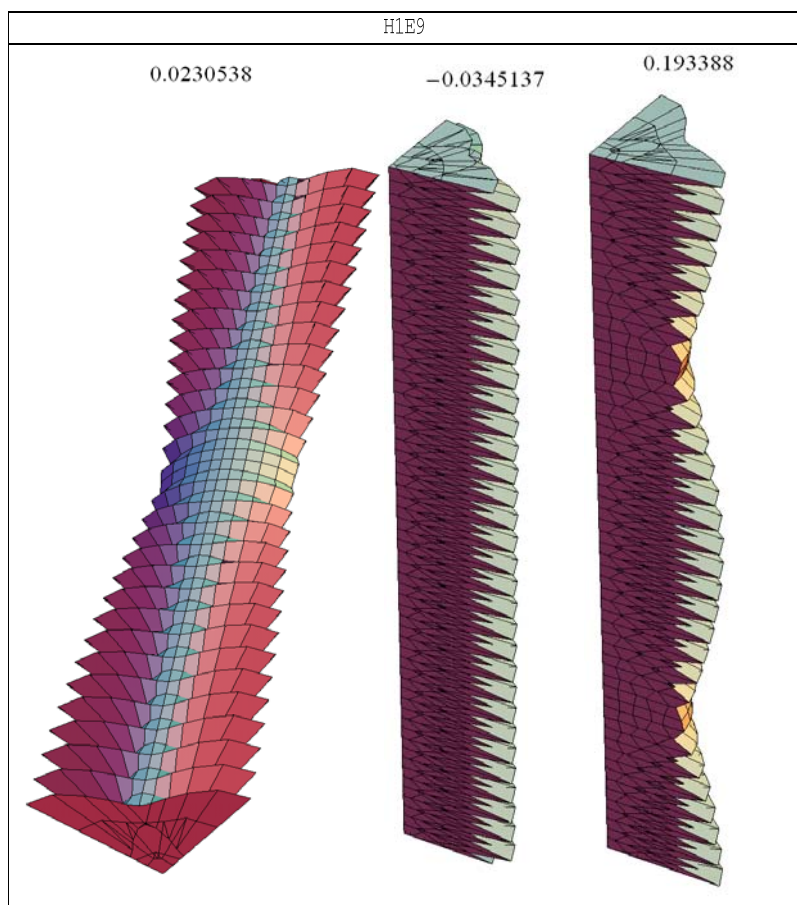
Slika 31: Geometrijski in materialni podatki za test stabilnosti končnega elementa s palico

	DOF	TSCG12	H1	H1E9	H1CG9	O1	H1E21
Kritični pomik	5784 41019	5.097 4.83367	5.15552 4.86293	3.14839 3.05285	5.097 4.83367	5.39544 4.95656	4.78101 4.59961
Število valov	5784 41019	4 4.5	3.5 4.5	nefiz. def. oblike nefiz. def. oblike	4 4.5	3 4	nefiz. def. oblike nefiz. def. oblike
	DOF	H2					
Kritični pomik	4406 30467	4.81612 4.71079					
Število valov	4406 30467	4.5 5.5					
	DOF	O2					
Kritični pomik	7205 51383	4.90975 4.72834					
Število valov	7205 51383	4 5					

Preglednica 8: Stabilnost končnih elementov pri testu s palico: Kritični pomik w_{kr} [mm] in število valov pri končni deformirani legi glede na število prostostnih stopenj



Slika 32: Stabilnost končnih elementov pri testu s palico: Prve tri lastne oblike pripadajoče prvim trem lastnim vektorjem tangentne matrike za TSCG12 pri mreži 6 x 6 x 60



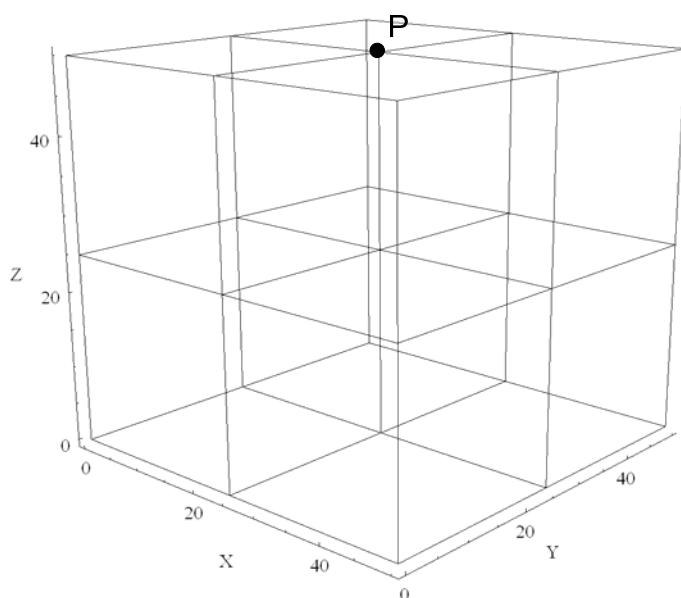
Slika 33: Stabilnost končnih elementov pri testu s palico: Prve tri lastne oblike pripadajoče prvim trem lastnim vektorjem tangentne matrike za H1E9 pri mreži $6 \times 6 \times 60$. Očiten pojav nefizikalnih lastnih oblik.

Pri drugem testu obremenjujemo kocko iz nestisljivega materiala s stranico a s pomikom v smeri osi $-Z$, ki povzroči tlačne napetosti. Vsa vozlišča na spodnji ploskvi so nepomična v smeri osi Z , tista na koordinati $X=a/2$ so nepomična še v smeri osi X , točka $(a/2, a/2, 0)$ je nepomična v vse smeri. Geometrijski in materialni podatki so podani na Sliki 34. Uporabimo tri različno goste mreže z $2 \cdot 2^k \times 2 \cdot 2^k \times 2 \cdot 2^k$, $k = 0, 1, 2$, končnimi elementi za topologijo H1. Za elemente O1, O2 in H2 je število elementov v posamezni mreži izbrano tako, da čim bolj sovпада s številom prostostnih stopenj, ki jih ima element H1. Kocko obremenjujemo s povečevanjem vsiljenega pomika na zgornji ploskvi dokler determinanta tangentne togostne matrike ne postane nepozitivna. Pri tem pomiku izrišemo lastne vektorje tangentne matrike in sklepamo ali je nestabilnost fizikalna, torej posledica geometrijskih nestabilnosti, ali pa je

posledica nefizikalnih deformacijskih oblik. Med elementi primerjamo pomik točke P na sredini zgornje ploskve. Preglednica 9 predstavlja velikost kritičnih pomikov točke P, w_{kr} , vseh testnih elementov glede na število prostostnih stopenj.

Na Sliki 35 je izrisan graf kritičnih pomikov končnih elementov v odvisnosti od števila prostostnih stopenj. Opazimo, da O1 blokira, saj ima veliko večji kritični pomik od ostalih. H1E21 in H1E9 pokažeta nefizikalne deformacijske oblike in imata, v primerjavi z ostalimi elementi, majhen kritični pomik. Ostali elementi konvergirajo k isti rešitvi. Elementi z neodvisnimi deformacijami so mehkejši kot H2 in O2 pri tem testu.

Sliki 36 in 37 prikazujeta deformacijske oblike pripadajoče prvim lastnim vektorjem tangentne togostne matrike pri kritičnem pomiku, v odvisnosti od gostote mreže končnih elementov. Elementa H1E9 in H1E21 pokažeta nefizikalne deformacijske oblike, ki se v svoji tipični pojavnosti obliki peščenih ur vidijo na Sliki 36. Pri ostalih testnih elementih so določene fizikalne točke nestabilnosti.



Geometrija

$$a = 50 \text{ mm}$$

Material

$$K = 5 \text{ MPa}$$

$$\mu = 1.6 \text{ MPa}$$

$$\beta = -2$$

Podpore

$$Z = 0: u_z = 0$$

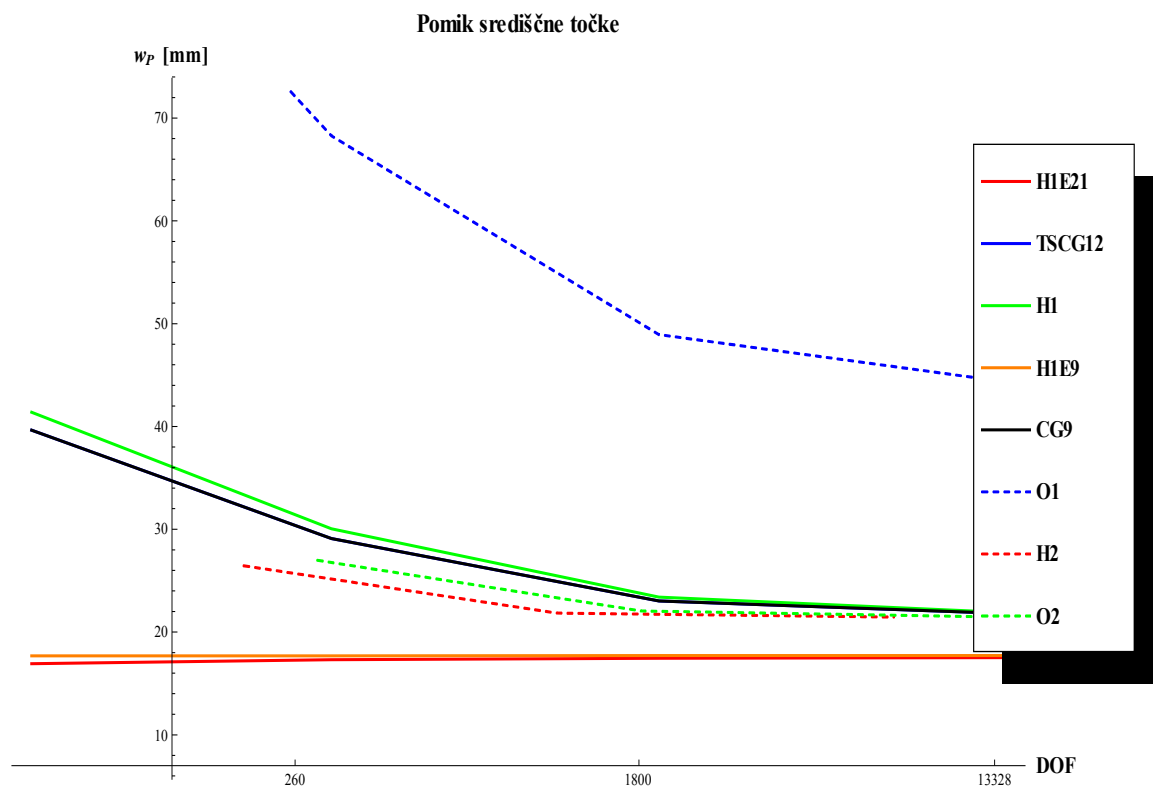
$$Z = 0 \wedge X = a/2: u_x = 0$$

$$(a/2, a/2, 0): u_y = 0$$

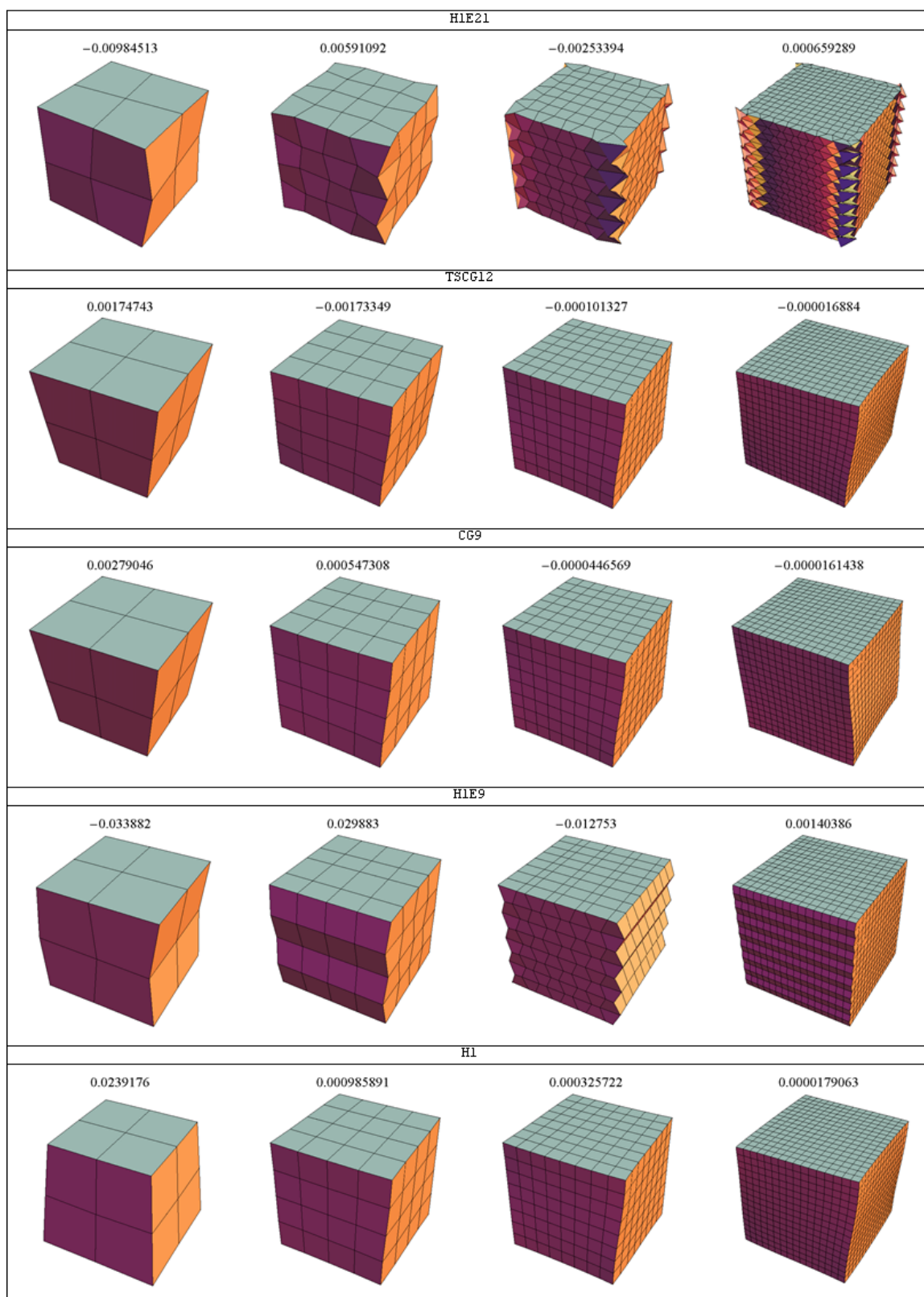
Slika 34: Geometrijski in materialni podatki za test stabilnosti končnih elementov s kocko

DOF	TSCG12	H1	H1E9	H1CG9	O1	H1E21
59	39.6365	41.3751	17.6881	39.6365	99.9592	16.9164
319	29.0865	30.0494	17.6881	29.0865	68.2683	17.3023
2015	23.0311	23.3873	17.7178	23.0311	48.9347	17.4507
14143	21.8141	21.9032	17.7178	21.8141	44.352	17.5101
DOF	H2					
195	26.4447					
1135	21.8438					
7551	21.4579					
DOF	O2					
295	26.979					
1823	22.0516					
12607	21.4876					

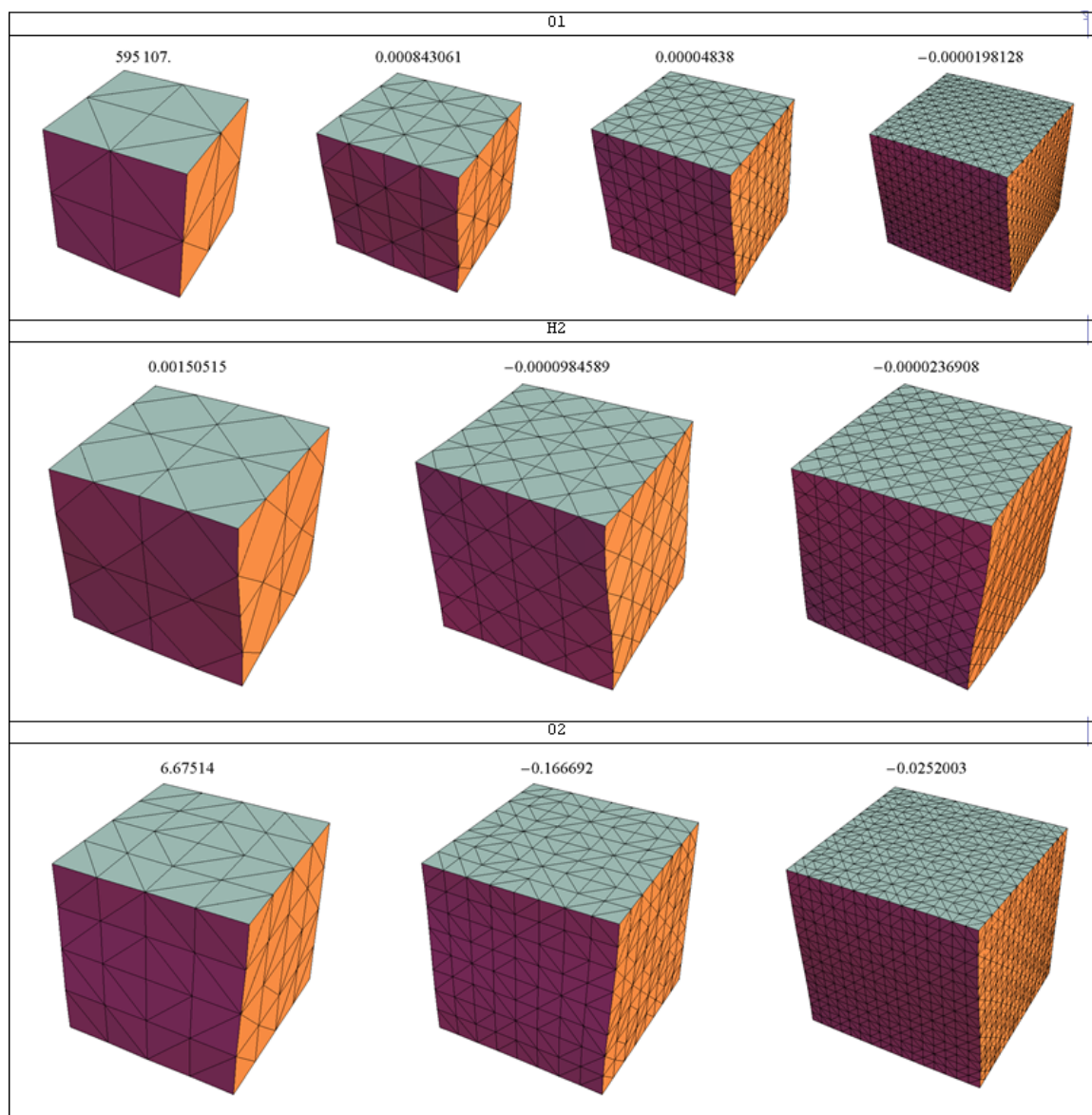
Preglednica 9: Test stabilnosti končnih elementov s kocko: Kritični pomik središčne točke glede na število prostostnih stopenj



Slika 35: Test stabilnosti končnih elementov s kocko: Kritični pomik središčne točke glede na število prostostnih stopenj



Slika 36: Test stabilnosti končnih elementov s kocko: Rezultati testa za elemente H1E21, TSCG12, CG9, H1E9 in H1



Slika 37: Test stabilnosti končnih elementov s kocko: Rezultati testa za elemente O1, H2 in O2

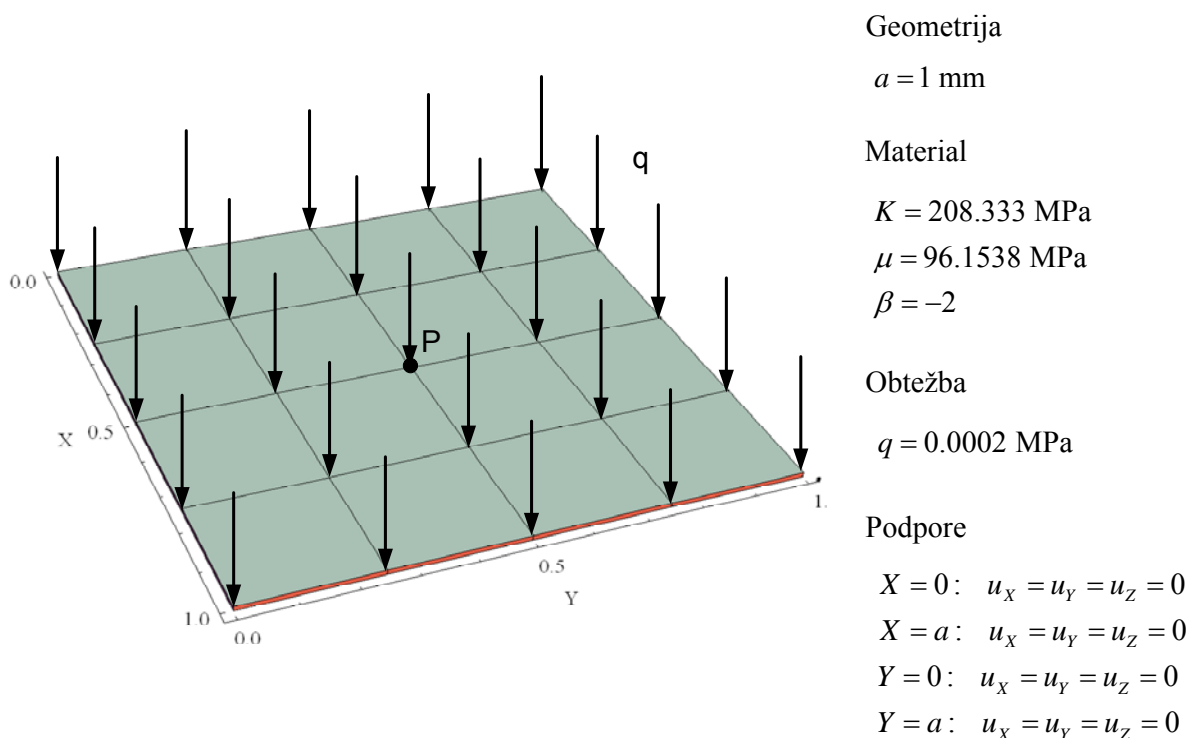
6.11 Togo vpeta membrana

Kvadratno membrano debeline h in s stranico dolžine a toga vpemo na vseh straneh. V smeri osi $-Z$ jo enakomerno obremenimo z obtežbo $q = 0.0002$ MPa. Geometrijski in materialni podatki so podani na Sliki 38. Uporabimo dve različni gosti mreži z $4 \cdot 2^k \times 4 \cdot 2^k \times 1$, $k = 0, 2$, končnimi elementi za topologijo H1. Za elemente O1, O2 in H2 je število elementov v posamezni mreži izbrano tako, da čim bolj sovпада s številom prostostnih

stopenj, ki jih ima element H1. Uporabimo deset različnih debelin membrane, tako da je vitkost a/h med 100 in 1000, s korakom po 100. Med elementi in teorijo primerjamo velikost pomika pri linearni analizi, v smeri Z, na sredini membrane (točka P), glede na vitkost (Slika 39). Ti podatki so zbrani tudi v Preglednici 10 oziroma Preglednici 11. Po pričakovanjih se le TSCG12 in H1CG21 približata teoretičnemu Eulerjevemu upogibku v sredini membrane, ki je izračunan po formuli:

$$w_0 = -0.00126 \cdot q \cdot a^2 / D$$
$$D = \frac{E \cdot a^3}{12 \left(1 - \frac{a^2}{h^2}\right)}; \quad E \dots \text{elastični modul} \quad (6.1)$$

Ostali elementi močno blokirajo, njihov upogibek je minimalen.



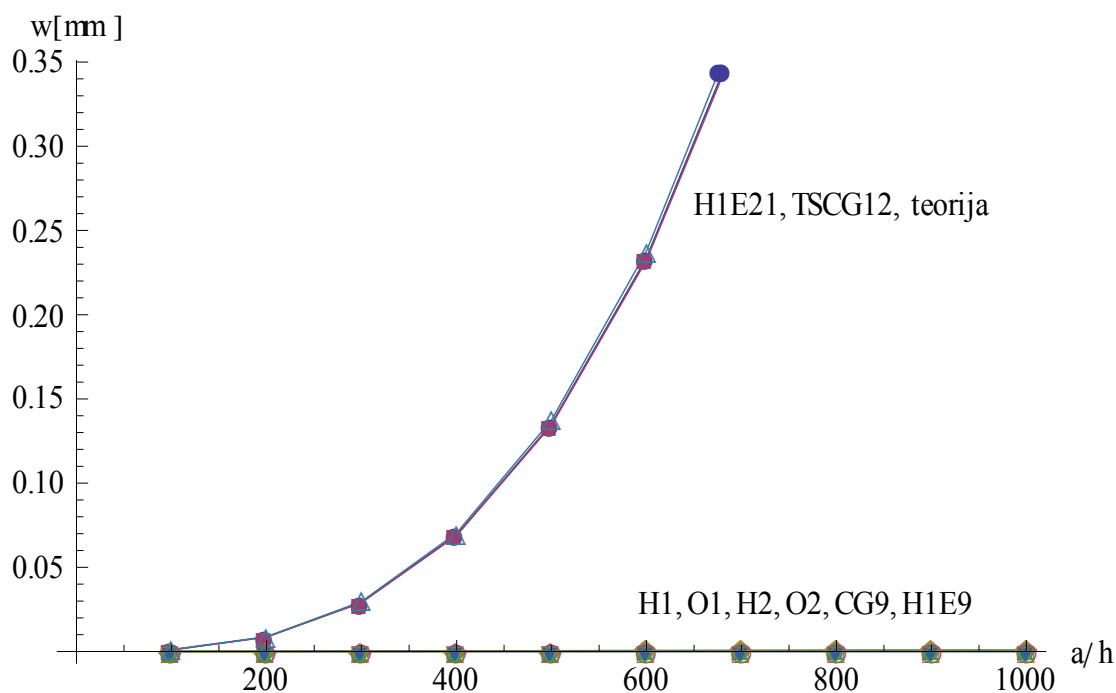
Slika 38: Geometrijski, obtežbeni in materialni podatki za tanko ploščo

	100	200	300	400	500
teorija	0.00110074	0.00880589	0.0297199	0.0704471	0.137592
H1E21	0.00108433	0.00866523	0.0292393	0.069303	0.135353
TSCG12	0.00107783	0.0086132	0.0290636	0.0688867	0.13454
CG9	0.0000894962	0.000190746	0.000289646	0.000387869	0.000485811
H1E9	0.0000894962	0.000190746	0.000289646	0.000387869	0.000485811
H1	7.36752×10^{-6}	0.0000147937	0.000022207	0.000029617	0.0000370257
O1	2.88313×10^{-8}	1.44683×10^{-8}	9.65199×10^{-9}	7.24068×10^{-9}	5.79317×10^{-9}
H2	0.0000345286	0.0000694206	0.000104233	0.000139024	0.000173808
O2	0.0000222159	0.0000445364	0.0000668338	0.0000891253	0.000111415

Preglednica 10: Tanka plošča: Upogibek pri linearni analizi na sredini plošče (v točki P v [mm]), glede na vitkost plošče od 100 do 500

	600	700	800	900	1000
teorija	0.237759	0.377552	0.563577	0.802437	1.10074
H1E21	0.233886	0.371398	0.554386	0.789346	1.08278
TSCG12	0.232481	0.369167	0.551056	0.784606	1.07627
CG9	0.00058361	0.000681328	0.000778994	0.000876626	0.000974233
H1E9	0.00058361	0.000681328	0.000778994	0.000876626	0.000974233
H1	0.0000444338	0.0000518414	0.0000592488	0.0000666561	0.0000740633
O1	2.88313×10^{-8}	1.44683×10^{-8}	9.65199×10^{-9}	7.24068×10^{-9}	5.79317×10^{-9}
H2	0.000208587	0.000243364	0.00027814	0.000312915	0.000347689
O2	0.0000222159	0.0000445364	0.0000668338	0.0000891253	0.000111415

Preglednica 11: Tanka plošča: Upogibek pri linearni analizi na sredini plošče (v točki P v [mm]), glede na vitkost plošče od 600 do 1000



Slika 39: Tanka plošča: Upogibek na sredini plošče (v točki P v [mm]) pri linearni analizi v odvisnosti od vitkosti plošče

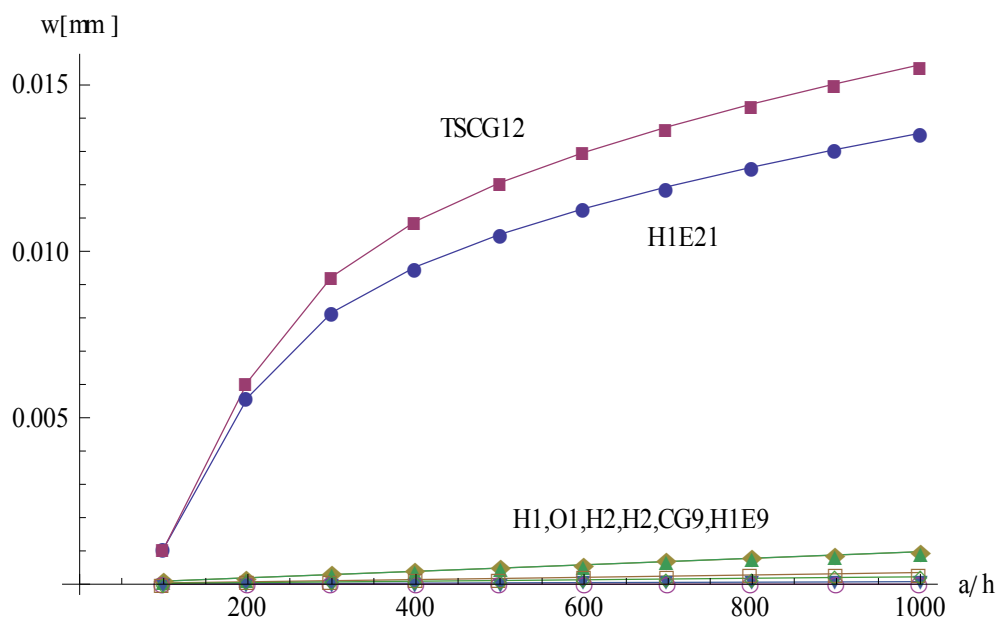
Po točni kinematiki za nelinearen materialni zakon pri mreži s $4 \times 4 \times 4$ končnimi elementi dobimo naslednje rezultate za testne elemente:

	100	200	300	400	500
TSCG12	0.00107438	0.00609075	0.00924034	0.0109082	0.0120618
CG9	0.0000894961	0.000190745	0.000289641	0.000387855	0.000485784
H1E9	0.000089496	0.000190744	0.000289637	0.000387848	0.000485769
H1	7.36752×10^{-6}	0.0000147937	0.000022207	0.000029617	0.0000370257
O1	2.88313×10^{-8}	1.44683×10^{-8}	9.65199×10^{-9}	7.24068×10^{-9}	5.79317×10^{-9}
H2	0.0000345286	0.0000694206	0.000104232	0.000139024	0.000173808
O2	0.0000222159	0.0000445364	0.0000668338	0.0000891254	0.000111415

Preglednica 12: Tanka plošča: Velikost pomikov v točki P [mm] po točni kinematiki, glede na vitkost plošče od 100 do 500

	600	700	800	900	1000
H1E21	0.0112848	0.0119466	0.0125316	0.0130605	0.0135461
TSCG12	0.0129745	0.0137477	0.0144284	0.0150423	0.0156049
CG9	0.000583563	0.000681253	0.000778882	0.000876465	0.000974013
H1E9	0.000583537	0.000681211	0.00077882	0.000876377	0.000973892
H1	0.0000444338	0.0000518414	0.0000592488	0.0000666561	0.0000740633
O1	2.88313×10^{-8}	1.44683×10^{-8}	9.65199×10^{-9}	7.24068×10^{-9}	5.79317×10^{-9}
H2	0.000208587	0.000243364	0.00027814	0.000312914	0.000347688
O2	0.0000222159	0.0000445364	0.0000668338	0.0000891254	0.000111415

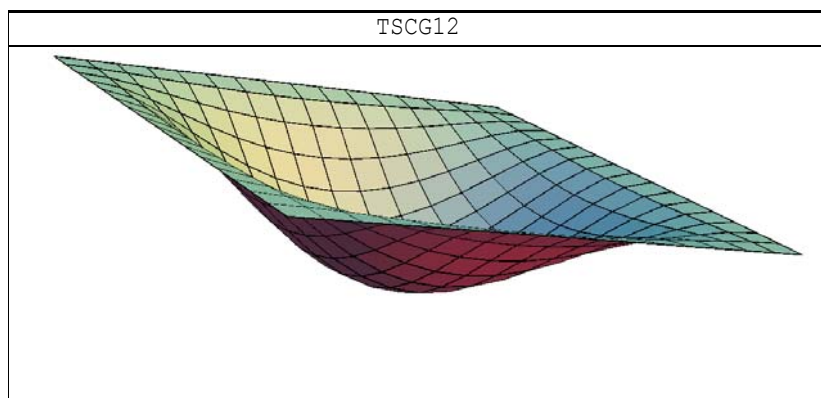
Preglednica 13: Tanka plošča: Velikost pomikov v točki P [mm] po točni kinematiki, glede na vitkost plošče od 600 do 1000



Slika 40: Tanka plošča: Velikost pomikov v točki P [mm] po točni kinematiki v odvisnosti od vitkosti plošče

Izkaže se, da se z zgoščanjem mreže končnih elementov grafi na zgornjih Slikah 39 in 40 skoraj ne spremenijo, torej razmerja med rezultati elementov se ohranijo.

Slika 41 prikazuje deformirano obliko membrane diskretizirane z elementom TSCG12 pri mreži $16 \times 16 \times 16$. Vsi elementi imajo enako deformirano obliko le, v primerjavi z H1E21 in TSCG12, je upogibek ostalih elementov neznatno.



Slika 41: Tanka plošča: Deformirana oblika TSCG12

6.12 Testi za elasto - plastične formulacije končnih elementov

Elasto - plastični končni elementi za velike deformacije so bili izpeljani v skladu s formulacijo elementa J2 (Simo in Hughes 1998) z upoštevanjem elastične funkcije deformacijske energije oblike:

$$W = \frac{1}{2} K \left(\frac{1}{2} (\det(\mathbf{b}_e) - 1) - \frac{1}{2} \log(\det(\mathbf{b}_e)) \right) + \frac{1}{2} \mu \left((\det(\mathbf{b}_e))^{\frac{1}{3}} \text{tr}(\mathbf{b}_e) - 3 \right)$$

kjer (6.2)

$$\mathbf{b}_e := \mathbf{F} \mathbf{C}_p^{-1} \mathbf{F}^T$$

\mathbf{C}_p^{-1} ... inverzni plastični tenzor

in funkcije tečenja v obliki:

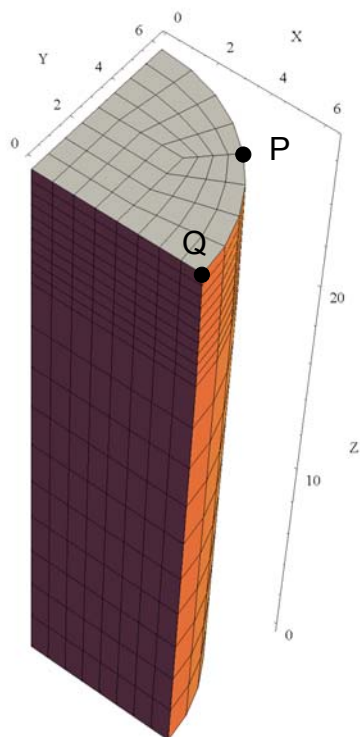
$$f = \sigma_{MISES} - \sigma_Y = 0$$

kjer (6.3)

$$\sigma_Y = \sigma_0 + k \cdot \lambda + (\sigma_{Inf} - \sigma_0) \cdot (1 - e^{-\delta \cdot \lambda})$$

V zgornji enačbi (6.3) je σ_{MISES} Missesova napetost, σ_0 meja tečenja, σ_{Inf} natezna trdnost, k koeficient utrjevanja, λ plastični množitelj in δ koeficient saturacije.

Obravnavamo dva različna testa obnašanja testnih končnih elementov za elasto - plastičen material pri velikih deformacijah. Pri prvem testu raztezamo palico višine l in radija R , za pomik w , ki preseže mejo elastičnih deformacij. Pomik nanašamo enakomerno na zgornjo ploskev palice. Da sprožimo plastično kontrakcijo na vrhu palice, jo na $0.8l$ začnemo enakomerno ožiti proti vrhu, tako da je radij na vrhu ožji za δR . Upoštevamo simetrijo, zato diskretiziramo le četrtino valja in določimo temu ustrezne robne pogoje. Vozlišča v ravnini $X=0$ so nepomična v X smeri, vozlišča v ravnini $Y=0$ so nepomična v Y smeri. Vozlišča na spodnji ploskvi so podprta v smeri Z . Mreža končnih elementov sestoji iz petih delov, tako se izognemo preveliki distorziji končnih elementov in lahko modeliramo zmanjšanje radija palice. Geometrijski, materialni in obtežbeni podatki so podani na Sliki 42. Mreža končnih elementov je zgoščena na zadnjih $0.2l$ valja, kjer se radij oži, kar pomeni, da je vsaka od petih mrež, ki sestavljajo celoten valj, diskretizirana s $4 \times 4 \times 10$ končnimi elementi. Na prvih $0.8l$ imamo tako $8 \times 8 \times 10$ elementov, enako tudi na zadnjih $0.2l$.



$$l = 26.667 \text{ mm}$$

$$R = 6.413 \text{ mm}$$

$$\delta R = 0.07 \text{ mm}$$

Material

$$K = 17500 \text{ MPa}$$

$$\mu = 8076.92 \text{ MPa}$$

$$\beta = -2$$

$$\sigma_0 = 0.45 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{Inf} = 0.715 \text{ MPa}$$

$$k = 0.12924$$

$$\delta = 16.93$$

Robni pogoji

$$X = 0: u_x = 0$$

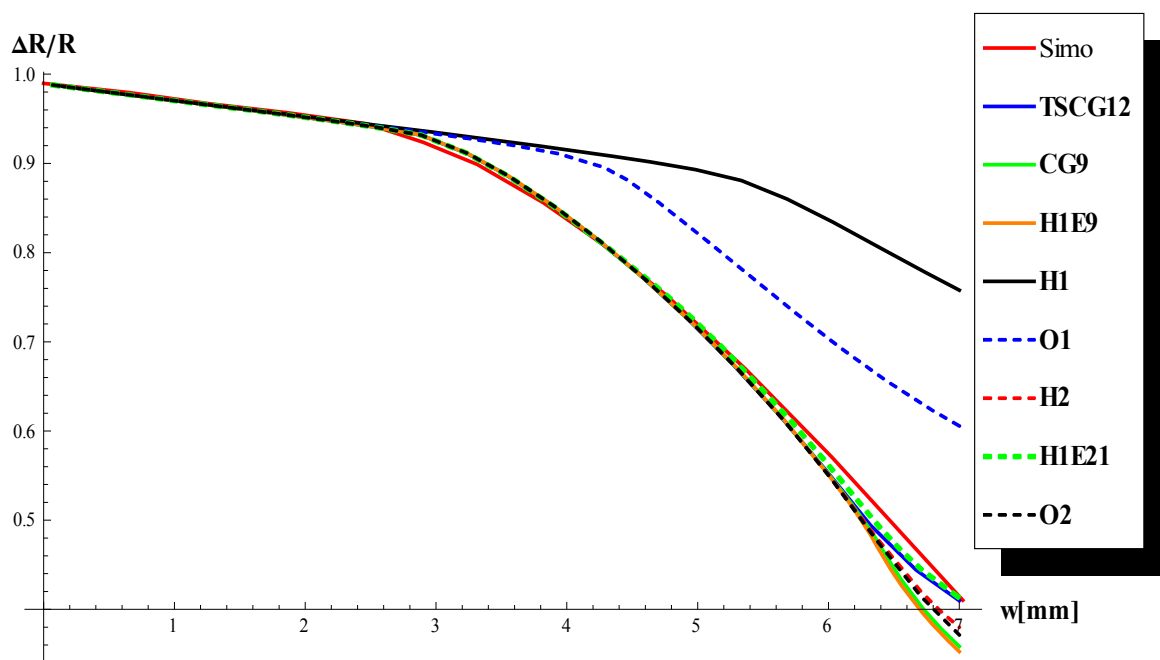
$$Y = 0: u_y = 0$$

$$Z = 0: u_z = 0$$

$$Z = l: u_z = 7 \text{ mm}$$

Slika 42: Geometrijski, obtežbeni in materialni podatki za natezni test s palico

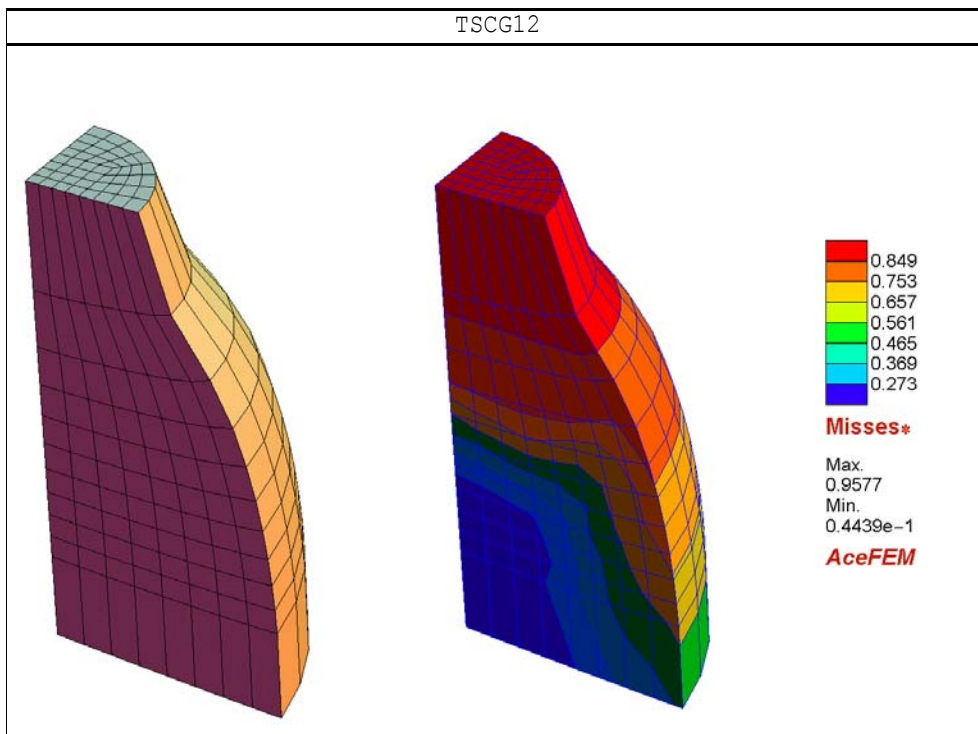
Med elementi primerjamo spremembo radija ΔR , ki jo v našem testu določimo tako, da radiju R prištejemo povprečno vrednost pomika točke Q v smeri X in pomika točke P v smeri X. Preglednica 14 prikazuje relativno spremembo radija $\Delta R / R$ po končanem nanašanju obtežbe za vse testne elemente. Za primerjavo so uporabljeni rezultati istega testa iz knjige Computational Inelasticity avtorjev Simo in Hughes (1998). Med testnimi elementi primerjamo vrednost relativne spremembe radija glede na raztezek palice. Rezultati so na Sliki 43. Opazimo, da H1 in O1 blokirata. Ostali elementi se deformirajo podobno. CG9, H1E9, H2 in O2 so malenkost mehkejši od ostalih. Deformacijske oblike in Missesove napetosti pri končnem pomiku w so izpisane na Sliki 44 za TSCG12, katerega deformacijska oblika je enaka še za elemente H1E21, H2 in O2, na Sliki 45 za H1E9, katerega deformacijska oblika je enaka še za element CG9, na Sliki 46 za O1 in Sliki 47 za H1. H1E9 in CG9 pokažeta nefizikalne deformacijske oblike z negladko okrogolino zunanje površine valja.



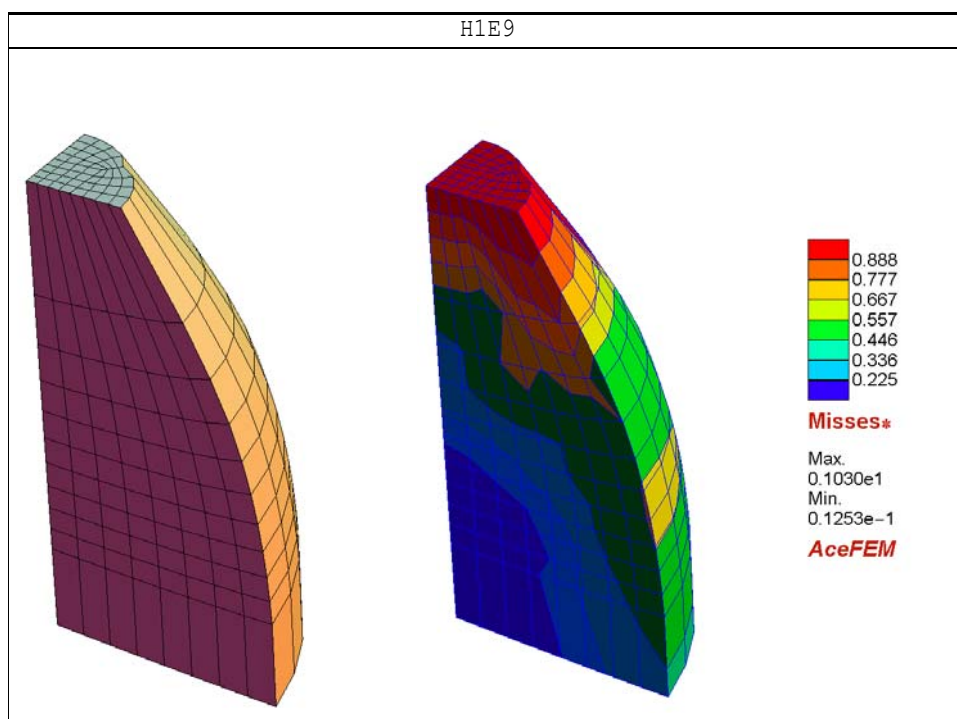
Slika 43: Natezni test s palico: Relativna sprememba radija v odvisnosti od raztezka palice

	$\Delta R/R$
Simo/Hughes	0.410309
TSCG12	0.409749
H1E21	0.413135
CG9	0.358502
H1E9	0.352818
H1	0.757921
O1	0.605747
H2	0.379945
O2	0.371416

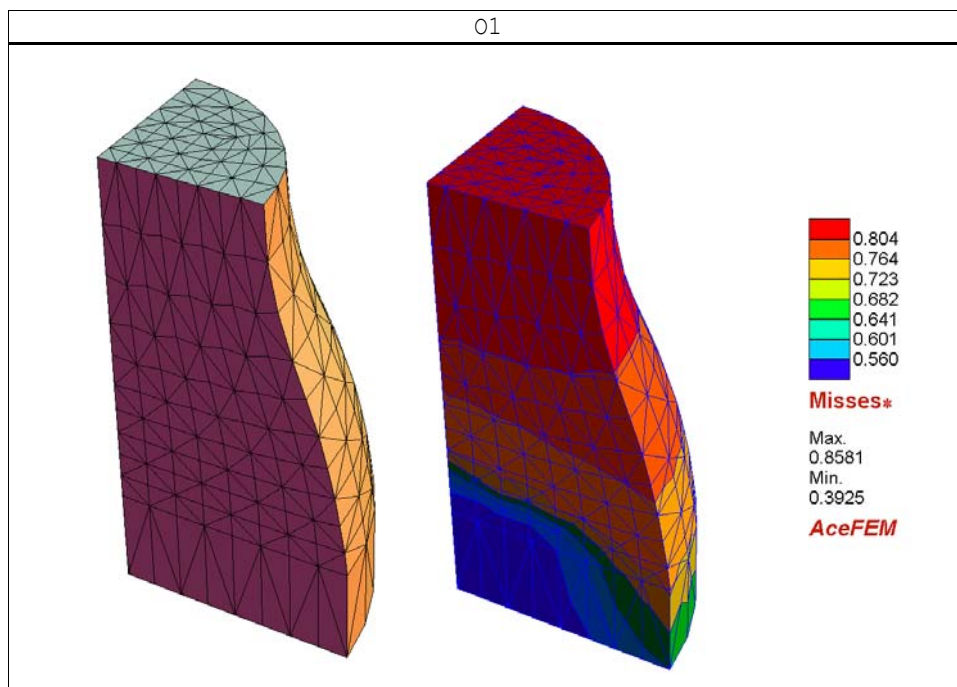
Preglednica 14: Natezni test s palico: Relativna sprememba radija ob koncu deformiranja



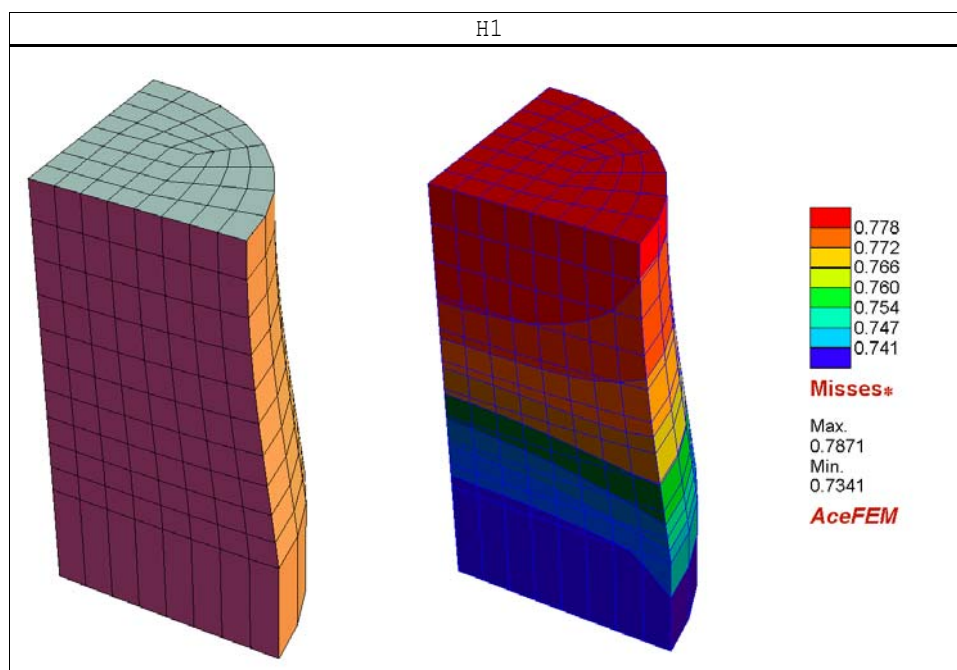
Slika 44: Natezni test s palico: Končna deformacijska oblika in pripadajoče Missesove napetosti za TSCG12



Slika 45: Natezni test s palico: Končna deformacijska oblika in pripadajoče Missesove napetosti za H1E9



Slika 46: Natezni test s palico: Končna deformacijska oblika in pripadajoče Missesove napetosti za O1

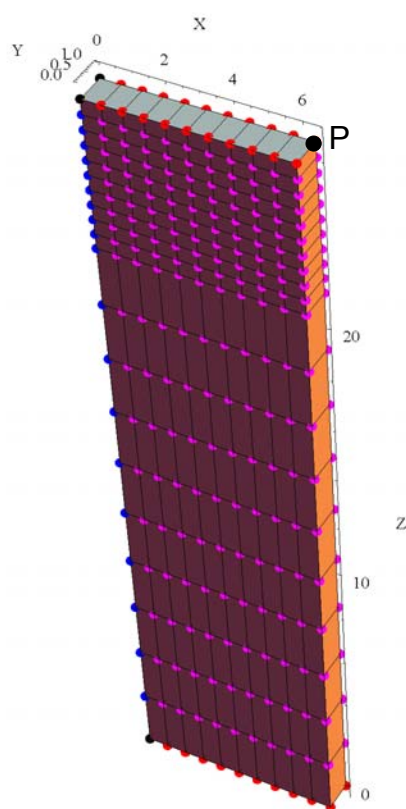


Slika 47: Natezni test s palico: Končna deformacijska oblika in pripadajoče Missesove napetosti za H1

Pri drugem testu raztezamo ploščico višine h , širine R in debeline d za pomik w , ki preseže mejo elastičnih deformacij. Geometrijski, materialni in obtežbeni parametri so dani na Sliki 48. Robni pogoji so taki, da je ploščica v ravninskem deformacijskem stanju, torej je deformacija v smeri Y preprečena. Mreža končnih elementov je zgoščena na zadnjih $0.2l$ ploščice, kjer imamo $10 \times 1 \times 10$ elementov. Na prvih $0.8l$ imamo prav tako $10 \times 1 \times 10$ elementov. Da sprožimo plastično kontrakcijo na vrhu ploščice, jo na zgoščenem delu mreže enakomerno ožimo proti vrhu, tako da je na vrhu ožja za δR . Med elementi primerjamo spremembo radija ΔR , ki jo v tem testu določimo tako, da dejanskemu radiju na vrhu ploščice prištejemo vrednost pomika točke P v smeri X . Preglednica 15 prikazuje relativno spremembo radija $\Delta R / R$ po končanem nanašanju obtežbe za vse testne elemente. Na Sliki 49 je narisana graf relativne spremembe radija v odvisnosti od raztezka ploščice.

Pri tem testu imata H1E9 in CG9 še bolj očitne nefizikalne deformacijske oblike kot pri prvem testu. H1E21 ne konvergira, H1 in O1 blokirata po pričakovanjih. H2, O2 in TSCG12 dobijo podobne rezultate, vendar pri TSCG12 opazimo komaj opazne nefizikalne deformacijske oblike. Lastne vrednosti tangente togostne matrike so na koncu raztezanja

sicer pozitivne, če pa izpišemo lastne vrednosti tangentne matrike v odvisnosti od raztezka, opazimo, da lastne vrednosti tangentne matrike med procesom obremenjevanja menjajo predznak. Deformacijske oblike in Missesove napetosti ob koncu deformiranja so za vse elemente, razen za H1E21 in O2, prikazane na Slikah 50-55. Deformacijska oblika O2 ni posebej izrisana, ker je povsem enaka deformacijski obliki H2. Ker se nefizikalne deformacijske oblike povezujejo z negativnimi lastnimi vrednostmi tangentne matrike, je pri vsakem elementu izpisano tudi število negativnih lastnih vrednosti tangentne matrike v odvisnosti od raztezka. Na vsaki od teh slik sta tudi graf sile ob vpetju v odvisnosti od raztezka in graf relativne spremembe radija v odvisnosti od raztezka.



Geometrija

$$l = 26.667 \text{ mm}$$

$$R = 6.413 \text{ mm}$$

$$\delta R = 0.07 \text{ mm}$$

$$d = 1 \text{ mm}$$

Material

$$K = 17500 \text{ MPa}$$

$$\mu = 8076.92 \text{ MPa}$$

$$\beta = -2$$

$$\sigma_0 = 0.45 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{Inf} = 0.715 \text{ MPa}$$

$$k = 0.12924$$

$$\delta = 16.93$$

Robni pogoji

$$X = 0: u_x = 0$$

$$Y = 0: u_y = 0$$

$$Y = d: u_y = 0$$

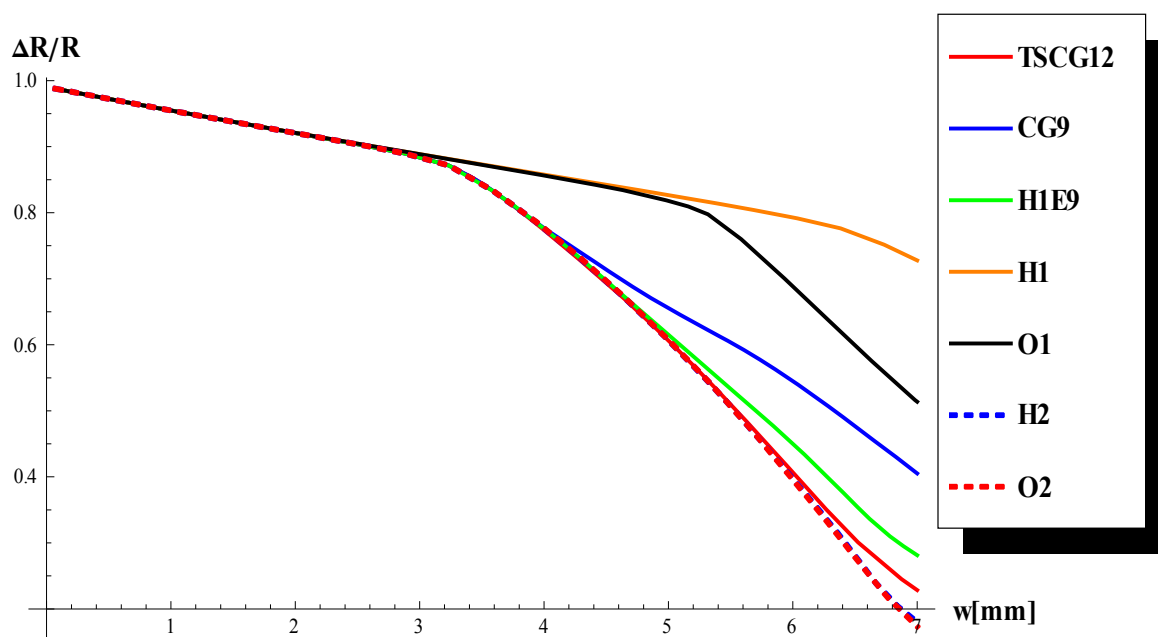
$$Z = 0: u_z = 0$$

$$Z = l: u_z = 7 \text{ mm}$$

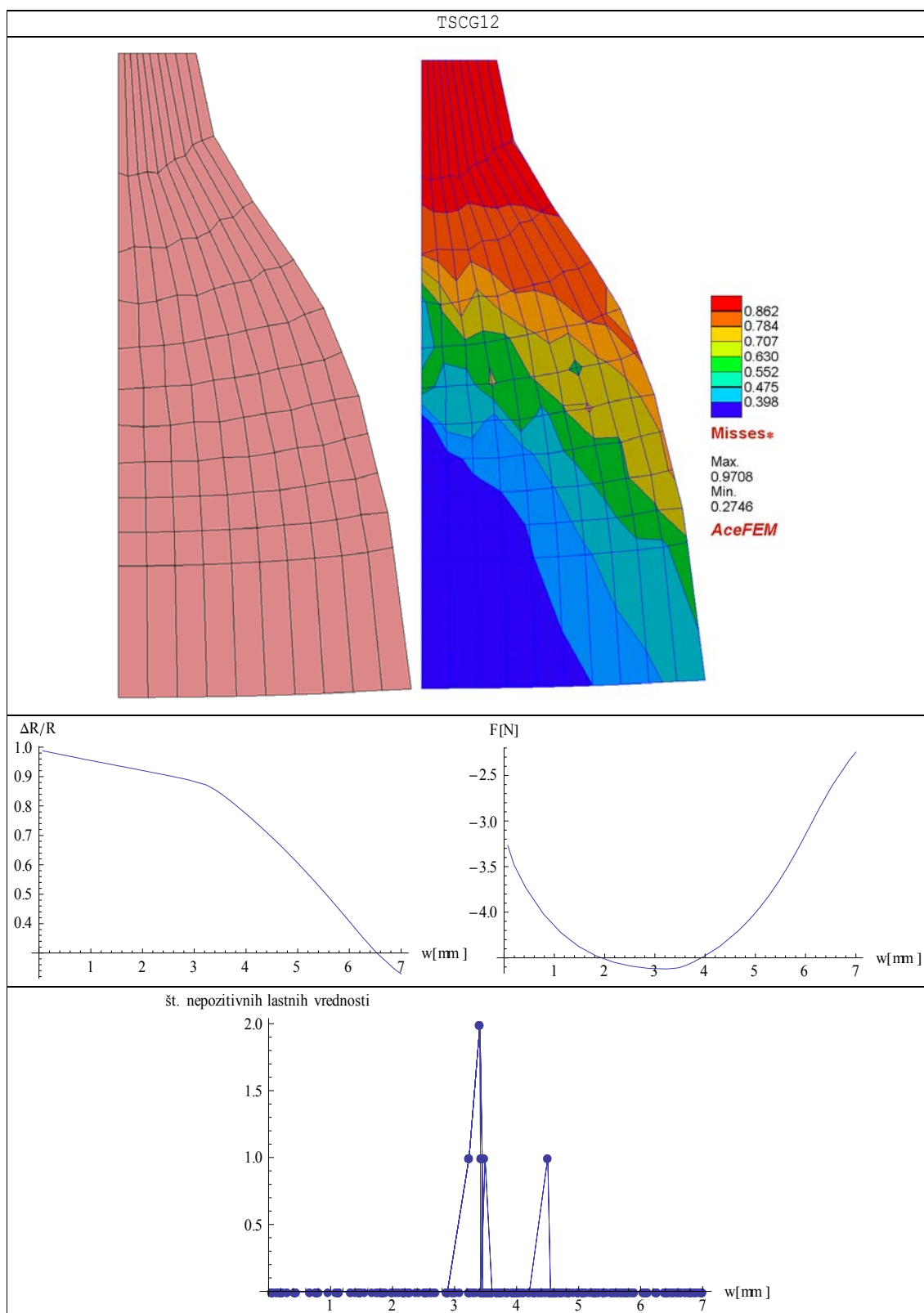
Slika 48: Geometrijski, obtežbeni in materialni podatki za natezni test s ploščico

	$\Delta R/R$
TSCG12	0.22865
H1E21	ne konv.
CG9	0.405186
H1E9	0.281461
H1	0.727811
O1	0.513723
H2	0.179677
O2	0.173496

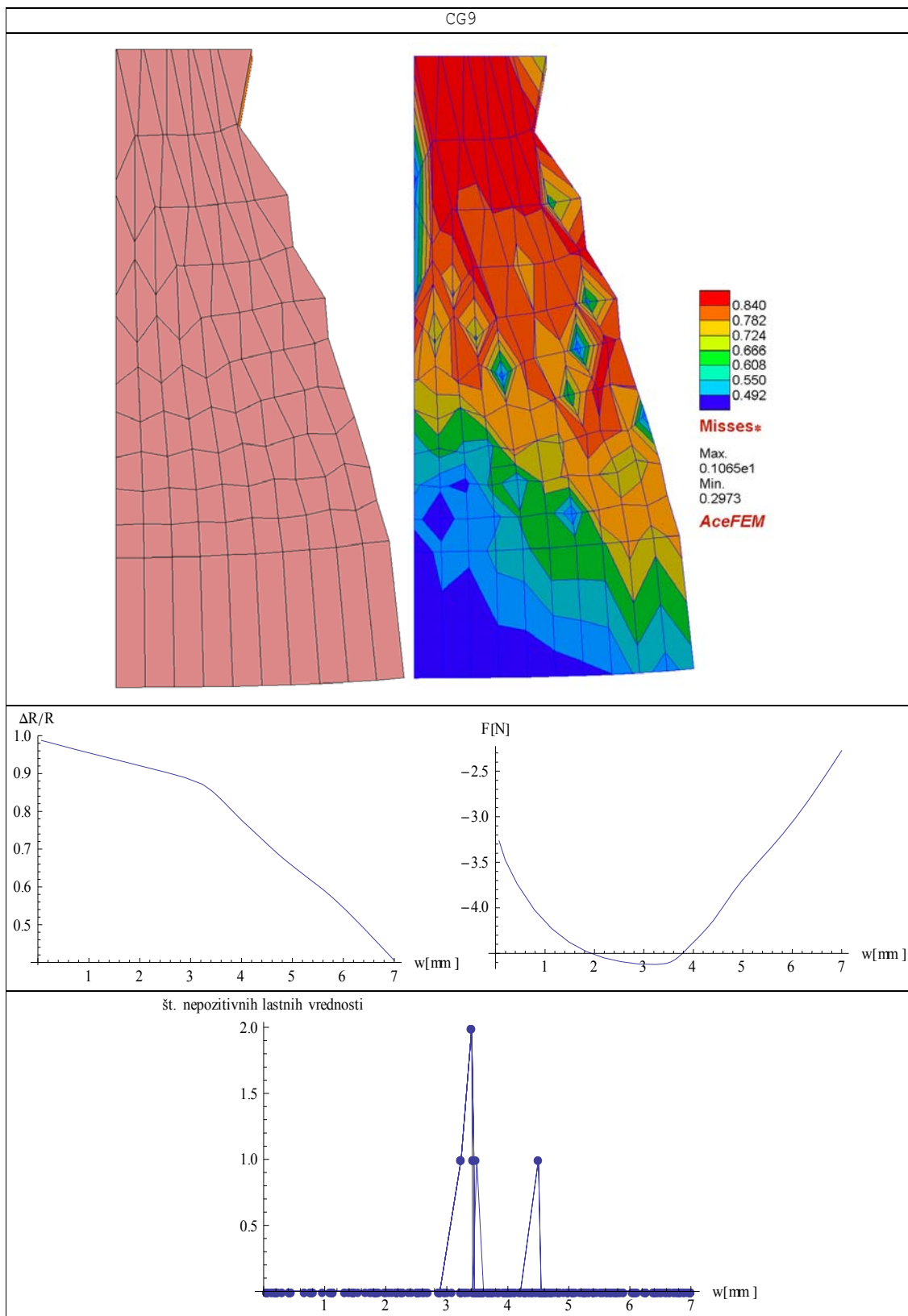
Preglednica 15: Natezni test s ploščico: Relativna sprememba radija ob koncu deformiranja



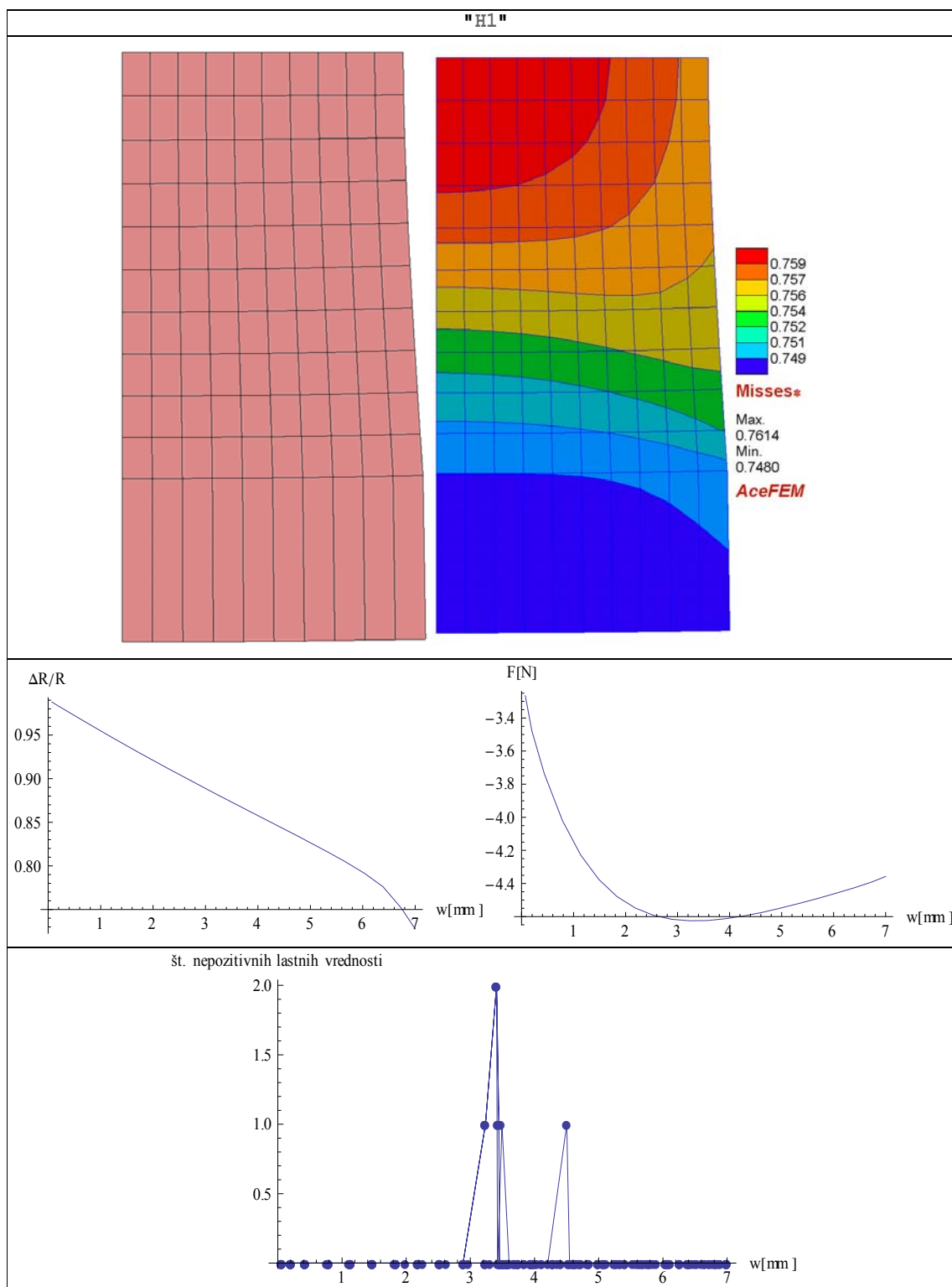
Slika 49: Natezni test s ploščico: Relativna sprememba radija v odvisnosti od raztezka



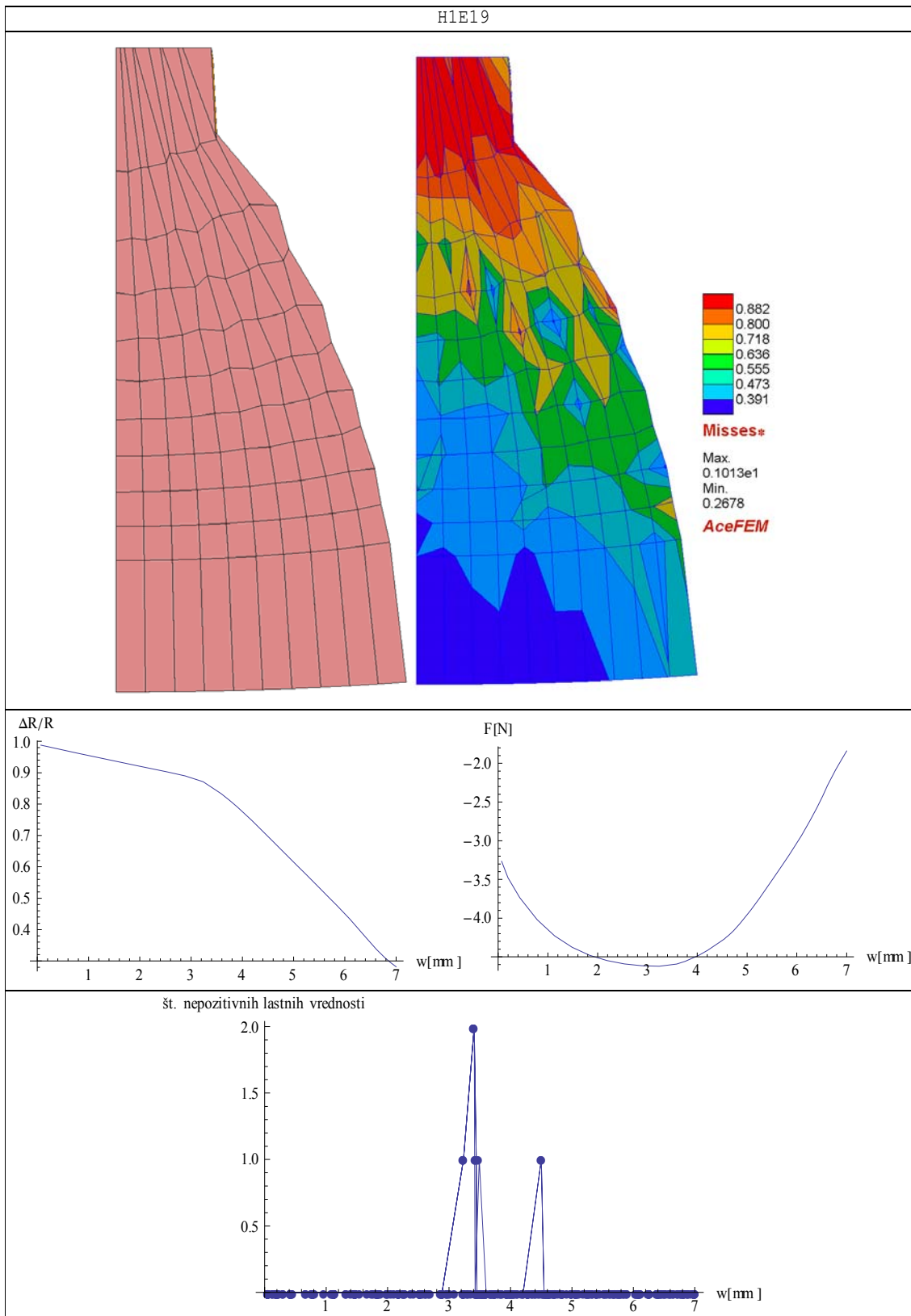
Slika 50: Natezni test s ploščico: Rezultati za TSCG12



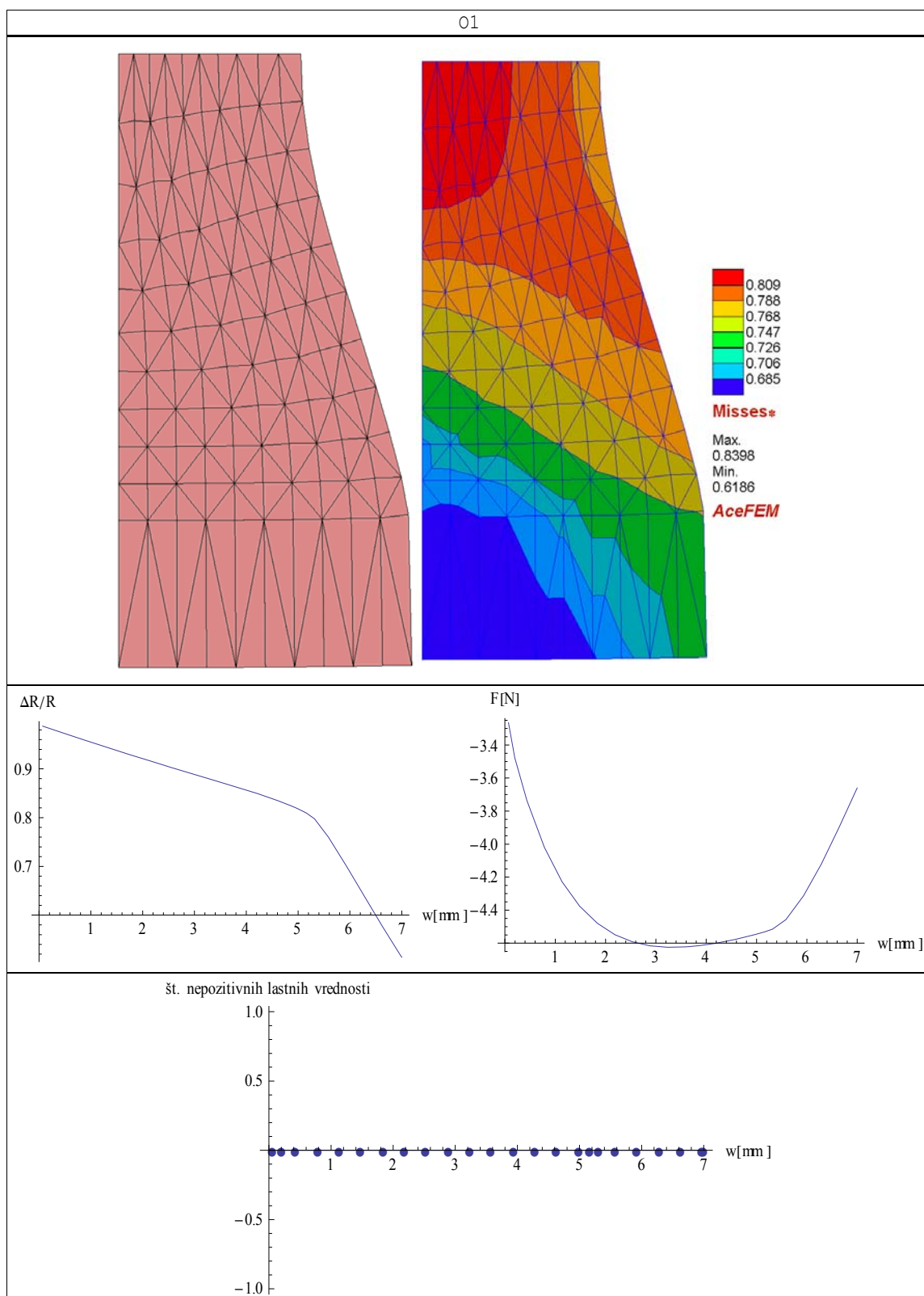
Slika 51: Natezni test s ploščico: Rezultati za CG9



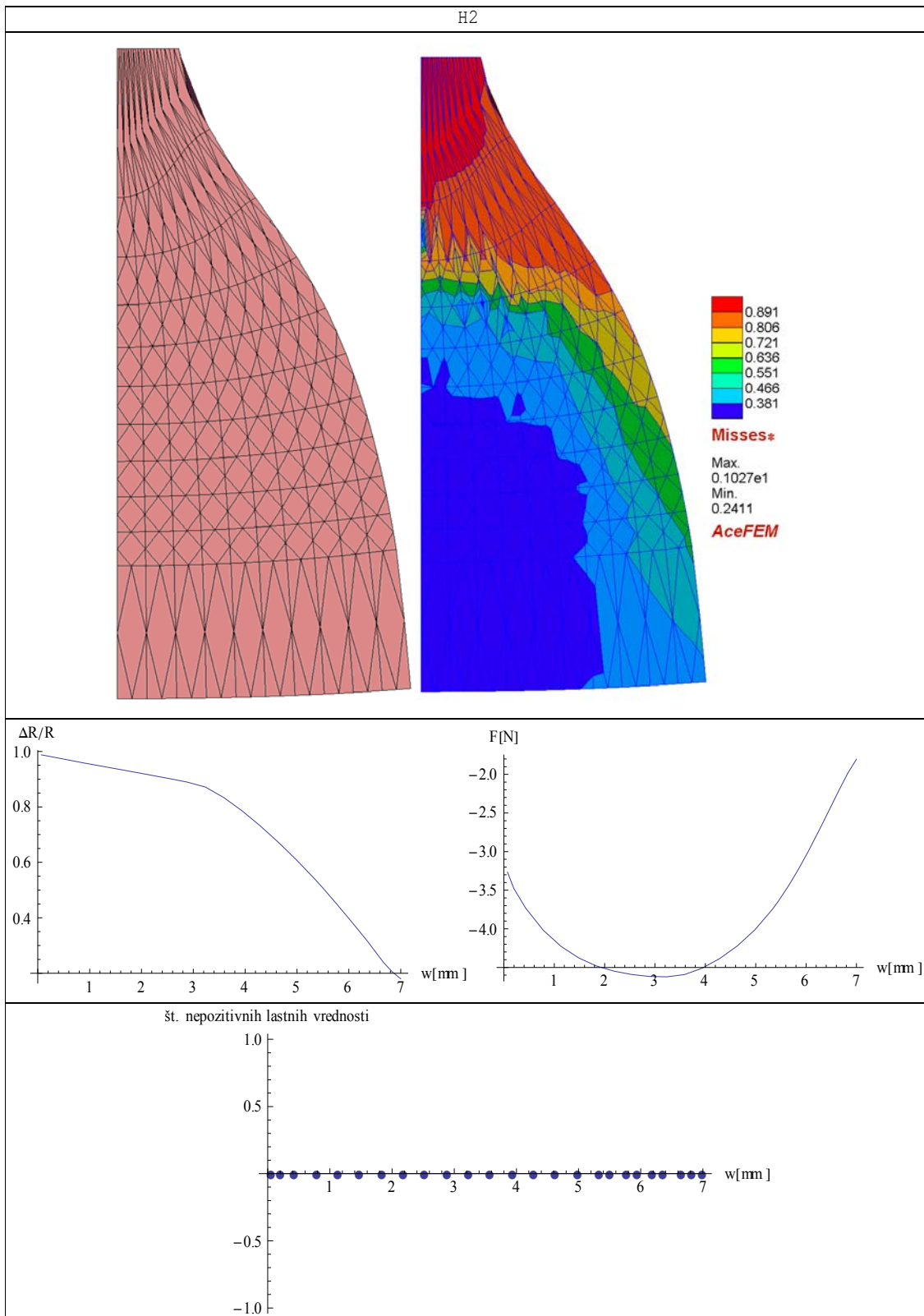
Slika 52: Natezni test s ploščico: Rezultati za H1



Slika 53: Natezni test s ploščico: Rezultati za H1E9



Slika 54: Natezni test s ploščico: Rezultati za O1



Slika 55: Natezni test s ploščico: Rezultati za H2

7 ZAKLJUČEK

Cilj razvoja metode končnih elementov za nelinearne probleme je formuliranje stabilnih, natančnih in učinkovitih končnih elementov. Z dosegom tega cilja bo uporaba metode končnih elementov na nelinearnih primerih iz inženirstva varnejša. Danes lahko standardne probleme majhnih do zmernih deformacij rešimo z običajnimi kodami končnih elementov, medtem ko za velike deformacije, materialne nestabilnosti in kontaktne probleme še vedno ni zadovoljivega končnega elementa. V prejšnjih poglavjih je formuliran nov končni element za velike deformacije TSCG12, ki spada v skupino elementov z neodvisnimi deformacijami (enhanced strain elements). Karakteristični numerični testi so bili izvedeni z različnimi končnimi elementi. Rezultati numeričnih simulacij so podani v prejšnjem poglavju.

Zaključimo lahko, da končni elementi z neodvisnimi deformacijami izboljšajo natančnost in učinkovitost elementov, formuliranih po metodi pomikov. Osnovna elementa, formulirana po metodi pomikov O1 in H1, sta zelo toga, zato blokirata. Elementa H2 in O2 imata zelo veliko vozlišč in posledično več integracijskih točk, zato sta draga elementa, vendar pri večini testov konvergirata hitro k rešitvi. Velike deformacije so okoliščine, pri katerih elementi z neodvisnimi deformacijami postanejo nestabilni, kar povzroči pojav nefizikalnih deformacijskih oblik (hourglassing). Nefizikalne deformacijske oblike pri več testih pokažeta standardna EAS končna elementa H1E9 in H1E21. H1E21 je drag element iz družine elementov z neodvisnimi deformacijami, poleg tega zaradi velikega števila dodatnih prostostnih stopenj Newtonova iteracijska metoda pri več testih ne konvergira. V numerične teste je vključen predvsem zato, ker edini med standardnimi elementi z neodvisnimi deformacijami na testu tanke plošče konvergira k teoretični rešitvi pri linearni analizi. Testi so pokazali, da je enako zanesljiv pri tem testu tudi veliko cenejši novi element TSCG12. Nova formulacija TSCG12 je končni element, ki ima vse oblikovne funkcije v deformacijskem gradientu, tako kompatibilne kot nekompatibilne, razvite v Taylorjevo vrsto, hkrati pa za nekompatibilne oblikovne funkcije veljajo posebni pogoji ortogonalnosti, izpeljani po metodi konsistentnega gradienta. TSCG12 je stabilen element pri hiperelastičnih problemih, primerljiv z do sedaj najboljšim elementom CG9. TSCG12 kot CG9 pri plastični analizi ravninskega deformacijskega stanja (natezni test s ploščico) pokažeta nefizikalne deformacijske oblike (hourglassing). Te oblike so posledica negativnih lastnih vrednosti

tangentne matrike elementa med procesom obremenjevanja. Kljub temu se TSCG12 obnaša boljše kot CG9 in H1E9, slednja elementa se nefizikalno deformirata že pri plastični analizi nateznega testa s palico. Kot opomba naj velja, da se TSCG12 pri tlačnih napetostih preko meje elastičnosti pravilno deformira in ne pokaže nefizikalnih deformacijskih oblik kot H1E9.

Glede na rezultate teh testov je TSCG12 izboljšan končni element, ki za hiperelastične probleme deluje stabilno in daje natančne rezultate. Kot H1E9 in CG9 uporablja numerično integracijo z osmimi Gaussovimi točkami, vendar ima dvanajst dodatnih prostostnih stopenj, medtem ko jih imata H1E9 in CG9 le devet. Večje število prostostnih stopenj upočasni postopek statične kondenzacije tangentne matrike elementa. Kljub temu so numerični testi pokazali enako časovno zahtevnost za TSCG12, CG9 in H1E9, torej je formulacija tudi numerično učinkovita.

	NUMERIČNI TESTI	TSCG12	H1E21	CG9	H1E9	H1	O1	H2	O2
1)	Patch test 1 in 2	●	●	●	●	●	●	●	●
2)	Test objektivnosti	●	●	●	●	●	●	●	●
3)	Test občutljivosti na distrozirane oblike	●	●	●	●	●	●	●	●
4)	Tanek obroč	●	●	●	●	●	●	●	●
5)	Sfera	●	●	●	●	●	●	●	●
6)	Nestisljiv kvader	●	●	●	●	●	●	●	●
7)	Test opisovanja nefiz. def. oblik (hourglassing) 1 in 2	●	●	●	●	●	●	●	●
8)	Tanka plošča	●	●	●	●	●	●	●	●
9a)	Natezni test s palico	●	●	●	●	●	●	●	●
9b)	Natezni test s ploščico (RDS)	●	●	●	●	●	●	●	●

Preglednica 16: Uspešnost končnih elementov na numeričnih testih (zelen krog pomeni dobro obnašanje elementa pri določenem testu, rdeč krog pa slabo obnašanje)

8 VIRI

Andelfinger U., Ramm E., Roehl D. 1992. 2D- and 3D- enhanced assumed strain elements and their application in plasticity. Computational Plasticity, 4th International Conference. Swansea. 1997-2007

Freischläger C., Schweizerhof K. 1996. On a systematic development of trilinear 3D solid elements based on Simo's enhanced strain formulation. International Journal of Solids and Structures 33(20-22): 2993-3017

Glaser S., Armero F. 1997. On the formulation of enhanced strain finite elements in finite deformations. Engineering Computations 14(6-7): 759-+

Kirchner E., Reese S., Wriggers P. 1997. A finite element method for plane stress problems with large elastic and plastic deformations 13(12): 291-304

Korelc J. 1997. Automatic generation of finite-element code by simultaneous optimization of expressions. Theoretical Computer Science 187(1-2): 231-248

Korelc J. 2002. Multi-language and Multi-environment Generation of Nonlinear Finite Element Codes. Engineering with Computers 18: 312-327

Korelc J. 2009. Automation of primal and sensitivity analysis of transient coupled problems. Computational Mechanics 44: 631-649

Korelc J., Wriggers P. 1997. Improved enhanced strain four-node element with Taylor expansion of the shape functions. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 40(3): 407-421

Korelc J., Wriggers P. 1996a. Consistent gradient formulation for a stable enhanced strain method for large deformations. International Journal for Computer-Aided Engineering and Software 13(1):103-123

Korelc J., Wriggers P. 1996b. An efficient 3D enhanced strain element with Taylor expansion of the shape functions. Computational Mechanics 19(1): 30-40

Mueller-Hoeppe D., Loehnert S., Wriggers P. 2007. A finite deformation brick element with inhomogeneous mode enhancement. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 78(10): 1164-1187

Neto E. A., Peric D., Huang G. C., Owen D. R. J. 1995. Remarks on the stability of enhanced strain elements in finite elasticity and elastoplasticity. Computational Plasticity, 4th International Conference. Swansea. 361-372

Pantuso D., Bathe K. J. 1997. On the stability of mixed finite elements in large strain analysis of incompressible solids. Finite Elements in Analysis and Design 28(2): 83-104

Piltner R., Taylor L. R. 1995. A quadrilateral mixed finite element with two enhanced strain nodes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 38: 1783-1808

Reddy B. D., Simo J. C. 1995. Stability and convergence of a class of enhanced strain methods. *Siam Journal on Numerical Analysis* 32(6): 1705-1728

Reese S., Wriggers P. 2000. A stabilization technique to avoid hourglassing in finite elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 48(1): 79-109

Reese S., Wriggers P., Reddy B. D. 2000. A new locking-free brick element technique for large deformation problems in elasticity. *Computers and Structures* 75(3): 291-304

Simo J. C., Armero F. 1992. Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 33: 1413-1449

Simo J. C., Hughes T. J. R. 1998. *Computational inelasticity. Interdisciplinary applied mathematics (7)*. New York.

Simo J. C., Hughes T. J. R. 1986. On variational foundations of assumed strain methods. *Journal of Applied Mechanics* 53(1): 51-54

Simo J. C., Rifai K. S. 1990. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 29: 1595-1638

Simo J. C., Armero F., Taylor R. L. 1993. Improved version of assumed enhanced strain trilinear element for 3D finite deformation problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 73: 53-92

Timošenko S., Vojnovski - Kriger S. 1962. *Teorija ploča i ljuski*. Beograd.

Wriggers P. 1993. Continuum Mechanics, Nonlinear Finite Element Techniques and Computational Stability. *Computational Methods in Nonlinear Mechanics*. 5(1): 1-43

Wriggers P. 2008. *Nonlinear Finite Element Methods*. Hannover, Leibniz Universität Hannover.

Wriggers P., Korelc J. 1996. On enhanced strain methods for small and finite deformations. *Computational Mechanics* 18(6): 413-428

Wriggers P., Reese S. 1996. A note on enhanced strain methods for large deformations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 135(3-4) : 201-209

Xikui Li, Crook A. J. L., Lyons L. P. R. 1993. Mixed strain elements for non-linear analysis. *Engineering Computations* 10: 223-242

Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. 1989. *The Finite Element Method*. London

9 PRILOGA: KODA ELEMENTA TSCG12 ZA ACEGEN

TSCG12

Initialization

```
Get["AceGen`"];
SMSInitialize["TSCG12", "VectorLength" → 11250, "Environment" → "AceFEM"];
SetOptions[SMSPrint, "Output" → "File", "Condition" → "DebugElement"];
SMSTemplate["SMSTopology" → "H1", "SMSSymmetricTangent" → True];
Nodeξηζ = {{-1, -1, -1}, {1, -1, -1}, {1, 1, -1}, {-1, 1, -1}, {-1, -1, 1}, {1, -1, 1},
           {1, 1, 1}, {-1, 1, 1}};
```

■ Hyperelastic Constitutive Equations

```
ConstitutiveEquations[task_] := Block[{
  , If[task == "Data"
    , {Kg, μg, βg} = SMSRealList[{"Kg", "μg", "βg"}, es$$["Data", #1] &,
      "Signature" → {{1000, 3000}, {600, 0.2}, {-2, 2.1}},
      "Description" → {"K -Bulk modulus", "μ -Shear ratio", "β -parameter"}];
  Return[];
];
Ff = SMSFreeze[F, "Ignore" → (#1 === 0 &)];
C = Transpose[Ff].Ff;
J = Det[Ff];
(*Π = 1/2 λg (J-1)^2 + μg (1/2 (Tr[C]-3) - Log[J]);*)
Π = μg/2 (J^-2/3 Tr[C] - 3) + Kg/βg^2 (J^-βg - 1 + βg Log[J]);
If[task == "Post"
  , E = 1/2 (C - IdentityMatrix[3]);
  σ = 1/J SMSD[Π, Ff, "IgnoreNumbers" → True].Transpose[Ff];
];
]
```

■ IO data definitions

```

InputOutputData[] := (
  XYZ = SMSReal[Table[nd$$[i, "X", j], {i, SMSNoNodes}, {j, SMSNoDimensions}]];
  {Xi, Yi, Zi} = Transpose[XYZ];
  dof = SMSReal[Table[nd$$[i, "at", j], {i, SMSNoNodes}, {j, SMSDOFGlobal[[i]]}]];
  at = Flatten[dof];
  {nriter, smode, gmode} =
    SMSInteger[{idata$$["Iteration"], idata$$["SubIterationMode"],
      idata$$["GlobalIterationMode"]}];
)

```

■ Kinematics of 3D hexahedral element

```

Discretization[] := (
  {ξ, η, ζ, wGauss} = Array[SMSReal[es$$["IntPoints", #1, IpIndex] &, 4];
  Niu = MapThread[ $\frac{1}{8} (1 + \xi \#1) (1 + \eta \#2) (1 + \zeta \#3)$  &, Transpose[Nodeξηζ]];
  X = SMSFreeze[Niu.Xi];
  Y = SMSFreeze[Niu.Yi];
  Z = SMSFreeze[Niu.Zi];
  Jm = SMSD[{X, Y, Z}, {ξ, η, ζ}];
  Jd = Det[Jm];
  Jmi = SMSInverse[Jm];
  {ui, vi, wi} = Transpose[Table[{dof[[i, 1]], dof[[i, 2]], dof[[i, 3]]}, {i, SMSNoNodes}]];
  NPlotQuantities = {"DeformedMeshX", ui}, {"DeformedMeshY", vi}, {"DeformedMeshZ", wi},
    {"u", ui}, {"v", vi}, {"w", wi}];
  u = Niu.ui; v = Niu.vi; w = Niu.wi;
  x = X + u; y = Y + v; z = Z + w;
  {NXu, NYu, NZu} =
    Transpose[SMSD[Niu, {X, Y, Z}, "Dependency" → {{ξ, η, ζ}, {X, Y, Z}, Jmi}]];

  Clear[c, cx, cy, cz];
  ci = {c[1], c[2], c[3]} = {c[1, cx, cy, cz], c[2, cx, cy, cz], c[3, cx, cy, cz]};
  Ni = MapThread[ $\frac{1}{8} (1 + ci[[1]] \#1) (1 + ci[[2]] \#2) (1 + ci[[3]] \#3)$  &, Transpose[Nodeξηζ]];
  X = .; Y = .; Z = .;
  X = Ni.Xi;
  Y = Ni.Yi;
  Z = Ni.Zi;
  Jm = Outer[D, {X, Y, Z}, ci];
  Jd = Det[Jm];
  Jinv = Inverse[Jm] /. Jd → Jdd[Sequence@@ci];
  Jd0 = (Jd /. c[___] → 0);
  {Jξ, Jη, Jζ} = ({D[Jd, ci[[1]]], D[Jd, ci[[2]]], D[Jd, ci[[3]]]} /. c[___] → 0);
)

```

```

{Jξη, Jξξ, Jηξ} =
  ({D[Jd, ci[[1]], ci[[2]]], D[Jd, ci[[1]], ci[[3]]], D[Jd, ci[[2]], ci[[3]]]} /. c[_] → 0);

zero = {Derivative[i_, j_, k_][Jdd][_] :=>
  Switch[{i, j, k}, {1, 0, 0}, Jξ, {0, 1, 0}, Jη, {0, 0, 1}, Jξ, {1, 1, 0}, Jξη,
    {1, 0, 1}, Jξξ, {0, 1, 1}, Jηξ]
  , c[_] → 0, Jdd[_] :=> Jd0};

NAll =
  Join[Ni, {1 - c[1]^2, 1 - c[2]^2, 1 - c[3]^2,
    c[1]^2 (c[2] + c[3]) + c[2]^2 (c[1] + c[3]) + c[3]^2 (c[1] + c[2])}];

{NX, NY, NZ} =
  Map[(D[NAll, #] /. Derivative[0, i_, j_, k_][c][l_, _] :=> {i, j, k}.Jinv[l]) &,
    {cx, cy, cz}];
{NXξ0, NXη0, NXξ0, NXξη0, NXξξ0, NXηξ0} =
  ({D[NX, c[1]], D[NX, c[2]], D[NX, c[3]], D[NX, c[1], c[2]], D[NX, c[1], c[3]],
    D[NX, c[2], c[3]]
  } /. zero);
{NYξ0, NYη0, NYξ0, NYξη0, NYξξ0, NYηξ0} =
  ({D[NY, c[1]], D[NY, c[2]], D[NY, c[3]], D[NY, c[1], c[2]], D[NY, c[1], c[3]],
    D[NY, c[2], c[3]]
  } /. zero);
{NZξ0, NZη0, NZξ0, NZξη0, NZξξ0, NZηξ0} =
  ({D[NZ, c[1]], D[NZ, c[2]], D[NZ, c[3]], D[NZ, c[1], c[2]], D[NZ, c[1], c[3]],
    D[NZ, c[2], c[3]]
  } /. zero);

integ = (# /. c[_] → 1) (1 + (-1) ^ Exponent[#, c[1]]) / (1 + Exponent[#, c[1]])
  (1 + (-1) ^ Exponent[#, c[2]]) / (1 + Exponent[#, c[2]])
  (1 + (-1) ^ Exponent[#, c[3]]) / (1 + Exponent[#, c[3]]) &;

V0 = (8 Jd /. c[_] → 0);
{V} = 1 / 12 Map[Map[(12 ## // integ) &, # // Expand] &, {Jd}];

{NX, NY, NZ} = Map[Take[#, 8] &, {NX, NY, NZ}];
NX0 = 1 / 12 V Map[Map[(12 ## // integ) &, Jdd[Sequence @@ ci] # // Expand] &, NX];
NY0 = 1 / 12 V Map[Map[(12 ## // integ) &, Jdd[Sequence @@ ci] # // Expand] &, NY];
NZ0 = 1 / 12 V Map[Map[(12 ## // integ) &, Jdd[Sequence @@ ci] # // Expand] &, NZ];
{NXu0, NYu0, NZu0} = ({NX, NY, NZ} /. zero);

```

```

{T1X, T1Y, T1Z} = {NXξ0 ξ + NXη0 η + NXζ0 ζ, NYξ0 ξ + NYη0 η + NYζ0 ζ, NZξ0 ξ + NZη0 η + NZζ0 ζ};
{T2X, T2Y, T2Z} = {NXξη0 ξ η + NXξξ0 ξ ξ + NXηξ0 η ξ, NYξη0 ξ η + NYξξ0 ξ ξ + NYηξ0 η ξ,
  NZξη0 ξ η + NZξξ0 ξ ξ + NZηξ0 η ξ};

{T1Xu, T1Yu, T1Zu} = Map[Take[#, 8] &, {T1X, T1Y, T1Z}];
{T2Xu, T2Yu, T2Zu} = Map[Take[#, 8] &, {T2X, T2Y, T2Z}];
{T1Xh, T1Yh, T1Zh} = Map[Drop[#, 8] &, {T1X, T1Y, T1Z}];
{T2Xh, T2Yh, T2Zh} = Map[Drop[#, 8] &, {T2X, T2Y, T2Z}];

D0 = SMSFreeze [ [ (NX0).ui (NY0).ui (NZ0).ui
  (NX0).vi (NY0).vi (NZ0).vi
  (NX0).wi (NY0).wi (NZ0).wi ), "Contents" ];

Du0 = SMSFreeze [ [ (NXu0).ui (NYu0).ui (NZu0).ui
  (NXu0).vi (NYu0).vi (NZu0).vi
  (NXu0).wi (NYu0).wi (NZu0).wi ), "Contents" ];

DuT = SMSFreeze [ [ (T1Xu + T2Xu).ui (T1Yu).ui (T1Zu).ui
  (T1Xu).vi (T1Yu + T2Yu).vi (T1Zu).vi
  (T1Xu).wi (T1Yu).wi (T1Zu + T2Zu).wi ), "Contents" ];

ct = SMSRealList[Array["ct", 12], ed$$["ht", #1] &];
{cui, cvi, cwi} = {ct[{{1, 2, 3, 4}}], ct[{{5, 6, 7, 8}}], ct[{{9, 10, 11, 12}}]};

DhT = SMSFreeze [ Transpose [ [ (T1Xh).cui (T1Yh).cui (T1Zh).cui
  (T1Xh).cvi (T1Yh).cvi (T1Zh).cvi
  (T1Xh).cwi (T1Yh).cwi (T1Zh).cwi ) ] +
  [ (T2Xh).cui 0 0
    0 (T2Yh).cvi 0
    0 0 (T2Zh).cwi ], "Contents" ];

fGauss = 1/V0 V Jd0 wGauss;
FC = IdentityMatrix[3] + Du0;
D = D0 + DuT + FC.DhT;
F = IdentityMatrix[3] + D;
ElementPhysicalSolution = Det[IdentityMatrix[3] + D] > 0;
ShapePhysicalSolution = Jd < 0;
at = Join[at, ct];
SMSNoDOFCondense = SMSRealList["ct"[_], "Length"];
)

```

Tangent and residual

```
SMSStandardModule["Tangent and residual"];

skipR = SMSLogical[SMSInteger[idata$$["SkipResidual"]] == 1];
skipK = SMSLogical[SMSInteger[idata$$["SkipTangent"]] == 1];
NoIp = SMSInteger[es$$["id", "NoIntPoints"]];
SMSDo[IpIndex, 1, NoIp];
ConstitutiveEquations["Data"];
InputOutputData[];
Discretization[];
ConstitutiveEquations["Π"];
SMSDo[i, 1, Length[at]];
  Ψ = fGauss SMSD[Π, at, i];
  SMSIf[! skipR];
    SMSEExport[SMSResidualSign Ψ, p$$[i], "AddIn" → True];
  SMSEndIf[];
  SMSIf[skipK];
    SMSContinue[];
  SMSEndIf[];
  SMSDo[j, If[SMSSymmetricTangent, i, 1], Length[at]];
    Kt = SMSD[Ψ, at, j];
    SMSEExport[Kt, s$$[i, j], "AddIn" → True];
  SMSEndDo[];
SMSEndDo[];

SMSEndDo[];
```

Post-processing

```
SMSStandardModule["Postprocessing"];

NoIp = SMSInteger[es$$["id", "NoIntPoints"]];
SMSDo[IpIndex, 1, NoIp];
GPlotQuantities = {};
NPlotQuantities = {};

ConstitutiveEquations["Data"];
InputOutputData[];
Discretization[];
ConstitutiveEquations["Post"];
```



```

GPlotQuantities =
  DeleteCases[Join[{"Sxx",  $\sigma$ [[1, 1]]}, {"Sxy",  $\sigma$ [[1, 2]]}, {"Sxz",  $\sigma$ [[1, 3]]},
    {"Syx",  $\sigma$ [[2, 1]]}, {"Syy",  $\sigma$ [[2, 2]]}, {"Syz",  $\sigma$ [[2, 3]]}, {"Szx",  $\sigma$ [[3, 1]]},
    {"Szy",  $\sigma$ [[3, 2]]}, {"Szz",  $\sigma$ [[3, 3]]}, {"Exx",  $\mathbf{E}$ [[1, 1]]}, {"Exy",  $\mathbf{E}$ [[1, 2]]},
    {"Exz",  $\mathbf{E}$ [[1, 3]]}, {"Eyx",  $\mathbf{E}$ [[2, 1]]}, {"Eyy",  $\mathbf{E}$ [[2, 2]]}, {"Eyz",  $\mathbf{E}$ [[2, 3]]},
    {"Ezx",  $\mathbf{E}$ [[3, 1]]}, {"Ezy",  $\mathbf{E}$ [[3, 2]]}, {"Ezz",  $\mathbf{E}$ [[3, 3]]}], GPlotQuantities], {_, 0}];
MSGPostNames = GPlotQuantities[[All, 1]];
MSMExport[GPlotQuantities[[All, 2]], gpost$$[IpIndex, #1] &];

MSMEndDo[];

MSMPostNames = NPlotQuantities[[All, 1]];
MSMExport[NPlotQuantities[[All, 2]], npost$$[#2, #1] &];

```

Generate source code

```

MSGGroupDataNames = SMSRealList[es$$["Data", _], "Description"];
MSGDefaultData = SMSRealList[es$$["Data", _], "Signature"][[All, 1]];

MSMWrite[];

```