

Univerza
v Ljubljani

Fakulteta
za gradbeništvo
in geodezijo



Jamova cesta 2
1000 Ljubljana, Slovenija
<http://www3.fgg.uni-lj.si/>

DRUGG – Digitalni repozitorij UL FGG
<http://drugg.fgg.uni-lj.si/>

To je izvirna različica zaključnega dela.

Prosimo, da se pri navajanju sklicujete na bibliografske podatke, kot je navedeno:

Spreicer, M., 2016. Optimizacija opazovanj v geodetski izmeri. Magistrsko delo. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo. (mentor Stopar, B., somentor Sterle, O.): 59 str.

Datum arhiviranja: 15-11-2016

University
of Ljubljana

Faculty of
Civil and Geodetic
Engineering



Jamova cesta 2
SI – 1000 Ljubljana, Slovenia
<http://www3.fgg.uni-lj.si/en/>

DRUGG – The Digital Repository
<http://drugg.fgg.uni-lj.si/>

This is original version of final thesis.

When citing, please refer to the publisher's bibliographic information as follows:

Spreicer, M., 2016. Optimizacija opazovanj v geodetski izmeri. Master Thesis. Ljubljana, University of Ljubljana, Faculty of civil and geodetic engineering. (supervisor Stopar, B., co-supervisor Sterle, O.): 59 pp.

Archiving Date: 15-11-2016

Univerza
v Ljubljani

Fakulteta za
*gradbeništvo in
geodezijo*



Jamova 2
1000 Ljubljana, Slovenija
telefon (01) 47 68 500
faks (01) 42 50 681
fgg@fgg.uni-lj.si

**MAGISTRSKI ŠTUDIJSKI
PROGRAM DRUGE STOPNJE
GEODEZIJA IN
GEOINFORMATIKA**

Kandidat:

MARKO SPREICER

OPTIMIZACIJA OPAZOVANJ V GEODETSKI IZMERI

Magistrsko delo št.: 23/II.GIG

**OPTIMIZATION OF OBSERVATIONS IN GEODETIC
SURVEYING**

Graduation – Master Thesis No.: 23/II.GIG

Mentor:

prof. dr. Bojan Stopar

Somentor:

asist. dr. Oskar Sterle

Ljubljana, 28. 10. 2016

STRAN ZA POPRAVKE

Stran z napako

Vrstica z napako

Namesto

Naj bo

II

Spreicer, M. 2016. Optimizacija opazovanj v geodetski izmeri.
Mag. d. Ljubljana, UL FGG, Magistrski študijski program Geodezija in geoinformatika.

»Ta stran je namenoma prazna«

Spodaj podpisani študent Marko Spreicer, vpisna številka 26440062, avtor pisnega zaključnega dela študija z naslovom: Optimizacija opazovanj v geodetski izmeri

IZJAVLJAM

1. *Obkrožite eno od variant a) ali b)*

- a) da je pisno zaključno delo študija rezultat mojega samostojnega dela;
- b) da je pisno zaključno delo študija rezultat lastnega dela več kandidatov in izpolnjuje pogoje, ki jih Statut UL določa za skupna zaključna dela študija ter je v zahtevanem deležu rezultat mojega samostojnega dela;

2. da je tiskana oblika pisnega zaključnega dela študija istovetna elektronski obliki pisnega zaključnega dela študija;

3. da sem pridobil/-a vsa potrebna dovoljenja za uporabo podatkov in avtorskih del v pisnem zaključnem delu študija in jih v pisnem zaključnem delu študija jasno označil/-a;

4. da sem pri pripravi pisnega zaključnega dela študija ravnal/-a v skladu z etičnimi načeli in, kjer je to potrebno, za raziskavo pridobil/-a soglasje etične komisije;

5. soglašam, da se elektronska oblika pisnega zaključnega dela študija uporabi za preverjanje podobnosti vsebine z drugimi deli s programsko opremo za preverjanje podobnosti vsebine, ki je povezana s študijskim informacijskim sistemom članice;

6. da na UL neodplačno, neizključno, prostorsko in časovno neomejeno prenašam pravico shranitve avtorskega dela v elektronski obliki, pravico reproduciranja ter pravico dajanja pisnega zaključnega dela študija na voljo javnosti na svetovnem spletu preko Repozitorija UL;

7. da dovoljujem objavo svojih osebnih podatkov, ki so navedeni v pisnem zaključnem delu študija in tej izjavi, skupaj z objavo pisnega zaključnega dela študija.

V Ljubljani

Datum: 16.10.2016

Podpis študenta

IV

Spreicer, M. 2016. Optimizacija opazovanj v geodetski izmeri.

Mag. d. Ljubljana, UL FGG, Magistrski študijski program Geodezija in geoinformatika.

»Ta stran je namenoma prazna«

BIBLIOGRAFSKO – DOKUMENTACIJSKA STRAN IN IZVLEČEK

UDK:	528.235(497.4)(043)
Avtor:	Spreicer Marko, dipl. inž. geod. (UN)
Mentor:	Prof. dr. Bojan Stopar
Somentor:	Asist. dr. Oskar Sterle
Naslov:	Optimizacija opazovanj v geodetski izmeri
Tip:	Magistrsko delo
Obseg in oprema:	59 str., 9 pregl., 21 sl., 117 en.
Ključne besede:	Optimizacija geodetskih mrež, optimizacija drugega reda, izravnava, kakovost geodetskih mrež, kriteriji optimizacije geodetskih mrež, odkrivanje grobih pogreškov

Izvleček

V magistrski nalogi smo obravnavali problem optimizacije geodetskih mrež. Optimizacija geodetskih mrež nam omogoča vnaprejšnjo določitev optimalnega geodetskega datuma, položajev točk v geodetski mreži, optimalne uteži opazovanj in izboljšavo slabših delov geodetske mreže. Poudarek v nalogi je na optimizaciji drugega reda, pri kateri optimiziramo natančnost geodetskih opazovanj, oziroma uteži opazovanj, za pridobitev potrebne natančnosti koordinat točk geodetske mreže. Za avtomatizacijo postopka optimizacije drugega reda smo izdelali računalniški program. Program omogoča vnos podatkov o geodetski mreži in kriterijev, ki naj bi bili pri optimizaciji upoštevani. Program med optimizacijo iterativno odstranjuje opazovanja, ki bistveno ne prispevajo k natančnosti in zanesljivosti geodetske mreže, dokler ni mogoče odstraniti več nobenega opazovanja, ne da bi s tem preseгли vnaprej postavljenih kriterijev. Z izdelanim programom smo izvedli več primerov optimizacije geodetske mreže z različnimi kriteriji ter prikazali uporabnost računalniškega programa in postopkov optimizacije pri načrtovanju geodetskih mrež.

»Ta stran je namenoma prazna«

BIBLIOGRAPHIC-DOCUMENTALISTIC INFORMATION AND ABSTRACT

UDC:	528.235(497.4)(043)
Autor:	Spreicer Marko, B. Sc.
Supervisor:	Prof. Bojan Stopar, Ph.D
Co-advisor:	Assist. Oskar Sterle, Ph.D
Title:	Optimization of observations in geodetic surveying
Document type:	M. Sc. Thesis
Notes:	59 p., 9 tab., 21 fig., 117 eq.
Key words:	Optimization of geodetic networks, second order design, quality of geodetic networks, criteria of optimization of geodetic networks, gross error detection, adjustment.

Abstract

In master's thesis we discuss methods of optimization of geodetic networks. Optimization of geodetic networks allow us in advance determination of optimal geodetic datum, optimal positions of points in geodetic network, optimal weights of observations and optimal improvement of weak parts of network. The focus in this thesis is on second order design of optimization where optimal precision of geodetic observations is optimised according to a desired accuracy of points coordinates in geodetic network. For the automatization of the second order design, we made a computer program for second order design of geodetic network. Program allows importing data of geodetic network and criteria, which the program takes into account in the process of optimization. Program iteratively removes observations, which do not contribute significantly to the accuracy or reliability of geodetic network, until no observations can be removed, without breaking the criteria, which has been set at the beginning of the optimization. Using the assembled program, we solved few geodetic network optimization examples with different criteria to show the applicability of the computer program and methods of optimization for optimal geodetic network design.

VIII

Spreicer, M. 2016. Optimizacija opazovanj v geodetski izmeri.

Mag. d. Ljubljana, UL FGG, Magistrski študijski program Geodezija in geoinformatika.

»Ta stran je namenoma prazna«

ZAHVALA

Za pomoč in svetovanje pri izdelavi magistrskega dela, bi se rad zahvalil mentorju profesorju dr. Stopar Bojanu ter somentorju asistentu dr. Sterle Oskarju. Posebej se zahvaljujem očetu, ki me je navdušil za študij geodezije, mami ter puncu Anji za podporo in dano vzpodbudo za uspešen zaključek študija.

X

Spreicer, M. 2016. Optimizacija opazovanj v geodetski izmeri.
Mag. d. Ljubljana, UL FGG, Magistrski študijski program Geodezija in geoinformatika.

»Ta stran je namenoma prazna«

KAZALO VSEBINE

1	UVOD.....	1
2	IZRAVNAVA PO METODI NAJMANJŠIH KVADRATOV	2
2.1	Metoda najmanjših kvadratov	2
2.2	Uteži	3
2.3	Posredna izravnava.....	4
2.4	Ocenjevanje rezultatov izravnave	6
2.5	Odkrivanje grobih pogreškov.....	8
2.5.1	Globalni test modela.....	9
2.5.2	Data Snooping.....	10
2.5.3	τ -test	12
3	KAKOVOST GEODETSKIH MREŽ.....	13
3.1	Natančnost geodetskih mrež.....	13
3.2	Zanesljivost geodetskih mrež.....	14
3.2.1	Notranja zanesljivost	14
3.2.2	Zunanja zanesljivost	15
3.2.3	Generalni kriterij zanesljivosti	16
4	OPTIMIZACIJA GEODETSKIH MREŽ.....	17
4.1	Optimizacija drugega reda	19
4.1.1	Metoda minimalne norme matrike P	20
4.1.2	Modificirana metoda	21
4.1.3	Direktna metoda	22
4.1.4	Indirektna metoda optimizacije	23
4.2	Kriteriji optimizacije geodetske mreže.....	25
4.2.1	Kriteriji natančnosti.....	25
4.2.1.1	Skalarni kriteriji.....	25
4.2.1.2	Matrika kriterija.....	26
4.2.1.3	Enotska matrika kriterija	27
4.2.1.4	Taylor-Karmanov postopek sestave matrike kriterija	27
4.2.1.5	Kaotični postopek sestave matrike kriterija	28
4.2.1.6	Modifikacija navedenih načinov	29

4.2.1.7	Kriteriji zanesljivosti	30
5	RAČUNALNIŠKI PROGRAM ZA OPTIMIZACIJO OPAZOVANJ	33
5.1	Opis programa	33
5.2	Določitev kriterijev za optimizacijo	37
6	PRIMERI OPTIMIZACIJE DRUGEGA REDA	41
6.1	Optimizacija z upoštevanjem kriterija natančnosti.....	41
6.1.1	Vzpostavitev geodetske mreže in simulacija opazovanj.....	41
6.1.2	Izravnava simulirane geodetske mreže	42
6.1.3	Sestava matrike kriterija	44
6.1.4	Rezultati optimizacije natančnosti opazovanj drugega reda.....	45
6.2	Optimizacija z upoštevanjem kriterija natančnosti in zanesljivosti.....	49
7	ZAKLJUČEK	55
8	VIRI	57

KAZALO PREGLEDNIC

Preglednica 1: Možnost odkritja grobih napak glede na število ri.....	16
Preglednica 2: Prikaz razdelitve metod optimizacije na redove.....	17
Preglednica 3: Natančnosti koordinat po izravnavi geodetske mreže.	43
Preglednica 4: Rezultati optimizaciji drugega reda z upoštevanjem kriterija natančnosti	46
Preglednica 5: Standardni odkloni, uteži in števila nadštevilnosti optimiziranih opazovanj	47
Preglednica 6: Natančnost koordinat pridobljenih z optimizacijo	49
Preglednica 7: Rezultati optimizacije natančnosti in zanesljivosti drugega reda.....	51
Preglednica 8: Natančnosti koordinat drugega primera optimizacije natančnosti in zanesljivosti:	53
Preglednica 9: Rezultati drugega primera optimizacije natančnosti in zanesljivosti:	54

KAZALO SLIK

Slika 1: Optimiziranje geometrije geodetske mreže.....	18
Slika 2: Prikaz grafičnega vmesnika programa za optimizacijo opazovanj geodetske mreže	33
Slika 3: Ročno dodajanje točk geodetske mreže	34
Slika 4: Datoteka s podatki o točkah geodetske mreže	34
Slika 5: Grafični prikaz točk, ki jih izriše program.....	35
Slika 6: Generiranje opazovanj	35
Slika 7: Prikaz podatkov na osnovnem oknu programa	36
Slika 8: Urejanje opazovanj	37
Slika 9: Nastavitve kriterijev.....	39
Slika 11: Prikaz števil nadštevilnosti v primerjavi s standardnimi odkloni opazovanj	39
Slika 10: Diagram poteka procesa optimizacije sestavljenega programa	40
Slika 12: Prikaz simulirane geodetske mreže.....	42
Slika 13: Prikaz standardnih elips pogreškov pred optimizacijo uteži.....	43
Slika 14: Prikaz sestavljene matrike kriterija	44
Slika 15: Prikaz rezultatov optimizacije geodetske mreže z uporabo kriterija natančnosti	46
Slika 16: Primerjava števil nadštevilnosti opazovanj s pripadajočimi standardnimi odkloni	47
Slika 17: Standardne elipse pogreškov pri optimizaciji natančnosti in zanesljivosti	50
Slika 18: Števila nadštevilnosti opazovanj v primerjavi s pripadajočimi standardnimi odkloni pri optimizaciji z upoštevanjem kriterija natančnosti	51
Slika 19: Primerjava števil nadštevilnosti opazovanj s pripadajočimi standardnimi odkloni	52
Slika 20: Grafični prikaz rezultatov drugega primera optimizacije natančnosti in zanesljivosti	53
Slika 21: Števila nadštevilnosti opazovanj v primerjavi s pripadajočimi standardnimi odkloni, drugega primera optimizacije natančnosti in zanesljivosti	54

»Ta stran je namenoma prazna«

1 UVOD

V geodetski praksi se geodeti srečujemo s problemom vzpostavitve optimalne geodetske mreže, s katero skušamo izpolniti vse kriterije, ki nam jih predhodno določi naročnik. Pri tem želimo problem rešiti s čim manjšo količino dela in čim manj vloženi sredstvi. Tako bi bilo potrebno pred vsako zahtevnejšo nalogo, pred fizično vzpostavitvijo mreže, izdelati plan, ki bi za uspešno izpolnitev kriterijev moral vsebovati lokacijo točk mreže, tip opazovanj, vrsto ter tip potrebnega instrumentarija in določitev stroškov celotnega projekta. Za določitev vseh teh spremenljivk in za uresničitev določenih kriterijev, je v današnjem času nepogrešljiva metoda optimizacije.

V današnjem času računalništva je uporaba metode optimizacije zelo razumna in predstavlja odlično orodje za načrtovanje geodetskih mrež (Grafarend, 1974). Še posebej nam računalniški programi pomagajo pri iterativnem delu, kjer bi bilo ročno računanje dolgotrajno.

Preden pa lahko začnemo s postopkom optimizacije je potrebno definirati kriterije kakovosti geodetske mreže. Ti kriteriji kakovosti so natančnost, zanesljivost in ekonomičnost (Teunissen, 1984). Glede na namen vzpostavitve geodetske mreže lahko v optimizacijo vključimo samo en kriterij ali pa vse kriterije. Za izdelavo optimalne geodetske mreže je kriterij natančnosti najbolj pomemben faktor v procesu optimizacije. Na podlagi kriterija natančnosti se odločimo o natančnosti opazovanj, ki jih nameravamo izvesti, saj je od tega odvisna natančnost koordinat točk geodetske mreže. Za razliko od natančnosti je zanesljivost potrebna samo do te stopnje, da odkrijemo grobe napake in minimiziramo vpliv neodkritih grobih napak na koordinate točk. Tretji kriterij ki zagotavlja optimalno geodetsko mrežo je minimalni strošek projekta. Stroški se razlikujejo glede na tip projekta. Na stroške vplivajo različni faktorji kot so transport, časovno trajanje opazovanj količina dela in stroški opreme.

Praktično je zelo težko najti rešitev, ki bi zagotovila visoko natančnost in zanesljivost geodetske mreže ob nizkih stroških, kar bi sicer bila optimalna rešitev za večino mrež, ki jih uporablja geodetska stroka. V realnosti pa natančna in zanesljiva mreža povzroči večje stroške. Tako z optimizacijo dosežemo, da izdelamo plan z manjšim številom opazovanj, manjšo natančnostjo, kar posledično privede do nižjih stroškov. Zaključimo lahko, da je mreža s primerno oz. nepretirano natančnostjo in zanesljivostjo, ekonomično najbolj optimalna.

V magistrski nalogi se bomo posvetili predvsem določitvi natančnosti opazovanj, ki so potrebna za pridobitev ustrezno visoke natančnosti koordinat točk, ki jih od nas zahteva projekt. To so predvsem naloge inženirske geodezije, kjer je visoka natančnost potrebna pri kontroliranju visokih gradenj, za spremljanje premikov naravnih in grajenih objektov, z namenom preprečevanja nesreč in drugih nalog, kjer je potrebna visoka natančnost.

Postopke optimizacije bomo prikazali na izbranem primeru, ter skušali prikazati uporabnost in nepogrešljivost metode optimizacije pri vzpostavitvi geodetskih mrež za posebne namene.

2 IZRAVNAVA PO METODI NAJMANJŠIH KVADRATOV

Preden začnemo s postopki optimizacije, je potrebno poznati osnove za lažje razumevanje postopkov optimizacije, ki izhajajo iz izravnalnega računa. Tako bomo najprej začeli z opisom metod izravnav po metodi najmanjših kvadratov, brez katerih bi nadaljnje postopke pri optimizaciji težko razumeli.

Povezavo med opazovanji in iskanimi količinami predstavlja funkcionalni model, ki mora biti za izbrana opazovanja in iskane količine ustrezen. Pri tem je potrebno določiti število elementov, ki v celoti rešijo matematični model. Število minimalnih elementov za rešitev določenega modela je odvisno od samega problema. Če za rešitev problema izberemo minimalno število opazovanj, pridobimo enolično rešitev, nad katero nimamo nobene kontrole. Tako se nam lahko v opazovanju pojavi grobi pogrešek, ki se nato prenese v rešitev in povzroči grobo pogrešen rezultat. Da bi se temu izognili vedno opravimo nadštevilna opazovanja.

Število opazovanj bomo označili z n , sama opazovanja pa z l_i . Število minimalno potrebnih opazovanj za enolično rešitev z n_0 in z r število nadštevilnih opazovanj. Tako lahko zapišemo enačbo za izračun števila nadštevilnih opazovanj:

$$r = n - n_0 \quad (1)$$

V primeru nadštevilnih opazovanj, se zaradi vedno prisotnih pogreškov v opazovanjih pojavlja neskladnost opazovanj z matematičnim modelom. Za odpravo neskladnosti je potrebno opazovanja l_i zamenjati z ocenjenimi opazovanji \hat{l}_i . Ocenjena opazovanja so dejansko popravljena opazovanja l_i , ki smo jim dodali ustrezen popravek v_i (Huaan, 2010).

$$\hat{l}_i = l_i + v_i. \quad (2)$$

Poprakov ne poznamo in jih je potrebno izračunati. V splošnem obstaja neskončno mnogo množic popravkov, ki zagotovijo da se popravljena opazovanja skladajo z matematičnim modelom. Vendar pa le ena množica popravkov zagotavlja optimalno rešitev. Za pridobitev te množice je potreben dodaten pogoj, ki ga morajo izpolniti popravki opazovanj. Najbolj pogosto je ta pogoj minimalna vsota kvadratov popravkov opazovanj. Postopek iskanja množice opazovanj \hat{l}_i , ki zagotavlja optimalno rešitev imenujemo izravnavo. Če torej iščemo popravljena opazovanja ob pogoju da je vsota kvadratov popravkov opazovanj minimalna se ta postopek imenuje izravnavo po metodi najmanjših kvadratov (Stopar, 2011).

2.1 METODA NAJMANJŠIH KVADRATOV

Za pridobitev koordinat točk potrebujemo opazovanja, ki jih opravimo s pomočjo geodetskih instrumentov. Za pridobitev zanesljive rešitve, opravimo več opazovanj kot je potrebno, oziroma opravimo nadštevilna opazovanja. Ker pa želimo pridobiti enolično rešitev, je potrebna vsa opazovanja vključiti v matematični model, ki mora biti uporaben v situacijah ko imamo na razpolago različno število opazovanj. Eden takšnih modelov je tudi model, ki temelji na metodi najmanjših kvadratov (Stopar, 2011).

Metoda najmanjših kvadratov je zasnovana na zahtevi, da je vsota kvadratov popravkov opazovanj minimalna. Ta pogoj lahko zapišemo v obliki (Okwuashi, Asuquo, 2014):

$$\Phi = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 \rightarrow \text{minimum} \quad (3)$$

V primeru, ko imamo nadštevilna opazovanja, ki so nekorelirana in enake natančnosti je rešitev po metodi najmanjših kvadratov enostavna aritmetična sredina opazovanj. V primeru enega dodatnega opazovanja imamo glede na enačbo (1), eno nadštevilno opazovanje ($r = 1$), za katerega moramo sestaviti eno enačbo s katero bomo odstranili neskladnost v modelu. To enačbo imenujemo pogojna enačba ali pogoj, ki mora biti izpolnjen v modelu. Pogojne enačbe vsebujejo opazovanja, popravke in konstante. Število pogojnih enačb mora biti enako številu nadštevilnih opazovanj r . Reševanje izravnave na osnovi ustreznih pogojev med opazovanji imenujemo pogojna izravnava po metodi najmanjših kvadratov.

Druga tehnika izravnave je posredna izravnava. Za razliko od pogojne izravnave je pri posredni izravnavi število pogojev enako številu opazovanj n . Posredna izravnava mora vsebovati $n - r = n_0$ dodatnih spremenljivk oziroma neznank, ki imajo na začetku neznane vrednosti. Za izravnavo je tako potrebno sestaviti n pogojnih enačb, ki jih pri posredni izravnavi imenujemo enačbe opazovanj. V teh nastopajo opazovanja, popravki, konstante in vse neznanke.

Obe tehniki izravnave sta enakovredni in z njima pridobimo enake rezultate za rešitev istega problema.

2.2 UTEŽI

Utež je vrednost pripisana opazovanju, in določa velikost njegovega vpliva na končni rezultat. Različne uteži se pojavljajo zaradi različnih natančnosti opazovanj ali različnih vrst opazovanj. Utež opazovanja je obratno sorazmerna z varianco istega opazovanja (Huaan, 2010):

$$p_i = \frac{k}{\sigma_i^2} \quad (4)$$

kjer je konstanta k varianca opazovanja z utežjo enako 1.

$$1 = \frac{k}{\sigma_0^2} \quad (5)$$

Iz zgornje enačbe sledi, da je konstanta $k = \sigma_0^2$ in tako lahko napišemo enačbo za izračun uteži (Huaan, 2010):

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}, \quad (6)$$

kjer je σ_0^2 referenčna varianca a-priori. Za nekorelirana opazovanja $l_1, l_2, l_3 \dots l_n$ lahko zapišemo diagonalno kovariančno matriko Σ :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & & 0 \\ & & \sigma_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

kjer je σ_i^2 , varianca opazovanja l_i .

In diagonalno matriko uteži \mathbf{P} :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & & 0 \\ 0 & p_2 & & 0 \\ & & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & p_n \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \cdot \Sigma_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} = \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1}, \quad (8)$$

kjer je p_i utež opazovanja l_i .

Torej večja kot je utež, večji vpliv ima pripadajoče opazovanje na končni rezultat. Uteži lahko določimo na več načinov. V primeru določanja uteži na osnovi predhodne ocene natančnosti meritev, se pri tem največkrat upošteva uporabljen instrumentarij in metoda izvedene meritve. Pri dolžinskih meritvah, se utež največkrat izračuna glede na vrednost dolžine, kjer ima daljša dolžina manjšo utež, saj je izmerjena s slabšo natančnostjo. Pri opazovanjih, kjer smo merili smeri, pa imajo ta opazovanja enako utež, vendar le v primeru če smo za izmero vseh smeri uporabili instrument z enako natančnostjo merjenja smeri. (Koželj, 2007).

2.3 POSREDNA IZRAVNAVA

Pri posredni izravnavi sestavimo toliko enačb popravkov oz. pogojev kot je število opazovanj (n). V njih nastopajo opazovanja, popravki, konstante in neznanke. Število neznank je enako številu n_0 . Lastnost posredne izravnavi je, da vsaka enačba opazovanj vsebuje samo eno opazovanje ter eno ali več neznank (Stopar, 2011).

Enačbe popravkov v matrični obliki torej izgledajo tako:

$$\mathbf{v} + \mathbf{B}\Delta = \mathbf{f} \quad (9)$$

V splošnem imamo n enačb popravkov, ki povezujejo n opazovanj z u = n_0 neznankami.

$$\begin{aligned} v_1 + b_{11}\delta_1 + b_{12}\delta_2 + \dots + b_{1u}\delta_u &= d_1 - l_1 = f_1 \\ v_2 + b_{21}\delta_1 + b_{22}\delta_2 + \dots + b_{2u}\delta_u &= d_2 - l_2 = f_2 \end{aligned} \quad (10)$$

...

$$v_n + b_{n1}\delta_1 + b_{n2}\delta_2 + \dots + b_{nu}\delta_u = d_n - l_n = f_n$$

Kjer so:

- v_1, v_2, \dots popravki opazovanj
- b_{11}, b_{12}, \dots numerične vrednosti koeficientov neznank
- $\delta_1, \delta_2 \dots$ neznanke
- d_1, d_2, \dots numerične konstantne
- l_1, l_2, \dots opazovanja
- f_1, f_2, \dots numerične vrednosti odstopanj

Za rešitev problema izravnave po metodi najmanjših kvadratov morajo popravki opazovanj izpolniti zahtevo minimalne vsote kvadratov, kot smo to zapisali v enačbi (3). Enačba predstavlja zahtevo v primeru nekoreliranih opazovanj enakih natančnosti. V primeru nekoreliranih opazovanj različnih natančnosti se enačba preoblikuje v:

$$\Phi = p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2 + \dots + p_n v_n^2 \rightarrow \text{minimum.} \quad (11)$$

Enačbo (11) lahko zapišemo kot:

$$\Phi = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}. \quad (12)$$

Rešitev problema izravnave pridobimo z rešitvijo sistema linearnih normalnih enačb:

$$\mathbf{N} \Delta = \mathbf{t}$$

kjer so

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \quad (13)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{f} \quad (14)$$

Matrika \mathbf{N} predstavlja matriko koeficientov normalnih enačb, je kvadratna in pozitivno definitna matrika velikosti $u \times u$. Rešitev sistema normalnih enačb je vektor Δ :

$$\Delta = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{t} \quad (15)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{f} - \mathbf{B} \Delta \quad (16)$$

Vektor izravnanih opazovanj nato pridobimo s spodnjo enačbo:

$$\hat{\mathbf{I}} = \mathbf{I} + \mathbf{v}. \quad (17)$$

2.4 OCENJEVANJE REZULTATOV IZRAVNAVE

Pri posredni izravnavi pridobimo vektor izravnanih opazovanj $\hat{\mathbf{l}}$, ter vektor ocenjenih neznank Δ . Seveda je potrebno pred izravnavo odstraniti grobo pogrešena opazovanja, ter popraviti opazovanja za vpliv sistematičnih pogreškov (Stopar, 2010).

Kljub temu je potrebno še vedno preveriti, če so pridobljeni rezultati zanesljivi. Ugotavljamo kako natančna in zanesljiva so opazovanja. Pri ocenjevanju rezultatov izravnavo ugotavljamo prisotnost in odstopanja grobo pogrešenih opazovanj, ki so po velikosti pogreškov »malo grobo pogrešena«, ob predpostavki, da smo »močno pogrešena« opazovanja že pred izravnavo odstranili. Pri tem nam metoda najmanjših kvadratov ne pomaga veliko, saj zaradi metode s katero izravnavamo lažje odkrijemo »močno grobo pogrešena opazovanja«, saj se pogrešena opazovanja porazdelijo tudi po drugih opazovanjih oziroma po celotnem modelu. Tako se pogreški opazovanj prenesejo tudi na druga opazovanja oziroma po celotnem matematičnem modelu (Stopar, 2010).

Ocenjevanje rezultatov izravnavo, temelji na statističnem testiranju popravkov opazovanj. S popravki opazovanj pridobimo merilo kakovosti za ocenjevanje matematičnega modela v katerem so prisotna opazovanja.

Izračun popravkov opazovanj lahko izpeljemo iz enačbe (16) ali (17), lahko pa jih izračunamo z uporabo spodnje enačbe (Stopar, 2010).

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{f} \quad (18)$$

Matriko \mathbf{R} imenujemo matrika nadštevilnosti in je definirana kot:

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} - \mathbf{B}(\mathbf{B}^T\mathbf{P}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}, \quad (19)$$

Posamezen popravek v_i lahko zapišemo kot:

$$v_i = \hat{l}_i - l_i = \sum_{j=1}^n r_{ij} \cdot f_j, \quad (20)$$

kjer so r_{ij} ($i \neq j$) izvendiagonalni členi matrike \mathbf{R} .

Popravki opazovanj se pojavijo zaradi prisotnih slučajnih pogreškov opazovanj. »Grobi pogrešek« pa povzroči večje odstopanje v opazovanjih. Lahko predpostavimo, da vektor opazovanj \mathbf{l} vsebuje podvektor opazovanj, ki so grobo pogrešena in ga označimo z $\nabla\mathbf{l}$. Vpliv tega vektorja na vektor popravkov je določen kot (Stopar, 2010):

$$\nabla\mathbf{v} = -\mathbf{R}\nabla\mathbf{l}, \quad (21)$$

in

$$\nabla v_i = -\sum_{j=1}^n r_{ij} \nabla l_j \quad (i = 1 \dots n) \quad (22)$$

Torej popravek, v katerem je prisoten vpliv grobo ali slučajno pogrešenega opazovanja je (Kavouras, 1982):

$$\check{v}_i = v_i + \nabla v_i \quad (i = 1 \dots n) \quad (23)$$

Prisotnost grobih ali sistematičnih pogreškov v opazovanjih povečuje velikost popravkov. Glede na pridobljeno kovariančno matriko popravkov opazovanj po izravnavi, lahko vidimo, da so popravki med seboj korelirani tudi v primerih, ko so opazovanja med seboj nekorelirana, ko imamo za matriko uteži \mathbf{P} diagonalno matriko. Tudi matrika \mathbf{R} je v splošnem polna matrika, ki vsebuje informacije o geometriji, natančnosti in razporeditvi opazovanj v matematičnem modelu. Iz enačb (20) in (22) izhaja, da je popravek vsakega opazovanja linearna kombinacija vseh opazovanj. Tako se nam lahko v primeru spreminjanja vrednosti večjega števila opazovanj zaradi grobih pogreškov, te spremembe izražajo le na enem popravku, oziroma če spremenimo vrednost enega opazovanja se lahko ta sprememba pozna na večjem številu popravkov opazovanj.

Le v primeru, ko so popravki med seboj nekorelirani, kar pomeni da je matrika nadštevilnosti \mathbf{R} diagonalna matrika, je grobi pogrešek enega opazovanja povzročil spremembo enega popravka.

V primeru, ko zaznamo popravek verjetno grobo pogrešenega opazovanja, je zaradi koreliranosti popravkov opazovanj težko vedeti kateremu pogrešenemu opazovanju pripada (Kavouras, 1982). Predpostavimo, da imamo med opazovanji samo eno grobo pogrešeno opazovanje ∇l_i . Tako sestavljen vektor $\nabla_i \mathbf{l}$ vsebuje na mestu grobo pogrešenega opazovanja vrednost tega grobega pogreška ∇l_i , ostali elementi pa imajo vrednost 0 (Stopar, 2010).

$$\nabla_i \mathbf{l} = [0, 0, 0, \dots, \nabla l_i, 0, \dots, 0]^T \quad (24)$$

Ob upoštevanju enačbe (21) je vpliv vektorja $\nabla_i \mathbf{l}$ na vektor popravkov dan z naslednjo enačbo:

$$\nabla \mathbf{v} = -\mathbf{R} \nabla_i \mathbf{l} \quad (25)$$

Vpliv grobega pogreška ∇l_i na popravek, ki pripada temu opazovanju, je določen z diagonalnim elementom matrike \mathbf{R} (Stopar, 2010):

$$\nabla_i v_i = -r_i \nabla l_i. \quad (26)$$

Vrednost števila r_i je vedno med 0 in 1, vsota števil nadštevilnosti je pa enaka številu nadštevilnih opazovanj (Kavouras, 1982).

$$\sum_{i=1}^n r_i = r = n - n_0 \quad (27)$$

Vpliv popravka $\nabla_i v_j$ ($i \neq j$) grobo pogrešenega opazovanja ∇l_i , na druge popravke v_j ($j \neq i, j = 1 \dots n$), pa je podan v izvendagonalnem elementu matrike nadštevilnosti \mathbf{R} .

$$\nabla_i v_j = -r_{ji} \nabla l_i \quad (j \neq i, j = 1, \dots, n), \quad (28)$$

Ker je vrednost števila nadštevilnosti med 0 in 1, je samo del grobega pogreška prisotnega v popravkih opazovanj, ostali vpliv je vključen v neznankah. Grobi pogrešek opazovanja ∇l_i , kateremu bo pripadalo veliko število nadštevilnosti r_i , bo imel velik vpliv na popravek v_i , kar pomeni da imamo tako večji nadzor nad opazovanji. Grobi pogrešek ∇l_i pa se lahko prenese na vse popravke, kar je razvidno iz enačbe (26). Da ugotovimo katero opazovanje je grobo pogrešeno, lahko uporabimo metodo za odkrivanje grobih pogreškov, kjer analiziramo popravek verjetno grobo pogrešenega opazovanja. Pri tem mora biti absolutna vrednost $\nabla_i v_i$ večja od absolutne vrednosti $\nabla_i v_j$ ($j \neq i, j = 1, \dots, n$), kar lahko glede na enačbe (26) in (28) zapišemo tudi z členi matrike nadštevilnosti kot (Stojar, 2010):

$$r_i > |r_{ji}| \quad (j \neq i, j = 1, \dots, n) \quad (29)$$

Pri tem lahko ocenimo velikost grobega pogreška ∇l_i , na osnovi izračunanih popravkov tega opazovanja:

$$\nabla l_i = -\frac{v_i}{r_i} \quad (30)$$

2.5 ODKRIVANJE GROBIH POGREŠKOV

Pogreške, ki se pojavljajo v opazovanjih lahko razdelimo v tri skupine: slučajne, sistematične in grobe pogreške. Slučajni ali naključni pogreški so neizogibni in največkrat majhni. So nepredvidljivi in sledijo statističnim zakonom, čeprav lahko z enačbami izrazimo le njihovo povprečno gibanje. V primeru geodetskih meritev se predvideva, da se slučajni pogreški porazdeljujejo normalno.

Sistematični pogreški predstavljajo odstopanje med funkcionalnim modelom in realnostjo. To so na primer, nezadostne redukcije opazovanj zaradi refrakcije, konstante instrumentarija, ali kartografske projekcije in drugi parametri. Grobi pogreški pa so rezultat nepravilnega delovanje instrumentarija ali operaterja (Caspary, 2000).

Testiranje za prisotnost grobih pogreškov bi moralo biti pomemben del pri kateremkoli procesu, kjer izvajamo geodetska opazovanja, pri katerih nismo zainteresirani samo za vrednosti izravnanih koordinat ampak tudi za njihovo kakovost oziroma zanesljivost (Heus, 1982).

Za preverjanje prisotnosti grobih pogreškov se uporabljajo metode statističnega testiranja. V osnovi imamo dva postopka testiranja prisotnosti grobih pogreškov na podlagi popravkov opazovanj, glede na to ali je referenčna varianca znana ali ne. Baarda je za ugotavljanje prisotnosti grobih pogreškov in v primeru znane referenčne variance predlagal globalni test modela. Za njihovo lociranje pa metodo pregleda opazovanj (angl. Data-snooping). V primeru, ko referenčna varianca ni znana, pa je statistični test prisotnosti grobih pogreškov predlagal ameriški geodet Pope, postopek se imenuje τ -test (Kavouras, 1982).

2.5.1 Globalni test modela

Pri globalnem testu modela ugotavljamo prisotnost grobo pogrešenih opazovanj, tega izvedemo takoj po izravnavi, kjer primerjamo skladnost referenčne variance a-posteriori z referenčno varianco a-priori. Če je globalni test neuspešen, je napaka nekje v ničelni hipotezi. Zato je v nadaljevanju potreben pregled opazovanj oziroma »Data-snooping«, pri izvedbi katerega potrebujemo znano a-priori natančnost opazovanj, saj bo v nasprotnem primeru interpretacija rezultatov težavna.

Referenčno varianco a-posteriori izračunamo s pomočjo popravkov opazovanj, ki jih pridobimo po izravnavi in matrike uteži (Pope, 1976):

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{r} \quad (31)$$

Enačbo (31) lahko zapišemo kot:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \sigma_0^2 (\mathbf{v}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{v}) \quad (32)$$

Možno je dokazati, da je pričakovana vrednost izraza $\mathbf{v}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{v}$ enaka r . Iz enačbe (32) lahko izpeljemo referenčno varianco a-priori:

$$\sigma_0^2 = \frac{E(\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v})}{r} \quad (33)$$

Če za referenčno varianco izberemo vrednost 1, lahko zgornjo enačbo preoblikujemo in pridobimo nepristransko oceno za referenčno varianco a-posteriori:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{r} = 1 \quad (34)$$

Za preverjanje skladnosti referenčne variance a-posteriori z a-priori uporabimo globalni test modela, kjer uporabimo testno statistiko Y , ki se porazdeljuje po porazdelitvi χ^2 , z r -prostostnimi stopnjami (Kavouras, 1982).

$$Y = \frac{r \cdot \hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \quad (35)$$

Ničelno hipotezo o porazdelitvi testne statistike zapišemo kot (Kavouras, 1982):

$$H_0: Y \in \chi^2(r) \quad (36)$$

Pričakovana vrednost za $\chi^2(r)$ je r , kar lahko potem zapišemo kot:

$$E\{Y|H_0\} = r \quad (37)$$

Zgornjo enačbo lahko pretvorimo v (Kavouras, 1982):

$$E \left\{ \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \middle| H_0 \right\} = 1 \quad (38)$$

Vidimo lahko, da bi morala biti referenčna varianca a-posteriori skladna z referenčno varianco a-priori. Ob stopnji značilnosti testa α , moramo ničelno hipotezo zavrniti v primeru, da je

$$Y > \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(r) \quad \text{ali} \quad Y < \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(r) \quad (39)$$

V primeru, da ničelno hipotezo zavrnemo, imamo na razpolago veliko alternativnih hipotez (Kavouras, 1982):

- H_{1-1} ... nepravilne uteži opazovanj
- H_{1-2} ... prisotnost grobih pogreškov v opazovanjih
- H_{1-3} ... napačen matematični model

Ker pa ne vemo, katero alternativno hipotezo moramo izbrati, rešujemo ta problem v korakih. Najprej preverimo možnost, če smo mogoče opazovanjem dodelili nepravilne uteži. Ta test imenujemo globalni test modela. Nastavimo testno statistiko Y :

$$Y = \frac{r \cdot \hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = \mathbf{v}^T \frac{\mathbf{P}}{\sigma_0^2} \mathbf{v} \quad (40)$$

Ker je $\mathbf{P} = \sigma_0^2 \boldsymbol{\Sigma}^{-1}$, lahko zgornjo enačbo preoblikujemo v

$$Y = \mathbf{v}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{v} \quad (41)$$

Tako testna statistika ni odvisna od referenčne variance a-priori, ampak samo od popravkov opazovanj in kovariančne matrike opazovanj $\boldsymbol{\Sigma}$ (Kavouras, 1982).

2.5.2 Data Snooping

Data-Snooping je poseben postopek, ki izhaja iz bolj splošnega w testa. Če smo prepričani, da smo ničelno hipotezo v globalnem testu zavrnili zaradi prisotnosti grobih pogreškov v opazovanjih, je naslednja naloga locirati in odstraniti grobe pogreške iz podatkov opazovanj (Heus, 1982).

Testiramo opazovanje, ki ima največji standardizirani popravek, oziroma opazovanje, ki najbolj odstopa od pričakovane vrednosti. Postopek s katerim odkrijemo popravek verjetno grobo pogrešenega opazovanja se imenuje Data-Snooping, ki ga je razvil Baarda, in izhaja iz naslednjih predpostavk (Grigillo, Stopar, 2003):

- Popravki opazovanj in opazovanja so normalno porazdeljeni.
- V množici opazovanj obstaja le eno grobo pogrešeno opazovanje.
- Poznamo referenčno varianco a-priori.

Čeprav je metoda primerna za odstranjevanje le enega grobega opazovanja, pa lahko metodo večkrat uporabimo za postopno izločanje grobo pogrešenih opazovanj (Berk, 1996).

Alternativno hipotezo tako sestavimo kot:

$$H_{1-2i}: \nabla l_i = \mathbf{c}_i \cdot \nabla l \neq 0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad (42)$$

kjer je $\mathbf{c}_i = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ vektor ničel, z enico na mestu i , ∇l pa je grobi pogrešek na mestu i v vektorju \mathbf{l}_i . Metoda uporablja standardizirane popravke w_i za odkrivanje grobih pogreškov. Izračunamo jih kot (Kavouras, 1982):

$$w_i = \frac{v_i}{\sigma_{v_i}}, \quad (43)$$

kjer je:

$$\sigma_{v_i} = \sigma_{l_i} \sqrt{\Gamma_i}. \quad (44)$$

Statistika w_i se porazdeljuje po standardni normalni porazdelitvi. Ob dani stopnji zaupanja α_0 , in uporabi dvostranskega testa, lahko ničelno hipotezo zavrnilo ob naslednjih pogojih (Kavouras, 1982):

$$w_i < N_{\frac{\alpha_0}{2}}(0,1) \quad \text{ali} \quad w_i < N_{1-\frac{\alpha_0}{2}}(0,1) \quad (45)$$

Ničelne hipoteze pa ne smemo zavrniti ob pogoju:

$$N_{\frac{\alpha_0}{2}}(0,1) \leq w_i \leq N_{1-\frac{\alpha_0}{2}}(0,1). \quad (46)$$

V primeru, da imamo opravka z več grobo pogrešenimi opazovanji, moramo postopek zaporedoma ponavljati. Najpogosteje izberemo za stopno zaupanja $\alpha_0=0.001$, kateri pripada mejna vrednost 3.29. Tako ničelno hipotezo zavrnilo če velja (Kavouras, 1982):

$$|v_i| > 3.29\sigma_{v_i}, \quad (47)$$

kjer je i -ti popravek, popravek verjetno grobo pogrešenega opazovanja.

2.5.3 τ -test

V primeru, ko natančnosti opazovanj ne poznamo dovolj dobro, je globalni test neprimeren za testiranje in je tako potrebno uporabiti τ -test. S τ -testom testiramo vsak popravek opazovanja posebej in ugotavljamo ali pripada grobo pogrešenemu opazovanju. τ -test uporablja namesto a-priori referenčne variance a-posteriori varianco. Pregled opazovanj »Data snooping« se tako preoblikuje v (Kavouras, 1982):

$$\tau_i = \frac{v_i}{\hat{\sigma}_0 \sqrt{q_{v_i v_i}}}, \quad (48)$$

ki se porazdeljuje po τ porazdelitvi z r prostostnimi stopnjami:

$$\tau | H_0 \in \tau(r) \quad (49)$$

Ob dani stopnji značilnosti testa α , bo vrednost statistike τ_i prevelika, če velja:

$$|\tau_i| > \tau_\alpha \quad (50)$$

Kjer je τ_α kritična vrednost, ki jo izračunamo s spodnjo enačbo (Pope, 1976):

$$\tau_\alpha(r) = \frac{\sqrt{r} \tau_\alpha(r-1)}{\sqrt{r-1 + \tau_\alpha^2(r-1)}}. \quad (51)$$

Test je potrebno uporabiti zaporedno za vse standardizirane popravke. Slabost τ -testa je, da je referenčna varianca lahko izračunana z pogrešenimi opazovanji. Večji kot bodo ti pogreški, manjša bo vrednost τ_i , kar pomeni da lahko nekatera pogrešena opazovanja ostanejo neodkrita.

3 KAKOVOST GEODETSKIH MREŽ

Pred načrtovanjem geodetske mreže je zelo pomembno, da natančno določimo kriterije, ki jih bomo morali s vzpostavljeno geodetsko mrežo doseči. Ti kriteriji so (Stopar, 1995):

- natančnost, ki omogoča določitev neznank v mreži,
- zunanja zanesljivost, ki določa vpliv neodkritih grobih pogreškov,
- notranja zanesljivost, ki omogoča odkrivanje grobih pogreškov,
- stroški za vzpostavitev geodetske mreže.

Kakovost geodetskih mrež je določena z natančnostjo in zanesljivostjo koordinat točk, ki sestavljajo geodetsko mrežo. V mrežah za splošne namene bo največkrat glavna zahteva dobra splošna natančnost vseh koordinat točk geodetske mreže, kjer bodo te imele v dvodimenzionalni mreži standardno elipso pogreškov obliko kroga, enake velikosti na vseh točkah. Takemu pogoju pravimo homogenost in izotropnost geodetske mreže. V mrežah za posebne namene, kot so zaznavanje deformacij, pa so pogosto podane posebne zahteve tako za natančnost kot zanesljivost. Dobra kontrola s katero bomo lažje odkrili prisotnost grobih napak, je odvisna od oblike mreže in natančnost opazovanj (Mierlo, 1982).

3.1 NATANČNOST GEODETSKIH MREŽ

Natančnost geodetskih mrež je največkrat povezana s določitvijo koordinat novih točk geodetske mreže. Izražena je v variančno kovariančni matriki koordinat točk neznank, ki jo pridobimo z izbranim postopkom izravnave (Kuang, 1991):

$$\Sigma_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^+ \quad (52)$$

$$\Sigma_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}. \quad (53)$$

Iz enačbe (52), kjer so prikazani sestavni elementi za izračun variančno kovariančne matrike neznank lahko vidimo, da lahko vplivamo na natančnost neznank s spreminjanjem naslednjih količin:

- Referenčna varianca a posteriori, katero lahko spreminjamo z izborom različnega merskega instrumentarija, metode izmere, vplivi okolja, sposobnosti opazovalca in ponavljanje meritev.
- Matrika koeficientov enačb popravkov \mathbf{B} , ki je odvisna od položaja točk in vrste opazovanj v mreži.
- Matrika uteži \mathbf{P} , katero sestavljajo a priori uteži meritev, ki so odvisne od vrste meritev in njihovih natančnosti.

Mere, s katerimi opisujemo natančnost geodetskih mrež, se delijo na absolutne in relativne mere. Absolutne mere so tiste ki se nanašajo na eno točko, medtem ko se relativne mere nanašajo na relativni položaj med točkami. Pri absolutnih merah natančnosti je najpogostejša uporabljena mera standardna elipsa pogreškov, ki je generalizirane standardne deviacije (Stopar, 1995). Ta je definirana z velikostjo velike polosi a in male polosi b ter smernim kotom velike polosi θ (Ambrožič, Turk, 2000):

$$\begin{aligned} a &= \hat{\sigma}_0 \sqrt{\lambda_1} \\ b &= \hat{\sigma}_0 \sqrt{\lambda_2} \end{aligned} \quad (54)$$

Kjer so:

- λ – lastna vrednost matrike kofaktorjev,
- σ_0 – a priori standardni odklon enote uteži v mreži.

Verjetnost, da se pravi položaj točke nahaja znotraj izračunanega ocenjenega položaja standardne elipse je funkcija prostorskih stopenj r in doseže maksimalno verjetnost 39,4 % za število nadštevilnih opazovanj $r = \infty$ (Stopar, 1995).

3.2 ZANESLJIVOST GEODETSKIH MREŽ

Kvaliteta geodetskih mrež, opisana samo z merili natančnosti oziroma standardnimi elipsami pogreškov geodetskih točk ni zadovoljiva, ker so mere natančnosti največkrat datumsko odvisne količine in brez meril zanesljivosti ne dajo zadostnega jamstva o kvaliteti geodetske mreže. Brez zanesljivosti torej ne moremo ustrezno oceniti kvalitete geodetske mreže (Stopar, 1995).

Zanesljivost geodetskih mrež je prvi opisal Baarda. Gre za sposobnost geodetske mreže pri odkrivanju in odstranjevanju grobih napak v opazovanjih. Zanesljivost največkrat ločimo na:

- notranjo zanesljivost,
- zunanjo zanesljivost.

Zanesljivost je odvisna od geometrije mreže in matrike uteži opazovanj, dejanska numerična opazovanja na njo ne vplivajo (Kuang, 1991).

3.2.1 Notranja zanesljivost

Notranja zanesljivost nam omogoča odkrivanje grobih napak s testiranjem hipotez s specifično stopnjo zaupanja $1 - \alpha$ in močjo $1 - \beta$. Mero notranje zanesljivosti, ki se nanaša na spodnjo mejo še zaznavnih grobih napak $\nabla_0 l_i$ v i -tem opazovanju, lahko izrazimo s spodnjo enačbo (Kuang, 1991):

$$\nabla_0 l_i = \frac{\delta_0 \sigma_{l_i}}{\sqrt{r_i}} \quad (55)$$

Vidimo da je spodnja meja še zaznavnih grobih napak odvisna od:

- δ_0 , ki predstavlja spodnjo mejo necentralnega parametra, ki je funkcija stopenj α in β ,
- σ_{l_i} je standardna deviacija i -tega opazovanja in
- r_i število nadštevilnosti i -tega opazovanja.

Torej bomo lahko zaznali samo grobe napake, ki so večje od mejne vrednosti, ostale ne bo mogoče zaznati. Manjše kot bo število nadštevilnosti r_i , večji bo moral biti grobi pogrešek, da bi ga lahko zaznali. Za povečanje notranje zanesljivosti moramo povečati natančnost opazovanj in število nadštevilnih opazovanj (Kuang, 1991).

Dobro bi bilo imeti povsod enake vrednosti števil nadštevilnosti, kar bi nam omogočilo odkrivanje grobih pogreškov v celotni mreži (Kuang, 1991). Glede na vrednost števila nadštevilnosti r_i , se pojavljata dve situaciji (Mozetič, 2005):

- $r_i = 1 \rightarrow$ idealen primer, kjer je verjetnost ugotovitve in lociranja grobo pogrešenih opazovanj 100% (grobi pogreški v popravkih grobo pogrešenih opazovanj).
- $r_i = 0 \rightarrow$ slab primer, kjer nimamo možnosti lociranja grobega pogreška (grobi pogreški prešli v neznanke).

3.2.2 Zunanja zanesljivost

Mera zunanje zanesljivosti, se nanaša na maksimalni vpliv nezaznavnih grobih napak ($\nabla_0 l_i$) na pričakovane vrednosti neznanih parametrov izravnave, v našem primeru natančnosti koordinat novih točk. Dana je s sledečo enačbo (Kuang, 1991):

$$\nabla_{0,i} \hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \nabla_{0,i} l \quad (56)$$

Kjer je:

- $\nabla_{0,i} l$ vektor, ki vsebuje ničle, razen na mestu i-tega opazovanja, kjer je vrednost $\nabla_0 l_i$.

Mera zunanje zanesljivosti $\nabla_{0,i} \hat{\mathbf{x}}$ je odvisna od datuma geodetske mreže, kar je njena največja pomanjkljivost. Zato je Baarda predlagal novo standardizirano spremenljivko (Kuang, 1991):

$$\lambda_{i,0} = \frac{1}{\sigma_0^2} (\nabla_{0,i} \hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}^{-1} (\nabla_{0,i} \hat{\mathbf{x}}) \quad (57)$$

Ta je invariantna glede na dane koordinate. Ampak nas zanima samo maksimalna vrednost te spremenljivke, ki je povezana z minimalno deviacijo iz ničelne hipoteze, ki je lahko zaznana z določeno verjetnostjo β_0 .

Sledečo spremenljivko:

$$\lambda_0 = \text{maximum}(\lambda_{i,0}), \quad (58)$$

Lahko tako prevzamemo kot mero zanesljivosti pridobljenih natančnosti koordinat.

3.2.3 Generalni kriterij zanesljivosti

Kot lahko vidimo iz zgornjih mer zanesljivosti, večje kot je število nadštevilnosti r_i , manjša je velikost nezaznavnih grobih napak in njihov vpliv na neznane vrednosti parametrov (Baarda, 1968). Glede na to lahko določimo poseben kriterij zanesljivosti, ki ga lahko definiramo kot:

$$\text{minimum}(r_i) \equiv r_{\min} \rightarrow \text{maximum} \quad (59)$$

Zgornja enačba je znana kot generalni kriterij za notranjo in zunanjo zanesljivost (Amiri-Simkooei, 2001). Minimalna vrednost števila nadštevilnosti v geodetskih mrežah naj bi bila okoli 0.3, kar je razvidno tudi iz spodnje preglednice, kjer so prikazane vrednosti števil nadštevilnosti, pri katerih imamo različno stopnjo kontrole (Marendić in drugi, 2011).

Preglednica 1: Možnost odkritja grobih napak glede na število r_i (Marendić in drugi, 2011):

Vrednost r_i	Stopnja kontrole
$0 < r_i < 0.01$	Ni kontrole
$0.01 < r_i < 0.1$	Nizka kontrola
$0.1 < r_i < 0.3$	Dobra kontrola
$0.3 < r_i < 1$	Odlična kontrola

4 OPTIMIZACIJA GEODETSKIH MREŽ

Zaradi želje po optimalni natančnosti koordinat točk, predvsem v nalogah deformacijskih analiz se v zadnjih desetletjih za projektiranje geodetskih mrež izvaja optimizacija. Optimizacija je postopek, ki nam omogoča vnaprej določiti optimalen geodetski datum, položaj točk v geodetski mreži, optimalne uteži opazovanj in izboljšavo slabših delov geodetske mreže.

Ker znanstveniki niso vedeli kako rešiti vse optimizacijske probleme z enim samim matematičnim algoritmom, so zato postopke optimizacije razdelili na več redov. Posamezne optimizacijske probleme je bilo potrebno reševati z več med seboj povezanimi analitičnimi postopki (Ninkov, 1989). Glede na to kateri problem optimiziramo delimo optimizacijo geodetskih mrež na sledeče štiri redove, ki so prikazani v spodnji preglednici (Grafarend, 1974).

Preglednica 2: Prikaz razdelitve metod optimizacije na redove

	Konstantni parametri	Neznani parametri	Rešitev problema
0. red	B	$\Delta = \hat{x}, Q_{\hat{x}\hat{x}}$	Datum
1. red	P, $Q_{\hat{x}\hat{x}}$	B	Geometrija mreže
2. red	B, $Q_{\hat{x}\hat{x}}$	P	Natančnost
3. red	v	B, P	Izboljšava kvalitete v celoti

Metoda ki je najbolj popularna in primerna za optimizacijo prvega, drugega in tretjega reda je simulacija geodetske mreže. Kjer pred samo fizično izdelavo, navidezno izberemo koordinate točk geodetske mreže in opravimo navidezna opazovanja.

Cilji načrtovanja so bili najprej maksimalna natančnost koordinat točk geodetske mreže in potem stroški njene vzpostavitve. kasneje pa se je pri načrtovanju geodetskih mrež pojavil tudi tretji kriterij, ki vpliva na kakovost mreže in ima zelo pomembno vlogo, to je zanesljivost (Schmitt, 1982).

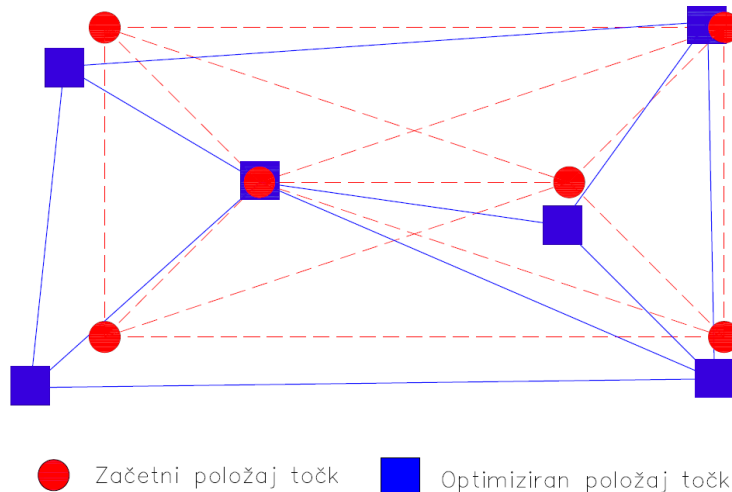
Optimizacija ničtega reda

Optimalni izbor geodetskega datuma oziroma koordinatnega sistema predstavlja optimizacija ničtega reda. Pri tem moramo izbrati primeren koordinatni sistem tako, da pridobimo najbolj optimalno kovariančno matriko glede na zahteve projekta. V večini primerov skušamo zmanjšati sled kovariančne matrike koordinat novih točk v mreži (Amiri-Simkooei, 2007).

Optimizacija prvega reda

Pri doseganju najboljše geometrijske konfiguracije geodetske mreže, nam se v naravi velikokrat pojavijo ovire, ki nam onemogočajo postavitev točk na optimalne položaje. V primeru minimalnih ovir, imamo na razpolago več možnih lokacij točk geodetske mreže. S tem se zadosti potrebi po uporabi kriterija zanesljivosti, ki nam pomaga pri določitvi najboljše lokacije točk geodetske mreže. Pri izboru primerne geometrije mreže, moramo izbrati takšno, da bo določitev koordinat točk čim bolj zanesljiva, pri tem da

upoštevamo tako vrsto kot število opazovanj, ki jih moramo izvesti. Pri optimizaciji prvega reda, gre za problem, pri katerem poskušamo z izbiro primerne oblike geodetske mreže doseči želene natančnosti točk geodetske mreže. Pri tem optimiziramo tako položaje točk kot opazovanja ki jih moramo izvesti (Berne, Baselga, 2004).



Slika 1: Optimiziranje geometrije geodetske mreže

Optimizacija drugega reda

Optimizacija drugega reda je najpomembnejši red optimizacije pri načrtovanju geodetske mreže. Pri optimizaciji drugega reda iščemo optimalne uteži opazovanj, največkrat za pridobitev geodetske mreže visoke natančnosti (Amiri-Simkoei, 2014). Izbira uteži mora biti takšna, da je kovariančna matrika koordinat $\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}$, ki izhaja iz $\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B}$ ekvivalentna kriterijski matriki $\mathbf{C}_{\hat{x}\hat{x}}$ (Crosilla, 1982).

Optimizacija drugega reda je postala najbolj popularna metoda, potem ko jo je dobro definirjal in predstavil Grafarend (1974). Pa tudi ker je matematična formulacija problema optimizacije drugega reda zelo enostavna v primerjavi z reševanjem problema prvega reda (Schmitt, 1979).

Optimizacija tretjega reda

Problem optimizacije tretjega reda je izboljšati, oziroma razširiti obstoječo geodetsko mrežo na optimalni način z dodajanjem dodatnih točk ali opazovanj. V tretjem redu se pojavljata dva različna problema. Prvi je optimalno izboljšanje mreže, v primeru ugotovitve šibke mreže glede na postavljene zahteve. Za izboljšanje natančnosti ali zanesljivosti je potrebno spremeniti plan meritev ali natančnost opazovanj. Drugi problem pa je optimalna oblika zgoščene mreže. Kjer obstoječo mrežo zgostimo z dodatnimi točkami in optimiziramo njihov položaj in plan meritev s katerimi bodo povezane z obstoječimi točkami. Oba problema sta kombinacija prvega in drugega reda, saj spreminjamo tako lokacije točk, kot količino opazovanj in njihove natančnosti. Izboljšave so nujno pomembne v primeru slabo določenih točk geodetske mreže, ki ne zadostijo zadanim pogojem. V glavnem se v postopku optimizacije spreminja količina opazovanj in natančnost opazovanj. Le v redkih primerih je potrebno vključiti dodatne točke za optimizacijo geodetske mreže (Schmitt, 1985).

4.1 OPTIMIZACIJA DRUGEGA REDA

Z optimizacijo drugega reda pridobimo optimalne uteži oziroma standardne deviacije opazovanj, ki jih planiramo izvesti v mreži. Najpogosteje temeljijo metode optimizacije drugega reda na matematičnem modelu izravnave in z uporabo metode najmanjših kvadratov, kjer skušamo minimizirati normo $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$ in doseči najmanjšo sled matrike kofaktorjev $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}$ (Pavlovčič Prešeren, 2014).

Tako problem prvega kot drugega reda optimizacije rešujemo za pridobitev matrike \mathbf{B} in matrike uteži \mathbf{P} v dobro znani enačbi, kjer je matrika \mathbf{B} , tista ki vsebuje informacije o obliki mrež, matrika \mathbf{P} uteži opazovanj in $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}$ kriterijska matrika, ki vsebuje pričakovane kovariance koordinat točk:

$$(\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}. \quad (60)$$

Potek postopka optimizacije drugega reda:

- (i) Vzpostavimo mrežo z vsemi možnimi opazovanji
- (ii) Rešimo problem drugega reda optimizacije
- (iii) Izločimo opazovanje z najmanjšo utežjo
- (iv) Se vrnemo v korak (ii)
- (v) Postopek optimizacije se ustavi, ko dosežemo zahtevane kriterije zanesljivosti, oziroma ko zadostimo pričakovanim natančnostim. Ali pa postopek ustavimo, ko z izbranim instrumentarijem ne moremo doseči želene natančnosti.

Izločanje opazovanj iz vektorja \mathbf{l} , ki imajo majhne uteži je smiselno, saj te bistveno ne prispevajo k natančnosti ali zanesljivosti geodetske mreže, vendar pa to ne velja za vsa opazovanja, zato je potrebno pri izločevanju opazovanj spremljati njihov vpliv na lastnosti geodetske mreže (Cross, Fagier, 1982).

Kovariančno matriko koordinat točk pridobimo:

- v primeru če imamo poln rang matrike \mathbf{B} :

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} = \sigma_0^2 (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} \quad (61)$$

$$\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}^{-1} \quad \text{za } r(\mathbf{B}) = u \quad (62)$$

- v primeru defekta ranga, kjer moramo uporabiti psevdoinverzijo, ki minimizira Evklidsko normo $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}$ (Pavlovčič Prešeren, 2014):

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} = \sigma_0^2 (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^+ = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} \quad (63)$$

$$\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}^+ \quad \text{za } r(\mathbf{B}) < u \quad (64)$$

Tako je za izračun uteži potrebno poznati matriko \mathbf{B} , ki predstavlja seznam opazovanj in obliko mreže, a-priori natančnost σ_0^2 , in $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}$, ki predstavlja predhodno določeno matriko kofaktorjev, katere vrednosti oziroma natančnosti koordinat želimo doseči (Pavlovčič Prešeren, 2014).

Za pridobitev rešitev optimizacijskega problema v različnih redovih smo odvisni od sestavljene matematične forme in oblike kriterijske funkcije. Čiste analitične metode so prisotne predvsem pri optimizaciji drugega reda, kjer so lahko problemi predstavljeni kot linearne enačbe ali linearne neenakosti. Standardni algoritmi linearnega ali nelinearnega programiranja so v uporabi kot dobro znana simplex metoda. V zadnjem času so imele veliko uspeha direktne metode, ki uporabljajo generalizirano inverzijo (Schmitt, 1982).

V grobem delimo metode optimizacije drugega reda na:

- Direktne:
 - o Metoda minimalne norme matrike \mathbf{P}
 - o Modificirana metoda
 - o Direktna metoda
- Iterativne metode

4.1.1 Metoda minimalne norme matrike \mathbf{P}

V primeru, da poznamo matriko \mathbf{B} in matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^+$ ima sistem enačb $\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} = \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^+$ več rešitev. Enolično rešitev pridobimo z minimumom evklidske norme matrike uteži \mathbf{P} (Pavlovčič Prešeren, 2014):

$$\|\mathbf{P}\| = \text{minimum} \quad (65)$$

in pa minimalno vsoto kvadratov:

$$(\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} - \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1})^T (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} - \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1}) = \text{minimum} \quad (66)$$

V primeru datuma, ki ga določajo dane točke, imamo poln rang matrike \mathbf{B} , kjer z inverzom matrike kofaktorjev $\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}$ pridobimo rešitev kot (Pavlovčič Prešeren, 2014):

$$\mathbf{P} = (\mathbf{B}^T)^+ \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} \mathbf{B}^+ \quad (67)$$

Pseudoinverzijo matrike \mathbf{B} izračunamo kot (Pavlovčič Prešeren, 2014):

$$\mathbf{B}^+ = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \quad (68)$$

V primeru enotske matrike kriterija $\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}} = 1$, kar pomeni, da želimo pridobiti homogene in izotropne natančnost koordinat točk, pa pridobimo matriko uteži z enačbo (Pavlovčič Prešeren, 2014):

$$\mathbf{P} = (\mathbf{B}^T)^+ \cdot \mathbf{B}^+ \quad (69)$$

Tako pridobljena matrika \mathbf{P} , je odvisna samo od geometrije mreže, kar predstavlja matrika \mathbf{B} . Če matrika \mathbf{P} vsebuje defekt ranga, je singularna. Takšen način optimizacije je praktično nemogoč, ker so v matriki \mathbf{P} med seboj korelirane količine, kar pa v realnosti ne moremo realizirati ali izvesti takšnih meritev (Pavlovčič Prešeren, 2014).

4.1.2 Modificirana metoda

Pri modificirani metodi se izognemo zahtevi glede funkcijske zveze med opazovanimi količinami, saj metoda temelji na določitvi diagonalne matrike uteži. Osnovna enačba iz katere izhajamo je enaka kot pri metodi minimalne norme:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} = \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^+ \quad (70)$$

Katero lahko zapišemo kot Khatri-Rao Produkt:

$$(\mathbf{B}^T \odot \mathbf{B}^T) \cdot \mathbf{p} = \mathbf{q} \quad (71)$$

Kjer:

- $\mathbf{B}^T \odot \mathbf{B}^T$ predstavlja Khatri-Rao produkt,
- \mathbf{p} predstavlja vektor uteži, oziroma glavno diagonalno matrike uteži \mathbf{P}
- \mathbf{q} predstavlja vektor kofaktorjev, ki ga pridobimo z vektorizacijo matrike kofaktorjev $\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^+$, kar pomeni da stolpce v matriki $\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^+$, zapišemo v vektor \mathbf{q} enega pod drugim.

Pri uporabi krajšave $\mathbf{G} = (\mathbf{B}^T \odot \mathbf{B}^T)$, imamo potem več možnih rešitev (Pavlovčič Prešeren, 2014):

- V primeru da je matrika $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ regularna, je rešitev sistema normalnih enačb:

$$\mathbf{p} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} (\mathbf{G}^T \mathbf{q}) \quad (72)$$

- V primeru da je matrika $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ singularna, je rešitev sistema normalnih enačb, ob upoštevanju da minimiziramo produkta $\mathbf{m}^T \mathbf{m}$ in $\mathbf{p}^T \mathbf{p}$:

$$\mathbf{p} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^+ (\mathbf{G}^T \mathbf{q}), \quad (73)$$

$$\mathbf{m} = \text{vec}(\mathbf{M}), \quad \mathbf{M} = \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} - \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^+$$

Pri uporabi modificirane metode se lahko zgodi, da pridobimo negativne uteži pri geodetskih mrežah s slabo geometrijsko razporeditvijo točk. V tem primeru opazovanja katerim pripadajo negativne uteži odstranimo iz modela, za ostale uteži opazovanj pa določimo linearno transformacijo (Pavlovčič Prešeren, 2014):

$$\mathbf{p}_t = \lambda \cdot \mathbf{p}, \quad (74)$$

kjer lambda predstavlja koeficient proporcionalnosti. Linearno transformacijo lahko izvedemo, le ko imamo vse uteži neničelne. Modificiranje z linearno transformacijo nam omogoča, da pridobimo boljšo skladnost z matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}$. Koeficient proporcionalnosti izračunamo s predpostavko, da je

vsota kvadratov odstopanj psevdoinverzne matrike normalnih enačb in matrike kriterija minimalna (Pavlovčič Prešeren, 2014):

$$\mathcal{F}(\lambda) = \mathbf{d}^T \mathbf{d} = \text{minimum}, \quad (75)$$

Kjer je $\mathbf{d} = \text{vec}((\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^+ - \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}})$.

$$\lambda = \frac{\text{sled}[(\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^+ \cdot (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^+]}{\text{sled}[(\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^+ \cdot \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}]} \quad (76)$$

Pri modificirani metodi si moramo zapomniti:

- da vektor uteži \mathbf{p} dobimo z rešitvijo enačb (73) in (74) ob pogoju, da upoštevamo najmanjše odstopanje od matrike kofaktorjev $\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^+$,
- da z linearno transformacijo, transformiramo vektor uteži \mathbf{p} , iz katerih smo odstranili negativne uteži v transformiran vektor uteži \mathbf{p}^T , s čimer izboljšamo aproksimacijo z matriko kriterija.

4.1.3 Direktna metoda

Pri izračunu optimalnih uteži z direktno metodo, izhajamo iz matematičnega modela, ki ga dobimo z množenjem matrike normalnih enačb z matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}$ (Pavlovčič Prešeren, 2014):

$$\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}} = \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^+ \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \quad (77)$$

Iz tega sledi naslednja enačba:

$$\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}} = \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \quad (78)$$

Izraz $\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \mathbf{B}^T$ lahko označimo z \mathbf{A} in tako zapišemo zgornjo enačbo v obliki (Pavlovčič Prešeren, 2014):

$$\mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{A}^T = \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}} \quad (79)$$

Kar lahko zapišemo tudi s pomočjo Khatri-Rao produkta kot:

$$(\mathbf{A} \odot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{p} = \mathbf{q} \quad (80)$$

Uvedemo še vektor odstopanj \mathbf{d} , ki smo ga definirali že pri modificirani metodi (Pavlovčič Prešeren, 2014)

$$(\mathbf{A} \odot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{p} = \mathbf{q} + \mathbf{d}, \quad (81)$$

Ob upoštevanju kriterija:

$$\mathbf{d}^T \cdot \mathbf{d} = \text{minimum} \quad (82)$$

Dobimo sistem normalnih enačb (Pavlovčič Prešeren, 2014):

$$(\mathbf{A} \odot \mathbf{A})^T \cdot (\mathbf{A} \odot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{p} - (\mathbf{A} \odot \mathbf{A})^T \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (83)$$

Če zgornjo enačbo zapišemo s Khatri-Rao produktom dobimo naslednjo enačbo

$$(\mathbf{G}^T \mathbf{G}) \mathbf{p} - \mathbf{G}^T \mathbf{q} = 0 \quad (84)$$

V primeru regularne matrike $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ je rešitev za pridobitev optimalnih uteži naslednja (Pavlovčič Prešeren, 2014):

$$\mathbf{p} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{q} \quad (85)$$

V primeru singularne matrike $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$, je rešitev sistema normalnih enačb za pridobitev optimalnih uteži, ob upoštevanju, da minimiziramo produkt $\mathbf{d}^T \mathbf{d}$ in $\mathbf{p}^T \mathbf{p}$ naslednja (Pavlovčič Prešeren, 2014):

$$\mathbf{p} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^+ \mathbf{G}^T \mathbf{q} \quad (86)$$

Kvaliteta aproksimacije je izražena s produktom $\mathbf{d}^T \mathbf{d}$, manjša kot je vsota kvadratov popravkov boljša je aproksimacija (Schmitt, 1985).

4.1.4 Indirektna metoda optimizacije

Pri indirektni metodi optimizacije je matematični model sestavljen na podlagi rešitve ocene neznank modela posredne izravnave po metodi najmanjših kvadratov (Pavlovčič Prešeren, 2014).

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^+ \mathbf{B}^T \mathbf{P} \cdot \mathbf{f} \quad (87)$$

Matriko kofaktorjev zamenjamo z matriko kriterija in pridobimo matematični model indirektna metode optimizacije (Pavlovčič Prešeren, 2014):

$$\mathbf{H} = (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^+ \mathbf{B}^T \mathbf{P}, \quad \mathbf{P}^+ = \mathbf{Q}_{11} \quad (88)$$

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{P}^+ \cdot \mathbf{H}^T \cong \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} \quad (89)$$

Matrika uteži \mathbf{P}^+ je oblike:

$$\mathbf{P}^+ = \text{diag}(\mathbf{Q}_{11}) = \text{diag}(p_1^+, p_2^+, \dots, p_n^+), \quad (90)$$

kjer je $p_i^+ = \frac{1}{p_i}$.

Enačbo (90) lahko zapišemo tudi s pomočjo Khatri-Rao produkta:

$$(\mathbf{H} \odot \mathbf{H}) \cdot \mathbf{p}^+ = \mathbf{q}, \quad (91)$$

kjer je $\mathbf{p}^+ = \text{vec}(\mathbf{p})$ in $\mathbf{q} = \text{vec}(\mathbf{Q}_{xx})$.

Pri uvedbi vektorja odstopanj \mathbf{d} (glej modificirano metodo), zapišemo gornjo enačbo kot:

$$(\mathbf{H} \odot \mathbf{H}) \cdot \mathbf{p}^+ = \mathbf{q} + \mathbf{d}, \quad (92)$$

Z uporabo metode najmanjših kvadratov $\mathbf{d}^T \mathbf{d} = \text{minimum}$, pridobimo sistem normalnih enačb (Pavlovčič Prešeren, 2014):

$$(\mathbf{H} \odot \mathbf{H})^T \cdot (\mathbf{H} \odot \mathbf{H}) \cdot \mathbf{p}^+ - (\mathbf{H} \odot \mathbf{H})^T \cdot \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (93)$$

Če namesto $(\mathbf{H} \odot \mathbf{H})$ uporabimo oznako \mathbf{Z} lahko zgornjo enačbo zapišemo kot:

$$(\mathbf{Z}^T \mathbf{Z}) \mathbf{p}^+ - \mathbf{G}^T \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (94)$$

V primeru, da je matrika $(\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})$ regularna je rešitev sistema normalnih enačb naslednja: (Pavlovčič Prešeren, 2014)

$$\mathbf{p}^+ = (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{q} \quad (95)$$

V primeru singularnosti matrike $(\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})$ je rešitev ob upoštevanju minimalne norme $\mathbf{d}^T \mathbf{d}$ in $\mathbf{p}^T \mathbf{p}$ naslednja (Pavlovčič Prešeren, 2014)

$$\mathbf{p}^+ = (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^+ \mathbf{Z}^T \mathbf{q} \quad (96)$$

Za kontrolo kakovosti aproksimacije matrike kofaktorjev z matriko kriterija, uporabimo globalno mero $\mathbf{d}^T \mathbf{d} = \text{minimum}$, kjer uporabimo matriko kofaktorjev, ki jo izračunamo s pomočjo diagonalne matrike uteži $\mathbf{p} = \text{vec}(\mathbf{P})$ in dano matriko kofaktorjev \mathbf{Q}_{xx} .

Rešitvi, ki ju pridobimo z enačbama (96) in (97) sta le približni, saj je potrebno uporabiti iterativni postopek, kjer z izračunananim vektorjem uteži ponovno izračunamo matriko \mathbf{H} iz katere sledi ponoven izračun novih uteži.

4.2 KRITERIJI OPTIMIZACIJE GEODETSKE MREŽE

Pri optimizaciji se pojavljajo naslednji trije kriteriji kakovosti, ki smo jih opisali že pri definiranju kakovosti geodetskih mrež v poglavju 3 in jih moramo upoštevati pred vzpostavitvijo geodetske mreže. Pri tem moramo paziti, da ne zanemarimo nobenega, saj vsak prispeva svoj delež pri vzpostavljanju optimalne geodetske mreže, ki bo učinkovito služila svojemu namenu (Pavlovčič Prešeren, 2014).

Navadno so si vsi kriteriji nasprotujoči. Vedno bo najbolj zanesljiva in natančna geodetska mreža najdražja. Zato tudi ne planiramo vedno čim bolj natančne in zanesljive geodetske mreže ampak planiramo takšno geodetsko mrežo, da bomo ugodili natančnosti, ki jo od nas zahteva naročnik. Določiti skušamo optimalne kriterije, s katerimi bomo dosegli natančno in zanesljivo geodetsko mrežo in jo realizirali s razpoložljivimi finančnimi sredstvi.

Na splošno lahko rečemo, da je realizacija zanesljivosti pretežno naloga optimizacije prvega reda, ter da se optimizacija drugega reda ukvarja predvsem z natančnostjo. Minimiziranje stroškov pa lahko integriramo v oba, tako prvega kot drugi red (Schmitt, 1982).

4.2.1 Kriteriji natančnosti

Namen vzpostavitve geodetske mreže določa natančnost koordinat točk v mreži. Za mreže, ki služijo večjemu in različnemu številu nalog, kot so na primer državne mreže, je težko določiti povezavo med vrednostjo njene vzpostavitve in geodetskimi numeričnimi indikatorji natančnosti, kar za mreže z določenim namenom to ne predstavlja težave. Tako je za primer kontroliranja smeri izkopa tunela, ali za določitev fotogrametrične kontrole dokaj jasno kakšno natančnost potrebujemo. V mrežah, ki nimajo točno določenega namena pa je stopnja natančnosti težko določljiva. V teh primer je dobro vedeti kakšna mreža bi bila idealna.

Natančnost idealne mreže je lahko definirana na podlagi teoretičnih rezultatov ali pa so določene na podlagi empiričnih raziskav pri delu z realnimi geodetskimi mrežami (Kuang, 1991).

4.2.1.1 Skalarni kriteriji

Mera za natančnost je lahko izražena kot skalarna funkcija elementov kovariančne matrike koordinatnih neznank $\Sigma_{\hat{x}\hat{x}}$. Namen je, da zadovolji potrebo po splošni predstavitvi natančnosti geodetske mreže. Lahko izbiramo med naslednjimi skalarnimi funkcijami (Kuang, 1991):

- Optimalni kriterij N minimizira Frobeniusovo normo kovariančne matrike neznank $\Sigma_{\hat{x}\hat{x}}$.

$$f = \|\Sigma_{\hat{x}\hat{x}}\|_F$$

- Optimalni kriterij A minimizira sled kovariančne matrike $\Sigma_{\hat{x}\hat{x}}$, kjer so $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ neničelne lastne vrednosti kovariančne matrike $\Sigma_{\hat{x}\hat{x}}$ (Kuang, 1991)

$$f = \text{sled}(\Sigma_{\hat{x}\hat{x}}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r = \text{minimum.}$$

- Optimalni kriterij E minimizira največjo lastno vrednost kovariančne matrice $\Sigma_{\hat{x}\hat{x}}$
 $f = \lambda_{\max} = \text{minimum.}$
- Optimalni kriterij S minimizira razliko med največjo in najmanjšo lastno vrednostjo kovariančne matrice $\Sigma_{\hat{x}\hat{x}}$.
 $f = \lambda_{\max} - \lambda_{\min} = \text{minimum.}$
- Optimalni kriterij D minimizira determinanto kovariančne matrice neznank.
 $f = \det(\Sigma_{\hat{x}\hat{x}}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_u = \text{minimum.}$

Skalarne mere predstavljajo grobo lastnost kovariančne matrice neznank $\Sigma_{\hat{x}\hat{x}}$. Zato je njihova uporaba koristna le kot primerjava z rezultati, ki jih pridobimo z drugimi načini optimizacije. Slabost je tudi v tem, da pri izračunu celotnega kriterija natančnosti ne moremo kontrolirati posameznih elementov kovariančne matrice (Pavlovčič Prešeren, 2014).

4.2.1.2 Matrika kriterija

Slabosti skalarnih kriterijev se lahko izognemo z uporabo umetne variančno-kovariančne matrice kriterija $C_{\hat{x}\hat{x}}$, ki nam omogoča bolj detajlno kontrolo natančnosti. Matrika kriterija vsebuje idealno strukturo, ki predstavlja optimalno natančnost planirane geodetske mreže. Rešitev optimizacije v tem primeru je, da se ji mora z kovariančno matriko neznank približati kolikor je le mogoče (Kuang, 1991).

$$\|\Sigma_{\hat{x}\hat{x}} - C_{\hat{x}\hat{x}}\| = \text{minimum.} \quad (97)$$

Matriko kriterija lahko sestavimo na več načinov:

- Kot enotska matrika
- Po postopku Taylor-Karman
- Kaotični postopek
- Modifikacija navedenih načinov

Pri sestavljanju matrice kriterija je potrebno upoštevati zahteve, ki jih mora geodetska mreža izpolniti. Najpogostejši pogoj pri vzpostavljanju geodetske mreže, je da morajo vse točke v mreži biti enakomerno kvalitetno določene, oziroma da mora biti natančnost geodetske mreže homogena in izotropna (Pavlovčič Prešeren, 2014).

4.2.1.3 Enotska matrika kriterija

Za sestavo matrike kriterija kot grobi približek lahko uporabimo varianco, ki ji pripišemo vsem točkam v mreži. Tako izpolnimo zahtevo o homogenosti in izotropnosti, vendar je takšno kovariančno matriko v realnosti težko doseči, saj ne upošteva korelacije med koordinatami geodetskih točk (Pavlovčič Prešeren, 2014).

$$\mathbf{C}_{\hat{x}\hat{x}} = \sigma^2 \mathbf{I} \quad (98)$$

σ^2 ... predstavlja varianco koordinat točk

\mathbf{I} ... predstavlja enotsko matriko

Primer sestavljene matrike kriterija kot grobi približek je prikazana spodaj. Takšno matriko kriterija uporabimo v geodetskih mrežah, kjer želimo pridobiti standardne elipse pogreškov kroga z radijem velikosti 2mm.

$$\mathbf{C}_{\hat{x}\hat{x}} = (0.002\text{m})^2 \cdot \mathbf{I}$$

$$\mathbf{C}_{\hat{x}\hat{x}} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 4 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix} m^2$$

4.2.1.4 Taylor-Karmanov postopek sestave matrike kriterija

Postopek sestave matrike kriterija po Taylor-Karmanovem postopku je predstavil Grafarend (1972). Metoda zagotavlja, da pridobimo homogeno in izotropno geodetsko mrežo. Poleg varianc metoda definira kovariance med koordinatami dveh točk. Sestava matrike kriterija poteka s pomočjo širinske in dolžinske korelacijske funkcije med dvema točkama (Kuang, 1991):

$$\sigma_0^2 C_{ij} = \begin{bmatrix} \Sigma_m(s) & 0 \\ 0 & \Sigma_m(s) \end{bmatrix}_{2 \times 2} + [\Sigma_l(s) - \Sigma_m(s)] \frac{1}{s^2} [(r_i - r_j)(r_i - r_j)^T]_{2 \times 2}, \quad (99)$$

kjer je:

- $\Sigma_m(s)$... širinska korelacijska funkcija,
- $\Sigma_l(s)$... dolžinska korelacijska funkcija,
- s ... dolžina med dvema točkama, ki jo izračunamo po Pitagorovem izreku,
- ter $r_i = (x_i, y_i)^T$ in $r_j = (x_j, y_j)^T$.

V primeru da je $s = 0$ velja:

$$\Sigma_m(0) = \Sigma_l(0) = \sigma^2 \quad (100)$$

Kjer je σ^2 pričakovana ali želena varianca pričakovanih koordinat, $\Sigma(s)$ različne korelacijske funkcije, kot so Gaussova, Besselova, eksponentna, Meisslova, Baardova ali eksponentno kosinusna korelacijska funkcija. Splošno obliko matrike kriterija, sestavljene po metodi Taylor-Karman, lahko zapišemo kot (Bae, 2005):

$$\sigma_0^2(\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}})_{ij} = \sigma_0^2 \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} \begin{pmatrix} x_i - x_j \\ y_i - y_j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_m(s) & 0 \\ 0 & \Sigma_m(s) \end{bmatrix} + [\Sigma_1(s) - \Sigma_m(s)] \begin{bmatrix} \frac{(x_i - x_j)^2}{s^2} & \frac{(x_i - x_j)(y_i - y_j)}{s^2} \\ \frac{(x_i - x_j)(y_i - y_j)}{s^2} & \frac{(y_i - y_j)^2}{s^2} \end{bmatrix} \quad (101)$$

Če uporabimo Besselove modificirane funkcije drugega reda, izračunamo dolžinsko korelacijsko funkcijo $\Sigma_1(s)$ in širinsko korelacijsko funkcijo $\Sigma_m(s)$ kot (Bae, 2005):

$$\begin{aligned} - \Sigma_1(s) &= -\frac{4d^2}{s^2} + 2K_0\left(\frac{s}{d}\right) + \frac{4d^2}{s}K_1\left(\frac{s}{d}\right) + 2\frac{s}{d}K_1\left(\frac{s}{d}\right) \text{ in} \\ - \Sigma_m(s) &= \frac{4d^2}{s^2} - 2K_0\left(\frac{s}{d}\right) - \frac{4d}{s}K_1\left(\frac{s}{d}\right), \end{aligned} \quad (102)$$

kjer je

- d karakteristična dolžina med točkama,
- s je dolžina med točkama v mreži,
- $K_0\left(\frac{s}{d}\right)$ je ničelna stopnja modificirane Besselove funkcije drugega reda,
- $K_1\left(\frac{s}{d}\right)$ je prva stopnja modificirane Besselove funkcije drugega reda.

Izbira karakteristične dolžine še vedno obstaja problem. Schmitt (1980), je predlagal, da naj bi bila karakteristična dolžina krajša od najkrajše dolžine v mreži. Medtem, ko je Wimmer (1982) predlagal, da je karakteristična dolžina 10x krajša od najdaljše dolžine med točkama $\frac{l_{\max}}{10}$ (Bae, 2005).

4.2.1.5 Kaotični postopek sestave matrike kriterija

Pri Taylor-Karmanovi metodi sestavimo matriko kriterija, s katero pridobimo homogeno in izotropno geodetsko mrežo. Če pa hočemo imeti tudi relativne elipse v obliki kroga, pa je potrebno matriko kriterija sestaviti s kaotičnim postopkom, ki ga je predstavil Baarda. Matriko kriterija sestavimo po spodnjem vzorcu (Kuang, 1991):

$$(\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}) = \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ x_j \\ y_j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} d^2 & 0 & d^2 - d_{ij}^2 & 0 \\ 0 & d^2 & 0 & d^2 - d_{ij}^2 \\ d^2 - d_{ij}^2 & 0 & d^2 & 0 \\ 0 & d^2 - d_{ij}^2 & 0 & d^2 \end{bmatrix}, \quad (103)$$

kjer je:

- d^2 konstanta (velikost elipse pogreškov v homogeni in izotropni mreži),

- $d_{ij}^2 = f(s)$ je pozitivna, monotona naračajoča izbirna funkcija dolžine s med točkama,
- d_{ij}^2 in d^2 je potrebno izbrati tako, da je $(\mathbf{C}_{\hat{x}\hat{x}})_{ij}$ pozitivno definitna.

Ker želimo imeti tudi relativne elipse pogreškov oblike kroga, zapišemo kovariančno matriko razlik koordinat kot (Amiri Simkooei, 1998):

$$\Sigma_{\Delta x \Delta y} = \begin{bmatrix} \sigma_{\Delta x}^2 & \sigma_{\Delta x \Delta y} \\ \sigma_{\Delta x \Delta y} & \sigma_{\Delta y}^2 \end{bmatrix} \quad (104)$$

Kjer so (Amiri Simkooei, 1998):

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta x}^2 &= \sigma_{x_i}^2 - 2\sigma_{x_i x_j} + \sigma_{x_j}^2 = d^2 - 2(d^2 - d_{ij}^2) + d^2 = 2d_{ij}^2 \\ \sigma_{\Delta y}^2 &= \sigma_{y_i}^2 - 2\sigma_{y_i y_j} + \sigma_{y_j}^2 = d^2 - 2(d^2 - d_{ij}^2) + d^2 = 2d_{ij}^2 \\ \sigma_{\Delta x \Delta y} &= \sigma_{\Delta x \Delta y} = \sigma_{x_i y_i} + \sigma_{x_j y_j} - \sigma_{x_i y_j} - \sigma_{x_j y_i} = 0 \end{aligned} \quad (105)$$

V izpeljanih enačbah ni več prisotne konstante d^2 , kar pomeni da je kovariančna matrika razlik koordinat od nje neodvisna. Za izbirno funkcijo d_{ij}^2 lahko izberemo eno od spodnjih funkcij (Amiri Simkooei, 1998):

- linearna, ki jo je predlagal Baarda: $d_{ij}^2 = c_0 + c_1 s$,
- logaritmična, ki jo je predlagal Karadaidis (1984): $d_{ij}^2 = c_0^2 + c_1^2 c_2 \ln\left(1 + \frac{s}{c_2}\right)$,
- eksponentna, ki jo je predlagal Meissl (1976): $d_{ij}^2 = c_0^2 + c_1(1 - \exp(-c_2^2 s^2))$.

Parametre izbirne funkcije c_0 , c_1 in c_2 pridobimo s poizkušanjem (Kuang, 1991).

4.2.1.6 Modifikacija navedenih načinov

Pri mrežah za posebne namene, na primer za uporabo v inženirski geodeziji ali za določanje premikov in deformacij, lahko elemente kriterijske matrike izračunamo iz danih naročnikovih zahtev. Te so na primer elipse pogreškov ali natančnosti iskanih količin oziroma neznank. V prejšnjih načinih sestave matrike kriterija, smo obravnavali geodetsko mrežo kot celoto, kjer pa zahteve po homogenosti in izotropnosti celotne mreže težko ali celo nismo mogli v praksi realizirati. Pri modifikaciji navedenih načinov pa sestavimo matriko kriterija, tako da samo del geodetske mreže izpolnjuje zahtevam naročnika (Pavlovčič Prešeren, 2014).

Na podlagi tega je Koch (1982) predlagal sestavo matrike kriterija z modifikacijo trenutne kovariančne matrike koordinat točk geodetske mreže na naslednji način:

Naj bosta \hat{x}_i, \hat{y}_i in \hat{x}_j, \hat{y}_j pričakovane koordinate projektiranih točk. Njihova kovariančna matrika pa je dana kot (Koch, 1985):

$$C \begin{pmatrix} \hat{x}_i \\ \hat{y}_i \\ \hat{x}_j \\ \hat{y}_j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_i}^2 & \sigma_{x_i y_i} & \sigma_{x_i x_j} & \sigma_{x_i y_j} \\ \text{Simetrično} & \sigma_{y_i}^2 & \sigma_{y_i x_j} & \sigma_{y_i y_j} \\ & & \sigma_{x_j}^2 & \sigma_{x_j y_j} \\ & & & \sigma_{y_j}^2 \end{bmatrix} \quad (106)$$

Kovariančno matriko razlik koordinat pridobimo z uporabo zakona o prenosu varianc in kovarianc.

$$(C_{\Delta \hat{x}})_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_i}^2 - 2\sigma_{x_i x_j} + \sigma_{x_j}^2 & \sigma_{x_i y_i} + \sigma_{x_j y_j} - \sigma_{x_i y_j} - \sigma_{x_j y_i} \\ \sigma_{x_i y_i} + \sigma_{x_j y_j} - \sigma_{x_i y_j} - \sigma_{x_j y_i} & \sigma_{y_i}^2 - 2\sigma_{y_i y_j} + \sigma_{y_j}^2 \end{bmatrix} \quad (107)$$

Prva točka bo imela elipso pogreškov v obliki kroga če bosta izpolnjena pogoja:

$$(\sigma_{x_i}^2 - \sigma_{y_i}^2)^2 + (2\sigma_{x_i y_i})^2 = 0, \quad (108)$$

kar bo veljajo le v primeru da je:

$$\sigma_{x_i}^2 = \sigma_{y_i}^2 \text{ in } \sigma_{x_i y_i} = 0. \quad (109)$$

Za drugo točko pa pogoj:

$$\sigma_{x_j}^2 = \sigma_{y_j}^2 \text{ in } \sigma_{x_j y_j} = 0. \quad (110)$$

Če sta izpolnjena tudi naslednja pogoja:

$$\sigma_{x_i x_j} = \sigma_{y_i y_j} \text{ in } \sigma_{y_i x_j} = -\sigma_{x_i y_j}, \quad (111)$$

bo tudi relativna elipsa med točkama oblike kroga (Kuang, 1991). Če v kovariančno matriko neznank $\Sigma_{\hat{x}\hat{x}}$ vstavimo enačbe (110), (111) in (112) za izbrane točke, dobimo na teh točkah elipse pogreškov v obliki kroga, in tudi relativne elipse med temi točkami imajo obliko kroga. Tako dobljeno kovariančno matriko lahko nato uporabimo kot kriterijsko matriko za optimizacijo geodetske mreže (Koch, 1985).

4.2.1.7 Kriteriji zanesljivosti

V poglavju 3.2.1 kjer smo obravnavali notranjo zanesljivost, lahko povzamemo, da večji kot je diagonalni element matrike nadštevilnost \mathbf{R} , manjša je velikost grobega pogreška in njegov vpliv na ocenjene neznanke. Kriterij zanesljivosti geodetske mreže lahko zapišemo kot (Pavlovčič Prešeren, 2014):

$$\|\mathbf{r}\|_2 \rightarrow \text{maximum},$$

kjer je \mathbf{r} vektor, z vrednostmi iz diagonale matrike nadštevilnosti \mathbf{R} . Ker pa želimo zanesljivost preveriti na posameznem opazovanju je boljša izbira optimalni kriterij zanesljivosti, kjer maksimiramo najmanjšo vrednost števila nadštevilnosti (Pavlovčič Prešeren, 2014):

$$r_{\min} \rightarrow \text{maximum.}$$

Amiri Simkooei (2014) je problem zanesljivosti geodetskih mrež skušal rešiti tako, da bi odkril najmanjši možni grobi pogrešek in hkrati minimiziral vpliv neodkritih grobih pogreškov na neznanke tako, da bi imela vsa opazovanja enako vrednost števila nadštevilnosti. Rešitev problema optimizacije drugega reda za visoko zanesljivost se glasi (Amiri-Simkooei, 2014):

$$r_i = 1, 2, \dots, n = \text{maximum} = \bar{r}$$

Tako je potrebno začetne uteži opazovanj izboljšati z množenjem uteži s faktorjem k , kot je to prikazano spodaj (Amiri-Simkooei, 2014):

$$\begin{bmatrix} p_1 & & & \\ & \dots & & \\ & & p_i & \\ & & & \dots \\ & & & & p_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} p_1 & & & \\ & \dots & & \\ & & k \cdot p_i & \\ & & & \dots \\ & & & & p_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & & & \\ & \dots & & \\ & & p_i & \\ & & & \dots \\ & & & & p_n \end{bmatrix} + (k-1) \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \dots & & \\ & & p_i & \\ & & & \dots \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Zgornji matrični prikaz lahko zapišemo tudi kot:

$$\mathbf{P}^k = \mathbf{P} + (k-1)\mathbf{P}_i \quad (112)$$

Število nadštevilnosti i -tega opazovanja lahko izračunamo kot (Amiri-Simkooei, 2014):

$$r_i = \mathbf{I} - b_i (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} b_i^T p_i, \quad (113)$$

kjer je b_i vrstica v matriki \mathbf{B} in p_i i -ti diagonalni člen matrike \mathbf{P} . Zgornjo enačbo lahko preoblikujemo tako, da spremenimo matriko \mathbf{P} , kot smo to storili v enačbi (113) (Amiri-Simkooei, 2014):

$$r_i = \mathbf{I} - b_i (\mathbf{B}^T \mathbf{P}^k \mathbf{B})^{-1} b_i^T \cdot k \cdot p_i = \frac{df}{n}, \quad (114)$$

kjer je $df = n - u$, n predstavlja število opazovanj in u število neznank.

Ko vpeljemo izraza $\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} = \mathbf{N}$ in $b_i^T p_i b_i = N_i$ v gornjo enačbo in razširimo izraz $(\mathbf{N} + (k-1)N_i)^{-1}$ v Taylorjevo vrsto, pridobimo z nadaljnjo poenostavitvijo naslednji izraz za faktor k :

$$k = \frac{u}{n \cdot \text{sled}(\mathbf{N}_i \mathbf{N}^{-1})}. \quad (115)$$

Z množenjem faktorja k s p_i iz gornje enačbe, pridobimo utež za i -to opazovanje. Ta algoritem moramo uporabiti za vsa opazovanja. Ker pa smo za pridobitev izraza za izračun faktorja k uporabili razvoj v Taylorjevo vrsto moramo za pridobitev optimalne uteži s katerimi pridobimo enake vrednosti nadštevilnosti uporabiti iterativni postopek. Iteracija se ustavi, ko pridobimo faktor k velikosti 1 (Amiri-Simkooei, 2014).

5 RAČUNALNIŠKI PROGRAM ZA OPTIMIZACIJO OPAZOVANJ

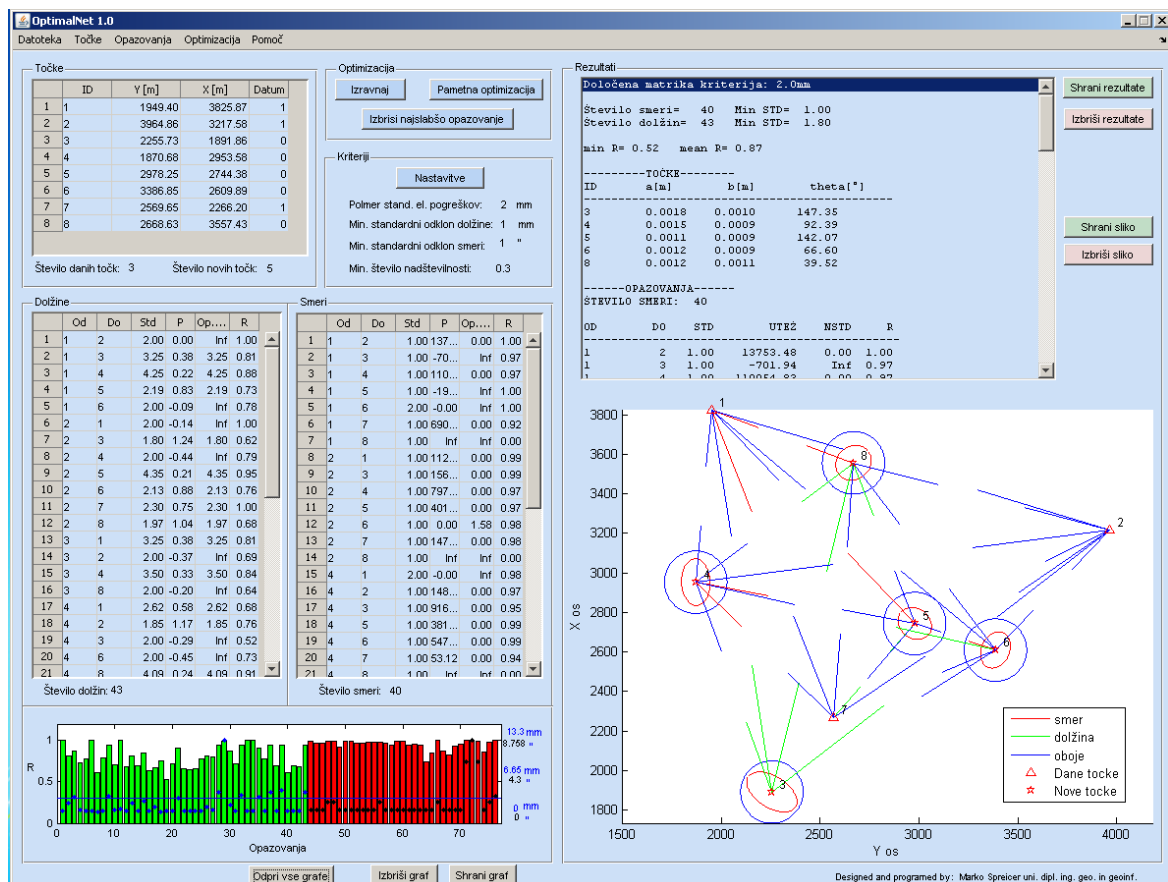
Zaradi dolgotrajnega in ponavljajočega dela pri postopkih optimizacije, še posebej pri skupnem optimiziranju natančnosti in zanesljivosti, ter pri geodetskih mrežah z velikim številom opazovanj, kjer je potrebno odstranjevati le eno opazovanje naenkrat, smo ugotovili, da bi bilo dobro postopek optimizacije v večji meri avtomatizirati.

Postopek optimizacije smo želeli izvesti s pomočjo na novo razvitega računalniškega programa, ki bi uporabniku z le nekaj ukazi in podanimi kriteriji, zagotovil ustrezne in uporabne rezultate.

5.1 OPIS PROGRAMA

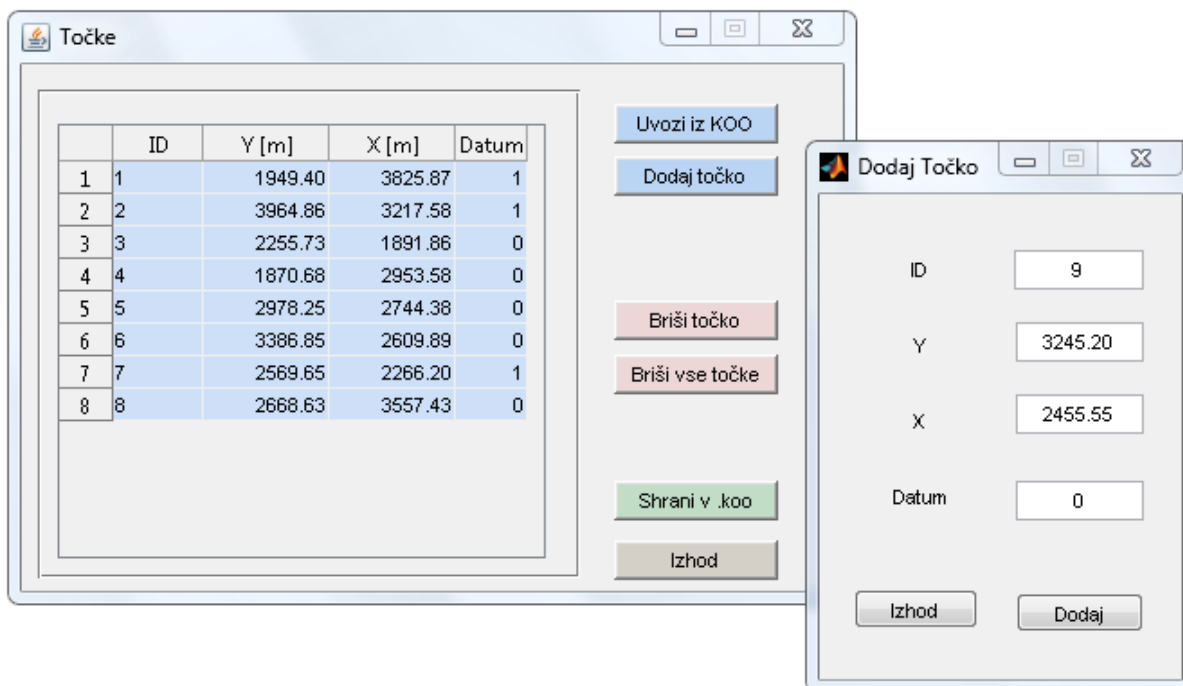
Program smo izdelali v programskem okolju MatLab (Mathworks, 2016), za katerega smo se odločili, ker ima Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani kupljeno licenco za uporabo tega programskega okolja. Programsko okolje omogoča tudi izdelavo grafičnega vmesnika s katerim olajšamo delo uporabnika.

S sestavljenim programom lahko izvedemo izravnavo vklopljene geodetske mreže in optimizacijo geodetske mreže, s katero lahko optimiziramo merjene dolžine in horizontalne smeri za pridobitev željenih natančnosti koordinat novih točk.



Slika 2: Prikaz grafičnega vmesnika programa za optimizacijo opazovanj geodetske mreže

Program smo sestavili tako, da je možno točke geodetske mreže v program dodajati ročno ali pa z uvozom iz tekstovne datoteke. Pred postopkom optimizacije je potrebno določiti katere točke bodo določale geodetski datum. Tako pri ročnem vnosu točk kot pri uvozu točk iz tekstovne datoteke je potrebno za vsako točko poleg njenih koordinat določiti tudi njen status.



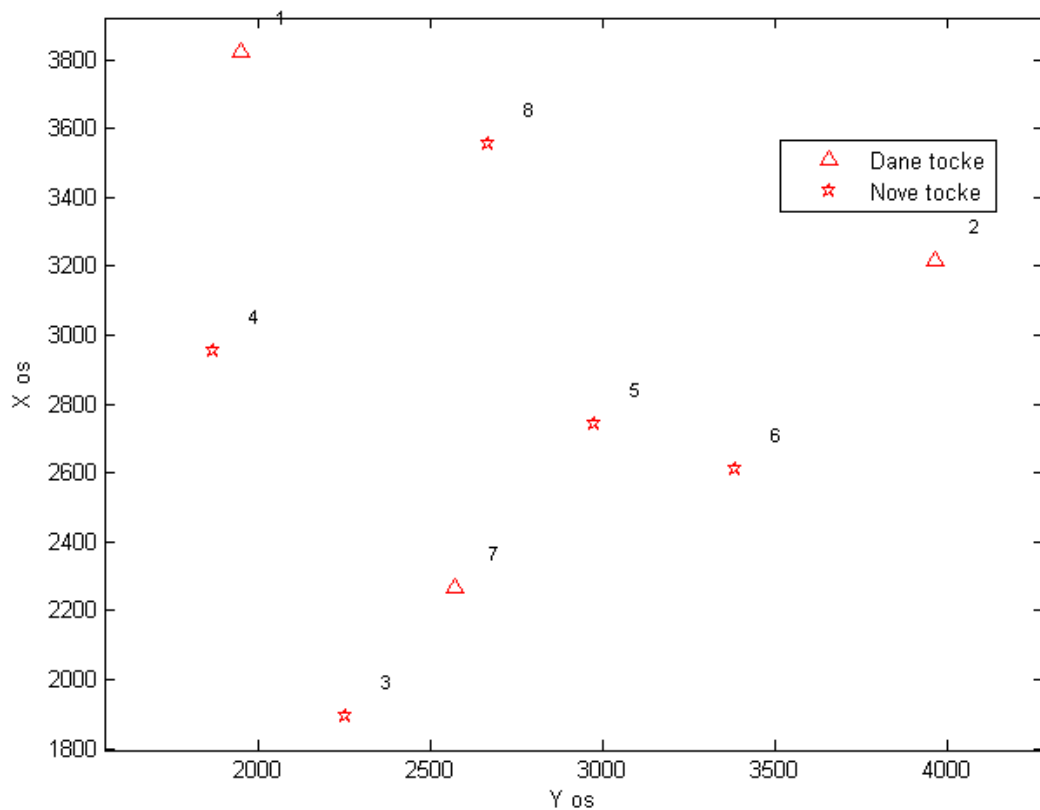
Slika 3: Ročno dodajanje točk geodetske mreže

Če hočemo da je točka datumska točka ji v polje »datum« vnesemo vrednost 1, drugače ji dodelimo vrednost 0. Če točke uvažamo s tekstovno ASCII datoteko je v njej potrebno v četrtem stolpcu prav tako določiti statuse točk. Primer datoteke za uvoz točk je prikazan na spodnji sliki (4). Ročno vstavljene in urejene točke geodetske mreže lahko nato shranimo v ASCII datoteko, za kasnejšo ponovno izvedbo optimizacije.

The image shows a text file window titled 'tocke.koo - Beležnica' containing the following data:

Datoteka	Uredi	Oblika	Pogled	Pomoč
1	1949.403	3825.874	1	
2	3964.861	3217.580	1	
3	2255.730	1891.859	0	
4	1870.678	2953.584	0	
5	2978.249	2744.379	0	
6	3386.846	2609.890	0	
7	2569.651	2266.196	1	
8	2668.625	3557.429	0	

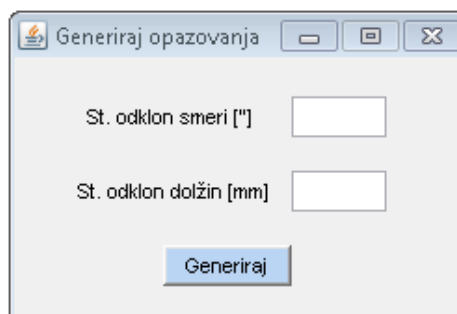
Slika 4: Datoteka s podatki o točkah geodetske mreže



Slika 5: Grafični prikaz točk, ki jih izriše program

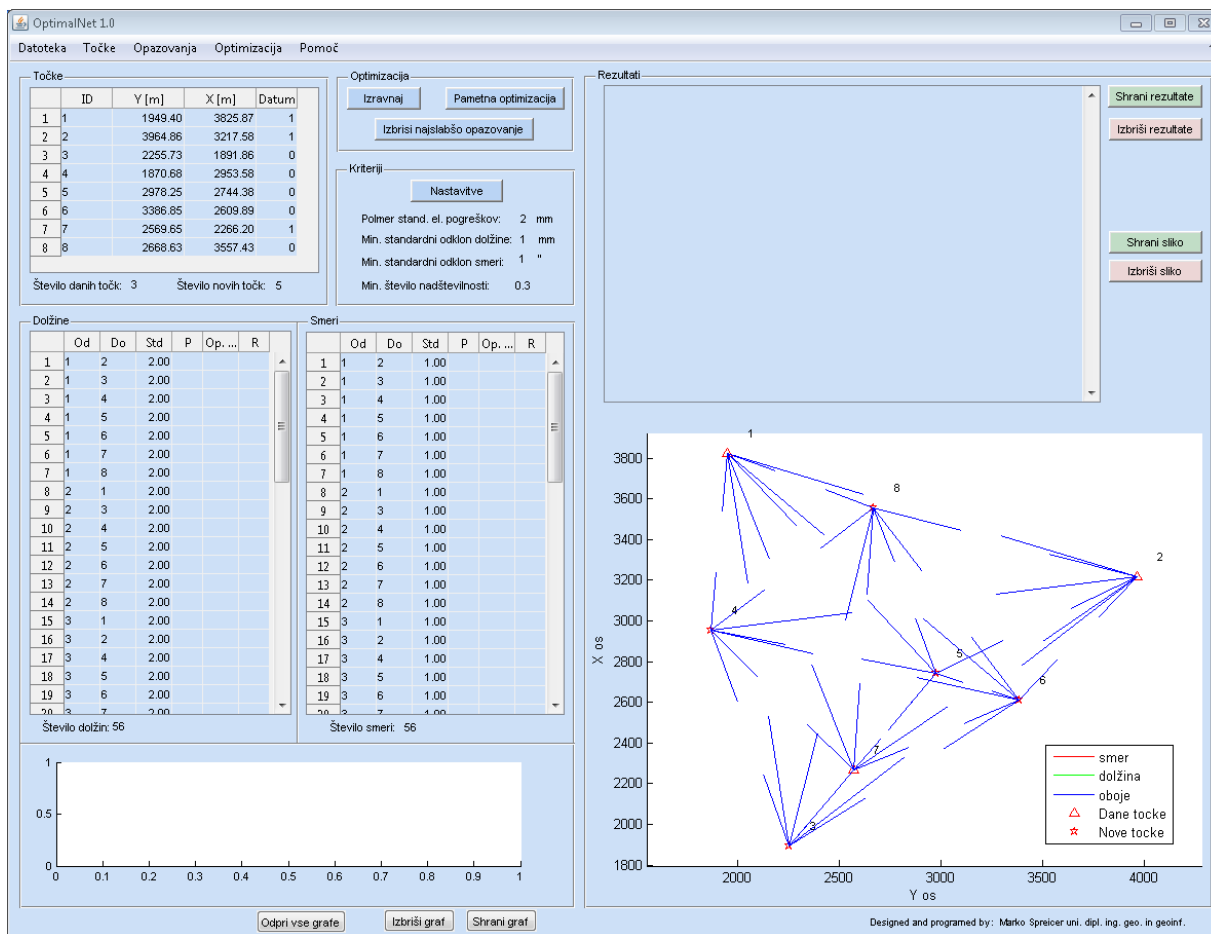
Ko zaključimo z urejanjem točk geodetske mreže in zapremo okno »Točke« se nam na grafičnem oknu programa te točke izrišejo. Na sliki (5) vidimo grafični prikaz, ki nam ga izriše program. Z rdečimi trikotniki so prikazane dane točke, medtem ko so z rdečimi zvezdicami prikazane nove točke.

Po določitvi točk geodetske mreže, moramo za izvedbo optimizacije dodati še opazovanja. Tudi opazovanja lahko kot v primeru točk geodetske mreže dodamo ročno, ali pa v seznam opazovanj dodamo vsa možna opazovanja med točkami geodetske mreže. Vsa možna opazovanja generiramo tako, da kliknemo na zavihek »Opazovanja« in izberemo opcijo »Generiraj opazovanja«. Odpre se nam novo pogovorno okno, ki je prikazano na sliki (6), kjer moramo vnesti vrednosti standardnih odklonov za horizontalne smeri in dolžine.



Slika 6: Generiranje opazovanj

Ko izberemo vrednosti standardnih odklonov in pritisnemo na gumb »Generiraj«, se nam generirajo vsa možna opazovanja med točkami geodetske mreže, ki smo jih predhodno dodali. K točkam geodetske mreže na grafičnem prikazu, se nam sedaj izrišejo tudi opazovanja. Tako imamo na osnovnem oknu programa prikazane vse podatke, ki jih potrebujemo za optimizacijo dolžin in horizontalnih smeri. Izgled osnovnega okna je prikazan na spodnji sliki, kjer imamo v zgornjem levem robu podatke o točkah geodetske mreže. Pod točkami pa se nahajajo podatki o opazovanih dolžinah in horizontalnih smereh.

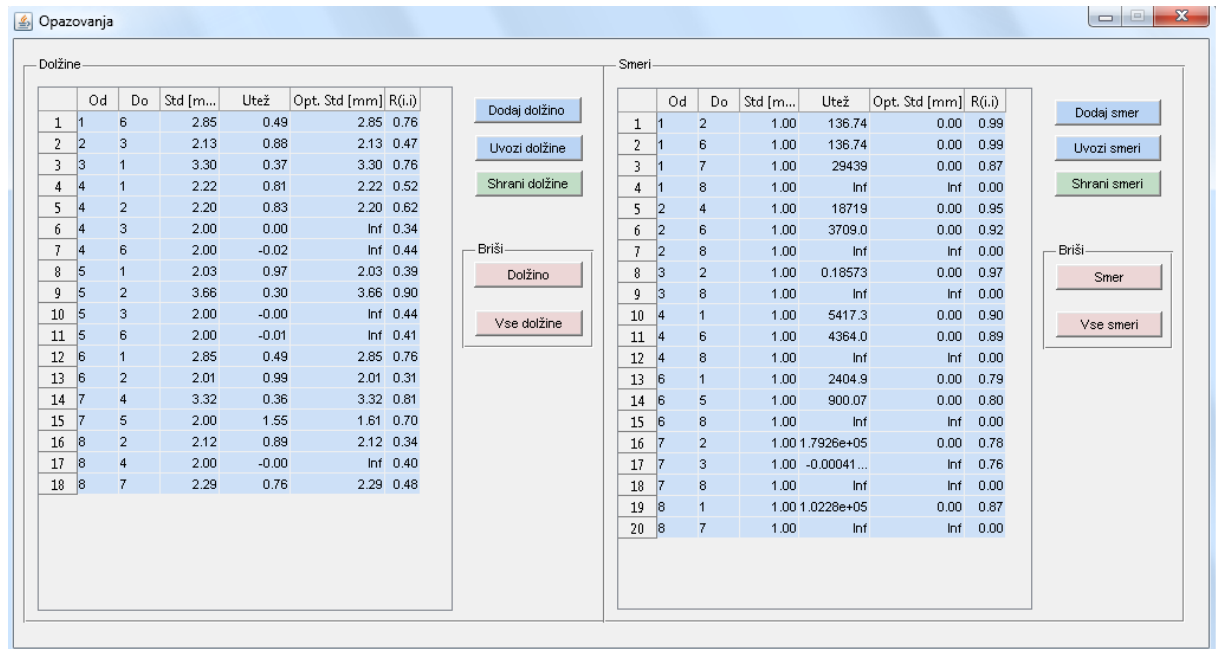


Slika 7: Prikaz podatkov na osnovnem oknu programa

V spodnjem desnem kotu je grafični prikaz podatkov, kjer vidimo, da so se nam sedaj po dodanih opazovanjih ta tudi izrisala. Modre črte med točkami nakazujejo, da imamo trenutno med vsemi točkami merjene tako horizontalne smeri kot dolžine. Na Slika 15) lahko opazimo, način kako smo označili vrste opazovanj med točkami. Da se opazovanja med točkami na grafičnem prikazu nebi prekrivala, smo opazovanja med točkami označili le z delnimi črtami, ki nakazujejo smer proti točki katere meritev je predvidena. Z barvo pa smo ločili tip opazovanj. Z modro barvo smo označili, da je iz stojlišča proti točki predvideno merjenje tako horizontalne smeri kot dolžine. Z rdečo barvo smo označili, če je proti merjeni točki predvideno le opazovanje horizontalne smeri, z zeleno pa opazovanje dolžine.

Opazovanja lahko tako kot v primeru točk, poljubno urejamo, spreminjamo vrednosti standardnih odklonov opazovanj, odstranjujemo ali dodajamo opazovanja. Urejanje opazovanj izvajamo v

pogovornem oknu »Opazovanja« do katerega pridemo s klikom na zavihek »Opazovanja« in nato izberemo opcijo »Uredi«. Prikaz pogovornega okna je prikazan na sliki Slika 8).



Slika 8: Urejanje opazovanj

Poleg urejanje opazovanj imamo v oknu »Opazovanja« na voljo tudi opcijo, da urejena opazovanja shranimo, kar nam omogoča kasnejši uvoz opazovanj in na njih izvajanje postopkov optimizacije.

5.2 DOLOČITEV KRITERIJEV ZA OPTIMIZACIJO

Za odstranjevanje opazovanj, smo se najprej odločili, da bomo sestavili program, ki bo postopoma odstranjeval opazovanja z najmanjšimi utežmi, saj naj ta ne bi praktično ničesar prispevala k natančnosti koordinat novih točk. Zaradi preglednosti in vpliva posameznega odstranjenega opazovanja na rezultate izravnave je potrebno le te odstranjevati postopoma in sicer v vsaki iteraciji po eno opazovanje. Če bi v enem koraku odstranili več opazovanj bi se nam lahko zgodilo, da bi pridobili slabšo natančnost in nebi vedeli, katero odstranjeno opazovanje ga je povzročilo.

Po nekaj preizkusih optimizacije natančnosti smo opazili, da imamo pri preostalih opazovanjih vrednosti števil nadštevilnosti r_i zelo nizke, kar je nakazovalo, da takšna geodetska mreža ne bi bila zanesljiva. Tudi optimizirani standardni odkloni opazovanj so bili tako majhni, da jih nebi mogli realizirati z nobenim od trenutno dostopnih tahimetrov. Na podlagi rezultatov optimizacij smo se odločili, da je potrebno v program vključiti kriterije, ki jih bo moral program upoštevati pri odstranjevanju opazovanj.

Za pridobitev boljše zanesljivosti pri optimizaciji geodetske mreže smo dodali kriterij, da z odstranitvijo opazovanja ne smemo pridobiti števila nadštevilnosti ostalih opazovanj pod določeno vrednostjo, ki jo v programu lahko poljubno spreminjamo. Vrednost števila nadštevilnosti, ki ga opazovanja ne smejo prekoračiti, smo za privzeto vrednost nastavili na 0.3, katera je navedena tudi v poglavju 3.2.3, v katerem

opisujemo kriterije zanesljivosti geodetskih mrež. Tudi odločanje kateri tip opazovanj se bo v iteraciji odstranil, poteka pod določenim kriterijem. Program za določitev najslabšega opazovanja uporablja povprečno vrednost števila nadštevilnosti. Pred dokončno odstranitvijo opazovanja s seznama opazovanj, program primerja povprečni števili nadštevilnosti, ki ju pridobimo, če iz opazovanj odstranimo opazovanje horizontalne smeri z najmanjšo utežjo ali, če odstranimo opazovano dolžino z najmanjšo utežjo. S seznama opazovanj se nato izloči tisto opazovanje, ki je povzročilo manjše zmanjšanje povprečnega števila nadštevilnosti celotnega matematičnega modela. Torej tisto opazovanje, pri odstranitvi katerega z izravnavo pridobimo večjo povprečno vrednost števila nadštevilnosti matematičnega modela, ostane v seznamu opazovanj, drugo opazovanje pa je odstranjeno.

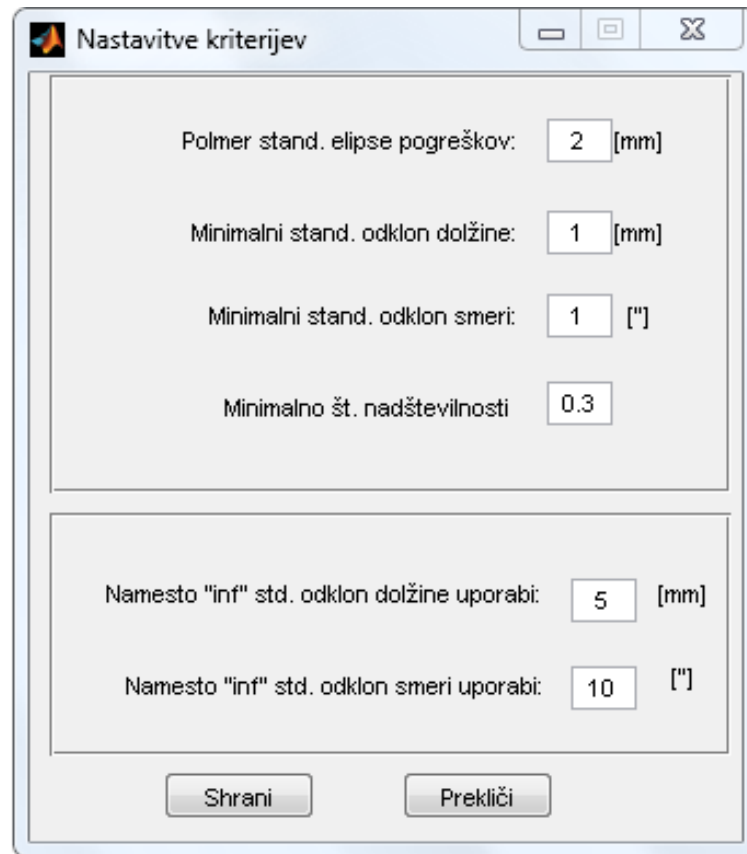
Pri določanju novih standardnih odklonov opazovanj po optimizaciji, smo prav tako omogočili postavitev kriterija, s katerim določimo spodnjo mejo standardnih odklonov opazovanj dolžin in horizontalnih smeri. Tako program standardne odklone opazovanj, ki po optimizaciji padejo pod določeno mejo, nastavi na te določene vrednosti. S tem smo omogočili pridobitev standardnih odklonov, ki jih bomo lahko fizično realizirali z izbranim instrumentarijem in številom girusov merjenih horizontalnih smeri in dolžin.

Na težavo smo naleteli pri določanju standardnega odklona opazovanju, kateremu je optimizacija pripisala neskončno velik standardni odklon. Ker neskončno velike vrednosti standardnega odklona ne moremo uporabiti v postopkih izravnave je potrebno določiti neko končno numerično vrednost. S poizkušanjem smo z različnimi vrednostmi za enake primer pridobili različne rezultate. Zato smo v program dodali možnost ročnega spreminjanja tega kriterija, za ugotavljanje vpliva na končne rezultate optimizacije in iskanje optimalne konfiguracije mreže in standardnih odklonov opazovanj.

Kriteriji, ki smo jih določili za postopek avtomatske optimizacije so naslednji:

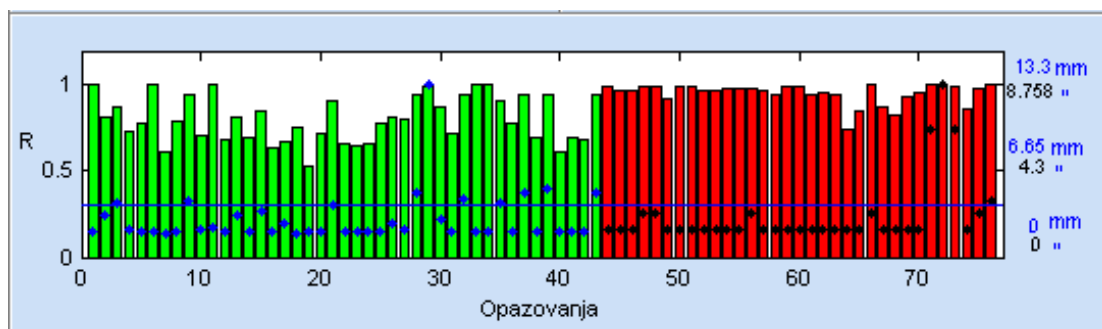
- maksimalna velikost standardne elipse pogreškov (polosi a in b),
- minimalni standardni odklon dolžinskih opazovanj,
- minimalni standardni odklon opazovanj horizontalnih smeri,
- minimalna vrednost števila nadštevilnosti r_1 ,
- vrednost standardnega odklona v primeru, ko dobimo optimizirani neskončno velik standardni odklon dolžine,
- vrednost standardnega odklona v primeru, ko dobimo neskončno velik optimizirani standardni odklon smeri.

V primeru, ko z odstranitvijo najslabšega opazovanja presežemo predhodno določene kriterije, poizkusi program z odstranitvijo drugega najslabšega opazovanja, če je mogoče tega odstraniti, ne da bi presegli katerega od kriterijev. Postopek optimizacije natančnosti in zanesljivosti opazovanj se ustavi, ko ne moremo izbrisati nobenega opazovanja več, ne da bi s tem presegli katerega od navedenih kriterijev.

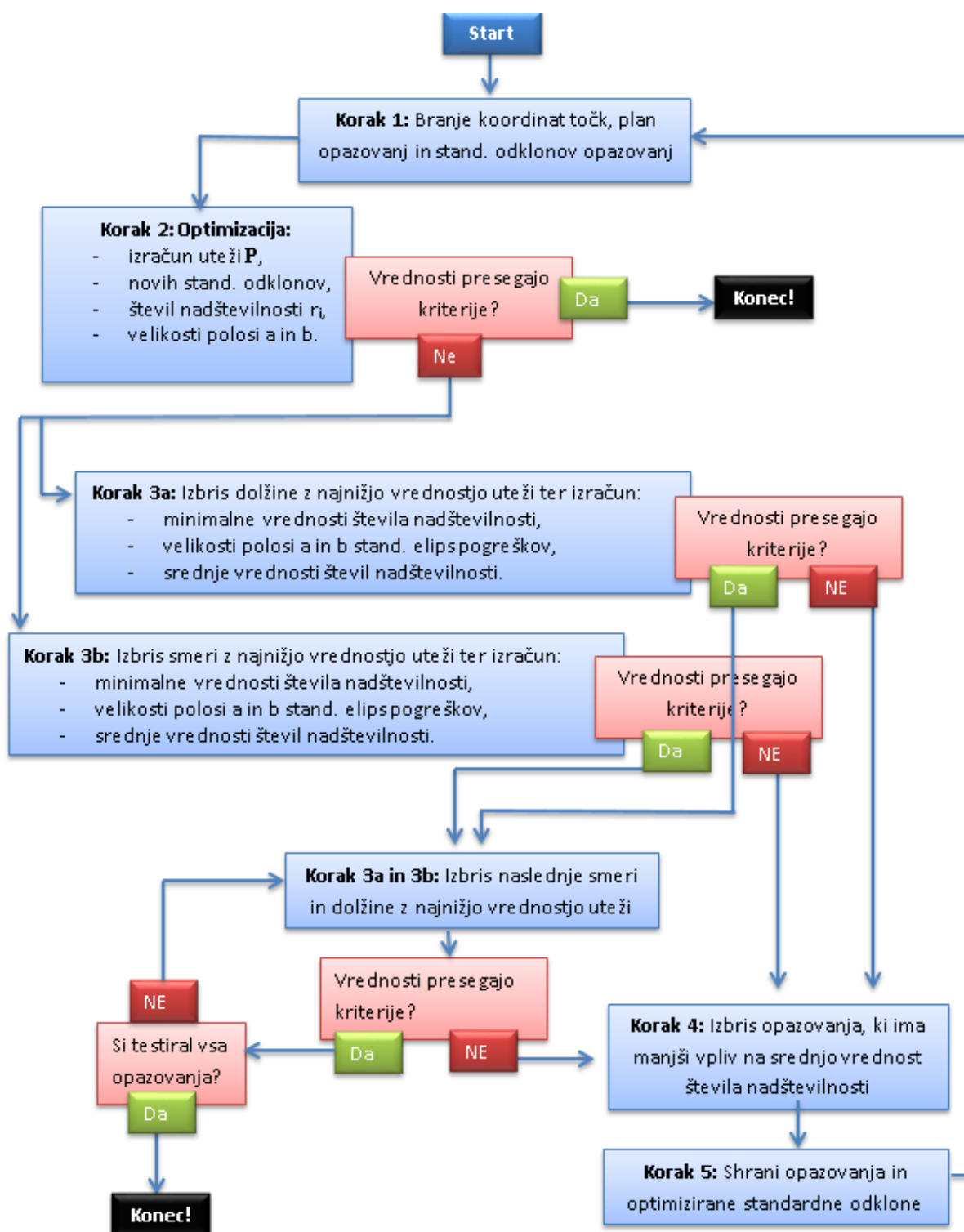


Slika 9: Nastavitve kriterijev

Shema algoritma, ki smo si ga zamislili je prikazana na sliki (10). Tako pridobimo s pritiskom na en gumb z izbranimi kriteriji natančnosti in zanesljivosti optimizirano geodetsko mrežo. Program nam tudi izriše grafični prikaz točk s standardnimi elipsami pogreškov na novih točkah in njihovimi velikosti, ter uporabljenimi opazovanji. Izriše nam tudi graf (Slika 10), ki prikazuje velikosti števil nadštevilnosti in standardne odklone opazovanj, optimizirane geodetske mreže. Na grafu prikazujejo stolpci zelene barve vrednosti števil nadštevilnosti za dolžine in rdeči stolpci števila nadštevilnosti za horizontalne smeri. Standardne odklone smo prikazali z modrimi in črnimi pikami, kjer so modre pike standardni odkloni dolžin in črne pike standardni odkloni horizontalnih smeri. Z modro vodoravno črto smo prikazali izbran kriterij minimalnega števila nadštevilnosti.



Slika 10: Prikaz števil nadštevilnosti v primerjavi s standardnimi odkloni opazovanj



Slika 11: Diagram poteka procesa optimizacije sestavljenega programa

V primeru, da želimo odstranjeno opazovanje vrniti v izračun, lahko to storimo v zavihku »Opazovanja«, kjer se nam odpre novo okno, kjer lahko poljubno dodamo katerokoli že odstranjeno opazovanje, pri tem je potrebno določiti še njegov standardni odklon. V tem oknu lahko tudi ročno odstranjujemo opazovanja, če ne želimo avtomatske optimizacije vseh opazovanj.

6 PRIMERI OPTIMIZACIJE DRUGEGA REDA

Pri projektiranju visoko natančnih geodetskih mrež je potrebno pred samo fizično izdelavo mreže vnaprej določiti koordinate točk geodetske mreže in simulirati terenske meritve, s čimer zagotovimo, da bo vzpostavljena geodetska mreža omogočala pridobitev koordinat zahtevane natančnosti. Projektiranje geodetske mreže vključuje določitev optimalnega geodetskega datuma, optimalno geometrijo geodetske mreže, izbor števila in tipa opazovanj, določitev optimalne natančnosti opazovanj ter na koncu morebitno izboljšavo slabših delov geodetske mreže. Vse to določimo s postopkom optimizacije, kar naj bi privedlo do optimalne geodetske mreže z minimalnim naporom in minimalnimi stroški (Ninkov, 1989).

Pri optimizaciji drugega reda torej določamo optimalne uteži opazovanj med točkami katerim smo že določili položaj. Standardni odkloni opazovanj, ki jih izračunamo iz uteži nam določajo potrebno natančnost izvedbe meritve in s tem izbor primernege tipa instrumentarija. Z optimizacijo lahko tako zmanjšamo stroške izvedbe meritve, saj nam ni potrebno poseči po najboljšem instrumentariju, katerih nakup ali najemnina lahko povzročita nepotrebne stroške.

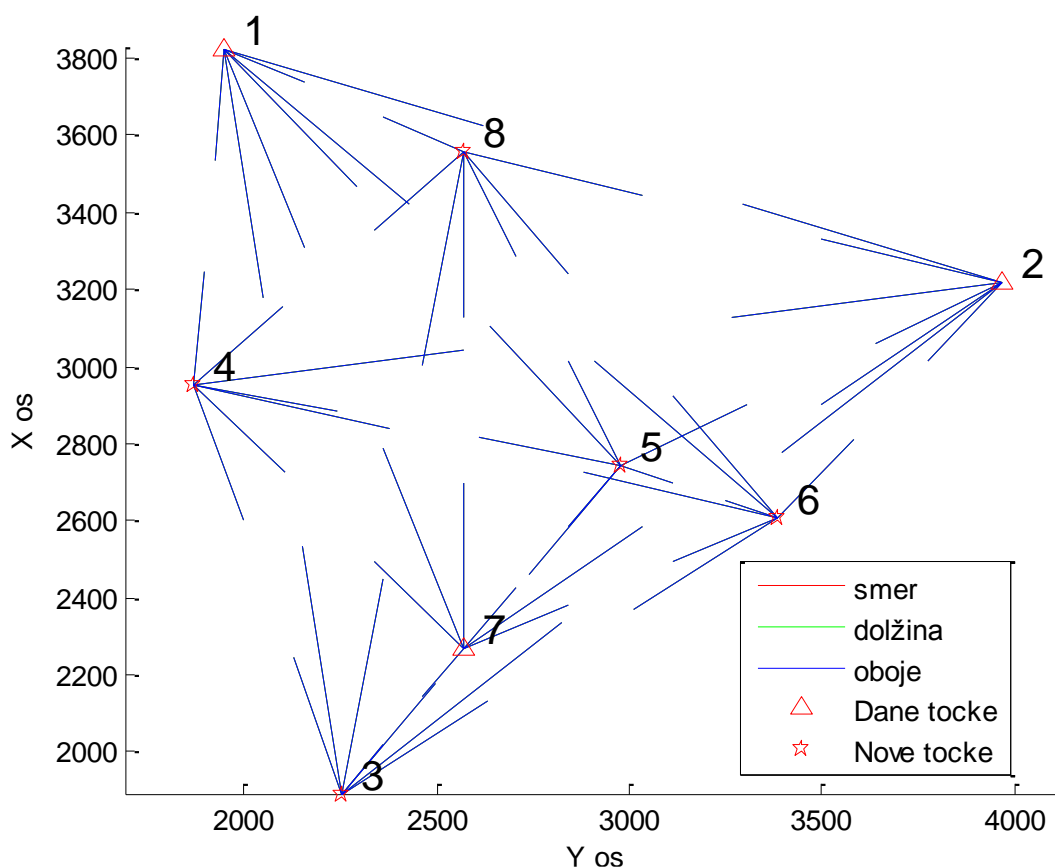
6.1 OPTIMIZACIJA Z UPOŠTEVANJEM KRITERIJA NATANČNOSTI

6.1.1 Vzpostavitev geodetske mreže in simulacija opazovanj

Za izvedbo optimizacije natančnosti smo se odločili vzpostaviti geodetsko mrežo z osmimi točkami, od katerih so 3 točke dane in nam zagotavljajo geodetski datum, te točke imajo oznako 1, 2 in 7. Ostale točke so nove točke, za te točke uporabimo približne vrednosti koordinat. Za začetek pred samim postopkom optimizacije smo za izvedbo izravnave opazovanj izbrali primer, z uporabo vseh možnih meritev. Na vseh točkah bi opravili vsa dolžinska in kotna opazovanja na ostale točke.

Preglednica 1: Koordinate točk geodetske mreže

Točka	Y	X	Dane (1) ali nove točke (0)
1	1949.403	3825.874	1
2	3964.861	3217.580	1
3	2255.730	1891.859	0
4	1870.678	2953.584	0
5	2978.249	2744.379	0
6	3386.846	2609.890	0
7	2569.651	2266.196	1
8	2568.625	3557.429	0



Slika 12: Prikaz simulirane geodetske mreže

Kot vidimo iz slike (12), je geodetska mreža načrtovana tako, da nam dane točke tvorijo geodetski trikotnik, ostale točke pa smo poljubno razvrstili, tako da smo pridobili geodetsko mrežo, s katero bomo lahko testirali vpliv položaja novih točk, glede na tri dane točke. Modre črte nakazujejo, da smo pri vseh stojiščih opravljali tako meritve smeri kot dolžinske meritve.

Pri optimizaciji drugega reda imamo torej že določene položaje točk geodetske mreže. Zanimajo nas standardni odkloni meritev, na podlagi katerih se bomo lahko odločili o instrumentariju, ki ga bomo morali uporabiti in število girusov, ki jih bomo pri meritvah izvedli, da bomo pridobili natančnosti koordinat, ki bodo zadostili postavljenim kriterijem.

6.1.2 Izravnava simulirane geodetske mreže

Natančnosti koordinat novih točk, pridobimo iz kovariančne matrike neznank Σ_{xx} . Za izračun le-te, potrebujemo matriko \mathbf{B} , ki jo imamo definirano s položaji danih in novih točk ter seznamom opazovanj in matriko uteži \mathbf{P} . Za izračun uteži p_i potrebujemo standardne odklone opazovanj σ_i , ki jih je potrebno predhodno določiti.

Za izmero horizontalnih smeri in dolžin med točkami določimo enake standardne odklone, saj v realnosti ni smiselno med meritvami menjavati instrumentarija ali meritve horizontalnih smeri in dolžin proti točkam izvajati z različnim številom girusov.

V našem primeru smo za začetek za enake tipe opazovanj izbrali enake vrednosti standardnih odklonov:

- za dolžinske meritve smo izbrali standardni odklon 5mm,
- za kotne meritve pa standardni odklon 3"

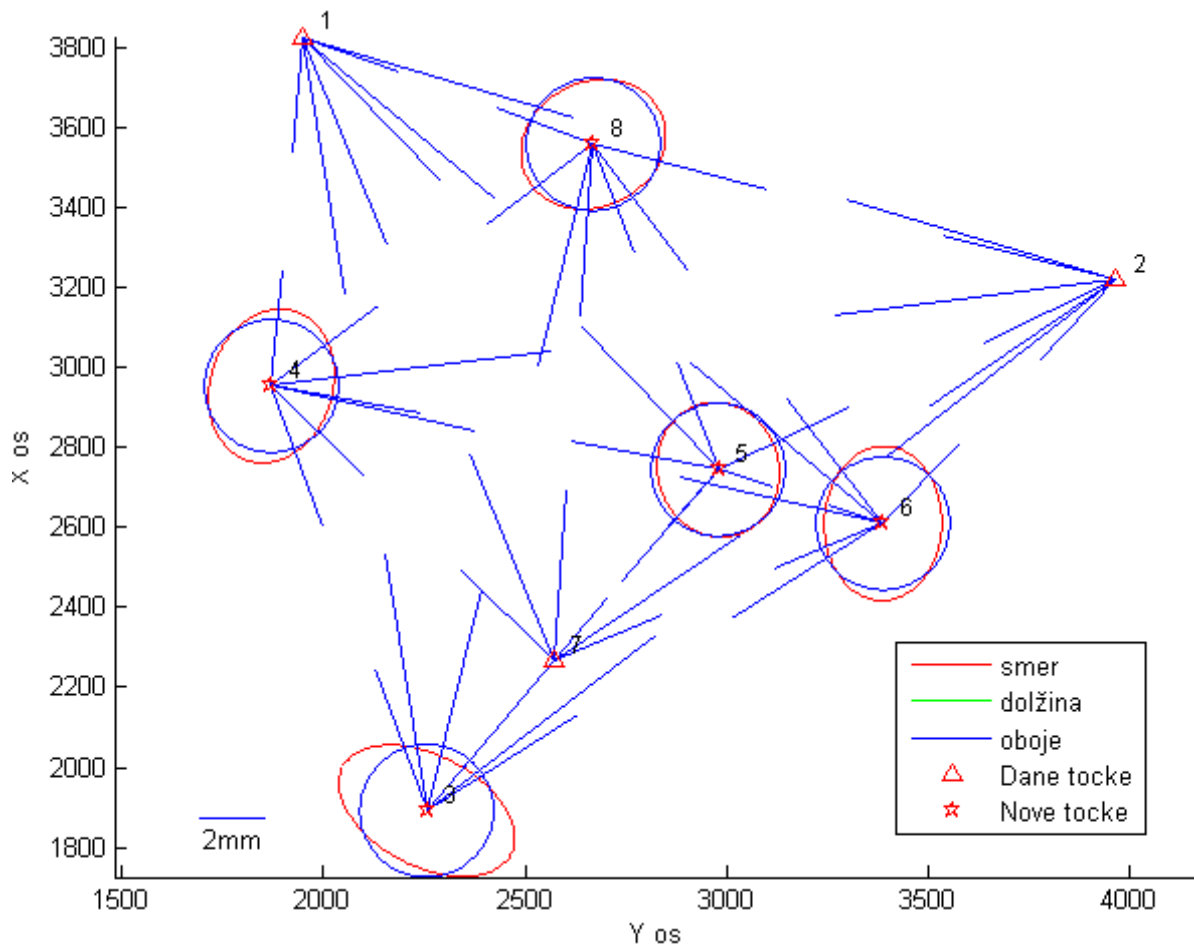
Število opazovanj v izravnavi:

- število merjenih dolžin: 56
- število merjenih smeri: 56

V tem primeru pridobimo naslednje natančnosti koordinat oz. standardne elipse pogreškov:

Preglednica 3: Natančnosti koordinat po izravnavi geodetske mreže.

Točka	a [m]	b [m]	θ [°]
3	0.0028	0.0017	155.27
4	0.0024	0.0018	74.04
5	0.0020	0.0018	104.41
6	0.0023	0.0018	89.04
8	0.0022	0.0019	26.29



Slika 13: Prikaz standardnih elips pogreškov pred optimizacijo uteži

6.1.4 Rezultati optimizacije natančnosti opazovanj drugega reda

Optimizacijo drugega reda smo izvedli z direktnim postopkom, ki je opisan v poglavju 4.1.4, kjer smo nove uteži opazovanj pridobili z uporabo enačbe (87):

$$\mathbf{p} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^+ \mathbf{G}^T \mathbf{q}$$

Za primer optimizacije natančnosti opazovanj smo uporabili vse kriterije omenjene v poglavju 5.3, razen kriterija o mejni vrednosti minimalnega števila nadštevilnosti r_i , saj v tem primeru ne želimo optimizirati zanesljivosti.

- maksimalna velikost standardne elipse pogreškov (polosi a in b) 0.002m,
- minimalni standardni odklon dolžinskih opazovanj 0.002m,
- minimalni standardni odklon opazovanj horizontalnih smeri 1",
- vrednost standardnega odklona v primeru, ko dobimo optimizirani standardni odklon dolžine neskončno velik 0.002m,
- vrednost standardnega odklona v primeru, ko dobimo optimizirani standardni odklon smeri neskončno velik 1",

Opazovanja, ki so pridobile uteži, ki so negativne ali blizu vrednosti 0 nam bistveno ne doprinesejo k natančnosti, ampak le povečajo porabo časa za izmero in s tem strošek vzpostavitve geodetske mreže. Z iterativnim postopkom smo zato odstranjevali opazovanja, v vsaki iteraciji le eno opazovanje, dokler se optimizacijski postopek ni ustavil, ker ni bilo mogoče odstraniti nobenega opazovanja več.

Po vsaki optimizaciji uteži so se iz standardnih odklonov, ki pripadajo kotnim opazovanjem, preračunali v standardne odklone posameznih merjenih smereh. Smerem, katerim so po optimizaciji pripadali standardni odklon je manjši od 1", smo določili standardni odklon 1" kot smo to navedli v kriterijih.

Standardne odklone horizontalnih smeri smo izračunali po naslednjem pristopu:

$$\sigma_k = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad (116)$$

Kjer je σ_k standardni odklon kota, ki ga pridobimo po optimizaciji in σ_1 , ter σ_2 standardna odklona smeri, ki sestavljata kot, kateremu pripada vrednost σ_k .

Enako so se tudi v primeru opazovanih dolžin, standardni odkloni spremenili, če le ti niso bili v mejah določenih v predhodno zastavljenimi kriteriji.

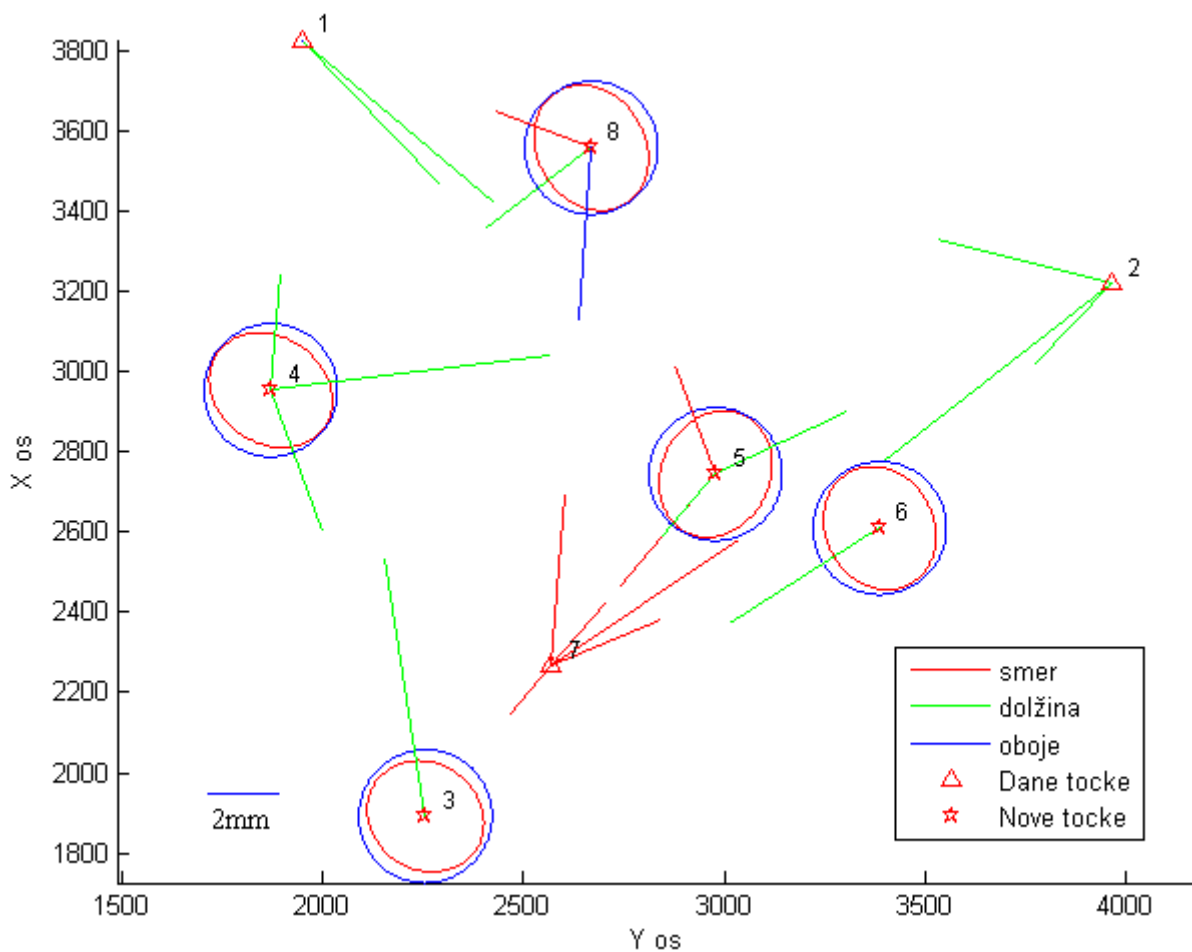
Rezultati optimizacije natančnosti drugega reda:

- število merjenih dolžin: 14
- število merjenih smeri: 9

- Najmanjši standardni odklon merjene dolžine je 2mm
- Najmanjši standardni odklon smeri pa znaša: 1"
- Minimalno število nadštevilnosti r_i znaša 0.15
- Srednja vrednost števil nadštevilnosti znaša 0.5

Preglednica 4: Rezultati optimizaciji drugega reda z upoštevanjem kriterija natančnosti

Točka	a [m]	b [m]	θ [°]
3	0.0018	0.0016	145.51
4	0.0020	0.0016	145.05
5	0.0020	0.0016	64.29
6	0.0019	0.0016	118.58
8	0.0020	0.0016	121.22



Slika 15: Prikaz rezultatov optimizacije geodetske mreže z uporabo kriterija natančnosti

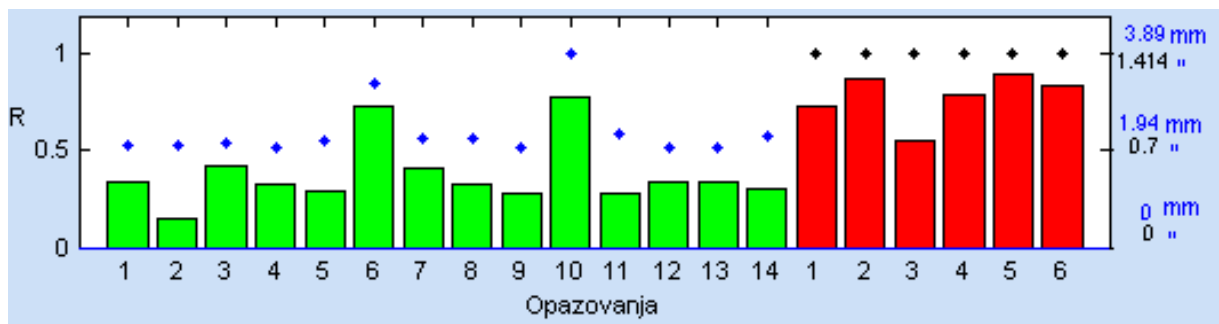
Vidimo, da dobimo standardne elipse pogreškov na vseh točkah skoraj krožne oblike. To nakazuje, da smo opazovanja optimizirali tako, da smo zadostili pogoju homogenosti in izotropnosti. Z optimizacijo natančnosti opazovanj smo zmanjšali število opazovanj iz 112 na kar 23, kar je zelo ugodno v časovnem in ekonomičnem smislu.

Preglednica 5: Standardni odkloni, uteži in števila nadštevilnosti optimiziranih opazovanj

Od	Do	St. odklon [mm]	Utež	r_i
1	5	2.05	0.95	0.34
1	6	2.04	0.96	0.15
2	3	2.12	0.89	0.42
2	6	2.00	1.00	0.32
2	8	2.14	0.87	0.29
3	1	3.30	0.37	0.75
4	1	2.21	0.82	0.48
4	2	2.20	0.83	0.41
4	3	2.00	0.00	0.33
5	2	3.90	0.26	0.78
5	7	2.28	0.77	0.28
6	3	2.00	-0.01	0.34
8	4	2.00	0.00	0.34
8	7	2.23	0.8	0.31

Od	Do	St. odklon ["]	Utež	r_i
5	3	1	$2.90 \cdot 10^{-6}$	0.74
5	8	1	Inf.	0.00
7	2	1	$1.80 \cdot 10^5$	0.87
7	3	1	$5.82 \cdot 10^{-6}$	0.57
7	5	1	6327.1	0.79
7	6	1	26822	0.90
7	8	1	Inf.	0.00
8	1	1	$1.08 \cdot 10^5$	0.84
8	7	1	Inf.	0.00

Tudi instrumentarij, ki ga potrebujemo za doseg standardnih odklonov, ki smo jih pridobili pri optimizaciji ni pretirano drag. Za zagotovitev izbranih kriterijev, potrebujemo tahimeter z natančnostjo merjenja smeri 1" in natančnostjo merjenja dolžin 2 mm.



Slika 16: Primerjava števil nadštevilnosti opazovanj s pripadajočimi standardnimi odkloni

Na sliki (16) so prikazani standardni odkloni in števila nadštevilnosti opazovanj. Z zelenimi stolpci so prikazana števila nadštevilnosti dolžin, z rdečimi pa števila nadštevilnosti smeri. Standardne odklone smo prikazali s pikami, kjer modre pike prikazujejo standardne odklone dolžin in črne pike standardni odkloni smeri. Vidimo, da so standardni odkloni opazovanj in pripadajoča števila nadštevilnosti v sorazmerju. Večji kot je standardni odklon, večje je tudi pripadajoče število nadštevilnosti. To si lahko

razlagamo kot dejstvo, da je opazovanje z manjšo natančnostjo lažje izmeriti kot pa opazovanje z visoko natančnostjo.

Vendar pa smo glede na visoko natančnost koordinat, z optimizacijo pridobili razmeroma majhno število opazovanj. Na nekaterih stojiščnih točkah imamo tako samo dve ali celo eno samo opazovanje. Glede na izkušnje lahko trdimo, da bi se za takšen načrt opazovanj odločil le malokateri geodet. Za tako malo število opazovanj je krivo dejstvo, da smo za kriterij optimizacije uporabili le natančnost opazovanj. V preglednici (6) lahko vidimo, da imamo pri dolžinskih opazovanjih zelo majhne vrednosti števil nadštevilnosti. Pri postopku optimizacije natančnosti smo zanemarili zanesljivost in geometrijsko moč geodetske mreže. Z upoštevanjem zanesljivosti, tako ne moremo odstranjevati opazovanj le glede na vrednosti optimiziranih uteži, ampak je potrebno pri odstranjevanju opazovati tudi njihov vpliv na zanesljivost.

Za razliko od postopkov optimizacije kjer smo uporabili le kriterij natančnosti, je pri postopkih kjer upoštevamo tudi kriterij zanesljivosti, pri odstranjevanju opazovanj potrebno biti pazljiv. Pri odstranjevanju moramo paziti, da z odstranjenim opazovanjem ne zmanjšamo tako natančnosti kot zanesljivosti pod določeno mejo. Tako pri postopkih optimizacije, kjer upoštevamo tudi zanesljivost odstranjujemo v enem koraku le eno opazovanje in opazujemo kaj se poleg natančnosti dogaja z zanesljivostjo mreže.

Na podlagi števil nadštevilnosti r_i , lahko vidimo, da so nekatera opazovanja nezanesljiva. Če upoštevamo preglednico (1), lahko trdimo, da so vsa opazovanja ki imajo število nadštevilnosti nad 0,3 dobra v smislu odkrivanja možnih prisotnih grobih pogreškov v njih. Iz preglednice lahko razberemo, da so zaradi premajhnega števila nadštevilnih opazovanj, nekatera opazovanja nezanesljiva. Vidimo, da so opazovanja horizontalnih smeri krepko nad mejo in naj ne bi povzročile nezanesljivosti geodetske mreže, medtem ko so dolžinska opazovanja bolj nezanesljiva. Vidimo, da je le nekaj opazovanj presegló mejo 0.3 in da jih je večina pod njo. Takšen načrt izmere geodetske mreže, ne bo zagotovil zanesljivih koordinat novih točk. V primeru prisotnosti grobega pogreška v opazovanjih bi le tega težko zaznali in odstranili. Pri optimizaciji je tako nujno potrebno upoštevati tudi zanesljivost.

Opazimo lahko, da imajo opazovanja, ki potekajo iz točk na robovih geodetske mreže manjše vrednosti števil nadštevilnosti od tistih opazovanj, ki potekajo znotraj geodetske mreže, kar nakazuje na težje odkritje grobih pogreškov. Največje standardne elipse pogreškov se tako nahajajo na točkah na robu geodetske mreže, kar je posledica manjšega števila opazovanj oziroma oblike geometrije mreže oziroma zaradi položajev točk. Opazovanjem na robovih mreže lahko povečamo pripadajoče število nadštevilnosti z zmanjšanjem njihovih uteži z uporabo optimizacije drugega reda. Ker pa število teh opazovanj ni veliko, se z zmanjšanjem uteži njihova natančnost poslabša. V tem primeru je dobro povezati zunanje točke geodetske mreže z opazovanjem horizontalnih smeri in dolžin proti čim večjemu številu preostalih točk pripadajoče geodetske mreže (Amiri-Simkooei, 2001).

Število nadštevilnosti r_i je v celoti odvisno od geometrije geodetske mreže in natančnosti opazovanj, ter je neodvisna od dejanskih vrednosti izvedenih opazovanj. Kar pomeni, da ga lahko tako kot v primeru optimizacije drugega reda določimo vnaprej (Grigillo, Stopar, 2003).

Geodetske mreže so lahko zasnovane tako, da lahko z njimi dosežemo visoko natančnost, po drugi strani pa je lahko takšna geodetska mreža nezanesljiva. Za vzpostavitev visoko natančne in hkrati zanesljive geodetske mreže je potrebno pri postopku optimizacije poleg kriterija natančnosti vključiti tudi kriterij zanesljivosti (Amiri-Simkooei, 2001).

6.2 OPTIMIZACIJA Z UPOŠTEVANJEM KRITERIJA NATANČNOSTI IN ZANESLJIVOSTI

Za konkretno nalogo optimizacije natančnosti in zanesljivosti hkrati, smo izbrali prejšnji primer, kjer smo optimizacijo izvedli le z uporabo kriterija natančnosti. Tokrat smo za optimizacijo uvedli dodaten kriterij zanesljivosti, kjer smo se odločili za postavitev mejne vrednosti števila nadštevilnosti na 0.3. Te vrednosti optimizirana opazovanja ne smejo preseči. Tako bo geodetska mreža omogočala odkrivanje morebiti prisotnih grobih pogreškov v opazovanjih.

Za optimizacijo natančnosti in zanesljivosti smo uporabili izdelan program z naslednjimi nastavljenimi parametri in kriteriji:

- maksimalna velikost standardne elipse pogreškov 2 mm,
- minimalni standardni odklon dolžinskih opazovanj 2 mm,
- minimalni standardni odklon smernih opazovanj 1",
- minimalna vrednost števila nadštevilnosti 0.3,
- vrednost standardnega odklona v primeru, ko dobimo optimizirani standardni odklon dolžine neskončno velik 0.002m,
- vrednost standardnega odklona v primeru, ko dobimo optimizirani standardni odklon smeri neskončno velik 1".

Začetne vrednosti standardnih odklonov smo nastavili na 2mm za dolžinska opazovanja in 1" za opazovanja horizontalnih smeri. V spodnji preglednici imamo prikazane natančnosti koordinat, ki jih pridobimo z avtomatsko optimizacijo

Preglednica 6: Natančnost koordinat pridobljenih z optimizacijo

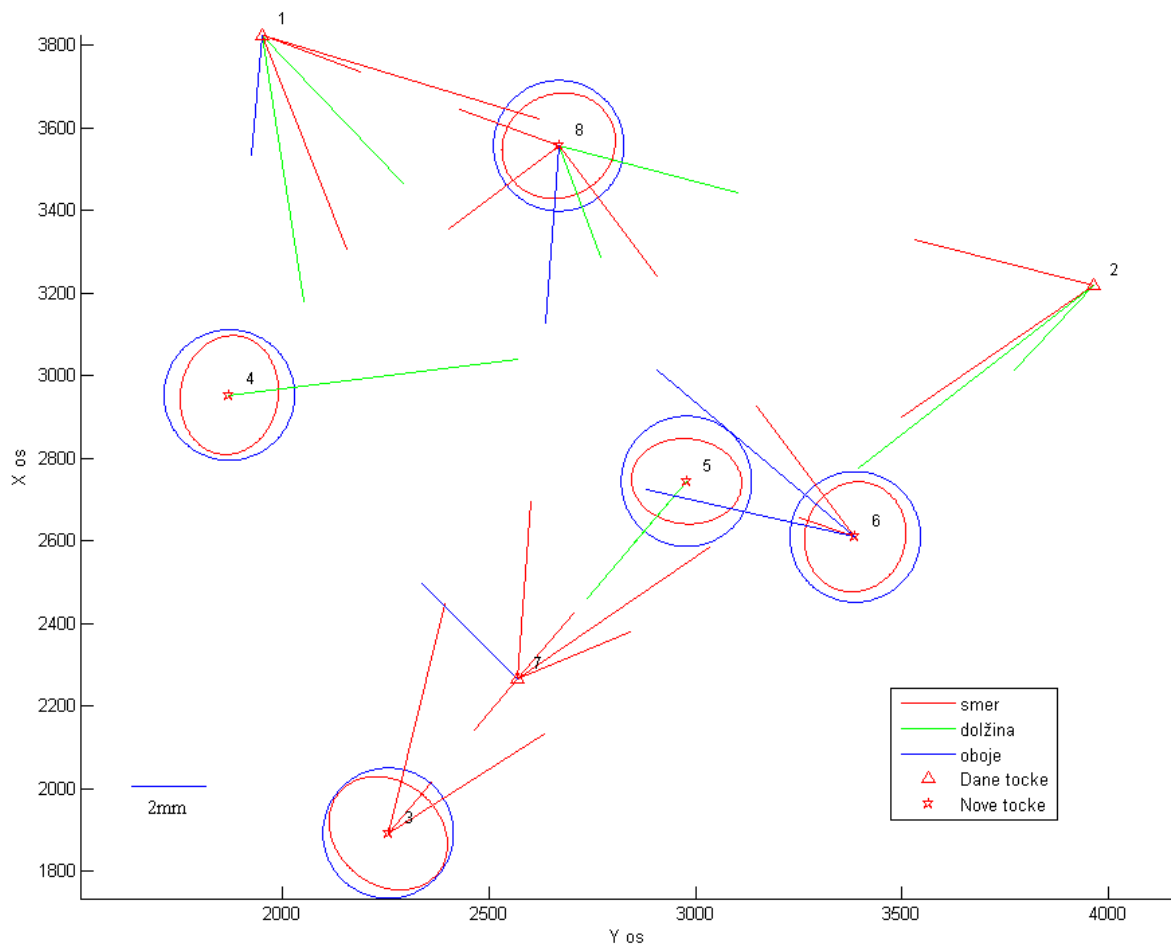
Točka	a [m]	b [m]	Θ [°]
3	0.0019	0.0015	160.11
4	0.0016	0.0014	92.63
5	0.0014	0.0013	117.82
6	0.0019	0.0015	177.87
8	0.0019	0.0015	130.48

Rezultati optimizacije z upoštevanjem kriterija natančnosti in zanesljivosti:

- število merjenih dolžin: 17
- število merjenih smeri: 21

- najmanjši standardni odklon merjene dolžine je 2mm
- najmanjši standardni odklon smeri pa znaša: 1"

- minimalno število nadštevilnosti r_1 znaša 0.30
- srednja vrednost števil nadštevilnosti znaša 0.69



Slika 17: Standardne elipse pogreškov pri optimizaciji natančnosti in zanesljivosti

Iz rezultatov optimizacije vidimo, da smo pri optimizaciji natančnosti in zanesljivosti opazovanj pridobili vrednosti standardnih odklonov in števila nadštevilnosti opazovanj znotraj postavljenih kriterijev, kot smo to določili s kriteriji v programu.

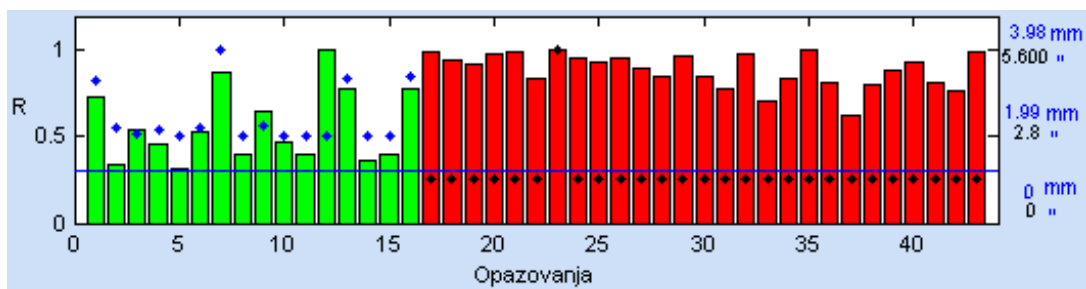
Od prvotnih 112 opazovanj jih je po optimizaciji ostalo samo 38. Če primerjamo število opazovanj glede na optimizacijo natančnosti pri prvem primeru, kjer je po optimizaciji ostalo 29 opazovanj vidimo da imamo tokrat 9 opazovanj več. To pomeni, da bomo imeli zaradi večjega števila opazovanj tudi boljšo zanesljivost, saj je vsota števil nadštevilnosti enaka številu nadštevilnih opazovanj. To lahko potrdimo s spodnjo preglednico (7), kjer vidimo da imajo vsa optimizirana opazovanja števila nadštevilnosti večja od 0.3.

Iz slike (19) in preglednice (7) lahko opazimo, da imamo kljub zanesljivim opazovanjem, kar nakazujejo števila nadštevilnosti r_i , še vedno na nekaterih točkah geodetske mreže izvedeno majhno število opazovanj. Tako moramo iz točk (4) in (5), izvesti samo eno opazovanje dolžine.

Preglednica 7: Rezultati optimizacije natančnosti in zanesljivosti drugega reda

Od	Do	St. odklon [mm]	Utež	r_i	Od	Do	St. odklon ["]	Utež	r_i
1	4	2.21	0.82	0.51	1	2	1.00	1747.5	0.99
1	5	2.03	0.97	0.50	1	6	1.00	1747.5	0.98
1	6	3.00	0.45	0.66	1	7	1.00	29167	0.87
2	4	2.20	0.83	0.60	1	8	1.00	Inf.	0.00
2	5	3.86	0.27	0.88	2	6	1.00	8806.9	0.88
2	6	2.03	0.97	0.31	2	7	1.00	6214.1	0.96
2	8	2.11	0.89	0.30	2	8	1.00	Inf.	0.00
3	1	3.30	0.37	0.77	5	2	1.00	$4.00 \cdot 10^{-5}$	0.84
3	2	2.13	0.88	0.44	5	6	1.00	$-5.28 \cdot 10^{-6}$	0.46
3	5	2.00	0.00	0.39	5	7	1.18	$1.43 \cdot 10^{-6}$	0.86
4	3	2.00	0.00	0.35	5	8	1.18	Inf.	0.00
4	7	3.37	0.35	0.81	6	1	1.00	78173	0.93
5	4	2.00	0.00	0.42	6	2	1.00	0.000403	0.90
5	7	2.29	0.77	0.65	6	8	1.00	Inf.	0.00
6	1	3.06	0.43	0.68	7	2	1.00	$1.79 \cdot 10^5$	0.86
8	4	2.00	0.00	0.42	7	3	1.00	$3.82 \cdot 10^{-5}$	0.66
8	7	2.29	0.76	0.45	7	4	1.00	0.000491	0.88
					7	6	1.00	0.000469	0.92
					7	8	1.00	Inf.	0.00
					8	1	1.00	$1.01 \cdot 10^5$	0.87
					8	7	1.00	Inf.	0.00

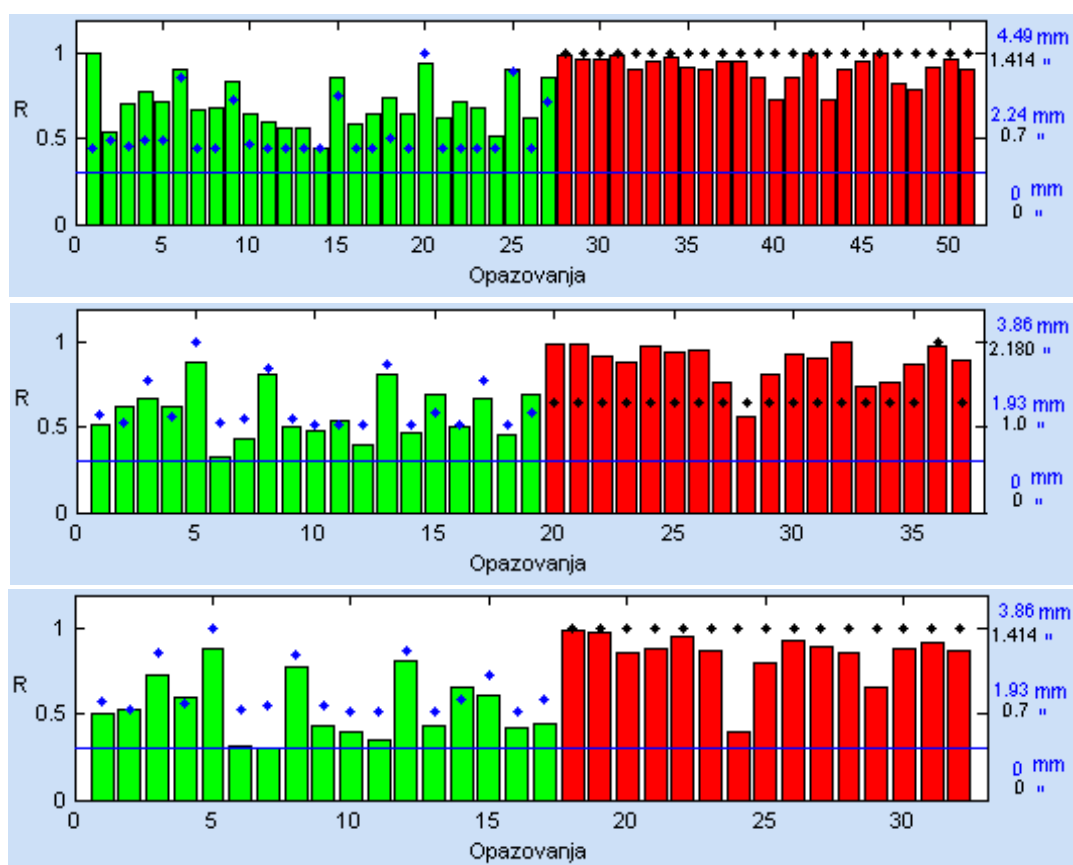
Iz preglednice (7), kjer so med drugim prikazane tudi vrednosti števil nadštevilnosti opazovanj lahko opazimo da je med horizontalnimi smermi in dolžinami ostalo nekaj opazovanj, ki imajo negativne uteži. Kljub temu pa teh opazovanj program ni izločil. Z njihovo ročno odstranitvijo smo preverili in ugotovili, da nam njihova odstranitev povzroči padec števila nadštevilnosti ostalih opazovanj, zato jih iz seznama opazovanj ne smemo odstraniti. Natančnosti opazovanj, ki jih pridobimo po optimizaciji dajejo natančnosti koordinat iskanih točk, ki niso enake tistim, ki smo jih določili v kriterijski matriki. Kar je posledica vseh omejitev, ki smo jih nastavili v programu za optimizacijo. Pridobljene natančnosti koordinat točk po optimizaciji bi lahko še bolj približali vrednostim določenim v kriterijski matriki, če bi poslabšali natančnosti nekaterih opazovanj. Tega pa zopet zaradi postavljenega kriterija zanesljivosti ne smemo storiti, saj bi se s tem presegli mejno vrednost zanesljivosti, ki smo jo nastavili v programu.



Slika 18: Števila nadštevilnosti opazovanj v primerjavi s pripadajočimi standardnimi odkloni pri optimizaciji z upoštevanjem kriterija natančnosti

Na podlagi grafa na sliki (18), ki pripada prvemu primeru optimizacije natančnosti in zanesljivosti in prikazuje števila nadštevilnosti in standardne odklone po optimizaciji, lahko opazimo, da so ti v sorazmerju. Velikemu številu nadštevilnosti pripada velik standardni odklon oz. opazovanje z manjšo natančnostjo. Kar pomeni da lahko opazovanje, kateremu pripada manjše število nadštevilnosti izmerimo z večjo natančnostjo in obratno.

Za potrditev te domneve o sorazmerju prilagamo še nekaj grafov na spodnji sliki (19), kjer smo pridobili podobno sorazmerje med številom nadštevilnosti in standardnimi odkloni opazovanj.



Slika 19: Primerjava števil nadštevilnosti opazovanj s pripadajočimi standardnimi odkloni

Rešitev, ki smo jo pridobili seveda ni edina optimalna. Rezultati optimizacije so odvisni tudi od zastavljenih kriterijev in vrstnega reda odstranjevanja opazovanj. Problem, ki se nam je pojavil pri optimiziranju geodetske mreže je določitev začetnih standardnih odklonov opazovanj ter določitev vrednosti standardnih odklonov opazovanj, katerim je optimizacija predvidela neskončno velike standardne odklone. Z različnimi izbranimi omenjenimi vrednostmi, pridobimo na koncu različne plane meritev, z različnim številom opazovanj in posledično različnimi natančnostmi koordinat novih točk.

S spreminjanjem in preizkušanjem različnih začetnih standardnih odklonov opazovanj, smo tako naleteli še na bolj optimizirano geodetsko mrežo, kot smo jo dobili v prvem primeru optimizacije po merilih (kriterijih) natančnosti in zanesljivosti. Rezultati drugega primera optimizacije natančnosti in zanesljivosti so naslednji:

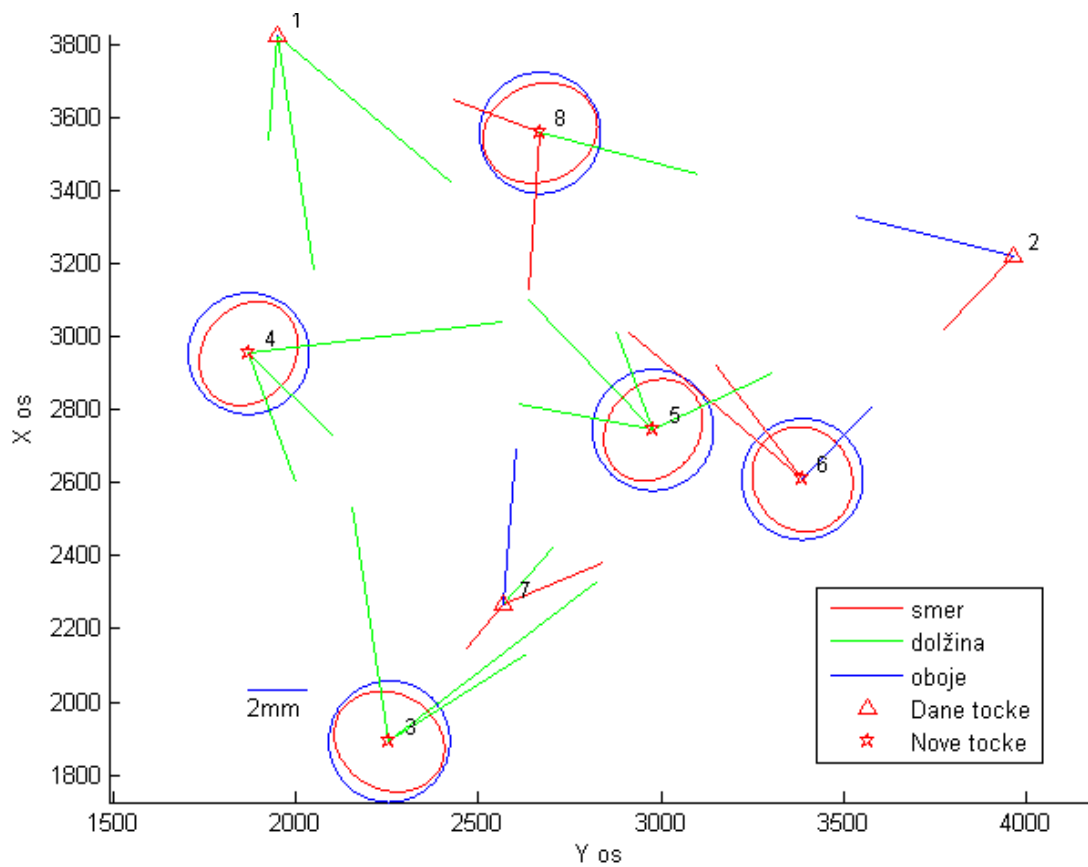
- število merjenih dolžin: 18
- število merjenih smeri: 10

- najmanjši standardni odklon merjene dolžine je 2mm
- najmanjši standardni odklon smeri pa znaša: 1"

- minimalno število nadštevilnosti r_i znaša 0.31
- srednja vrednost števil nadštevilnosti znaša 0.58

Preglednica 8: Natančnosti koordinat drugega primera optimizacije natančnosti in zanesljivosti:

Točka	a [m]	b [m]	Θ [°]
3	0.0019	0.0016	150.74
4	0.0018	0.0015	54.14
5	0.0018	0.0015	50.66
6	0.0018	0.0016	120.7
8	0.0019	0.0016	21.98

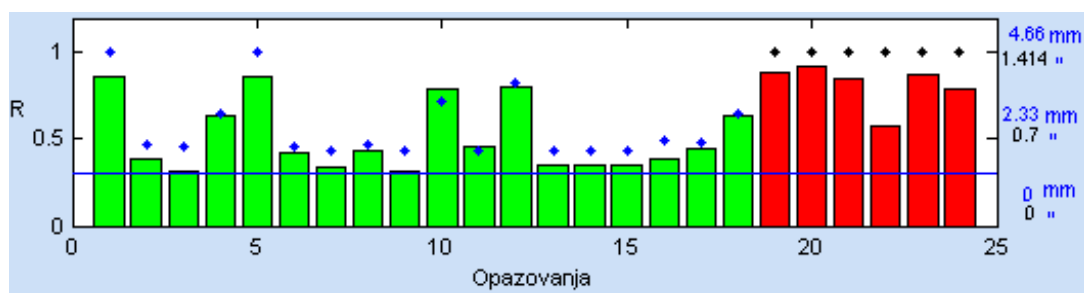


Slika 20: Grafični prikaz rezultatov drugega primera optimizacije natančnosti in zanesljivosti

Preglednica 9: Rezultati drugega primera optimizacije natančnosti in zanesljivosti:

Od	Do	St. odklon [mm]	Utež	r_i	Od	Do	St. odklon ["]	Utež	r_i
1	3	4.66	0.18	0.87	2	6	1.00	$4.85 \cdot 10^{-9}$	0.88
1	4	2.21	0.82	0.39	2	8	1.00	Inf.	0.00
1	6	2.13	0.88	0.33	6	1	1.00	79243	0.92
2	8	3.00	0.44	0.64	6	2	1.00	$-5.70 \cdot 10^{-9}$	0.86
3	1	4.67	0.18	0.87	6	8	1.00	Inf.	0.00
3	2	2.13	0.88	0.42	7	3	1.00	$2.90 \cdot 10^{-10}$	0.66
3	6	2.00	0.00	0.34	7	6	1.00	$-2.76 \cdot 10^{-9}$	0.88
4	2	2.20	0.83	0.43	7	8	1.00	Inf.	0.00
4	3	2.00	0.00	0.32	8	1	1.00	$1.10 \cdot 10^5$	0.79
4	7	3.37	0.35	0.8	8	7	1.00	Inf.	0.00
5	1	2.03	0.97	0.46					
5	2	3.86	0.27	0.8					
5	4	2.00	0.00	0.35					
5	8	2.00	0.00	0.35					
6	2	2.03	0.97	0.35					
7	5	2.29	0.77	0.38					
7	8	2.24	0.8	0.44					
8	2	3.00	0.44	0.64					

Iz preglednice (9), lahko opazimo, da smo se v tem primeru z natančnostmi iskanih koordinat točk bolj približali kriterijski matriki. Iz slike (20) vidimo, da so za razliko od prejšnjih optimizacijskih primerov sedaj opazovanja enakomerno razporejena po celotni geodetski mreži. Kar vpliva na dobro zanesljivost po celotni geodetski mreži. Na nobeni točki sedaj več nimamo le enega opazovanja. Na večini točk je tako optimizacija predvidela vsaj 3 opazovanja, le na točkah 5 in 6 izvedbo 4 opazovanj in na točki 7, je optimizacija predvidela 5 opazovanj.



Slika 21: Števila nadštevilnosti opazovanj v primerjavi s pripadajočimi standardnimi odkloni, drugega primera optimizacije natančnosti in zanesljivosti

Z optimiziranjem geodetske mreže z različno izbranimi parametri oziroma kriteriji pridobimo različne rezultate, med katerimi se nato odločimo, katerega bomo dejansko uporabili. Najbolj optimalen rezultat optimizacije bo tisti, ko pridobimo najmanjše število opazovanj, pri katerem bomo še vedno znotraj zastavljenih kriterijev, saj bo takšna mreža ekonomsko gledano, najcenejša. Kljub ugodnim rezultatom pridobljenih pri prvem in drugem primeru optimizacije natančnosti in zanesljivosti, pa realne izvedbe pridobljenih planov meritev ne priporočamo. Za pridobitev pridobljenih natančnost koordinat točk in zanesljivosti opazovanj, menimo, da je potrebno večje število opazovanj.

7 ZAKLJUČEK

Optimizacije geodetske mreže se pri vzpostavitvi in izmeri natančne geodetske mreže konkretno lotijo le redki geodeti. Vendar to ne pomeni, da je namenjena samo za vzpostavitev visoko natančnih geodetskih mrež. Z optimizacijo geodetskih mrež se velikokrat sreča večina geodetov pri vzpostavljanju mrež za osnovne geodetske storitve, pa se tega morda tudi ne zaveda. Že pri stabilizaciji geodetske mreže, se točke največkrat stabilizira, tako da te tvorijo obliko trikotnika, ali pa pri orientiranju instrumenta, kjer zaradi zanesljivosti uporabljamo orientacijo na dve znani točki, med katerima znaša horizontalni kot približno 90° . Tako smo uporabili načela optimizacije prvega reda, s pomočjo katerega določamo optimalne položaje točk geodetske mreže. Postopek optimizacije drugega reda, kjer optimiziramo natančnosti opazovanj je sicer največkrat uporabljen, vendar še vedno zelo malokrat. Razlog je najbrž v tem, da naloga največkrat zahteva natančnost, ki jo z današnjimi geodetskimi instrumenti z lahkoto dosežemo. Kljub rezultatom, ki bi jih pridobili z optimizacijo namreč še vedno izvajamo meritve med vsemi med seboj vidnimi točkami geodetske mreže, čeprav rezultati optimizacij tega niso predvideli. Takšno izvedbo meritev največkrat izberemo zaradi varnosti v primeru pojava grobega pogreška in pridobitvi zadovoljivih rezultatov tudi po njegovi odstranitvi. Tudi zaradi praktičnosti izvajamo vedno tako opazovanja smeri in dolžin, ker je časovna razlika v primeru merjenja dolžine ali smeri v primerjavi z obema zanemarljiva. Kljub temu je optimizacija pomemben korak v geodetski izmeri, ki zahteva visoko natančnost, saj se z njeno uporabo lahko izognemo morebitni slabi geometriji geodetske mreže, izberemo ustrezen instrumentarij in plan meritev in določimo koordinate iskanih točk zelene natančnosti.

Pri postopku optimizacije drugega reda je potrebno paziti, koliko opazovanj bomo odstranili in kdaj bodo rezultati optimizacije drugega reda optimalni. Pri tem je potrebno imeti v mislih tudi stroške in potrebno količino dela ter časa za izvedbo vseh opazovanj, ki jih je potrebno izvesti. Glede na dosedanje izkušnje, je čas velikokrat količina, ki ni predpisana in predpostavljamo, da jo imamo za izvedbo najnatančnejših meritev na voljo v neomejenih količinah. Le v primerih, ko je potrebno meritve izvesti hitro, na primer ko se ta opravljajo na nevarnem območju ali, če z našimi meritvami onemogočamo ali oviramo normalno delovanje podjetja.

Z odstranjevanjem opazovanj se zmanjšujejo vrednosti števil nadštevilnosti opazovanj, kar otežuje odkrivanje grobo pogrešenih opazovanj. V prvem primeru, kjer smo optimizirali natančnost in nismo upoštevali števil nadštevilnosti smo odstranili večje število opazovanj, katerih vrednosti uteži po optimizaciji drugega reda so bile negativne oz. zelo majhne. Čeprav smo v prvem primeru pridobili natančnosti koordinat, ki so bile skladne s kriterijsko matriko, pa smo nato s pregledom števil nadštevilnosti spoznali, da je takšno odstranjevanje opazovanj neprimerno in nepregledno, saj pri tem ne moremo opazovati vpliva posameznega opazovanja na natančnost in zanesljivost geodetske mreže hkrati. Ugotovili smo, da je potrebno postopek optimizacije izvajati postopoma, tako da odstranjujemo le po eno opazovanje naenkrat in sprti analiziramo pridobljene rezultate.

Postopek optimizacije je zelo zahteven, saj pri odstranjevanju opazovanj nikoli ne moremo biti prepričani, da smo odstranili opazovanje, ki ga dejansko ne potrebujemo. To pomeni, da bi bilo velikokrat potrebno predhodno odstranjeno opazovanje vrniti v postopek optimizacije v nadaljnjih korakih in preveriti kako to vpliva na trenutne in končne rezultate optimizacije. Trdimo lahko, da nimamo na razpolago točno določenega recepta za odstranjevanje opazovanj.

Ob izdelavi in testiranju sestavljenega programa za avtomatizacijo optimizacije drugega reda, smo ugotovili, da smo s programom pridobili uporabne rezultate. Ugotovili smo tudi, da so končni rezultati

optimizacije zelo odvisni od začetnih vrednosti standardnih odklonov opazovanj. V nekaterih primerih se je izkazalo, da so različno izbrane začetne vrednosti standardnih odklonov močno vplivale na potek optimizacije s katerim smo pridobili povsem različne rezultate optimizacije z različnim planom in številom opazovanj. V vsakem primeru pa so rezultati bili uporabni in so ustrezali zastavljenim kriterijem. Enako je tudi z določitvijo standardnih odklonov opazovanjem, ki so pri optimizaciji opazovanj pridobile neskončno velike standardne odklone. Z spreminjanjem teh vrednosti zopet pridobimo različne rezultate, vendar zopet znotraj zastavljenih kriterijev.

Pri uporabi programa smo tako spoznali, da je potrebno optimizacijo izvesti večkrat in z različno podanimi parametri oz. kriteriji kakovosti opazovanj. Po večjem številu optimizacijskih procesov z različnimi vrednostmi kriterijev se nato odločimo za optimalno konfiguracijo geodetske mreže. Z uporabo sestavljenega programa smo spoznali, da je spodnja meja števila nadštevilnosti r_1 0,3, ki naj bi predstavljala dobro kontrolo pri odkrivanju grobih pogreškov v opazovanih prenizka, saj se nam pri optimizacijskem procesu odstrani preveliko število opazovanj. Menimo, da bi bilo potrebno mejo zanesljivosti, oziroma minimalno število nadštevilnosti opazovanj dvigniti iz 0.3 na 0.5.

Na podlagi pridobljenih optimiziranih standardnih odklonov opazovanih horizontalnih smeri smo opazili, da bi bilo potrebno v program vključiti tudi izravnavo funkcijsko odvisnih neznank. Logično je, da imajo smeri ali koti izmerjeni na istem stojišču enake vrednosti standardnih odklonov. So torej izmerjene v enakem številu girusov in z enakim instrumentarijem.

Optimizacijo drugega reda smo v veliki meri uspeli avtomatizirati. Za popolno avtomatizacijo bi bilo potrebno rešiti še omenjeno težavo z začetnimi standardnimi odkloni opazovanih horizontalnih smeri in dolžin, ter izbrati primerne vrednosti standardnih odklonov v primeru pridobitve neskončno velikih standardnih odklonov opazovanj. Za uporabo v praksi, bi bilo potrebno v programu upoštevati tudi izravnavo funkcijsko odvisnih neznank. Verjamemo, da bo z rešitvijo omenjenih problemov postopek optimizacije drugega reda nato v celoti avtomatiziran.

8 VIRI

Ambrožič, T., Turk, G. 2000. Analiza natančnosti določitve koordinat točk v ravninski mreži z metodo Monte Carlo. Geod. vestn. 44, 1-2: 11-22.

Amiri-Simkooei, A. R. 1998. Analytical methods in optimization and design of geodetic networks. Dissertation. Teheran. K. N. Toosi University of Technology, Department of Surveying Engineering (self-published by A. R. Amiri-Simkooei): 110 p.

Amiri-Simkooei, A. R. 2014. A new method for second order design of geodetic networks: Aiming at high reliability. Survey Review 37(293): 552-560.
http://www.researchgate.net/publication/233621754_A_new_method_for_second_order_design_of_geodetic_networks_aiming_at_high_reliability_survey_Review_37 (Pridobljeno 11. 6. 2015.)

Amiri-Simkooei, A. R. 2007. Analytical first order design of geodetic networks. Iranian Journal of Engineering Sciences. Vol. 1, No. 1: 1-11.
http://www.lr.tudelft.nl/fileadmin/Faculteit/LR/Organisatie/Afdelingen_en_Leerstoelen/Afdeling_RS/Mathematical_Geodesy_and_Positioning/Publications/Papers/1010/doc/2008.045_paper.pdf (Pridobljeno 30. 7. 2015.)

Amiri-Simkooei, A. R. 2001. Strategy for designing geodetic network with high reliability and geometrical strength. Journal of Surveying Engineering 127(3): 104-117.

Baarda, W. 1968. A testing procedure for use in geodetic networks. Netherlands geodetic commission. Publications on Geodesy. Vol.2, no. 5: 97 p.
<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.367.8131&rep=rep1&type=pdf> (Pridobljeno 30. 7. 2015.)

Bae, T. S. 2005. Optimized Network of Ground Stations for LEO Orbit Determination. The Ohio State University. Department of Civil and Environmental Engineering and Geodetic Science.
https://spinlab.osu.edu/sites/spinlab.osu.edu/files/uploads/publications/2ion_ntm_2005_bae.pdf (Pridobljeno 5 .6. 2016.)

Berk, S. 1996. Izravnava in statistična analiza temeljnih horizontalnih geodetskih mrež. Diplomski naloga. Ljubljana. Univerza v Ljubljani. Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo (samozaložba S. Berk): 140 str.

Berne, J. L., Baselga, S. 2004. First order design of geodetic networks using the simulated annealing method. Journal of Geodesy 78. 47-54. <http://personales.upv.es/~serbamo/simulated%20annealing.pdf> (Pridobljeno 5. 6. 2016.)

Caspary, W.F. 2000. Concepts of network and deformation analysis. Sydney. University of New South Wales. School of Geomatic Engineering: 195 str.
http://www.sage.unsw.edu.au/about/school_pubs/pdfmono/mono11.pdf (Pridobljeno 5. 6. 2015.)

Crosilla, F. 1982. A criterion matrix for the second order design of control networks. International Federation of Surveyors. Proceedings Survey Control Networks. Meeting of Study Group 5B, Julij 7-9, 1982, Denmark. Aalborg University Centre, Heft 7, p. 143-157.
<https://www.unibw.de/IfG/Org/schriftenreihe/pdf-ordner/heft-07/7-crosilla-143-157.pdf> (Pridobljeno 5. 6. 2015.)

Cross, P., Fagir, A. 1982. Procedures for the first and second order design of vertical control networks. International Federation of Surveyors. Proceedings Survey Control Networks. Meeting of Study Group 5B, Julij 7-9, 1982, Denmark. Aalborg University Centre, Heft 7, p. 159-179.

<https://www.unibw.de/IfG/Org/schriftenreihe/pdf-ordner/heft-07/7-cross-fagir-159-179.pdf>

(Pridobljeno 11. 9. 2016.)

Grafarend, E. W. 1974. Optimization of geodetic networks. Bolletino di geodesia e scienze affini. Vol. 33/4, p. 351-406.

Grigillo, D., Stopar, B. 2003. Metode odkrivanja grobih pogreškov v geodetskih opazovanjih. Geod. vestn. 47, 4: 387-403.

De Heus, H. 1982. Data Snooping in control networks. International Federation of Surveyors. Proceedings Survey Control Networks. Meeting of Study Group 5B, Julij 7-9, 1982, Denmark. Aalborg University Centre, Heft 7, p. 211-224.

<http://www.unibw.de/bauv9/Org/schriftenreihe/pdf-ordner/heft-07/7-heus-211-224.pdf> (Pridobljeno 10. 5. 2016.)

Huaan, F. 2010. Theory of Errors and Least Square Adjustment. Division of Geodesy and Geoinformatics, Royal Institute of Technology. Stockholm. 14 str.

<http://gidec.abe.kth.se/kurser/Theory%20of%20errors.pdf> (Pridobljeno 7. 8. 2016.)

Kavouras, M. 1982. On the detection of outliers and the determination of reliability in geodetic networks. Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick. Technical Report 87: 121. <http://www2.unb.ca/gge/Pubs/TR87.pdf> (Pridobljeno 15. 8. 2016.)

Koch, K. R. 1985. First Order Design: Optimization of the Configuration of a Network by Introducing Small Position Changes. V: Grafarend, E. W., Sanso, F. Optimization and Design of Geodetic Networks. Course of the International School of Advanced Geodesy. April 25 – Maj 10, 1984. Erice. str. 56-73.

Koželj, M.. 2007. Teorija in praksa izmere premikov v površinski ugreznini nastali zaradi rudarjenja. Magistrsko delo. Univerza v Ljubljani. Naravoslovnotehniška fakulteta. (samozaložba M. Koželj): 330 str.

Kuang, S. L. 1991. Optimization and design of deformation monitoring schemes. Geodesy and Geomatics engineering. Department of Geodesy and Geomatics Engineering. University of New Brunswick. 196 str. <http://www2.unb.ca/gge/Pubs/TR157.pdf> (Pridobljeno 20. 6. 2016.)

Marendić, A., Paar, R., Novakovič, G. 2011. Quality analyses of the geodetic control for monitoring vertical displacements of Dubrovnik city. Electronic journal of geotechnical engineering. 2011/16: 909-922.

Mathworks. 2016. MATLAB. <https://www.mathworks.com/products/matlab/>

Mierlo, J. 1982. Difficulties in defining the quality of geodetic networks. International Federation of Surveyors. Proceedings Survey Control Networks Meeting of Study Group 5B, Julij 7 - 9, 1982. Denmark. Aalborg University Centre. 7: 259-274.

<https://www.unibw.de/IfG/Org/schriftenreihe/pdf-ordner/heft-07/7-mierlo-259-274.pdf> (Pridobljeno 4. 6. 2015.)

Mozetič, B., Stopar, B. 2008. Optimizacija opazovanj v geodeziji. Geod. vestn. 52, 2: 313-328.

- Mozetič, B. 2005. Uporabnost izbranih metod deformacijske analize na praktičnih primerih geodetskih mrež. Magistrsko delo. Univerza v Ljubljani. Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo (samozaložba B. Mozetič): 141 str.
- Ninkov, T. 1989. Optimizacija projektovanja geodetskih mreža. Univerzitet v Beogradu. Građevinski fakultet: 149 str.
- Okwuashi, O. Asuquo, I. 2014. Basics of Least Squares Adjustment Computation in Surveying. University of Uyo. Department of Geoinformatics and Surveying. International Journal of Science and Research. 3, 8: 1988-1993. <http://www.ijsr.net/archive/v3i8/MDIwMTU0ODU%3D.pdf> (Pridobljeno 14. 8. 2016.)
- Pavlovčič Prešeren, P. 2014. Optimizacija geodetskih tehničnih del. Univerza v Ljubljani. Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo. Študijsko gradivo.
- Pope, A. J. 1976. The Statistics of residuals and the Detection of Outliers. Department of Commerce, Geodetic Research and Development Laboratory. Technical Report. http://www.ngs.noaa.gov/PUBS_LIB/TRNOS65NGS1.pdf (Pridobljeno 20. 9. 2016.)
- Schmitt, G. 1985. Third order design. V: Grafarend, E. W., Sanso, F. Optimization and Design of Geodetic Networks. Course of the International School of Advanced Geodesy. April 25 – Maj 10, 1984. Erice. str. 122-131.
- Schmitt, G. 1979. Experiences with the second-order design problem in theoretical and practical geodetic networks. V: Somogyi, J., Halmos, F. 1979. Optimization of design and computation of control networks. Lectures at the International Symposium. Geodetic and Geophysical Research Institute of the Hungarian Academy of Science. Julij 4 - 10, 1977. Sopron, Hungary. str. 179-206.
- Schmitt, G. 1982. Optimization of control networks - State of the art. International Federation of Surveyors. Proceedings Survey Control Networks. Meeting of Study Group 5B, Julij 7-9, 1982. Denmark. Aalborg University Centre, 7: 373-380. <https://www.unibw.de/bauv9/Org/schriftenreihe/pdf-ordner/heft-07/7-schmitt-373-380.pdf> (Pridobljeno 15. 10. 2015.)
- Schmitt, G. 1985. Second Order Design. V: Grafarend, E. W., Sanso, F. Optimization and Design of Geodetic Networks. Course of the International School of Advanced Geodesy. April 25 – Maj 10, 1984. Erice. str. 74-120.
- Stopar, B. 2010. Analiza opazovanj v Geodeziji. Univerza v Ljubljani. Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo. Študijsko gradivo.
- Stopar, B. 2011. Izravnalni račun. Univerza v Ljubljani. Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo. Študijsko gradivo.
- Stopar, B. 1995. Sanacija astrogeodetske mreže v Sloveniji z GPS meritvami. Doktorska disertacija. Ljubljana. Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo (samozaložba B. Stopar): 132 str.
- Teunissen, P. J. G. 1985. Quality Control in Geodetic Networks. V: Grafarend, E. W., Sanso, F. Optimization and Design of Geodetic Networks. Course of the International School of Advanced Geodesy. April 25 – Maj 10, 1984. Erice. str. 526-546.