Planinšek, M., 2016. Primerjava višin v različnih sistemih višin v izbranem višinskem poligonu. Diplomska naloga. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo. (mentor Kuhar, M., somentor Koler, B.): 34 str.

http://drugg.fgg.uni-lj.si/5918/

Planinšek, M., 2016. Primerjava višin v različnih sistemih višin v izbranem višinskem poligonu. B.Sc. Thesis. Ljubljana, University of Ljubljana, Faculty of civil and geodetic engineering. (supervisor Kuhar, M., co-supervisor Koler, B.): 34 pp.

http://drugg.fgg.uni-lj.si/5918/

Univerza
v Ljubljani

*Fakulteta za
gradbeništvo in
geodezijo*

*Jamova 2
1000 Ljubljana, Slovenija
telefon (01) 47 68 500
faks (01) 42 50 681
fgg@fgg.uni-lj.si*

UNIVERZITETNI ŠTUDIJSKI PROGRAM PRVE STOPNJE GEODEZIJA IN GEOINFORMATIKA

Kandidat:

MATIC PLANINŠEK

PRIMERJAVA VIŠIN V RAZLIČNIH SISTEMIH VIŠIN V IZBRANEM VIŠINSKEM POLIGONU

Diplomska naloga št.: 124/GIG

COMPARISION HEIGHTS IN DIFFERENT HEIGHT SYSTEMS IN SELECTED HEIGHT POLYGON

Graduation thesis No.: 124/GIG

Mentor:
doc. dr. Miran Kuhar

Somentor:
doc. dr. Božo Koler

Ljubljana, 22. 09. 2016

STRAN ZA POPRAVKE, ERRATA

Stran z napako	Vrstica z napako	Namesto	Naj bo

IZJAVA

Spodaj podpisani študent Matic Planinšek, vpisna številka 26203516, avtor pisnega zaključnega dela študija z naslovom: Primerjava višin v različnih sistemih višin v izbranem višinskem poligonu

IZJAVLJAM

1. da je pisno zaključno delo študija rezultat mojega samostojnega dela;

2. da je tiskana oblika pisnega zaključnega dela študija istovetna elektronski obliki pisnega zaključnega dela študija;

3. da sem pridobil vsa potrebna dovoljenja za uporabo podatkov in avtorskih del v pisnem zaključnem delu študija in jih v pisnem zaključnem delu študija jasno označil;

4. da sem pri pripravi pisnega zaključnega dela študija ravnal v skladu z etičnimi načeli in, kjer je to potrebno, za raziskavo pridobil soglasje etične komisije;

5. soglašam, da se elektronska oblika pisnega zaključnega dela študija uporabi za preverjanje podobnosti vsebine z drugimi deli s programsko opremo za preverjanje podobnosti vsebine, ki je povezana s študijskim informacijskim sistemom članice;

6. da na UL neodplačno, neizključno, prostorsko in časovno neomejeno prenašam pravico shranitve avtorskega dela v elektronski obliki, pravico reproduciranja ter pravico dajanja pisnega zaključnega dela študija na voljo javnosti na svetovnem spletu preko Repozitorija UL;

7. da dovoljujem objavo svojih osebnih podatkov, ki so navedeni v pisnem zaključnem delu študija in tej izjavi, skupaj z objavo pisnega zaključnega dela študija.

V: Ljubljana
Datum: 12.9.2016

Podpis študenta:
Matic Planinšek

____

BIBLIOGRAFSKO-DOKUMENTACIJSKA STRAN IN IZVLEČEK

UKD:	528.024(043.2)
Avtor:	Matic Planinšek
Mentor:	doc. dr. Miran Kuhar
Somentor:	doc. dr. Božo Koler
Naslov:	Primerjava višin v različnih sistemih višin v izbranem višinskem poligonu
Tip dokumenta:	Diplomska naloga – univerzitetni študij
Obseg in oprema:	34 str., 5 preg., 16 slik.
Ključne besede:	geometrični nivelman, gravimetrija, normalno težnostno polje, višinski sistem, normalne ortometrične višine, geopotencialne kote, dinamične višine, ortometrične višine, normalne višine

Izvleček

Diplomska naloga je namenjena predstavitvi različnih višinskih sistemov in primerjavi izračunanih višin med višinskimi sistemi znotraj izbranega nivelmanskega poligona. Za testno območje je bil določen del Primorske, in sicer od Kopra do Kozine. Nivelmanski poligon, ki poteka od reperja 9000 preko 48 vmesnih reperjev do reperja 2839, v dolžino meri 37,351 kilometrov, višinska razlika med najnižjim in najvišjim reperjem pa znaša 497,98692 metra.

Celotna klasična geodezija temelji na točki, tretja koordinata točke pa je višina. Višine so za geodezijo in številne druge stroke zelo pomemben element, zato je pomembno, da pri izbiri višinskega sistema upoštevamo zahteve več različnih uporabnikov in strok. Kateri višinski sitem izbrati oziroma kakšne so prednosti in slabosti posameznih višinskih sistemov pa je bila vodilna misel moje diplomske naloge.

Diplomska naloga za testno območje podaja višine v več višinskih sistemih, in sicer v normalnih ortometričnih višinah, geopotencialnih kotah, dinamičnih višinah, ortometričnih višinah in v normalnih višinah. Uradni višinski sistem v Sloveniji so normalne ortometrične višine, v veliko evropskih državah pa imajo za uraden višinski sistem nadmorskih višin normalne višine, kar bi bilo, kot sem tudi sam ugotovil, najprimernejše in najkoristnejše tudi za Slovenijo. Normalne višine zadovoljijo vsem petim osnovnim pogojem za optimalni višinski sistem, poleg tega so zelo dobro povezane z elipsoidnimi višinami.

BIBLIOGRAPIC-DOCUMENTALISTIC INFORMATION AND ABSTRACT

UDC: 528.024(043.2)

Author: Matic Planinšek

Supervisor: Assist. Prof. Miran Kuhar, Ph.D.

Co-supervisor: Assist. Prof. Božo Koler, Ph.D.

Title: Comparision heights in different height systems in selected height polygon

Document type: Graduation Thesis – University Studies

Notes: 34 p., 5 tab., 16 fig.

Keywords: geometric levelling, gravimetry, normal gravity field, height system, normal orthometric heights, geopotential number, dynamic heights, orthometric heights, normal heights

Abstract

The main topic of this diploma work is to present several height systems and to compare calculated heights between different height systems in selected leveling line. For the test area part of Primorska from Koper to Kozina was selected. Levelling line is 37,351 kilometers long and is passing from point 9000 to point 2839, between 9000 and 2839 is 48 other points. Height difference between the lowest and the highest point is 497,98692 meters.

Whole classical geodesy is based on point and the third coordinate of point is height. Heights are very important for geodesy and many other professions, because of that is very important that when one has to choose gone height system, it has to consider requests of many professions. Which height system is better to choose and what advantages or disadvantages has one height system, was common thread of my diploma work.

We have determined heights of the chosen levelling line in different height systems in the test area. These are: normal orthometric heights, geopotential number, dynamic heights, orthometric heights and normal heights. The official height system in Slovenia are normal orthometric heights. The official height system in many European countries are normal heights and this height system would be most appropriate and useful for Slovenia too. Normal heights satisfy all five basic conditions for ideal height system. Normal heights are also very good connected with ellipsoidal heights.

ZAHVALA

Za strokovno vodenje, nasvete in pomoč pri izdelavi diplomske naloge se zahvaljujem mentorju doc. dr. Miranu Kuharju in somentorju doc. dr. Božu Kolerju.

Zahvaljujem se tudi vse sošolcem in geodetom, ki so me podpirali skozi študij in v času pisanja diplomske naloge.

Posebna zahvala pa gre še moji družini, še posebej mami in očetu, ki sta me skozi študijska leta vzdrževala in podpirala. Brez vaju bi bila študijska leta drugačna.

KAZALO VSEBINE

KAZALO SLIK

KAZALO PREGLEDNIC

1 UVOD

Celotna klasična geodezija temelji na točki. Točka je v prostoru definirana s tremi koordinatami, ki so med seboj neodvisne. Prvi dve koordinati sta položajni komponenti točke, tretja komponenta točke pa je višina, ki je določena v nekem višinskem sistemu.

Položajni komponenti sta definirani geometrično, višina točke pa fizikalno. Višino lahko definiramo tudi geometrično s koordinato Z v tridimenzionalnem kartezičnem koordinatnem sistemu ali pa s h kot tretjo koordinato v elipsoidnem koordinatnem sistemu, vendar niso primerne za uporabo v tehničnih nalogah, saj neenakomerno odstopajo od izhodiščnih nivojskih ploskev.

Višina točke je definirana fizikalno, zaradi česar je pri višinah pomembna tudi gravimetrija, ki nam preko težnega pospeška in težnostnega potenciala pomaga določiti obliko in velikost Zemlje ter višino posameznih točk. Ko s pomočjo gravimetrije določimo izhodišče za nek višinski sitem, si s pomočjo geometričnega nivelmana izmerimo višino druge točke v istem višinskem sistemu. Geometrični nivelman je ena izmed geodetskih metod izmere, s pomočjo katerih določamo višinsko razliko dveh točk, prenašamo višine ali pa zakoličujemo ter kontroliramo dane višine.

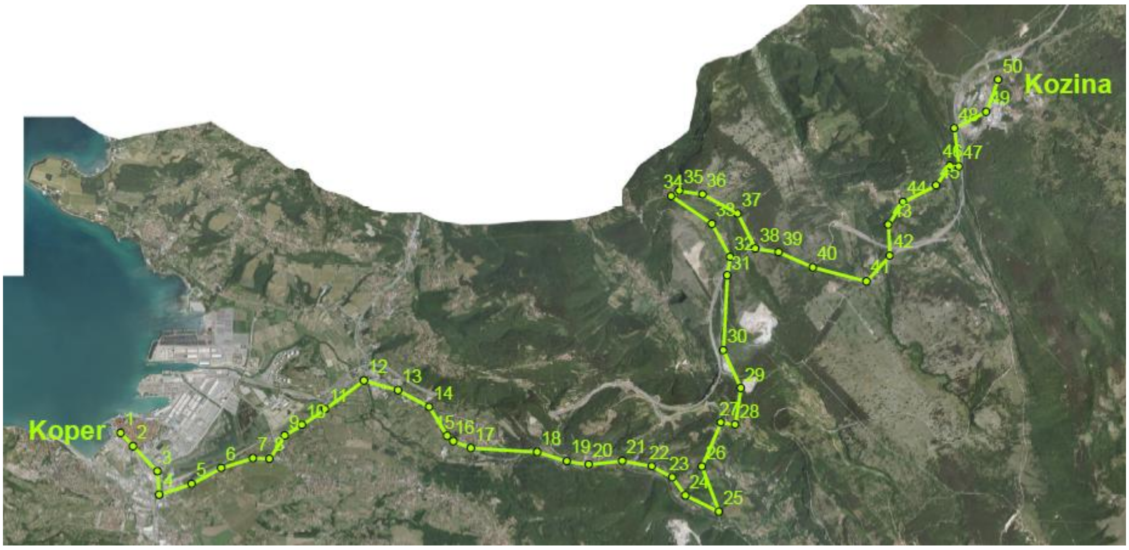
Imamo več višinskih sistemov, ki so tesno povezani z Zemljinim težnostnim poljem. Uradni višinski sistem v Sloveniji so tako imenovane normalne ortometrične višine. Poleg omenjenega poznamo še nekaj drugih višinskih sistemov: geopotencialne kote, dinamične, ortometrične in normalne višine. Z vedno večjo uporabo GNSS sprejemnikov pa dobivajo na veljavi tudi elipsoidne višine.

Višine so za geodezijo in številne druge stroke zelo pomemben element, zato je pomembno, da pri izbiri višinskega sistema upoštevamo zahteve več različnih uporabnikov in strok. Kateri višinski sitem izbrati oziroma kakšne so prednosti in slabosti posameznih višinskih sistemov pa je bila vodilna misel moje diplomske naloge.

Najprej sem v diplomski nalogi podal opis testnega območja in njegovih podatkov ter predstavil, kako s pomočjo geometričnega nivelmana in gravimetrije pridemo do podatkov, ki jih potrebujemo za nadaljnji izračun. Nato pa sem predstavil še vse višinske sisteme in izračun njihovih višin. Sledil je le še izračun višin in analiza dobljenih rezultatov ter zaključek s predstavljenimi ugotovitvami.

2 TESTNO OBMOČJE

Za testno območje je bil določen del primorske od Kopra do Kozine. Podatki so bili pridobljeni na Geodetski upravi Republike Slovenije. Za nadaljnje izračune smo pridobili podatke o reperjih in sicer njihova imena, položaje reperjev, medsebojne nivelirane višinske razlike in dolžine nivelmanskih linij med reperji, ter merjene težne pospeške na reperjih. Nivelmanski podatki so vzeti iz meritev nivelmanske mreže 1. reda, težni pospeški pa so bili pridobljeni na podlagi relativnih gravimetričnih meritev. Nivelmanski vlak, ki poteka od reperja 9000 preko 48 vmesnih reperjev do reperja 2839, v dolžino meri 37,351 kilometrov, višinska razlika med najnižjim in najvišjim reperjem pa znaša 497,98692 metra. Reper 9000 se nahaja v Kopru in je eden od petih reperjev nivelmanske mreže mareografske postaje v Kopru. Končni reper 2839 pa se nahaja v Kozini. Za začetni reper 9000 smo imeli dodatno podana tudi podatka o nadmorski višini in geopotencialni koti. Nadmorska višina reperja 9000 je podana v normalnem ortometričnem sistemu višin, ki je tudi uraden sistem za nadmorske višine v Sloveniji, in znaša 7,47980 metra. Geopotencialna kota reperja 9000 pa znaša 7,335198 kGalm. Na spodnji sliki so prikazani položaji reperjev izbranega višinskega poligona, v Prilogi A pa je slika tudi v merilu in opremljena z legendo.



Slika 1: Prikaz položajev reperjev

Medsebojne nivelirane višinske razlike znašajo od 0,53888 metra do 61,8374 metra, maksimalna negativna nivelirana višinska razlika med reperjema je 28,16107 metra, maksimalna pozitivna razlika pa 61,8374 metra. Najnižja nadmorska višina znaša 1,96770 metra (N1015), največja nadmorska višina pa znaša 499,95462 metra na končnem reperju 2839 v Kozini.

Vse pridobljene podatke iz Geodetske uprave Republike Slovenije potrebne za nadaljnji izračun sem podal v preglednici, ki sledi. Za povezavo med preglednico in sliko sem reperje dodatno oštevilčil.

Preglednica 1: Pridobljeni podatki

Oznaka	Reper	λ [°]	φ [°]	$\Delta h\ [m]$	$s\ [km]$	$g_{merjeni}\ [mGal]$
1	9000	13,7267552	45,5470883			980655,812
				-4,71981	0,685	
2	CP-146	13,7297964	45,5448855			980656,628
				-0,5554	0,800	
3	N1271	13,7358072	45,5406778			980656,046
				1,22615	0,558	
4	3647	13,7363182	45,5367241			980656,080
				5,06734	0,677	
5	N1005	13,7441886	45,5386465			980655,325
				3,98769	0,634	
6	14/122a	13,7512274	45,5414347			980653,984
				16,14909	0,650	
7	N1006A	13,7588936	45,5432282			980650,373
				8,35581	0,355	
8	N1007	13,7629033	45,5431423			980648,570
				-25,90452	0,656	
9	N1008	13,7664631	45,5471227			980653,301
				-3,58692	0,465	
10	OP-743	13,7705725	45,5489577			980653,811
				-5,53153	0,555	
11	N1015	13,7761028	45,551678			980654,521
				2,51238	1,040	
12	N1009	13,7853912	45,5566569			980653,071
				15,92398	0,896	
13	3959	13,7936221	45,5551063			980649,331
				16,02526	0,692	
14	CP-88	13,8012897	45,5523164			980645,773
				-5,63122	0,690	
15	CP-85	13,8057218	45,5474496			
				-3,49054	0,180	
16	N1010	13,807171	45,5465463			980647,762
				6,8525	0,380	
17	CP-74	13,8114499	45,5454576			
				0,53888	1,360	
18	MDXLII	13,8275062	45,5449844			980644,218
				7,6318	0,600	
19	OP-733	13,8347198	45,5434751			980642,721
				2,7786	0,430	
20	3674	13,8400594	45,5429618			980641,662
				3,09243	0,710	
21	C-174	13,848088	45,5436188			980640,083
				3,02649	0,650	
22	N1011	13,8553401	45,5427918			980639,272
				4,11256	0,510	
23	N5009	13,8603074	45,5409517			980638,458
				3,585	0,460	
24	MCCCXXII	13,863441	45,5379595			
				8,3907	0,780	

… se nadaljuje

… nadaljevanje Preglednice 1

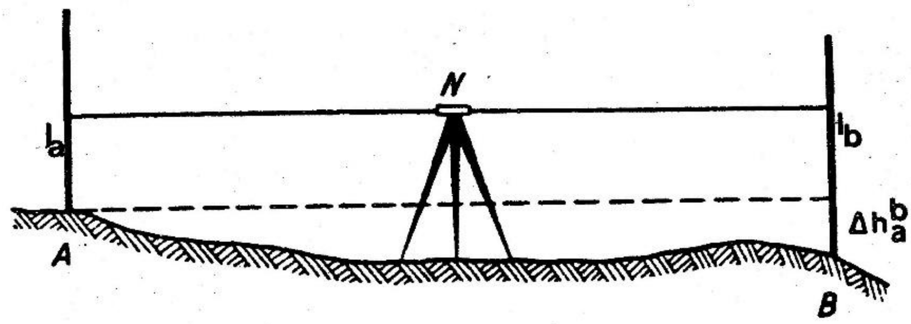
25	5483	13,871727	45,535315			980635,233
				56,46521	1,400	
26	N1012	13,8673379	45,5428483			980625,460
				41,52737	0,980	
27	5482	13,8718359	45,5503794			980616,371
				40,81947	0,860	
28	N1013	13,8753256	45,5500739			980607,884
				61,8374	1,470	
29	C-148	13,8765213	45,5562745			980594,317
				32,92522	0,810	
30	12/1	13,872154	45,5626564			980587,867
				36,09206	1,390	
31	11/1	13,8728474	45,575396			
				-14,56997	0,430	
32	10/1	13,8735156	45,578507			980584,471
				9,75349	0,787	
33	9/1	13,8689831	45,5840773			980583,243
				40,78598	0,931	
34	8/1	13,8590481	45,5886758			980572,775
				61,06915	1,345	
35	7/1	13,8609904	45,589595			980558,540
				-13,69921	0,470	
36	6/1	13,8666411	45,5890212			980564,537
				-4,56808	0,862	
37	5/1	13,8751875	45,5859112			980566,527
				-2,09066	1,359	
38	4/1	13,8795863	45,5799524			980566,962
				12,70803	0,450	
39	N266	13,8852219	45,5794406			980564,743
				8,71008	0,749	
40	N265	13,8936134	45,5769125			980562,612
				-16,36402	1,126	
41	MCDXXIV	13,906585	45,5747067			980564,848
				-13,2499	0,853	
42	2/122a	13,9121174	45,5790975			980567,384
				27,31536	0,706	
43	OP-676	13,9116517	45,5843743			980561,720
				17,8142	0,656	
44	3949	13,9151658	45,588232			980558,153
				-28,16107	0,740	
45	N264	13,9230776	45,5911257			980563,172
				-1,32004	0,610	
46	N263	13,926443	45,5945117			980562,250
				15,61075	0,369	
47	CP-898	13,9285441	45,594387			980558,694
				30,10409	0,729	
48	MDXXXIV	13,9273578	45,6008187			980553,713
				25,57897	1,120	
49	MCCCLVII	13,9349683	45,6037423			980547,352
				7,54422	0,736	
50	2839	13,9377894	45,6091406			980547,360

3 GEOMETRIČNI NIVELMAN

Geometrični nivelman je ena izmed geodetskih metod izmere, s pomočjo katerih določamo višinsko razliko med dvema točkama, prenašamo višine ali pa zakoličujemo ter kontroliramo dane višine. Je najbolj natančna od vseh geodetskih metod, saj lahko višinsko razliko med točkama ali višino točke določimo z natančnostjo od centimetra pri gradbenih nivelirjih do nekaj stotink milimetra pri preciznih nivelirjih. Za izvedbo geometričnega nivelmana potrebujemo več različne opreme in instrumentarija, kot so nivelir, nivelmanska lata, stativ nivelirja, podnožka oziroma tako imenovana žaba, stojala za nivelmanske late in druga oprema, s katero opazujemo zunanje dejavnike, da lahko nato pri preciznih meritvah upoštevamo popravke. Osnovna oprema sta nivelir in nivelmanska lata, od katerih je tudi odvisna natančnost meritev. Poznamo optične in digitalne nivelirje, vsakemu nivelirju pa pripada tudi določena nivelmanska lata, ki pa jih ločimo glede na razdelbo in material, na katerega je razdelba nanesena.

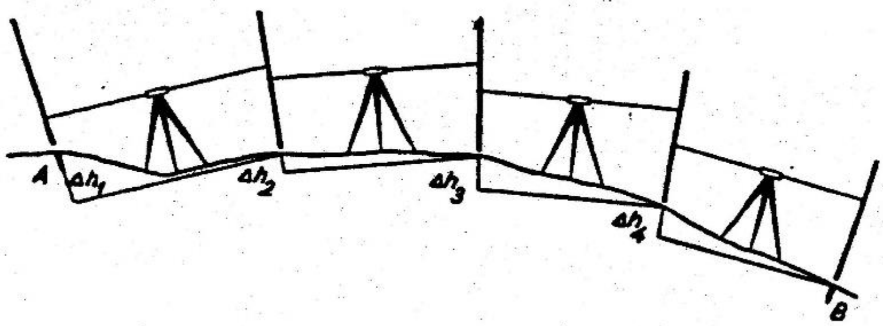
Osnovni princip geometričnega nivelmana je, da s pomočjo nivelirja vzpostavimo horizontalno vizurno os, nivelmanski lati postavimo na višinski točki, nato pa iz razlik odčitkov na nivelmanskih latah dobimo višinsko razliko med višinskima točkama. Odčitek na nivelmanski lati dobimo tam, kjer horizontalna vizura nivelirja seka nivelmansko lato.

Niveliramo lahko na dva načina, in sicer z niveliranjem iz sredine in z niveliranjem iz krajišča. Pri niveliranju iz sredine pazimo, da je oddaljenost od nivelmanske late zadaj do nivelirja približno enaka oddaljenosti od nivelmanske late spredaj do nivelirja. Pri preciznem geometričnem nivelmanu naj bi razlika med dolžinama znašala do maksimalno enega metra, priporočljiva pa je razlika pod polovico enega metra. Razdalja med nivelirjem in posamezno nivelmansko lato pa naj ne bi presegala 30 metrov, ker se z večjo oddaljenostjo slabša natančnost določitve odčitka na nivelmanski lati in s tem višinske razlike. Nivelmanska lata zadaj je tista nivelmanska lata, kjer je višinsko izhodišče in kjer začnemo meriti, nivelmanska lata spredaj pa je tista lata na izmenišču na katero prenesemo višinsko razliko s točke, kjer je lata zadaj. (Vodopivec, 1988)



Slika 2: Določitev višinske razlike med danima višinskima točkama z niveliranjem iz sredine (Vodopivec, 1988, str. 1)

Če sta višinski točki med sabo preveč oddaljeni ali pa je višinska razlika med njima prevelika, da bi lahko z enim samim niveliranjem dobili višinsko razliko, moramo niveliranje ponoviti tolikrat, da lahko nato s seštevanjem posameznih višinskih razlik pridemo do višinske razlike med višinskima točkama. Tako lahko s pomočjo geometričnega nivelmana dobimo višinsko razliko med dvema poljubnima točkama. Temu postopku večkratnega niveliranja med višinskima točkama pravimo izmera nivelmanske linije.

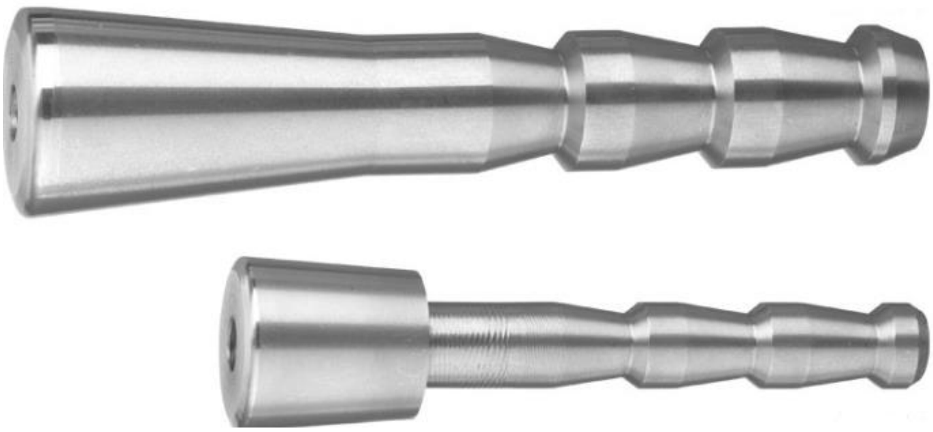


Slika 3: Nivelmanska linija (Vodopivec, 1988, str. 2)

Glede na to, na kateri točki določamo višino, ločimo geometrični nivelman na generalni in detajlni nivelman. Pri generalnem nivelmanu določamo višine stalnim višinskim točkam, ki so trajno stabilizirane in jim pravimo reperji. Pri tem nivelmanu vedno niveliramo iz sredine. Pri detajlnem nivelmanu pa določamo višine detajlnim točkam, ki so lahko stabilizirane trajno ali pa tudi ne.

Izhodišče za nivelmansko izmero naj bi bil vedno reper, posamezni reperji pa so dobili nadmorske višine tako, da so bile vzpostavljene nivelmanske mreže. Reperji so trajno stabilizirane višinske točke, ki imajo enolično določen vrh ali sredino, glede na katero se nanaša nadmorska višina. Poznamo več različnih reperjev – od več izvedb betonskih stebrov s kovinskim drogom in kovinskim čepom do kovinskih čepov, ki jih ob gradnji ali pa naknadno vgradimo vodoravno ali pa navpično v objekte, kar je tudi najpogostejša oblika stabilizacije reperjev. (Vodopivec, 1988)

V nivelmanskih mrežah Slovenije so nadmorske višine reperjev določene glede na izhodiščni reper v Trstu. Nivelmanske mreže so razdeljene glede na način razvijanja mreže, velikost mreže, način stabilizacije reperjev, način izmere mreže, natančnost izmere in način izravnave mreže. V Sloveniji ločimo nivelmanske mreže višjega reda in nivelmanske mreže nižjega reda. Nivelmanske mreže višjega reda so nivelmanska mreža z veliko natančnostjo, nivelmanska mreža 1. reda, nivelmanska mreža 2. reda in mestna nivelmanska mreža 1. reda. Nivelmanske mreže nižjega reda pa so nivelmanska mreža 3. reda, nivelmanska mreža 4. reda in mestna nivelmanska mreža 2. reda.



Slika 4: Reper (kovinski čep za vodoravno vgradnjo) (Geoshop, 2014)

4 GRAVIMETRIJA

Gravimetrija je veja geodezije, ki se ukvarja z izmero in analizo težnosti, se pravi z izmero in analizo težnega pospeška, ki ga označimo z g. Gravimetrija je v geodeziji uporabna predvsem za določanje oblike in velikosti Zemlje ter za določitev Zemljinega težnostnega polja. Veliko fizikalnih pojavov je odvisnih od težnega pospeška, vendar lahko le nekatere od teh pojavov uporabimo za določanje le-tega. Enota za težni pospešek je m/s^2, vendar pri gravimetričnih meritvah za enoto velikokrat uporabimo Gal, 1 $Gal = 0{,}01\, m/s^2$.

V osnovi metode merjenja težnega pospeška delimo na dinamične in statične. Pri dinamičnih metodah opazujemo gibanje telesa pod vplivom sile teže, ki je posledica težnega pospeška, se pravi merimo čas premika telesa iz ene lege v drugo. Pri statičnih metodah pa opazujemo spremembo ravnovesja telesa pod vplivom sile teže in njej nasprotne sile. Merimo premik ali zasuk telesa, ki je konstantne mase. Nasprotna sila sile teže je v tem primeru mišljena sila prožnosti vzmeti in torzija nitke ali membrane.

Težni pospešek merimo z gravimetri. Poznamo absolutne in relativne gravimetre. Z absolutnimi gravimetri izmerimo absolutni težni pospešek, se pravi polno vrednost težnega pospeška na točki merjenja. Z relativnimi gravimetri pa izmerimo relativni težni pospešek, torej razliko med vrednostjo absolutnega težnega pospeška na znani točki in vrednostjo težnega pospeška na novi točki. Pri določevanju absolutnega težnega pospeška moramo meriti čas in dolžino nihala ali pa dolžino poti prostega pada, pri določevanju relativnega težnega pospeška pa samo čas. Relativne vrednosti težnega pospeška lahko določimo z dinamičnimi in statičnimi metodami določevanja težnega pospeška, absolutne vrednosti težnega pospeška pa le z dinamičnimi metodami določevanja težnega pospeška.

Absolutni gravimetri uporabljajo princip nihala ali pa prostega pada telesa v vakuumu. Večinoma se uporabljajo absolutni gravimetri po principu prostega pada telesa. Absolutni težni pospešek po principu prostega pada lahko določimo z natančnostjo od $\pm 10^{-7}\, m/s^2$ do $\pm 10^{-9}\, m/s^2$. Največji vpliv na natančnost absolutnih gravimetrov po principu prostega pada ima pogrešek merjenja razdalje oziroma poti telesa in od pogojev za opazovanje na točki. Od leta 1970 so naredili približno 30 različnih prenosnih absolutnih gravimetrov po principu prostega pada. Ti gravimetri se uporabljajo predvsem za vzpostavitev in izmero gravimetričnih mrež točk ter za pridobivanje podatkov o časovnih spremembah težnostnega pospeška na področjih seizmike, oceanografije, tektonskih premikov in vulkanologije. Absolutne meritve težnega pospeška po navadi potekajo več dni v serijah več tisoč meritev.

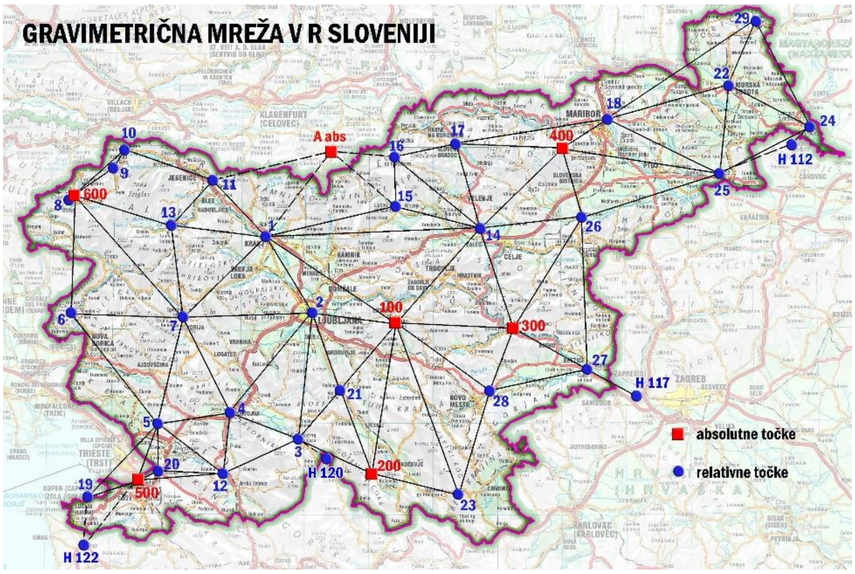
Relativni gravimetri sedaj uporabljajo dinamični princip nihala, v preteklosti pa so relativne meritve težnostnega pospeška opravljali z mehanskimi gravimetri, ki so temeljili na statičnih metodah merjenja relativnega težnega pospeška. Pri relativnih meritvah težnega pospeška senzorji merijo čas ali dolžino. Eno od teh količin merimo, drugo pa si vzamemo za konstanto. Pri sodobnih gravimetrih je dolžina konstanta in zato merimo čas. Tako lahko zaradi razlike časa ali dolžine med dvema točkama izračunamo razliko težnega pospeška med točkama, pri čemer imamo absolutni težni pospešek ene točke dan in ga lahko nato z dobljeno razliko izračunamo še na drugi točki. Mehanski gravimetri so nekoč delovali po principu vzmetne tehnice – vzmet se torej zaradi spremembe težnega pospeška raztegne ali skrči. Relativne meritve so hitrejše in posledično cenejše od absolutnih meritev težnega pospeška.

Absolutne in relativne gravimetre je potrebno kalibrirati, to pa predvsem zato, ker ne merimo direktno težnega pospeška, ampak druge količine, in je po kalibraciji izračun težnega pospeška natančnejši. Gravimeter lahko kalibriramo na dva načina, in sicer z meritvami na odprtem, kjer merimo težni pospešek na točkah z znanim pospeškom in nato primerjamo, ali pa z meritvami v laboratoriju, kjer merimo spremembe težnega pospeška, ko nihalo odmaknemo iz horizontale. Če kalibriramo gravimeter z meritvami na odprtem, to počnemo na gravimetričnih bazah, ki imajo natančno določeno vrednost težnega pospeška. (Kuhar, 2012)

Slika 5: Relativni gravimeter Scintrex AutoGrav CG-5 (Gravirazvedka, 2016)

Točke z določenim težnim pospeškom se povezujejo v gravimetrične mreže, ki jih v osnovi delimo na globalne, regionalne in lokalne. Na te osnovne mreže se navežemo, ko merimo detajlne gravimetrične mreže, ki jih potrebujemo za geofizikalne, geodinamične in geodetske raziskave. Za izhodišče vseh gravimetričnih mrež se uporablja 10 absolutnih meritev, ki so bile opravljene na osmih točkah. Za gravimetrično mrežo 0. reda pa je bilo določenih 36 točk, ki so razporejene po celem svetu. Slednje spadajo v globalno mrežo gravimetričnih točk in služijo za kontrolo regionalnih gravimetričnih mrež ter za spremljanje sprememb težnosti na svetovni ravni. Poleg te globalne gravimetrične mreže, ki je dobila ime IGSN71, kar pomeni International Gravity Standardization Net 1971, imamo v Evropi svojo mrežo, ki nosi ime EUGN94 in pomeni Unified European Gravity Network 1994.

Slovenija ima v globalni mreži IGSN71 eno točko, ki se nahaja v Ljubljani. Poleg te pa imamo v Sloveniji dobre regionalne in lokalne gravimetrične mreže, ki se navezujejo na šest absolutno določenih točk, ki so stabilizirane v gradu Bogenšperk, garaži v Gotenici, cerkvi sv. Areha na Pohorju, Sevniškem gradu pri Sevnici, gradu Socerb in trdnjavi Kluže pri Bovcu. Te točke predstavljajo ničelno gravimetrično mrežo Slovenije, meritve pa so nam opravili nemški in italijanski strokovnjaki. Opravili so 10 meritev, od tega na Bogenšperku štiri in v Gotenici dve, drugje pa po eno samo. 29 relativno gravimetrično izmerjenih točk sestavlja v Sloveniji gravimetrično mrežo 1. reda. Mreža 0. reda in mreža 1. reda skupaj sestavljata uradno osnovno gravimetrično mrežo Slovenije.



Slika 6: Osnovna gravimetrična mreža Slovenije (MOP, GURS, 2016)

5 SLOVARČEK OZNAČB

Za večjo preglednost in v izogib pojasnjevanju oznak pri vsaki posamezni enačbi, saj se nekatere večkrat ponovijo, sem izdelal ta slovarček označb.

a	... velika polos elipse
b	... mala polos elipse
C	... geopotencialna kota
C^N	... normalna geopotencialna kota
C_0	... geopotencialna kota začetne točke
C_i	... geopotencialna kota i-te točke
DP_{ij}	... dinamični popravek i-te točke
e^2	... prva ekscentriteta elipse
g_{mi}	... srednja vrednost težnega pospeška med i-to točko in predhodno točko
g_i	... težni pospešek i-te točke
$\overline{g_{i,j}}$	... srednja vrednost težnega pospeška vzdolž težiščnice
h	... elipsoidna višina
Δh_{ij}	... nivelirana višinska razlika med zaporednima točkama
H	... ortometrična višina
H_S	... srednja nadmorska višina med točkama i in j
H^{NO}	... normalna ortometrična višina
H^N	... normalna višina
H_i^D	... dinamična višina i-te točke
H_i	... ortometrična višina i-te točke
H_j	... ortometrična višina j-te točke, ki je ena točka pred i-to točko
$H_{začetnega\ reperja}$	... normalna ortometrična višina začetnega reperja
H_i^N	... normalna višina i-te točke
H_j^N	... normalna višina j-te točke, ki je ena točka pred i-to točko
k	... koeficient pri izračunu normalnega težnostnega polja
N	... geoidna višina
OP_{ij}	... ortometrični popravek i-te točke
P_i	... i-ta točka na površju Zemlje

P_0 ... točka na geoidu

U ... normalni težnostni potencial

V ... potencial pospeška privlačne sile

W_i ... težnostni potencial polja Zemlje i-te točke na površju

W_0 ... težnostni potencial polja Zemlje na geoidu

γ ... vektor normalne sile teže

γ_a ... vrednost normalnega težnega pospeška na ekvatorju

γ_b ... vrednost normalnega težnega pospeška na polu

$\bar{\gamma}$ ... povprečni normalni težni pospešek

$\overline{\gamma_{i,j}}$ ... srednja vrednost normalnega težnega pospeška na odseku normalne težiščnice

γ_0 ... normalni težni pospešek

γ_0^{φ} ... normalni težni pospešek točke na elipsoidu z geografsko širino φ

$\gamma_0^{46°}$ ... normalni težni pospešek točke na elipsoidu z geografsko širino 46°

ζ ... anomalija višine

φ ... geografska širina

$\Delta\varphi$ ... razlika geografskih širin

ω ... kotna hitrost rotacije Zemlje

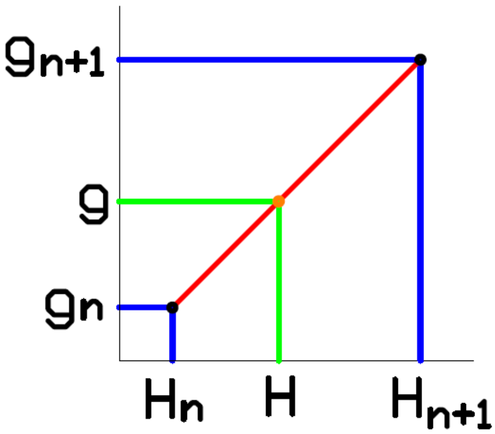
6 LINEARNA INTERPOLACIJA TEŽNOSTI

Na splošno poznamo štiri načine interpolacije težnosti: interpolacijski polinom, deljene diference, interpolacija z odsekoma polinomskimi funkcijami in Bezierove krivulje. Pri interpolaciji imamo podane vrednosti neke funkcije tabelirane ali pa so vrednosti podane za posamezne točke. Nas pa zanima točka, za katero nimamo podane določene vrednosti, je pa nekje med podanimi vrednostmi. V tem primeru s pomočjo funkcije interpoliramo vrednost vmesne točke glede na okoliške točke. Po navadi interpoliramo neke fizikalne količine, ki na neki točki ne morejo biti določene ali pa samo niso bile določene. Vedno poizkušamo uporabiti čim preprostejšo interpolacijsko funkcijo, ki se v danih točkah ujema z danimi vrednostmi. (Plestenjak, 2015)

Ena izmed interpolacij z odsekoma polinomskimi funkcijami je tudi linearna interpolacija, ki je ena najbolj enostavnih funkcij interpolacije. Interpoliramo odsekoma na vsakem posameznem intervalu med dvema točkama. Končna odsekoma linearna funkcija je zvezna, ampak ne zvezno odvedljiva.

$$y = y_n + \frac{x - x_n}{x_{n+1} - x_n} * (y_{n+1} - y_n)$$

V našem primeru moramo interpolirati težni pospešek na posameznih točkah, če niso bile izvedene gravimetrične meritve. Za vse naše točke imamo podane nadmorske višine v normalnem ortometričnem sistemu višin, ki ga za nadmorske višine uporabljamo v Sloveniji. Na točkah, kjer ni bil merjen težni pospešek, ga moramo interpolirati z linearno interpolacijo, saj za računanje višin v posameznih višinskih sistemih potrebujemo težni pospešek na vseh točkah. Skozi točki n in n+1 položimo premico, in kjer vrednost nadmorske višine za točko, ki nas zanima, seka premico, moramo interpolirati vrednost težnega pospeška.



Slika 7: Linearna interpolacija

Če zgornjo enačbo pretvorimo v enačbo za linearno interpolacijo težnosti, moramo namesto spremenljivk oziroma koordinat x vstaviti nadmorske višine točk, namesto spremenljivk oziroma koordinat y pa merjene težnostne pospeške.

$$g = g_n + \frac{H - H_n}{H_{n+1} - H_n} * (g_{n+1} - g_n)$$

Sam sem po zgornji enačbi moral interpolirati težni pospešek za 4 točke, ki le-tega niso imele izmerjenega. Točke, za katere sem interpoliral težni pospešek in njegove vrednosti, imam podane v spodnji preglednici.

Preglednica 2: Interpolirane vrednosti težnega pospeška

Točka	Vrednost težnega pospeška
CP-85	980647,001 mGal
CP-74	980637,493 mGal
MCCCXXII	980637,493 mGal
11/1	980582,172 mGal

7 NORMALNO TEŽNOSTNO POLJE

Če želimo določiti normalno težnostno polje, potrebujemo posebni referenčni model Zemlje, in sicer bo to v tem primeru nivojski elipsoid. Nivojski elipsoid je rotacijski elipsoid, ker je njegova ploskev ekvipotencialna ploskev lastnega težnostnega polja, določen pa je s parametri rotacijskega elipsoida, ki so velika polos in sploščenost elipsoida, masa Zemlje skupaj z njeno atmosfero in kotna hitrost rotacije. Potencial normalnega težnostnega polja označimo z U.

$$U = U(x, y, z)$$

Za ploskev nivojskega elipsoida velja, da je ploskev enakega potenciala, se pravi $U_0 = konstanta$, isto velja tudi za geoid, in sicer $W_0 = konstanta$. Iz tega lahko dobimo enačbo $U_0 = W_0$. Težnostno polje nivojskega elipsoida je posledica centrifugalne in gravitacijske sile, pri tem pa nam ni potrebno poznati razporeditve gostote znotraj elipsoida. S temi podatki in z znano kotno hitrostjo lahko prav tako izračunamo normalni težnostni potencial.

$$U = V + \frac{1}{2} * \omega^2 * (x^2 + y^2)$$

Ko določujemo normalno težnostno polje, moramo skupaj povezati geometrične in fizikalne parametre nivojskega elipsoida. Pri tej povezavi vidimo, da je vektor normalne sile teže gradient normalnega težnostnega potenciala.

$$\gamma = grad\ U$$

Normalni težni pospešek je numerična vrednost vektorja normalne sile teže. Normalni težni pospešek je pravokoten na nivojski elipsoid, najpomembnejša člena za njegov izračun pa sta vrednosti normalnega težnega pospeška na ekvatorju in na polu.

$$\gamma_0 = \frac{a * \gamma_a * \cos^2 \rho + b * \gamma_b * \sin^2 \rho}{\sqrt{a^2 * \cos^2 \rho + b^2 * \sin^2 \rho}}$$

Prav tako je zgornja enačba prirejena za lažji izračun, kjer direktno dobimo numerično vrednost normalnega težnega pospeška. (Lisec, 2002)

$$\gamma = \gamma_a * \frac{1 + k * \sin^2 \rho}{\sqrt{1 - e^2 * \sin^2 \rho}}$$

$$k = \frac{b * \gamma_b}{a * \gamma_a} - 1$$

Sam sem za svoj primer moral izračunati le normalni težni pospešek za geografsko širino 46°, saj je to približno srednja geografska širina Slovenije. V spodnji preglednici so podani parametri za elipsoid GRS80, ki sem jih uporabil pri izračunu.

Preglednica 3: Parametri elipsoida GRS80

Parametri	Vrednosti parametrov
γ_a	9.7803267715 m/s^2
γ_b	9.8321863685 m/s^2
e^2	0.00669438
a	6378137 m
b	6356752.314 m

Za potrebe nadaljnjega izračuna sem nato izračunal še numerično vrednost normalnega težnega pospeška za geografsko širino 46°.

Preglednica 4: Normalni težni pospešek za geografsko širino 46°

k	0.001931851
$\gamma_0^{46°}$	9.807104204 m/s^2

8 VIŠINSKI SISTEMI

Točka je v prostoru definirana s tremi koordinatami, ki so med seboj neodvisne. Te tri koordinate lahko delimo na dve položajni ter eno višinsko komponento, ki nam določa višino točke v določenem višinskem sistemu. Položajni komponenti sta definirani geometrično, višina točke pa fizikalno. Sicer lahko višino definiramo tudi geometrično s koordinato Z v tridimenzionalnem kartezičnem koordinatnem sistemu ali pa s h kot tretjo koordinato v elipsoidnem koordinatnem sistemu, vendar niso primerne za uporabo v tehničnih nalogah, saj neenakomerno odstopajo od izhodiščnih nivojskih ploskev, tudi do 100 metrov. Zato je pomembno, da pri izbiri višinskega sistema upoštevamo zahteve več različnih uporabnikov in strok, kot posledica tega so nastali določeni pogoji, ki jih mora optimalni višinski sistem zadovoljiti.

Osnovni pogoji pri izbiri višinskega sistema so:

- višine točk morajo biti enolično določene in neodvisne od poti niveliranja,
- višine točk morajo biti določene na podlagi merjenj na površini Zemlje, pri tem pa moramo upoštevati čim manj predpostavk,
- popravki morajo biti tako majhni, da jih ne upoštevamo pri mrežah nižjih redov,
- za izhodiščne nivojske ploskve naj bi obstajala fizikalna razlaga, za višine pa bi morala obstajati geometrična razlaga,
- višine naj bi bile podane v metrih, prav tako pa bi morale biti čim lažje povezljive z elipsoidnimi višinami.

Vsem tem pogojem ne zadošča noben višinski sistem, saj so nekateri pogoji izključujoči med seboj. Posledično moramo ob določevanju višinskega sistema sprejeti nekaj dogovorov, kaj je za naš višinski sitem pomembnejše in kaj ne.

8.1 Normalne ortometrične višine

V preteklosti je bilo merjenje težnega pospeška dolgotrajen in zahteven postopek, zato se je meril le poredko. Ker je bilo merjenje prezahtevno, so morali namesto merjenega za izračun uporabljati normalni težni pospešek, ki pa je bil določen teoretično. Normalni težni pospešek je bil teoretično določen glede na geografsko širino točke, ki smo ji določali višino. Nanaša se na normalno ničelno nivojsko ploskev, do normalnih ortometričnih višin pa so prišli tako, da so iz geometričnega nivelmana oziroma njegovih rezultatov izračunali normalne geopotencialne kote C^N. Normalne ortometrične višine so nato dobili z deljenjem normalne geopotencialne kote in povprečnega normalnega težnega pospeška po enačbi:

$$H^{NO} = \frac{C^N}{\bar{\gamma}}$$

Popravke so včasih računali po sferoidnih enačbah, zato imajo normalne ortometrične višine tudi drugo ime, in sicer sferoidne ortometrične višine.

V praksi računamo normalne ortometrične višine tako, da niveliranim višinskim razlikam prištejemo normalni ortometrični popravek. (Koler, 1998)

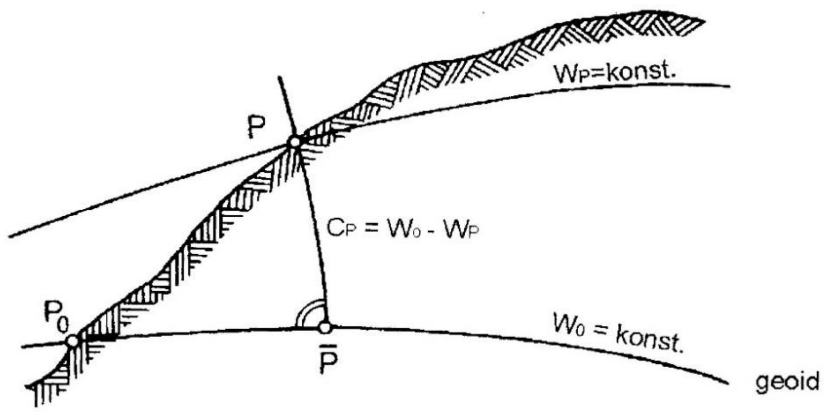
$$NOP_{ij} = -0{,}000025685 * H_S * \Delta\varphi$$

Danes te višine nimajo nobenega pomena več, saj je merjenje težnega pospeška mnogo lažje kot pred leti, vendar jih nekatere države, med njimi je tudi Slovenija, še kar uporabljajo za uradne državne višine.

8.2 Geopotencialne kote

Višino točke lahko predstavimo tudi s težnostnim potencialom, saj gre skozi eno točko le ena nivojska ploskev z določenim težnostnim potencialom in lahko višino določimo enolično. Razlika težnostnega potenciala med dvema nivojskima ploskvama je enaka temu, da med tema dvema nivojskima ploskvama prenesemo enoto mase. Težnostni potencial ni odvisen od tega, po kateri poti prenesemo enoto mase iz ene nivojske ploskve na drugo. Če razliko merimo z nivelmanom, jo imenujemo geopotencialni nivelman, saj poveže meritve geometričnega nivelmana z meritvami težnega pospeška.

Geopotencialne kote ne merimo na vseh točkah, merimo jo le na najpomembnejših, vmesne vrednosti točk pa interpoliramo. Težnostni potencial nič se nahaja na začetni ploskvi, ki jo predstavlja geoid, ki je srednja morska gladina, podaljšana pod kopnim. Razlika dveh težnostnih potencialov se imenuje geopotencialna kota, ki ima enoto geopotencialno število oziroma s kratico GPU. 1 GPU znaša 10 m/s^2, če pa to izrazimo v starih enotah 1 GPU znaša 1000 Galm. Geopotencialne kote se od nadmorskih viši ne razlikujejo za več kot 2 %. (Lisec, 2002)



Slika 8: Geopotencialne kote (Lisec, 2002, str.50)

Geopotencialna kota je računsko definirana kot negativna razlika težnostnih potencialov geoida in točke na površju. Zato osnovno enačbo za izračun geopotencialne kote napišemo:

$$C_i = -(W_i - W_0) = W_0 - W_i$$

V praksi se za računanje geopotencialne kote uporablja naslednja enačba:

$$C_i = C_0 + \sum_{n=1}^{i} (g_{mi} * \Delta h_{ij})$$

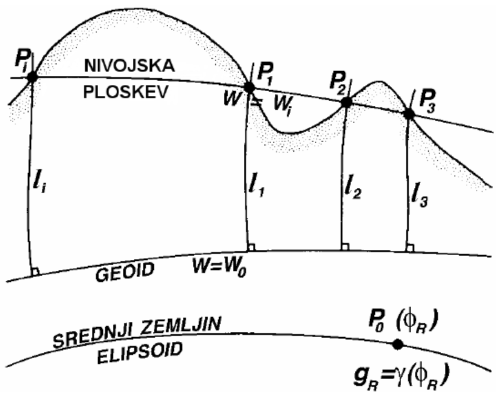
$$g_{mi} = \frac{g_{i-1+}g_i}{2}$$

Geopotencialne kote imajo tako nekaj dobrih kot nekaj slabih lastnosti, in sicer:

- neodvisnost od poti niveliranja,
- točke so z njimi določene enolično,
- na geoidu so nič, nad njim so pozitivne in pod njim negativne,
- točke z isto geopotencialno koto so na isti nivojski ploskvi,
- določimo jih lahko z meritvami na površju zemlje,
- imajo veliko vlogo v izravnavi državnih in evropskih nivelmanskih mrež višjih redov,
- ne moremo si jih geometrično predstavljati, zato se v praksi niso uveljavile,
- med geopotencialnimi kotami in elipsoidnimi višinami ni enostavnega prehoda,
- slabost je tudi, da niso izražene v metrih.

8.3 Dinamične višine

Pri geopotencialnih kotah ima ena nivojska ploskev konstantno vrednost. To dobro lastnost so zato prenesli tudi v dinamične višine, le da so tukaj enote metri, kar je za nas veliko prijaznejša merska enota.



Slika 9: Dinamične višine (Kuhar, 2012, str. 61)

Do dinamičnih višin pridemo tako, da geopotencialne kote delimo z normalnim težnostnim pospeškom točke na elipsoidu z geografsko širino φ na elipsoidu.

$$H_i^D = \frac{C_i}{\gamma_0^{\varphi}}$$

V praksi dinamičnih višin ne računamo po tej enačbi, ampak merjenim višinskim razlikam med točkami prištejemo dinamični popravek. (Lisec, 2002)

$$DP_i = \sum_{n=1}^{i} \frac{g_{mi} - \gamma_0^{\varphi}}{\gamma_0^{\varphi}} * \Delta h_{ij}$$

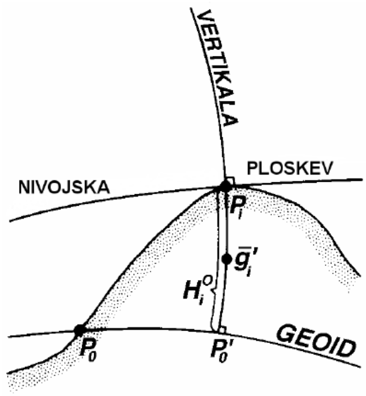
$$H_i^D = H_{začetnega\,reperja} + \sum_{n=1}^{i} (\Delta h_{ij} + DP_{ij})$$

Točke z enako dinamično višino ležijo na isti nivojski ploskvi. Da pridemo do njih, ni potrebno uporabiti nobenih predpostavk, poleg tega pa so neodvisne od poti niveliranja. Dinamični popravki niveliranih višinskih razlik so lahko pri dinamičnih višinah zelo veliki, z večanjem višinske razlike pa se povečuje tudi popravek. Dinamične višine nimajo geometričnega pomena ter jih ne moremo povezati z elipsoidnimi višinami, zato so se bolj kot v geodeziji uveljavile v hidrologiji in pri posameznih gradbenih delih.

8.4 Ortometrične višine

Geopotencialne kote v izmeri zamenjujemo z ortometričnimi višinami. Ortometrična višina je dolžina ukrivljene težiščnice, ki poteka med točko na površju Zemlje in točko P_0 na geoidu. Dolžino težiščnice izračunamo tako, da integriramo vzdolž težiščnice med točko na površju Zemlje in točko na geoidu.

$$H = \int_{P_0}^{P_i} dh'$$



Slika 10: Ortometrične višine (Kuhar, 2012, str. 62)

Po nekaj vmesnih računih, ko vključimo geopotencialne kote, dobimo ortometrično višino tako, da geopotencialno koto točke na površju Zemlje delimo s srednjo vrednostjo težnega pospeška vzdolž težiščnice.

$$H_i = \frac{C_i}{\bar{g}_i}$$

Ortometrično višino bi teoretično lahko dobili, če bi s pomočjo gepotencialnega nivelmana izmerili višinsko razliko med točko na geoidu in točko na površju Zemlje vzdolž težiščnice. Vendar tega ne moremo storiti, saj ne moremo meriti znotraj Zemlje. Ortometrične višine imajo geometrični pomen in si jih lahko predstavljamo. Točke, ki imajo enake ortometrične višine, ne ležijo na istih nivojskih ploskvah, razen če so te točke na geoidu in imajo ortometrične višine enake nič. Ortometrične višine so tudi dobro povezane z elipsoidnimi višinami, saj imamo za povezavo enostavno enačbo, povezuje pa jih geoidna višina.

$$H = h - N$$

V praksi ortometričnih višin ne računamo po zgornjih enačbah, ampak merjenim višinskim razlikam med točkami prištejemo ortometrični popravek. (Lisec, 2002)

$$OP_{ij} = \sum_{n=1}^{i} \frac{g_{mi} - \gamma_0^{\varphi}}{\gamma_0^{\varphi}} * \Delta h_{ij} + \frac{\overline{g_i} + \gamma_0^{\varphi}}{\gamma_0^{\varphi}} * H_i - \frac{\overline{g_j} + \gamma_0^{\varphi}}{\gamma_0^{\varphi}} * H_j$$

$$H_i = H_{začetnega\ reperja} + \sum_{n=1}^{i} (\Delta h_{ij} + OP_{ij})$$

Ortometrični popravek je sestavljen iz treh delov. Prvi del je dinamični popravek, ki je odvisen od poti niveliranja. Druga dva dela ortometričnega popravka sta krajevno odvisna, izračunamo ju lahko na osnovi hipotez o porazdelitvi mas v Zemljini notranjosti. Vsi trije popravki so veliki, vendar je dinamični po predznaku različen od drugih dveh in zato ortometrični popravek znaša le nekaj milimetrov. Natančnost izračuna ortometrične višine je odvisna od tega, koliko podatkov imamo o gostoti zemeljske skorje in kako so ti podatki natančni. Za izračun ortometričnega popravka potrebujemo srednjo vrednost težnega pospeška vzdolž težiščnice med točko na površju Zemlje in točko na geoidu. Ker lahko srednjo vrednost težnega pospeška vzdolž težiščnice določimo le na osnovi hipotez, obstaja veliko različnih načinov izračuna. Več avtorjev ima svoj način in zato imamo več sistemov ortometričnih višin, ki se imenujejo po posameznih avtorjih. Nekateri načini izračuna so bolj natančni od drugih. Najbolj uporabni izračuni srednje vrednosti težnega pospeška vzdolž težiščnice so po avtorjih s priimki Niethammer, Mader, Müller, Ramsayer, Ledersteger, Strang, Chen in Baranov ter Helmert, ki za nas najbolj pride v poštev.

Helmert določi srednjo vrednost težnega pospeška vzdolž težiščnice med točko na površju Zemlje in točko na geoidu tako, da predpostavi linearno spreminjanje težnega pospeška vzdolž težiščnice z višino. Višinski sistem poizkuša računsko čim bolj približati teoretičnemu ortometričnemu višinskemu sistemu. S tem dobimo Helmertovi enačbi za izračun srednje vrednosti težnega pospeška vzdolž težiščnice in izračun Helmertove ortometrične višine.

$$\overline{g_i} = g_i + 0{,}04235 * H_i$$

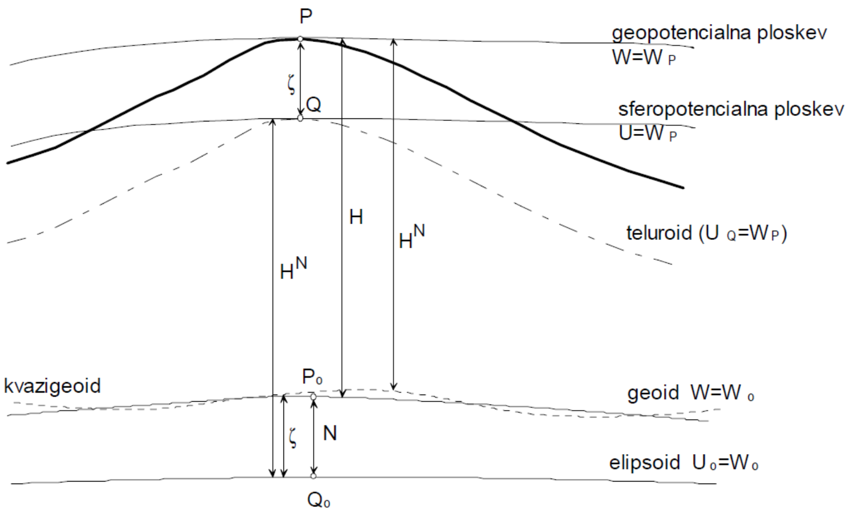
$$H_i = \frac{C_i}{g_i + 0{,}04235 * H_i}$$

8.5 Normalne višine

Za določitev ortometričnih višin so uporabljali hipoteze o vrednosti težnega pospeška v notranjosti Zemlje, ker pa so se hoteli temu izogniti, je Molodenski leta 1954 predlagal normalne višine. Normalna višina se tako nanaša na kvazigeoid in je definirana v normalnem težnostnem polju, lahko pa jo tudi geometrično definiramo. V osnovi normalne višine dobimo tako, da izračunamo kvocient med geopotencialno koto in srednjo vrednostjo normalnega težnega pospeška na odseku normalne težiščnice.

$$H^N = \frac{C_i}{\overline{\gamma_i}}$$

Srednjo vrednostjo normalnega težnega pospeška se definira na odseku normalne težiščnice med točko Q_0 na nivojskem elipsoidu in med točko Q na teluroidu. Teluroid je ploskev, ki ni nivojska ploskev, pač pa predstavlja geometrijsko mesto točk, za katere velja, da je v vsaki točki Q izpolnjen pogoj $Q_0 = W_P$. Teluroid ponazarja fizično površje Zemlje. Razlika je zelo majhna, vendar višinsko razliko poimenujemo anomalija višine in jo označimo z ζ. Ker pa se višina ne konča v tisti točki, ki jo predstavlja, se je postopek obrnil in nastala je nova ploskev kvazigeoid. Kvazigeoid je torej ploskev, ki jo dobimo, ko normalne višine nanesemo s površja Zemlje v njeno notranjost. Kvazigeoid prav tako ni nivojska ploskev, od geoida odstopa zelo malo, na morju pa se celo prekrivata.



Slika 11: Normalne višine (Kuhar, 2012, str. 65)

Geopotencialne kote lahko določimo z geopotencialnim nivelmanom, zato lahko normalne višine izračunamo brez da bi uporabili dodatne hipoteze ali pogoje. Točke, ki ležijo na isti nivojski ploskvi, nimajo enakih vrednosti normalnih višin. Normalne višine v visokogorju odstopajo za večje vrednosti od ortometričnih višin kot v nižjih ravninskih delih površja Zemlje. Normalne višine so dobro povezane z elipsoidnimi, saj jih povezuje enačba preko anomalij višin.

$$H^N = h - \zeta$$

V praksi normalnih višin ne računamo po zgornjih enačbah, ampak merjenim višinskim razlikam med točkami prištejemo normalni popravek. (Lisec, 2002)

$$NP_{ij} = \sum_{n=1}^{i} \frac{g_{mi-} \gamma_0^{\varphi}}{\gamma_0^{\varphi}} * \Delta h_{ij} + \frac{\overline{\gamma_i} + \gamma_0^{\varphi}}{\gamma_0^{\varphi}} * H_i^N - \frac{\overline{\gamma_j} + \gamma_0^{\varphi}}{\gamma_0^{\varphi}} * H_j^N$$

$$H^N = H_{začetnega\ reperja} + \sum_{n=1}^{i} (\Delta h_{ij} + NP_{ij})$$

9 ANALIZA VIŠINSKIH SISTEMOV

Same enačbe za izračun višinskih sistemov nam ne povejo dosti o posameznih sistemih, zato je dobro razlike med višinskimi sistemi ugotoviti na izračunu praktičnega primera. To storimo tako, da izračunamo popravke in jih prištejemo višinskim razlikam, te pa seštevamo s čimer dobimo višine v vseh višinskih sistemih. Podatke za posamezne izračune sem vzel iz poglavja Testno območje, višine pa sem računal po enačbah, podanih v poglavju Višinski sistemi.

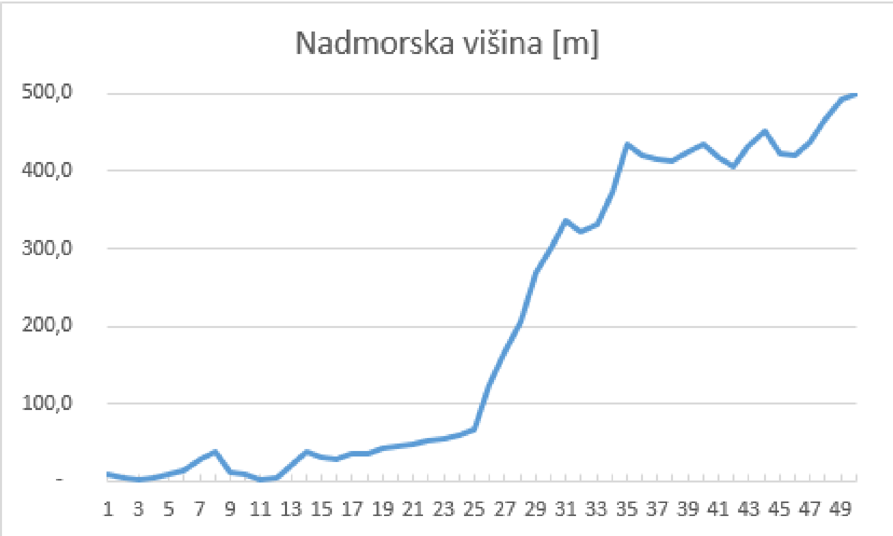
Nekatere značilnosti posameznih sistemov vidimo že iz vrednosti višin, za podrobnejšo analizo pa moramo pogledati tudi popravke znotraj posameznih sistemov. Sam sem v preglednici 5 podal izračunane višine v vseh višinskih sistemih, izračunane popravke pa zbral v preglednici, ki se nahaja pod prilogo B. Popravke sem tudi predstavil grafično, saj tako lažje vidimo nihanja v vsakem sistemu in logično sklepamo, če obstaja kakšna povezava.

Za osnovo vseh nadaljnjih računanj smo vzeli podatke o začetnem reperju 9000, in sicer nadmorsko višino, ki je podana v normalnem ortometričnem sistemu višin in znaša 7,47980 metra, ter geopotencialno koto, ki znaša 7,335198 kGalm.

9.1 Normalne ortometrične višine

Na spodnji sliki lahko vidimo grafično podane nadmorske višine vseh 50 reperjev. Te višine predstavljajo tudi normalni ortometrični sitem višin, ki je uraden sistem za nadmorske višine v Sloveniji. Minimalna vrednost nadmorske višine teh reperjev je 1,9677 metra, maksimalna vrednost pa 499,9546 metrov. Povprečna nadmorska višina reperjev je 202,0125 metrov.

Nadmorske višine smo dobili direktno iz geometričnega nivelmana. Vse nadmorske in druge izračunane višine v drugih višinskih sistemih sem podal v Preglednici 5, ki sledi.



Slika 12: Nadmorske višine reperjev

Preglednica 5: Izračunane višine v več višinskih sistemih

Reper	Normalna ortometrična višina [m]	Geopotencialna kota [kGalm]	Dinamična višina [m]	Ortometrična višina [m]	Normalna višina [m]
9000	7,4798	7,3352	7,4798	7,4794	7,4798
CP-146	2,7600	2,7067	2,7602	2,7601	2,7602
N1271	2,2046	2,1620	2,2049	2,2048	2,2049
3647	3,4307	3,3645	3,4310	3,4308	3,4310
N1005	8,4981	8,3338	8,4980	8,4975	8,4980
14/122a	12,4858	12,2443	12,4855	12,4848	12,4855

… se nadaljuje

… nadaljevanje Preglednice 5

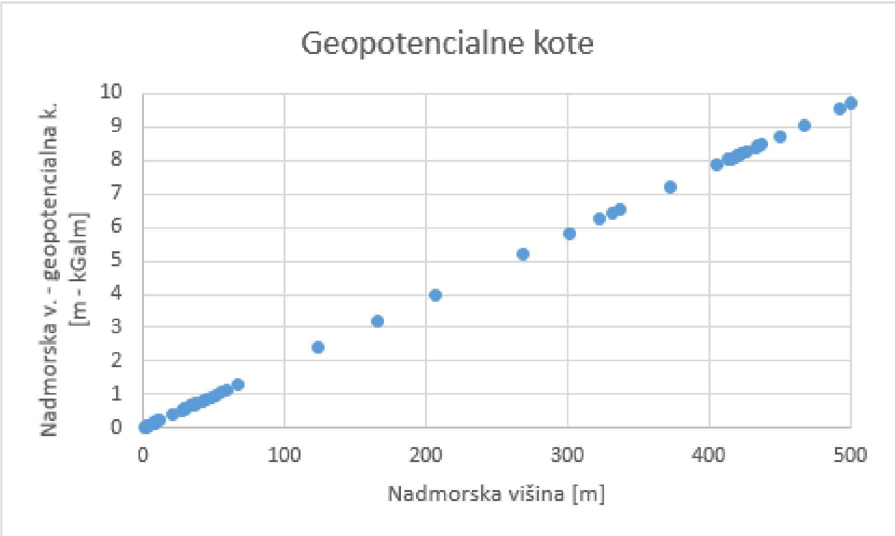
N1006A	28,6349	28,0810	28,6336	28,6319	28,6335
N1007	36,9907	36,2751	36,9889	36,9866	36,9887
N1008	11,0861	10,8718	11,0860	11,0853	11,0859
OP-743	7,4992	7,3543	7,4992	7,4988	7,4992
N1015	1,9677	1,9297	1,9680	1,9679	1,9680
N1009	4,4801	4,3935	4,4803	4,4800	4,4803
3959	20,4041	20,0094	20,4033	20,4020	20,4032
CP-88	36,4293	35,7245	36,4275	36,4252	36,4273
CP-85	30,7981	30,2023	30,7967	30,7947	30,7965
N1010	27,3076	26,7793	27,3063	27,3046	27,3062
CP-74	34,1601	33,4992	34,1584	34,1562	34,1582
MDXLII	34,6989	34,0276	34,6972	34,6949	34,6971
OP-733	42,3307	41,5117	42,3285	42,3256	42,3282
3674	45,1093	44,2365	45,1069	45,1038	45,1066
C-174	48,2018	47,2691	48,1991	48,1957	48,1988
N1011	51,2283	50,2370	51,2254	51,2217	51,2250
N5009	55,3408	54,2699	55,3377	55,3336	55,3372
MCCCXXII	58,9258	57,7855	58,9224	58,9181	58,9219
5483	67,3165	66,0137	67,3125	67,3074	67,3118
N1012	123,7817	121,3852	123,7731	123,7630	123,7707
5482	165,3091	162,1078	165,2966	165,2816	165,2924
N1013	206,1286	202,1359	206,1120	206,0914	206,1053
C-148	267,9660	262,7737	267,9425	267,9127	267,9312
12/1	300,8912	295,0599	300,8637	300,8271	300,8495
11/1	336,9832	330,4512	336,9512	336,9081	336,9333
10/1	322,4133	316,1642	322,3831	322,3413	322,3668
9/1	332,1668	325,7283	332,1353	332,0925	332,1180
8/1	372,9527	365,7221	372,9158	372,8655	372,8939
7/1	434,0219	425,6044	433,9760	433,9119	433,9463
6/1	420,3227	412,1715	420,2788	420,2150	420,2510
5/1	415,7546	407,6922	415,7114	415,6500	415,6842
4/1	413,6639	405,6422	413,6211	413,5605	413,5941
N266	426,3720	418,1032	426,3272	426,2644	426,2986
N265	435,0821	426,6440	435,0360	434,9709	435,0062
MCDXXIV	418,7180	410,5981	418,6744	418,6118	418,6468
2/122a	405,4681	397,6057	405,4265	405,3668	405,4006
OP-676	432,7835	424,3901	432,7378	432,6734	432,7083
3949	450,5977	441,8580	450,5492	450,4801	450,5173
N264	422,4366	414,2444	422,3925	422,3280	422,3644
N263	421,1166	412,9500	421,0726	421,0092	421,0447
CP-898	436,7273	428,2573	436,6810	436,6142	436,6510
MDXXXIV	466,8314	457,7760	466,7803	466,7069	466,7461
MCCCLVII	492,4104	482,8575	492,3551	492,2749	492,3170
2839	499,9546	490,2550	499,8981	499,8150	499,8588

9.2 Geopotencialne kote

Numerične vrednosti geopotencialnih kot za posamezni reper so predstavljene v preglednici 5. Vrednosti geopotencialnih kot v našem višinskem poligonu znašajo od najmanjše, ki znaša 1,9298 kGalm, do največje, ki znaša 490,2550 kGalm. Povprečna vrednost geopotencialnih kot je 198,0959 kGalm.

Za grafični prikaz geopotencialnih kot sem si izbral sliko, ki prikazuje razlike med nadmorsko višino in geopotencialnimi kotami glede na nadmorsko višino. Ta dva višinska sistema sicer nista primerljiva, saj imajo nadmorske višine za mersko enoto meter, geopotencialne kote pa kGalm, vendar sem tukaj naredil izjemo za to primerjavo, da dobimo nekakšno povezavo, ki jo bom razložil kasneje.

Razlike med nadmorsko višino in geopotencialnimi kotami znašajo med 0,0379 [m – kGalm] in med 9,6996 [m – kGalm], povprečna vrednost razlike pa znaša 3,9165 [m – kGalm]. Kot vidimo iz slike, razlike naraščajo z nadmorsko višino zelo linearno, kar pojasni, zakaj smo lahko uporabili linearno interpolacijo, ko smo interpolirali vrednosti težnega pospeška za posamezne reperje, ki niso bili podani. Geopotencialne kote so tudi numerično manjše od nadmorske višine, zato so vse razlike pozitivne.



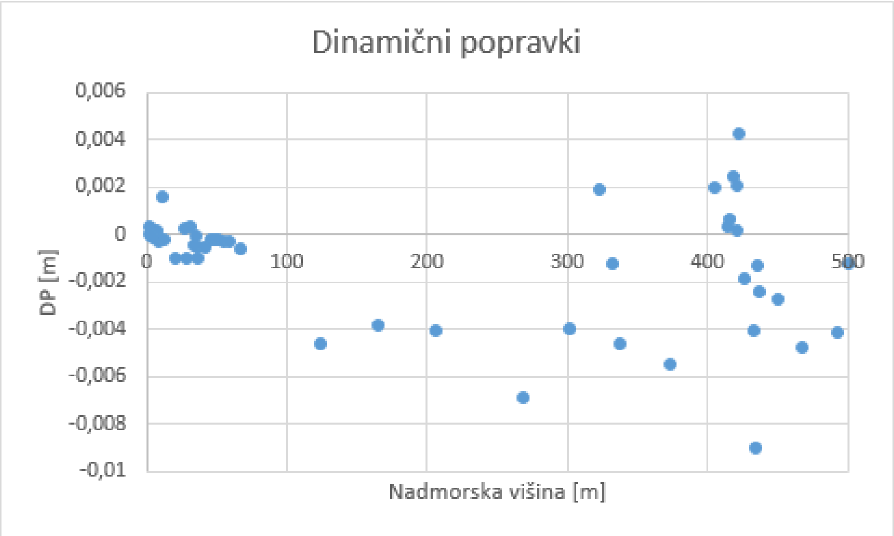
Slika 13: Geopotencialne kote glede na nadmorsko višino

9.3 Dinamične višine

Numerične vrednosti dinamičnih višin za posamezni reper so predstavljene v preglednici 5. Vrednosti dinamičnih višin v našem višinskem poligonu znašajo od najmanjše, ki znaša 1,9680 metra, do največje, ki znaša 499,8981 metrov. Povprečna vrednost dinamičnih višin je 207,8340 metra.

Dinamične popravke sem predstavil grafično, in sicer velikost posameznega popravka glede na nadmorsko višino, ki ji moramo ta dinamični popravek prišteti. Dinamični popravki za naš višinski poligon znašajo od najmanjšega, ki znaša -0,0090 metra, do največjega, ki znaša 0,0043 metra. Povprečni dinamični popravek znaša -0,0011 metra. Če pogledamo absolutno vrednost dinamičnih popravkov, pa najmanjši znaša 0,00003 metra, največji pa znaša 0,0090 metra. Absolutna vrednost povprečnega dinamičnega popravka znaša 0,0018 metra. V to statistično analizo nismo vzeli začetnega reperja 9000, pri katerem je dinamični popravek nič zaradi člena v izračunu, ki predvideva višinsko razliko glede na začetni reper večjo od nič.

Kot je že bilo rečeno nam slika prikazuje velikost dinamičnih popravkov glede na nadmorsko višino. Dinamični popravki na prvih reperjih, kjer nadmorske višine še ne presežejo 70 metrov, niso veliki, saj so vsi v intervalu med -0,002 metra in 0,002 metra. Večina teh dinamičnih popravkov se celo nahaja v približno eni tretjini tega intervala, in sicer v območju okoli ničle, torej jih je večina pod absolutno vrednostjo povprečnega dinamičnega popravka. Z naraščanjem nadmorske višine pa naraščajo tudi popravki, ki pa so neenakomerno razporejeni in skačejo med pozitivnimi in negativnimi vrednostmi. Vidimo, da so negativni popravki večji, prav tako pa jih je tudi več. Za dinamične popravke ne moremo dobiti neke funkcije, po kateri bi računali popravke, zato moramo za vsako posamezno nadmorsko višino računati dinamični popravek.



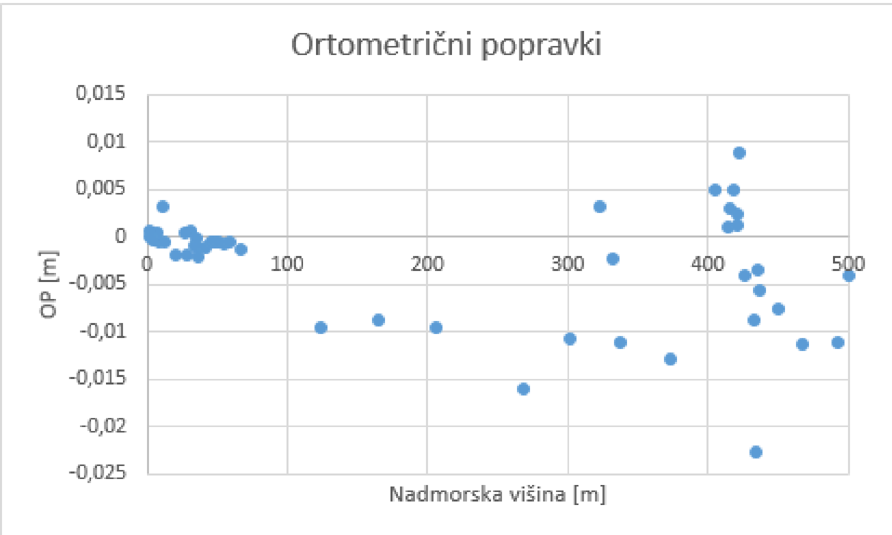
Slika 14: Dinamični popravki

9.4 Ortometrične višine

Numerične vrednosti ortometričnih višin za posamezni reper so predstavljene v preglednici 5. Vrednosti ortometričnih višin v našem višinskem poligonu znašajo od najmanjše, ki znaša 1,9679 metra, do največje, ki znaša 499,8150 metrov. Povprečna vrednost ortometričnih višin je 201,9645 metra.

Ortometrične popravke sem predstavil grafično, in sicer velikost posameznega popravka glede na nadmorsko višino, kateri moramo ta ortometrični popravek prišteti. Ortometrični popravki za naš višinski poligon znašajo od najmanjšega, ki znaša -0,0227 metra, do največjega, ki znaša 0,0089 metra. Povprečni ortometrični popravek znaša -0,0028 metra. Če pogledamo absolutno vrednost ortometričnih popravkov, najmanjši znaša 0,00006 metra, največji pa znaša 0,0227 metra. Absolutna vrednost povprečnega ortometričnega popravka znaša 0,0042 metra.

Slika nam prikazuje velikost ortometričnih popravkov glede na nadmorsko višino. Prvi popravki, kjer nadmorske višine še ne presežejo 70 metrov, niso veliki, saj so vsi v intervalu med -0,005 metra in 0,005 metra. Večina teh ortometričnih popravkov se celo nahaja v približno eni tretjini tega intervala, in sicer v območju okoli ničle, torej jih je večina pod absolutno vrednostjo povprečnega ortometričnega popravka. Z naraščanjem nadmorske višine pa naraščajo tudi popravki, ki so neenakomerno razporejeni in skačejo med pozitivnimi in negativnimi vrednostmi. Vidimo, da so negativni popravki večji, prav tako pa jih je tudi več. Za ortometrične popravke ne moremo dobiti neke funkcije, po kateri bi računali popravke, zato moramo za vsako posamezno nadmorsko višino računati ortometrični popravek.



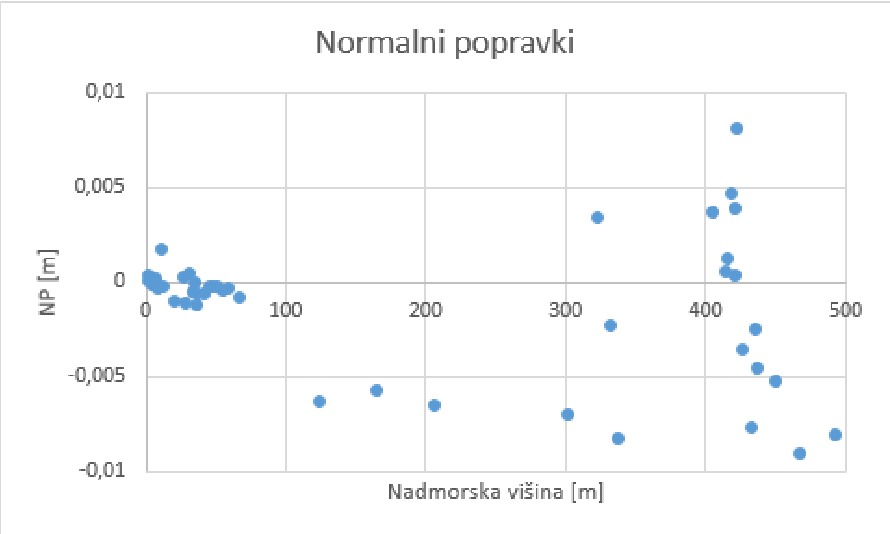
Slika 15: Ortometrični popravki

9.5 Normalne višine

Numerične vrednosti normalnih višin za posamezni reper so predstavljene v preglednici 5. Vrednosti normalnih višin v našem višinskem poligonu znašajo od najmanjše, ki znaša 1,9680 metra, do največje, ki znaša 499,8588 metrov. Povprečna vrednost normalnih višin je 201,9806 metra.

Normalne popravke sem predstavil grafično, in sicer velikost posameznega popravka glede na nadmorsko višino, kateri moramo ta normalni popravek prišteti. Normalni popravki za naš višinski poligon znašajo od najbolj negativnega, ki znaša -0,0168 metra, do najbolj pozitivnega, ki znaša 0,0082 metra. Povprečni normalni popravek znaša -0,0019 metra. Če pogledamo absolutno vrednost normalnih popravkov, najmanjši znaša 0,00001 metra, največji pa znaša 0,0168 metra. Absolutna vrednost povprečnega normalnega popravka znaša 0,0031 metra.

Slika nam prikazuje velikost normalnih popravkov glede na nadmorsko višino. Prvi popravki, kjer nadmorske višine še ne presežejo 70 metrov, po vrednosti niso veliki, saj so vsi v intervalu med -0,005 metra in 0,005 metra. Večina teh normalnih popravkov se celo nahaja v približno eni tretjini tega intervala, in sicer v območju okoli ničle, torej jih je večina pod absolutno vrednostjo povprečnega normalnega popravka. Z naraščanjem nadmorske višine pa naraščajo tudi popravki, ki so neenakomerno razporejeni in skačejo med pozitivnimi in negativnimi vrednostmi. Za normalne popravke ne moremo dobiti neke funkcije, po kateri bi računali popravke, zato moramo za vsako posamezno nadmorsko višino računati normalni popravek.



Slika 16: Normalni popravki

10 ZAKLJUČEK

Izbira uradnega višinskega sistema za nadmorske višine je zelo pomembna, saj mora posamezni sistem zadovoljiti večino pogojev za optimalni višinski sitem. Kot sem že omenil v enem izmed prejšnjih poglavij, imamo nekaj osnovnih pogojev pri izbiri višinskega sistema. Prvi pogoj pravi, da morajo višine točk biti enolično določene in neodvisne od poti geometričnega nivelmana. Drugi pogoj hoče imeti višine točk določene na podlagi merjenj na površini Zemlje, pri tem pa moramo upoštevati čim manj predpostavk. Da višinski sistem zadovolji tretji pogoj, morajo biti popravki tako majhni, da jih ne upoštevamo pri mrežah nižjih redov. Četrti pogoj zahteva fizikalno razlago za izhodiščne nivojske ploskve, za višine pa zahteva geometrično razlago. Peti in nekako zadnji osnovni pogoj za izbiro optimalnega višinskega sistema pa za višine predvideva, da naj bi bile podane v metrih, prav tako pa bi morale biti čim lažje povezljive z elipsoidnimi višinami.

V Sloveniji trenutno za nadmorske višine uporabljamo normalne ortometrične višine in kot je bilo že omenjeno, to ni najboljši sistem. Normalne ortometrične višine zadovoljijo prvi, tretji in peti pogoj za optimalni višinski sitem v celoti, drugi pogoj pa izpolnjujejo le delno, saj za njihov izračun potrebujemo normalni težni pospešek, ki pa je bil določen teoretično. Prav tako ne izpolnjujejo četrtega pogoja v celoti, ker za višine ne obstaja geometrična razlaga.

Če pogledamo še zadoščanje drugih višinskih sistemov optimalnemu višinskemu sistemu, ugotovimo, da geopotencialne kote v celoti zadoščajo le prvemu in drugemu pogoju, četrtemu pogoju pa le polovično, saj za kote ne obstaja geometrična razlaga. Tretjemu in petemu pogoju pa ne zadoščajo v nobenem primeru. Dinamične višine prav tako kot geopotencialne kote v celoti zadoščajo le prvemu in drugemu pogoju, v nobenem primeru pa ne zadoščajo tretjemu pogoju. Četrtemu in petemu pogoju zadoščajo le delno, saj za njih ne obstaja geometrična razlaga, poleg tega pa nimajo direktne povezave z elipsoidnimi višinami. Ortometrične višine v celoti zadoščajo le prvemu in petemu pogoju, v nobenem primeru pa ne zadoščajo tretjemu pogoju. Drugemu in četrtemu pogoju zadoščajo le delno, saj moramo za njih uporabiti veliko hipotez in ne obstajala fizikalna razlaga za izhodiščne nivojske ploskve. Na koncu pridemo do normalnih višin, ki zadovoljujejo vseh pet osnovnih pogojev za optimalni višinski sistem.

Vse izpolnjevanje zgornjih pogojev smo lahko razbrali iz teoretičnega dela o višinskih sistemih, ko pa sem sam delal analizo, sem prišel do nekaterih ugotovitev, ki so morda že nekoliko omenjene med pogoji, vendar so po mojem mnenju prav tako ključne pri izbiri višinskega sistema. Pri geopotencialnih kotah je po mojem mnenju velik problem to, da nimajo za osnovno enoto metra, prav tako pa pri vedno večjih nadmorskih višinah vedno bolj odstopajo od drugih višin. Za dinamične, ortometrične in normalne popravke ne moremo dobiti neke funkcije, da bi po njej računali popravke, zato moramo za vsako posamezno nadmorsko višino računati posamezni popravek. Največje popravke imajo ortometrične višine, dinamične pa najmanjše, normalne višine pa so nekje v sredini.

Veliko evropskih držav ima za uraden višinski sistem nadmorskih višin normalne višine, prav tako se v Evropi z novim koordinatnim sistemom vzpostavlja nova evropska višinska mreža, ki temelji na normalnih višinah, ki so izračunane na osnovi geopotencialnih višin. Videli smo, da so normalne višine glede na pogoje, ki jih izpolnjujejo, optimalne in najprimernejše za uradne višine v posameznih državah. Optimalno za Evropo bi bilo, da ima enoten višinski sistem oziroma da ne glede na to, kakšen višinski sistem uporablja, ta višinski sistem temelji na geopotencialnih kotah, ki so določene na osnovi izmerjenih višinskih razlik in težnega pospeška. S tem bi koristi pridobila tudi Slovenija. Vsi višinski sistemi so po svoje pomembni, saj nam v določenih strokah zelo pomagajo, zato je pomembno vzdrževanje višin v čim več višinskih sistemih. Sam sem mnenja, da bodo v prihodnosti poleg elipsoidnih višin zelo pomembne normalne višine tako v Sloveniji kot v celotni Evropi.

VIRI

Gravimeters Scintrex AutoGrav CG-5. 2016. Gravirazvedka.
http://www.gravirazvedka.ru/eng/techic_eng.html (Pridobljeno 6. 8. 2016.)

Koler, B. 1998. Višine, potencial in geopotencialne kote. Ljubljana. Geodetski vestnik, 42 (1): 7-12

Kovačič, B. 2004. Geodezija za gradbene inženirje. Maribor, Fakulteta za gradbeništvo Maribor: 111 str.
https://gradbenik.files.wordpress.com/2010/01/geodezija-geodezija-za-gradbene-inzenirje-stari-ucbenik.pdf (Pridobljeno 3. 8. 2016.)

Kuhar, M. 2012. Fizikalna geodezija. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo: 106 str.
http://fgg-web.fgg.uni-lj.si/~/MKUHAR/Pouk/FG/FG.html (Pridobljeno 3. 8. 2016.)

Lapaine, M., Tutuć, D., Lapaine, M. 2006. Numeričke vrijednosti geometrijskih konstanti elipsoida GRS 80. Zagreb. Geodetski list, 4: 259-269.
http://hrcak.srce.hr/file/8367 (Pridobljeno 14. 8. 2016.)

Lisec, A. 2002. Analiza višinskih sistemov na osnovi nivelmanske in relativne gravimetrične izmere nivelmanske zanke Malija. Diplomska naloga. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo (samozaložba A. Lisec): 139 str.

Medved, K. 2001. Gravimetrične meritve za potrebe določitve geopotencialnih kot EUVN točk. Diplomska naloga. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo (samozaložba K. Medved): 90 str.

Plestenjak, B. 2015. Razširjen uvod v numerične metode. Ljubljana, DMFA: 418 str.

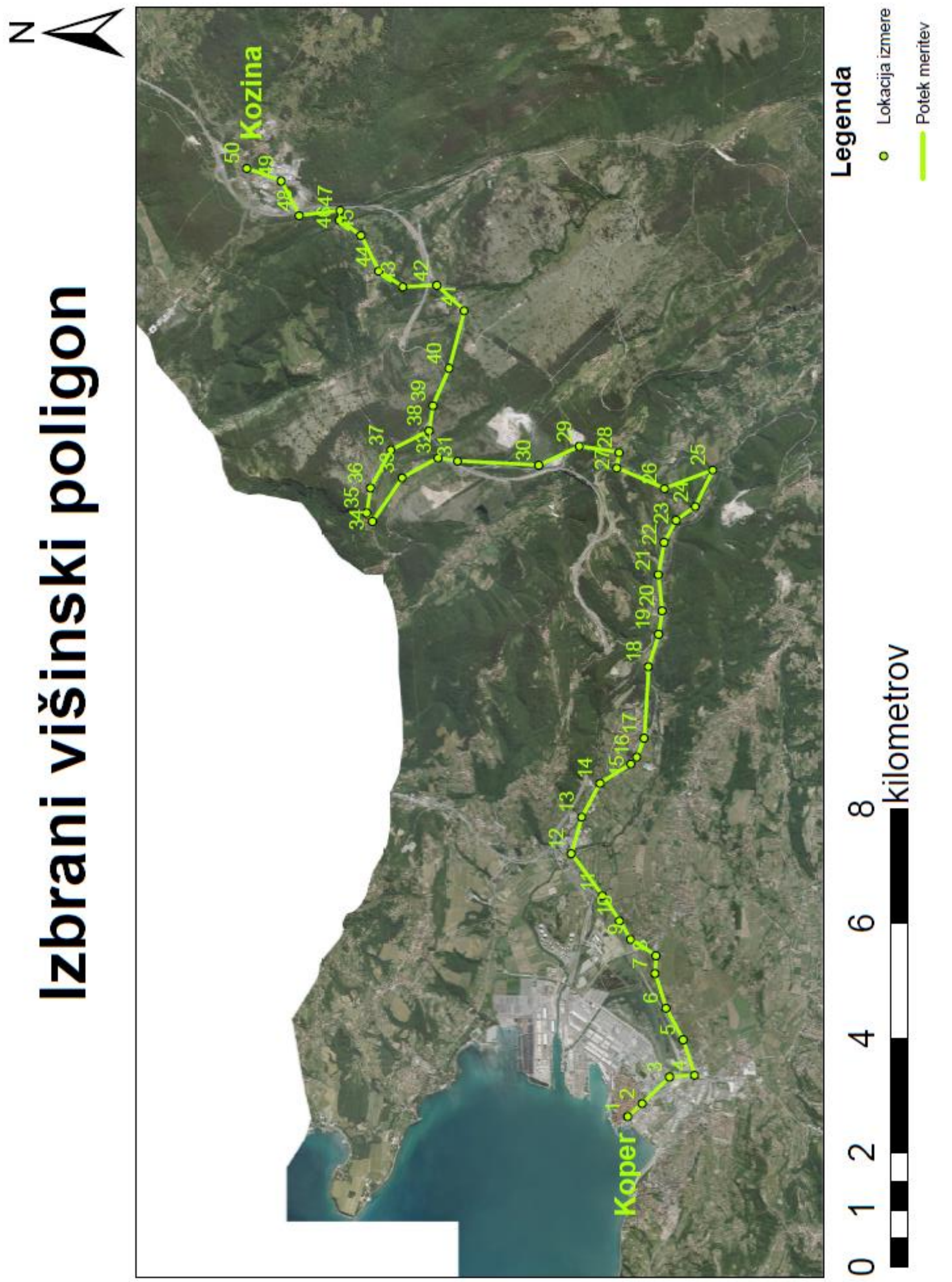
Stenski reper, nerjaveče jeklo. 2014. Geoshop.
http://www.geoshop.si/p/2-6-17-1/Stenski-reper-z-navojem-M8-globina-12m (Pridobljeno 3. 8. 2016.)

Višinski državni koordinatni sistem. 2016. Ministrstvo za okolje in prostor, Geodetska uprava Republike Slovenije.
http://www.e-prostor.gov.si/si/zbirke_prostorskih_podatkov/drzavni_koordinatni_sistem/visinski_drzavni_koordinatni_sistem/ (Pridobljeno 3. 8. 2016.)

Vodopivec, F. 1988. Precizni nivelman. Ljubljana, Univerza Edvarda Kardelja v Ljubljani, Fakulteta za arhitekturo, gradbeništvo in geodezijo: 154 str.

PRILOGE

PRILOGA A: SLIKA IZBRANEGA VIŠINSKEGA POLIGONA



PRILOGA B: PREGLEDNICA Z VREDNOSTMI POPRAVKOV

Reper	Dinamični popravek [m]	Ortometrični popravek [m]	Normalni popravek [m]
9000	0	-0,00042	-0,000009
CP-146	0,00026	0,00052	0,00027
N1271	0,00003	0,00006	0,00003
3647	-0,00007	-0,00014	-0,00007
N1005	-0,00028	-0,00057	-0,00029
14/122a	-0,00023	-0,00046	-0,00024
N1006A	-0,00096	-0,00195	-0,00106
N1007	-0,00052	-0,00112	-0,00061
N1008	0,00157	0,00320	0,00177
OP-743	0,00021	0,00045	0,00022
N1015	0,00032	0,00064	0,00033
N1009	-0,00015	-0,00029	-0,00015
3959	-0,00096	-0,00193	-0,00102
CP-88	-0,00103	-0,00213	-0,00117
CP-85	0,00037	0,00069	0,00043
N1010	0,00022	0,00048	0,00026
CP-74	-0,00045	-0,00093	-0,00052
MDXLII	-0,00004	-0,00013	-0,00004
OP-733	-0,00052	-0,00107	-0,00061
3674	-0,00019	-0,00044	-0,00023
C-174	-0,00022	-0,00050	-0,00026
N1011	-0,00022	-0,00050	-0,00027
N5009	-0,00030	-0,00064	-0,00037
MCCCXXII	-0,00027	-0,00058	-0,00033
5483	-0,00063	-0,00136	-0,00080
N1012	-0,00461	-0,00963	-0,00631
5482	-0,00379	-0,00877	-0,00568
N1013	-0,00409	-0,00966	-0,00648
C-148	-0,00689	-0,01610	-0,01150
12/1	-0,00401	-0,01075	-0,00695
11/1	-0,00462	-0,01109	-0,00824
10/1	0,00189	0,00319	0,00340
9/1	-0,00126	-0,00234	-0,00226
8/1	-0,00551	-0,01299	-0,01003
7/1	-0,00901	-0,02273	-0,01677
6/1	0,00208	0,00234	0,00392
5/1	0,00068	0,00306	0,00128
4/1	0,00031	0,00113	0,00058
N266	-0,00187	-0,00412	-0,00355
N265	-0,00130	-0,00355	-0,00248
MCDXXIV	0,00245	0,00492	0,00465
2/122a	0,00195	0,00492	0,00367
OP-676	-0,00406	-0,00877	-0,00766
3949	-0,00273	-0,00750	-0,00521
N264	0,00430	0,00893	0,00817
N263	0,00020	0,00128	0,00037
CP-898	-0,00239	-0,00574	-0,00449
MDXXXIV	-0,00473	-0,01137	-0,00901
MCCCLVII	-0,00417	-0,01104	-0,00803
2839	-0,00125	-0,00410	-0,00243