

Univerza
v Ljubljani
Fakulteta
za gradbeništvo
in geodezijo



Jamova cesta 2
1000 Ljubljana, Slovenija
<http://www3.fgg.uni-lj.si/>

DRUGG – Digitalni repozitorij UL FGG
<http://drugg.fgg.uni-lj.si/>

To je izvirna različica zaključnega dela.

Prosimo, da se pri navajanju sklicujete na bibliografske podatke, kot je navedeno:

Bele, L., 2016. Obnašanje lesenih stebrov pod vplivom osno-upogibne obremenitve. Diplomski naloga. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo. (mentor Lopatič, J.): 92 str.

<http://drugg.fgg.uni-lj.si/5793/>

Datum arhiviranja: 5-10-2016

University
of Ljubljana
Faculty of
Civil and Geodetic
Engineering



Jamova cesta 2
SI – 1000 Ljubljana, Slovenia
<http://www3.fgg.uni-lj.si/en/>

DRUGG – The Digital Repository
<http://drugg.fgg.uni-lj.si/>

This is original version of final thesis.

When citing, please refer to the publisher's bibliographic information as follows:

Bele, L., 2016. Obnašanje lesenih stebrov pod vplivom osno-upogibne obremenitve. B.Sc. Thesis. Ljubljana, University of Ljubljana, Faculty of civil and geodetic engineering. (supervisor Lopatič, J.): 92 pp.

<http://drugg.fgg.uni-lj.si/5793/>

Archiving Date: 5-10-2016

Univerza
v Ljubljani

Fakulteta za
*gradbeništvo in
geodezijo*



Jamova 2
1000 Ljubljana, Slovenija
telefon (01) 47 68 500
faks (01) 42 50 681
fgg@fgg.uni-lj.si

**UNIVERZITETNI ŠTUDIJSKI
PROGRAM GRADBENIŠTVO
KONSTRUKCIJSKA SMER**

Kandidat:

LUKA BELE

**OBNAŠANJE LESENIH STEBROV POD VPLIVOM
OSNO-UPOGIBNE OBREMENTITVE**

Diplomska naloga št.: 3505/KS

**BEHAVIOUR OF TIMBER COLUMNS UNDER
COMBINED AXIAL AND BENDING ACTIONS**

Graduation thesis No.: 3505/KS

Mentor:

izr. prof. dr. Jože Lopatič

Ljubljana, 13. 09. 2016

STRAN ZA POPRAVKE, ERRATA

Stran z napako

Vrstica z napako

Namesto

Naj bo

Spodaj podpisani študent **Luka Bele**, vpisna številka **26105354**, avtor pisnega zaključnega dela študija z naslovom: **Obnašanje lesenih stebrov pod vplivom osno-upogibne obremenitve**

IZJAVLJAM

1. *Obkrožite eno od variant a) ali b)*

a) da je pisno zaključno delo študija rezultat mojega samostojnega dela;

b) da je pisno zaključno delo študija rezultat lastnega dela več kandidatov in izpolnjuje pogoje, ki jih Statut UL določa za skupna zaključna dela študija ter je v zahtevanem deležu rezultat mojega samostojnega dela;

2. da je tiskana oblika pisnega zaključnega dela študija istovetna elektronski obliki pisnega zaključnega dela študija;

3. da sem pridobil/-a vsa potrebna dovoljenja za uporabo podatkov in avtorskih del v pisnem zaključnem delu študija in jih v pisnem zaključnem delu študija jasno označil/-a;

4. da sem pri pripravi pisnega zaključnega dela študija ravnal/-a v skladu z etičnimi načeli in, kjer je to potrebno, za raziskavo pridobil/-a soglasje etične komisije;

5. soglašam, da se elektronska oblika pisnega zaključnega dela študija uporabi za preverjanje podobnosti vsebine z drugimi deli s programsko opremo za preverjanje podobnosti vsebine, ki je povezana s študijskim informacijskim sistemom članice;

6. da na UL neodplačno, neizključno, prostorsko in časovno neomejeno prenašam pravico shranitve avtorskega dela v elektronski obliki, pravico reproduciranja ter pravico dajanja pisnega zaključnega dela študija na voljo javnosti na svetovnem spletu preko Repozitorija UL;

7. da dovoljujem objavo svojih osebnih podatkov, ki so navedeni v pisnem zaključnem delu študija in tej izjavi, skupaj z objavo pisnega zaključnega dela študija.

V: **Ljubljani**

Datum: **1.9.2016**

Podpis študenta:

BIBLIOGRAFSKO – DOKUMENTACIJSKA STRAN IN IZVLEČEK

UDK: 004.4:624.011.1(497.4) (043.2)
Avtor: Luka Bele
Mentor: izr. prof. dr. Jože Lopatič
Naslov: Obnašanje lesenih stebrov pod vplivom osno-upogibne obremenitve
Tip dokumenta: diplomska naloga – univerzitetni študij
Obseg in oprema: 92 str., 13 pregl., 59 sl., 127 en.
Ključne besede: leseni stebri, uklon, osno-upogibna obremenitev, numerična simulacija odziva, nelinearna elastičnost

Izvleček

V diplomski nalogi obravnavam obnašanje lesenih stebrov pod vplivom kombinirane osno-upogibne obremenitve s poudarkom na problematiki uklona. Ta problematika je pri lesu kot materialu, za katerega je značilno nelinearno obnašanje v tlaku, specifična. V ta namen sem izdelal računalniški program za numerično simulacijo nelinearno elastičnega odziva, katerega izdelavo po pregledu teoretičnega ozadja podrobno predstavim. Predstavljene so tudi zahteve in postopki, ki jih v povezavi s to tematiko predpisuje evropski standard za dimenzioniranje lesenih konstrukcij Evrokod 5. Rezultate, ki sledijo iz teh zahtev, pa primerjam z rezultati računalniškega programa.

BIBLIOGRAPHIC – DOCUMENTALISTIC INFORMATION AND ABSTRACT

UDC: 004.4:624.011.1(497.4) (043.2)
Author: Luka Bele
Supervisor: assoc. prof. Jože Lopatič, Ph. D.
Title: Behaviour of timber columns under combined axial and bending actions
Document type: Graduation thesis – University studies
Scope and tools: 92 p., 13 tab., 59 fig., 127 eq.
Keywords: timber columns, buckling, combined axial and bending actions, numerical simulation, nonlinear elasticity

Abstract

In the present graduation thesis I deal with the conduct of timber columns under influence of combined axial and bending actions with emphasis on problems of buckling. These problems are specific with timber for which significant non-linear behaviour under compression stresses is characteristic. To this purpose I have elaborated a computer program for numerical simulation of non-linear elastic response the elaboration of which is in greater detail presented after review of theoretical background. Presented are also the demands and proceedings according to European standard for design of timber structures Eurocode 5. I compare the results which follow these demands with results of my computer program.

POSVETILO IN ZAHVALA

To diplomsko delo posvečam staršema, ki sta mi vse življenje brezpogojno stala ob strani in me podpirala.

Zahvaljujem se mentorju prof. dr. Jožetu Lopatiču za pomoč pri pisanju naloge in izjemno korekten odnos.

KAZALO VSEBINE

BIBLIOGRAFSKO – DOKUMENTACIJSKA STRAN IN IZVLEČEK	iii
BIBLIOGRAPHIC – DOCUMENTALISTIC INFORMATION AND ABSTRACT	iv
POSVETILO IN ZAHVALA	v
KAZALO VSEBINE	vi
KAZALO PREGLEDNIC	ix
KAZALO SLIK	x
1 UVOD	1
1.1 Zgradba diplomske naloge	3
2 TEORETIČNO OZADJE	4
2.1 Geometrijska nelinearnost ravnih linijskih elementov	5
2.1.1 Osnovna diferencialna enačba stebra-nosilca	6
2.2 Elastičen uklon idealnega stebra	8
2.2.1 Členkasto podprt steber – osnovni uklonski primer	8
2.2.2 Drugi primeri podpiranja	11
2.2.3 Koncept uklonske dolžine	13
2.2.4 Uklonska krivulja	14
2.3 Odziv stebrov-nosilcev	14
2.3.1 Vpliv začetnih nepopolnosti	16
2.3.2 Ekscentričnost osne sile	17
2.3.3 Prečna porazdeljena obtežba	19
2.3.4 Povzetek	20
2.4 Neelastičen uklon	21
2.4.1 Reducirani in tangenti modul	21
2.4.2 Kritična napetost po teoriji tangentnega modula	23
2.4.3 Odziv stebrov-nosilcev v nelinearno elastičnem območju	25
3 PROGRAM ZA NUMERIČNO SIMULACIJO ODZIVA STEBROV	27
3.1 Splošno o programu	27
3.2 Določitev linearno elastičnega odziva z metodo končnih diferenc	28
3.2.1 Splošno o metodi končnih diferenc	28
3.2.2 Račun pomikov	30
3.2.2.1 Upoštevanje točkovnih sil	35
3.2.2.2 Upoštevanje koncentriranih momentov	35
3.2.2.3 Upoštevanje začetnih nepopolnosti	37
3.2.2.4 Upoštevanje drugačnih primerov podpiranja	39
3.2.2.5 Prostorski primeri	42
3.2.3 Račun momentov in prečnih sil	43
3.2.4 Prikaz rezultatov	44

3.2.5 Natančnost metode	46
3.2.6 Določitev elastične kritične obremenitve	47
3.2.7 Povzetek	51
3.3 Nelinearno elastičen odziv	51
3.3.1 Določitev upogibne togosti	51
3.3.2 Uporabljena zveza σ - ϵ	54
3.3.3 Numerična integracija napetosti v prerezu	55
3.3.3.1 Ravninski primer	55
3.3.3.2 Prostorski primer	57
3.3.4 Iskanje rešitev z orodjem Reševalnik	58
3.3.5 Iterativni račun nelinearno elastičnega odziva	61
3.3.6 Račun kritične obremenitve.....	62
3.3.7 Povzetek	62
4 DIMENZIONIRANJE STEBROV V SKLADU S STANDARDOM EVROKOD 5	64
4.1 Splošno o standardu	64
4.2 Pregled pomembnih določil	64
4.2.1 Karakteristične vrednosti vplivov in materialnih lastnosti	64
4.2.2 Vpliv trajanja obtežbe	65
4.2.3 Vpliv vlage	65
4.2.4 Projektne vrednosti vplivov.....	66
4.2.5 Projektne vrednosti učinkov vplivov.....	66
4.2.6 Projektne vrednosti lastnosti materialov (točka 2.4.1 v standardu EC-5)	66
4.2.7 Projektne vrednosti odpornosti.....	67
4.2.8 Zveze med napetostmi in deformacijami	67
4.2.9 Vpliv velikosti elementov	68
4.3 Mejno stanje nosilnosti.....	68
4.3.1 Stebri pod vplivom kombinirane osno upogibne obremenitve.....	69
5 REZULTATI PROGRAMA IN PRIMERJAVE	72
5.1 Materiali in izbira parametrov	72
5.1.1 Natezna trdnost.....	72
5.1.2 Tlačna trdnost.....	73
5.1.3 Modul elastičnosti	73
5.1.4 Deformacija pri maksimalni tlačni napetosti.....	74
5.1.5 Mejna tlačna deformacija	74
5.1.6 Asimptotična tlačna trdnost.....	74
5.1.7 Izbrane vrednosti	74
5.1.7.1 Les trdnostnega razreda C16	75
5.1.7.2 Les trdnostnega razreda C24	77

5.1.7.3 Les trdnostnega razreda C30	79
5.2 Uklonske krivulje	81
5.3 Interakcija P-M na nivoju elementa.....	86
5.4 Povzetek	89
6 ZAKLJUČEK.....	90
7 VIRI.....	91

KAZALO PREGLEDNIC

Preglednica 1: Rezultati za primer (a) s slike 32.....	50
Preglednica 2: Rezultati za primer (b) s slike 32.....	50
Preglednica 3: Rezultati za primer (c) s slike 32.....	50
Preglednica 4: Rezultati za primer (d) s slike 32.....	50
Preglednica 5: Kritična sila za elastično vpet element z vmesno podporo.....	51
Preglednica 6: Izbrane nastavitve orodja Reševalnik («Solver»).....	61
Preglednica 7: Karakteristične vrednosti materialnih lastnosti za izbrane trdnostne razrede lesa (SIST EN 338:2004).....	72
Preglednica 8: Vrednosti parametrov za les trdnostnega razreda C16 (upoštevana srednja vrednosti modula elastičnosti)	75
Preglednica 9: Vrednostni parametrov za les trdnostnega razreda C16 (upoštevana karakteristična vrednosti modula elastičnosti).....	75
Preglednica 10: Vrednostni parametrov za les trdnostnega razreda C24 (upoštevana srednja vrednosti modula elastičnosti)	77
Preglednica 11: Vrednostni parametrov za les trdnostnega razreda C24 (upoštevana karakteristična vrednosti modula elastičnosti).....	77
Preglednica 12: Vrednostni parametrov za les trdnostnega razreda C30 (upoštevana srednja vrednosti modula elastičnosti)	79
Preglednica 13: Vrednostni parametrov za les trdnostnega razreda C30 (upoštevana karakteristična vrednosti modula elastičnosti).....	79

KAZALO SLIK

Slika 1: Uklonska oblika konzolnega stebra.....	4
Slika 2: Enostavno podprt steber s prečno obtežbo	5
Slika 3: (a) nedeformirana lega (b) deformirana lega (prirejeno po [2]: str. 8).....	6
Slika 4: Eulerjev steber (prirejeno po [5]: str. 4).....	9
Slika 5: Uklonski obliki Eulerjevega stebra (a) prva oblika (b) druga oblika (prirejeno po [1]: str. 52)	11
Slika 6: Različni primeri podpiranja (a) fiksna-fiksna podpora (b) fiksna-vrtljiva (c) konzolni steber (d) elastične vzmeti.....	12
Slika 7: Uklonske krivulje pri različnih modulih elastičnosti	15
Slika 8: Obnašanje Eulerjevega stebra (prirejeno po [5]: str. 7).....	15
Slika 9: Steber z začetno nepopolno geometrijo	16
Slika 10: Ekscentrična osna sila	17
Slika 11: Ekscentričnost osne sile kot momentna obtežba (prirejeno po [1]: str. 13)	18
Slika 12: Element s prečno porazdeljeno obtežbo	19
Slika 13: Zveza med normirano obtežbo in maksimalnim pomikom pri različnih začetnih nepopolnostih (vrtljivo podprt element).....	20
Slika 14: Razmejitev med kratkimi in vitkimi stebri (prirejeno po [5]: str. 36).....	21
Slika 15: Teorija reduciranega modula (prirejeno po [5]: str. 38).....	22
Slika 16: Napetosti v prerezu v trenutku uklona po teoriji reduciranega modula. $\sigma_1 \rightarrow$ razbremenitev, $\sigma_2 \rightarrow$ obremenitev (prirejeno po [5]: str. 38)	22
Slika 17: Napetosti v prerezu v trenutku uklona po teoriji tangentnega modula (vsa vlakna se obremenijo, prirejeno po [5]: str. 38)	23
Slika 18: Uklonska krivulja za neelastičnem uklon, kjer tangentni modul določa enačba (45).....	25
Slika 19: Porušitev ekscentrično obremenjenih stebrov ([5]: str. 56).....	26
Slika 20: Aproximacija odvodov pri metodi končnih diferenc (prirejeno po [9]: str. 431)	29
Slika 21: Metoda končnih diferenc (a) primer stebra-nosilca (b) vozlišča za račun z metodo končnih diferenc	31
Slika 22: Sistem enačb za račun pomikov po metodi končnih diferenc v primeru elementa s slike 21 (vsa prazna polja imajo vrednost 0).....	34
Slika 23: Delovanje točkovne sile v vozlišču.....	35
Slika 24: Vpliv točkovnega momenta (a) moment (b) nadomestna dvojica sil.....	35
Slika 25: Pomiki vrtljivo podrtga stebra z začetnimi nepopolnostmi (prirejeno po [5]: str. 29)	37
Slika 26: Korekcija notranje prečne sile v primeru točkovne obtežbe (a) primer elementa s koncentrirano silo (b) izračunan osnovni potek prečne sile (c) potek prečne sile po korekciji.....	44
Slika 27: Primer izpisa rezultatov.....	45
Slika 28: Primerjava izračunanih pomikov na sredini razpona za enostavno (vrtljivo) podprt steber s točnimi vrednostmi za element z različnimi začetnimi nepopolnostmi sinusne oblike.....	46
Slika 29: Princip iskanja kritične obremenitve s preizkušanjem	48
Slika 30: Algoritem za določitev elastične kritične obremenitve	48
Slika 31: Konvergenca opisanega postopka proti kritični napetosti.....	49
Slika 32: Uklonski primeri, za katere primerjam rezultate programa s točnimi vrednostmi	50
Slika 33: Elastično vpet element z vmesno podporo	51
Slika 34: Zveza med napetostjo in deformacijo po enačbi (93)	55
Slika 35: Delitev prereza na delne ploskve	56
Slika 36: Delitev prereza v prostorskih primerih.....	57
Slika 37: Določitev ravnotežja v prerezu	59

Slika 38: Algoritem za račun nelinearno elastičnega odziva.....	63
Slika 39: Element z označenimi glavnimi osmi in smerjo poteka vlaken (prirejeno po [16] str.: 5-15)	68
Slika 40: Priporočene vrednosti uklonskih dolžin ([17]: str. 152)	71
Slika 41: Napetosti v prerezu pri maksimalnem momentu v primeru čistega upogiba (les trdnostnega C16, upoštevana srednja vrednost modula elastičnosti).....	76
Slika 42: Interakcijski diagram v tlačnem območju (les trdnostnega razreda C16). Črtkano je prikazan pogoj interakcije, ki sledi iz enačb standarda EC-5	77
Slika 43: Napetosti v prerezu pri maksimalnem momentu v primeru čistega upogiba (les trdnostnega C24, upoštevana srednja vrednost modula elastičnosti).....	78
Slika 44: Interakcijski diagram v tlačnem območju (les trdnostnega razreda C24). Črtkano je prikazan pogoj interakcije, ki sledi iz enačb standarda EC-5	78
Slika 45: Napetosti v prerezu pri maksimalnem momentu v primeru čistega upogiba (les trdnostnega razreda C30, upoštevana srednja vrednost modula elastičnosti).....	80
Slika 46: Interakcijski diagram v tlačnem območju (les trdnostnega razreda C30). Črtkano je prikazan pogoj interakcije, ki sledi iz enačb standarda EC-5	80
Slika 47: Interakcijski diagram v tlačnem območju za les trdnostnega razreda C30 pri povečanju parametra ϵ_c na 8%.....	81
Slika 48: Uklonski krivulji pri začetnih nepopolnostih $e_0 = 0.001cm$ (les trdnostnega razreda C16)	82
Slika 49: Uklonski krivulji pri začetnih nepopolnostih $e_0 = 0.001cm$ (les trdnostnega razreda C24)	82
Slika 50: Uklonski krivulji pri začetnih nepopolnostih $e_0 = 0.001cm$ (les trdnostnega razreda C30)	83
Slika 51: Primerjava uklonskih krivulj pri $e_0 = 0.001L$ s krivuljo iz EC-5 (les trdnostnega razreda C16).....	83
Slika 52: Primerjava uklonskih krivulj pri $e_0 = 0.001L$ s krivuljo iz EC-5 (les trdnostnega razreda C24).....	84
Slika 53: Primerjava uklonskih krivulj pri $e_0 = 0.001L$ s krivuljo iz EC-5 (les trdnostnega razreda C30).....	84
Slika 54: Primerjava uklonskih krivulj pri $e_0 = 0.0025L$ s krivuljo iz EC-5 (les trdnostnega razreda C16).....	85
Slika 55: Primerjava uklonskih krivulj pri $e_0 = 0.0025L$ s krivuljo iz EC-5 (les trdnostnega razreda C24).....	85
Slika 56: Primerjava uklonskih krivulj pri $e_0 = 0.0025L$ s krivuljo iz EC-5 (les trdnostnega razreda C30).....	86
Slika 57: Interakcija upogibnih in normalnih napetosti pri različnih relativnih vitkosti elementa (les trdnostnega razreda C16)	87
Slika 58: Interakcija upogibnih in normalnih napetosti pri različnih relativnih vitkosti elementa (les trdnostnega razreda C24)	88
Slika 59: Interakcija upogibnih in normalnih napetosti pri različnih relativnih vitkosti elementa (les trdnostnega razreda C30)	88

(ta stran je namenoma prazna)

1 UVOD

Čeprav se stebri kot podporni elementi višje ležečih delov konstrukcije uporabljajo v gradbeništvu in arhitekturi že vse od prvih civilizacij, pa sta njihova računsko analiza in s tem dimenzioniranje zaradi narave obremenitev ter dimenzij elementov (tu je mišljeno predvsem razmerje višine/dolžine elementa proti dimenzijam njegovega prečnega prereza) dolgo časa predstavljala precejšen problem. V njih namreč prevladuje tlačna osna sila, pri uporabi materialov kot sta npr. les ali jeklo pa gre običajno za vitke elemente, iz tega pa sledi, kot bo podrobneje razloženo v nadaljevanju, da so stebri podvrženi nevarnosti izgube stabilnosti oziroma uklonu. Pri tem pojavu tlačno obremenjen element ne odpove, ker bi napetosti v njem prekoračile osnovno trdnost materiala, ki je dokaj enostavno določljiva vrednost, temveč ker je presežena neka kritična obremenitev, ki je odvisna od vrste različnih faktorjev, kot so dimenzije elementa, način podpiranja in lastnosti materiala. Z naraščanjem osne sile proti tej kritični vrednosti postane odziv realnih stebrov močno nelinearen, kar pomeni, da prirastki pomikov in notranjih sil niso več v sorazmerju s prirastki obtežbe. V takih pogojih pa račun po linearni teoriji elastičnosti – tako imenovani teoriji prvega reda (TPR), ki je sicer široko uporabljena pri projektiranju konstrukcij – ni več primeren.

Korektno analizo in s tem dimenzioniranje stebrov je zato omogočil šele razvoj teorije stabilnosti, katerega začetki segajo v sredino 18. stoletja. Leta 1744 je matematik Leonhard Euler izpeljal enačbo za kritično uklonsko obremenitev idealno ravne tlačene palice, iz katere sledi, da je njena nosilnost v obratnem sorazmerju z njeno dolžino. Čeprav je do enakega zaključka že 30 let pred tem eksperimentalno prišel Musschenbroek, ki je izvajal sploh prve poskuse uklona centrično obremenjenih prizmatičnih elementov [1], pa ne ti rezultati in ne Eulerjeva teorija še dolgo časa med inženirji niso bili sprejeti kot pravilni, saj v primeru kratkih elementov majhnih vitkosti napovedujejo nerealno visoke vrednosti kritične obremenitve. Obstaja celo anekdota, po kateri naj bi bil Euler tarča posmeha, ker njegova enačba ni mogla razložiti, zakaj se kovanec (kot tlačni element zelo majhne vitkosti) na nakovalu po udarcu s težkim kladivom splošči, namesto da bi prenesel neskončno veliko silo, kot napoveduje teorija [2]. Tako je še dolgo veljalo, da je nosilnost stebra sorazmerna z velikostjo prečnega prereza in neodvisna od njegove dolžine. To se je skladalo tudi z mnogimi eksperimenti iz tistega časa, ki so jih izvajali na sorazmerno kratkih stebrih iz lesa ali litega železa, ki so odpovedali že mnogo pred doseženo teoretično kritično silo in so se porušili enostavno zaradi prekoračitve trdnosti materiala. Težavo pri eksperimentih pa je predstavljalo tudi zagotavljanje takih pogojev, ki bi se čimbolj približali teoretičnim predpostavkam. Eulerjeva enačba namreč velja za idealno raven in popolnoma centrično obremenjen element, kar je v realnosti nemogoče doseči, že majhna odstopanja pa imajo zaradi nelinearnega obnašanja pri povečevanju osne obremenitve lahko velik vpliv. Prvi, ki je zadovoljivo razložil neujemanje teorije z eksperimenti, je bil leta 1844 E. Lamarle [1], ki je zaključil, da Eulerjeva enačba napoveduje pravilne vrednosti, če so le izpolnjene osnovne predpostavke problema - elastičen material (oziroma vitki stebri, ki se uklonijo v elastičnem območju), čimbolj idealni pogoji ob vpetju in natančen vnos sile. Z vedno bolj dovršenimi eksperimenti se je ta ugotovitev potrjevala, dokončno pa se je Eulerjeva enačba uveljavila, ko sta Theodore von Kármán (leta 1910) in kasneje F.R. Shanley (leta 1947) z vpeljavo dvojnega oz. tangentnega modula, ki se uporabita v enačbi namesto konstantnega modula elastičnosti materiala, uspela doseči dobro ujemanje teoretičnih napovedi z eksperimenti tudi v primeru kratkih stebrov [2]. Nasploh se je v prvi polovici 20. stoletja teorija stabilnosti hitro razvijala, eden od glavnih razlogov za to pa je bila vedno širša uporaba konstrukcijskega jekla, ki je material, iz katerega se pogosto konstruirajo vitki elementi in pri katerem stabilnostni problemi zato pridejo do izraza (kot bo prikazano v nadaljevanju pa tudi les predstavlja material, za katerega lahko pri tlačnih elementih pričakujemo, da bo njihovo nosilnost

narekovala izguba stabilnosti in ne trdnost materiala). Številni raziskovalci so se ukvarjali tako s teoretičnim kot z eksperimentalnim delom na področju stabilnosti in čeprav gre za široko področje, ki zajema tudi druge tipe elementov (npr. tanke pločevine) in načine izgube stabilnosti (npr. torzijski uklon in bočna zvrnitev), ki jih v tej nalogi ne obravnavam, so bili v tem času tudi linijski elementi in konstrukcije, katerih sestavni del so stebri, še vedno aktualni. Nov mejnik pri reševanju stabilnostnih oz. nelinearnih problemov pa je prinesel razmah elektronskih računalnikov, s katerimi je postalo mogoče numerično reševanje poljubnih problemov. Nelinearni končni elementi, katerih sedanja oblika je bila razvita v 80. letih prejšnjega stoletja, upoštevajo tako geometrijsko kot materialno nelinearnost in omogočajo natančno določitev nosilnosti stebrov tudi v neelastičnem področju, vključno z upoštevanjem nepopolnosti, utrditve materiala in zaostalih napetosti [2].

Čeprav so torej danes na razpolago vse teoretične podlage in orodja za nelinearno analizo konstrukcij, iz katere direktno dobimo notranje statične količine, merodajne za dimenzioniranje, pa je tak račun na nivoju celotne konstrukcije redko potreben. Dimenzije običajnih konstrukcij so namreč takšne, da je učinek nelinearnosti na velikost in razporeditev notranjih sil majhen in ga lahko zanemarimo. Tako zadošča določitev notranjih sil v elementih po hitrejši in enostavnejši linearni teoriji (TPR), nosilnost tlačnih elementov pa se na podlagi teh sil preveri z enačbami, v katerih je upoštevana v osnovi nelinearna narava problema. V praksi so se za dimenzioniranje stebrov skozi čas tako uporabljale različne formule, zasnovane na podlagi empiričnih preiskav ali pa direktno na podlagi stabilnostne teorije. Take formule imajo glede na predpostavke in poenostavitve pri njihovi izpeljavi različen razpon uporabnosti kar se tiče materiala, geometrije in načina obremenjevanja stebra ter se bolj ali slabše ujemajo z bolj natančnimi metodami.

Tudi standard SIST EN 1995-1-1 oz. Evrokod 5 (v nadaljevanju EC-5), ki je od 1.1.2008 obvezen predpis v RS Sloveniji za področje projektiranja lesenih konstrukcij [3], za dimenzioniranje stebrov uporablja zgoraj opisan pristop. Za tlačno obremenjene elemente podaja enačbo za račun redukcijskega koeficienta, s katerim zmanjšamo tlačno nosilnost ter tako upoštevamo nelinearnost problema. Omenjena enačba je bila dobljena s postopkom ujemanja krivulj (ang. »curve fitting«) glede na numerične simulacije, v katerih je bila nosilnost določena z nelinearno plastično analizo [4]. Redukcijski koeficient, ki ga z enačbo izračunamo, uporabimo tako za dimenzioniranje pri čistem tlaku kot tudi v interakcijskih izrazih za primere kombinirane osne in upogibne obremenitve (v enačbah je privzeto dvoosni upogib).

V diplomski nalogi sem želel proučiti obnašanje lesenih stebrov pod vplivom osno-upogibne ter v ta namen izdelal računalniški program za numerično simulacijo odziva stebrov z upoštevanjem nelinearnosti geometrije in materiala, katerega izdelava je predstavljala bistven del naloge. Rezultate, ki sem jih s pomočjo programa dobil pa sem primerjal z vrednostmi, ki sledijo iz relevantnih izrazov standarda EC-5 za dimenzioniranje stebrov pod takimi pogoji. Program je napisan znotraj okolja Visual Basic for Applications (VBA), ki je sestavni del programa Microsoft Excel iz zbirke Microsoft Office 2013. Račun temelji na reševanju diferencialne enačbe upogibnice po teoriji II. reda z metodo končnih diferenc in iskanju ravnotežja v prerezu s pomočjo orodja Reševalnik (ang. »Solver«), ki je prav tako sestavni del programa Excel. Pri računu je mogoče upoštevati različne robne pogoje, različne vrste prečnih obtežb (po terminologiji EC-5 so to vplivi), začetne nepopolnosti in tudi različne konstitutivne zakone materiala.

1.1 Zgradba diplomske naloge

V drugem poglavju naloge so predstavljene teoretične osnove, ki so podlaga za reševanje obravnavanih problemov, v tretjem poglavju je opisana izdelava in delovanje računalniškega programa, v četrtem je predstavljen standard Evrokod 5 ter navedeni predpisani izrazi za dimenzioniranje stebrov, v petem poglavju pa na podlagi računskih primerov prikažem primerjave in podam zaključek.

2 TEORETIČNO OZADJE

V tem poglavju je podan povzetek teorije, ki je nujna za razumevanje problema stabilnosti in s tem nosilnosti stebrov. Tematiko so sicer različni avtorji že podrobno obdelali, sam pa se si pri pisanju povzetka pomagal predvsem z viri [1], [2] in [5].

Kot sem omenil že v uvodu, so stebri izpostavljeni nevarnosti uklona. Za prvo razlago pojava si oglejmo preprost primer konzolnega stebra, obremenjenega s silo P , ki je prikazan na sliki 1. Privzeto je, da je element popolnoma raven in centrično obremenjen, zato je v njem prisotna le tlačna osna sila P in z njo povezana vzdolžna deformacija. Steber se zato pod vplivom obtežbe krajša in ostaja raven. A kot je pokazal že Euler, to velja le do določene meje – ko sila P preseže neko kritično vrednost, ki jo običajno označimo s P_{cr} , se steber upogne v obliko, ki je na sliki 1 (shematično) prikazana s črtkano črto.



Slika 1: Uklonska oblika konzolnega stebra

V primeru idealnega stebra je prehod iz ravne v ukrivljeno obliko hipen, posledica pa so veliki prečni pomiki, ki povzročijo porušitev [5]. Pri realnih stebrih pa neizogibna odstopanja od idealnega primera, kot so neravnosti elementa, ekscentrična obremenitev in napake v materialu, povzročijo neke prečne pomike že ob nastopu obremenitve. Če se osna sila približa vrednosti P_{cr} , ti pomiki in z njimi povezane notranje statične količine narastejo čez vse meje. Vrednost P_{cr} tako predstavlja teoretično zgornjo mejo nosilnosti stebra in je znana kot kritična ali Eulerjeva obremenitev [5]. Za njeno določitev moramo uporabiti bolj natančno metodo od preproste teorije I. reda, s katero zaradi njenih poenostavitev ne moremo zajeti stabilnostnih problemov. V točki 2.1 je podana izpeljava osnovne diferencialne enačbe za upogib linijskih elementov z upoštevanjem geometrijske nelinearnosti, s katero lahko med drugim izračunamo tudi Eulerjevo kritično obremenitev, v primeru prečno obremenjenih ali nepopolnih stebrov pa enačba omogoča določitev celotnega odziva (pomikov, notranjih sil).

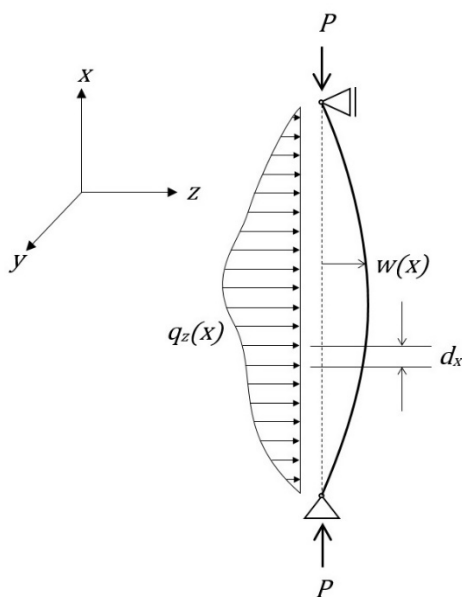
Omejitev enačbe je, da velja zgolj v elastičnem območju, saj je izpeljana na predpostavki, da se material ves čas obnaša linearno elastično. Ta predpostavka velja v primeru vitkih stebrov, pri katerih je kritična obremenitev zadosti nizka, da obravnavani material ostaja v elastičnem območju vse do

uklona. V primerih, ko napetosti v materialu presežejo mejo proporcionalnosti še preden je dosežena kritična obremenitev, pa imamo opravka z neelastičnim uklonom, ki je poseben problem, o katerem bo več pojasnjeno v točki 2.3.

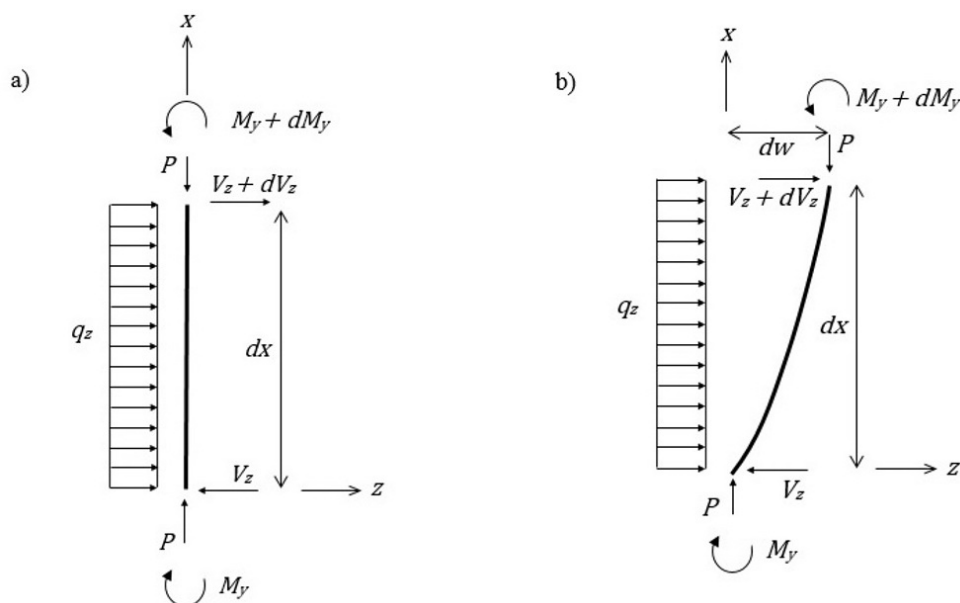
2.1 Geometrijska nelinearnost ravnih linijskih elementov

Ena od bistvenih poenostavitvev, ki jih vpelje teorija I. reda (TPR), je predpostavka o majhnih pomikih, zaradi katere ravnotežje na elementu računamo v nedeformirani legi [6]. Na sliki 2 je prikazan enostavno podprt steber, na katerem poleg točkovne sile P deluje še prečna porazdeljena obtežba q_z , zaradi katere se element deformira, kot je prikazano. Če iz nosilca izrežemo diferencialno majhen del dolžine d_x ter zapišemo pogoje ravnotežja, bi z upoštevanjem zgoraj omenjene predpostavke morali izhajati iz nedeformiranega stanja, ki ga prikazuje slika 3a. S slike je očitno, da v takem primeru osna sila P , neodvisno od njene velikosti, ne povzroča momentov in z njimi povezanih prečnih pomikov v elementu, ki so v tem primeru odvisni le od prečnih obtežb. Zato sledi, da je predpostavka o majhnih pomikih pregroba za preučevanje uklonskih problemov, kjer ima vpliv osne sile na prečne pomike osrednjo vlogo.

Da bi ta vpliv lahko zajeli, moramo ravnotežje računati v deformiranem stanju, kakršno je prikazano na sliki 3b. V tem primeru osna sila P zaradi pomika dw povzroča upogibne momente vzdolž elementa, zaradi katerih se prečni pomiki povečajo, kar pa ima za posledico spet večje momente zaradi osne sile. Upoštevanje ravnotežja v deformirani legi je torej ključno, če želimo obravnavati probleme, povezane z uklonom, to pa vodi do nelinearnih enačb odziva, s katerimi je tako zajeta geometrijska nelinearnost. S tem tudi preidemo na teorijo II. reda, ki pa ni enoličen pojem, saj z njim zajamemo množico teorij, ki uporabljajo bolj rigorozen pristop od TPR, še vedno pa uporabljajo različne poenostavitve, kar jih loči od točne teorije velikih pomikov. Za izpeljavo diferencialne enačbe, ki je primerna za reševanje problemov, kakršne bom obravnaval v tem diplomskem delu, pa zadostuje upoštevanje deformirane lege v osnovnih enačbah.



Slika 2: Enostavno podprt steber s prečno obtežbo



Slika 3: (a) nedeformirana lega (b) deformirana lega (prirejeno po [2]: str. 8)

2.1.1 Osnovna diferencialna enačba stebra-nosilca

S pojmom steber-nosilec označujemo elemente, ki so podvrženi tako upogibnim kot osnim tlačnim obremenitvam [5]. Največkrat se izraz uporablja za elemente, pri katerih sta oba tipa obremenitve že v začetku predvidena (npr. element obremenjen s osno silo in porazdeljeno prečno obtežbo), v osnovi pa so stebri-nosilci tudi elementi, kjer upogibne obremenitve zaradi neravnosti elementa ali ekscentričnosti obtežbe povzročajo zgolj osna sila. Vse primere lahko obravnavamo z isto enačbo, katere kratko izpeljavo prikazem v tej točki.

V izpeljavi so uporabljeni koordinatni sistem in oznake s slik 2 in 3, pri čemer je element obravnavan v ravnini x - z . Smeri notranjih momentov M_y in prečnih sil V_z so vzete pozitivno v smereh, prikazanih na sliki 3. Porazdeljena obtežba q_z deluje pozitivno v pozitivni smeri koordinatne z -osi, kot je to tudi pozitivna smer prečnega pomika, ki ga označim z w .

Predpostavke:

1. material se obnaša v skladu s Hookovim zakonom (tj. linearno elastično),
2. prečni prerezi po deformiranju ostanejo ravni in pravokotni na os elementa (Bernoulli-Navierova hipoteza),
3. deformacije so majhne, zato velja poenostavljen izraz za ukrivljenost osi (glej npr.[7]):

$$\kappa_y \approx \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad (1)$$

kjer κ_y označuje ukrivljenost osi elementa v ravnini x - z in je definirana kot recipročna vrednost radija ukrivljenosti R_y : $\kappa_y = 1/R_y$.

4. prečni prezek elementa je konstanten po celi dolžini; ravnina x - z je ravnina simetrije prečnega prereza,

5. preprečeni so pomiki izven ravnine elementa (ni nevarnosti torzijskega uklona in bočne zvrnitve),
6. osna obtežba je točkovna, deluje v krajiščih elementa in povzroča konstantno tlačno osno silo po celem elementu,
7. zanemarim spremembo dolžine elementa,
8. vpliv lastne teže elementa je zanemarljiv in je ne upoštevam.

Za infinitezimalni del elementa s slike 3b lahko zapišemo pogoj ravnotežja sil v smeri z. Pri tem lahko vzamemo, da je na tem majhnem delu vrednost obtežbe q_z konstantna ([1]).

$$\sum F_z: -V_z + (V_z + dV_z) + q_z dx = 0.$$

Od tu sledi

$$\frac{dV_z}{dx} = -q_z. \quad (2)$$

Prav tako lahko zapišemo še pogoj ravnotežja momentov na zgornjo točko obravnavanega dela:

$$\sum M_y^{zgoraj}: -M_y + (M_y + dM_y) - P dw - V_z dx + q_z \frac{dx^2}{2} = 0.$$

Zadnji člen v zgornji enačbi, v katerem nastopa kvadrat diferenciala dolžine dx , lahko zanemarimo in dobimo

$$\frac{dM_y}{dx} - P \frac{dw}{dx} = V_z. \quad (3)$$

Če enačbo (3) odvajamo po x in v njej upoštevamo enačbo (2), sledi

$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} - P \frac{d^2 w}{dx^2} = -q_z. \quad (4)$$

Do te točke so v izpeljavi uporabljene samo ravnotežne enačbe, če pa želimo dobiti zvezo med obtežbo in pomiki pa moramo uporabiti še preostale od osnovnih enačb mehanike trdnih teles, torej konstitutivne in kinematične enačbe. Tudi v teh enačbah je potrebno upoštevati deformirano lego elementa, vendar jih v nadaljevanju ne izpeljujem. Kakor se izkaže, predpostavki o majhnih deformacijah in zanemarljivi spremembi dolžine elementa ohranjata veljavnost zveze med notranjim upogibnim momentom in prečnimi pomiki, ki jo poznamo že iz elementarne teorije linijskih nosilcev (TPR) [1]:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_y}{EI_y}, \quad (5)$$

kjer je E modul elastičnosti materiala, I_y pa vztrajnostni moment prereza glede na os upogiba y (pri tem je upoštevano, da je koordinatni sistem izbran tako, da je os y ena od glavnih vztrajnostnih osi prečnega prereza). Produkt EI_y je sicer znana količina, ki ji pravimo upogibna togost. Z upoštevanjem (1) lahko zapišemo tudi:

$$M_y = -EI_y \kappa_y. \quad (6)$$

V zadnjem koraku (5) vstavimo v (4) ter upoštevamo dejstvo, da je obtežba q_z , za katero je bilo na infinitezimalni dolžini dx predpostavljena konstantno vrednost, v splošnem funkcija x . Tako dobimo

$$\boxed{EI_y \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 w}{dx^2} = q_z(x)}. \quad (7)$$

Dobljena enačba je znana kot osnovna diferencialna enačba stebra-nosilca [2]. Gre za nehomogeno navadno diferencialno enačbo 4. reda, ki povezuje odvode prečnih pomikov z obtežbo elementa, pri čemer je P konstantna tlačna osna sila (v primeru natezne sile bi imel drugi člen na levi strani zgornje enačbe negativen predznak). Enačba omogoča računanje tako statično določenih kot nedoločenih elementov, torej z njo lahko obravnavamo vse vrste podpor, ki jih pri reševanju upoštevamo v obliki robnih pogojev. Člen $q_z(x)$ na desni strani pa poleg dejanske prečne porazdeljene obtežbe lahko zajema tudi ostale izvore prečnih obremenitev, kot npr. ekscentričnost osne sile ali neravnost elementa [2]. Če je ta člen enak nič gre za homogeno diferencialno enačbo, s katero lahko določimo kritične obremenitve, kar je obravnavano v naslednji točki. Če je v enačbi osna sila $P = 0$ pa dobimo običajno zvezo med obtežbo in povosom iz elementarne teorije upogibnih nosilcev.

Enačba (7) predstavlja tudi osnovo za račun odziva v izdelanem računalniškem programu, kjer jo rešujem z metodo končnih diferenc, ki je približna numerična metoda, pri kateri diferencialno enačbo nadomestimo s sistemom algebrskih enačb. S tem preidemo iz iskanja zvezne analitične rešitve funkcije pomika $w(x)$ na iskanje pomikov w_i v diskretnih točkah [5], kar je sploh s pomočjo računalnika bistveno enostavneje. Ugodno je tudi, da se postopek reševanja ne razlikuje bistveno za različne primere podpiranja in obremenitev, zato je v tem smislu metoda zelo fleksibilna. Njena natančnost narašča z gostitvijo mreže točk, pa tudi z uporabo nekaterih drugih postopkov, o tem pa več v poglavju 3.

2.2 Elastičen uklon idealnega stebra

2.2.1 Členkasto podprt steber – osnovni uklonski primer

Enostavno podprt steber (z vrtljivimi podporami v krajiščih) na sliki 4 je znan kot Eulerjev steber [5], iz zgodovinskih razlogov, o katerih sem govoril v uvodu. Gre za osnovni uklonski primer, pri katerem je relativno enostavno priti do rešitve za kritično obremenitev. Izhajamo lahko neposredno iz splošne enačbe (7), v kateri upoštevamo, da na stebri ni prečnih obtežb, torej $q_z(x) = 0$. Pogosto se v literaturi ob tem vpelje nova oznaka:

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI_y}}, \quad (8)$$

s čimer lahko enačbo (7) zapišemo kot:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0. \quad (9)$$

Enačba (9) je homogena navadna diferencialna enačba 4. reda s konstantnimi koeficienti. Z znanim matematičnim postopkom reševanja takih enačb lahko pridemo do splošne rešitve, ki se glasi (za podrobnejšo izpeljavo glej npr. [2]):

$$w(x) = A \sin kx + B \cos kx + Cx + D. \quad (10)$$

Neznane konstante A , B , C in D je potrebno določiti z upoštevanjem robnih pogojev. V obravnavanem primeru sta pomika in momenta na mestu podpor enaka nič, zato lahko zapišemo

$$w(0) = B + D = 0$$

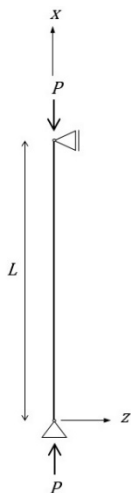
$$w(L) = A \sin kL + B \cos kL + CL + D = 0.$$

ter z upoštevanjem zveze (5)

$$\frac{d^2 w(0)}{dx^2} = -Bk^2 = 0$$

$$\frac{d^2 w(L)}{dx^2} = -Ak^2 \sin kL - Bk^2 \cos kL = 0.$$

Dobljen sistem enačb za konstante A , B , C in D lahko zapišemo v matrični obliki:



Slika 4: Eulerjev steber (prirejeno po [5]: str. 4)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sin kL & \cos kL & L & 1 \\ 0 & -k^2 & 0 & 0 \\ -k^2 \sin kL & -k^2 \cos kL & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (11)$$

Če so vse konstante enake nič je to očitno ena od rešitev, a gre za trivialno rešitev, ki ustreza stanju, v katerem je element raven ($w(x) = 0$). Netrivialne rešitve dobimo samo v primeru, ko je determinanta matrike koeficientov na levi strani enačbe (11) enaka nič [2]. Torej mora veljati:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sin kL & \cos kL & L & 1 \\ 0 & -k^2 & 0 & 0 \\ -k^2 \sin kL & -k^2 \cos kL & 0 & 0 \end{vmatrix} = k^4 L \sin kL = 0, \quad (12)$$

od koder sledi

$$\sin kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi \quad n = 1, 2, \dots \quad (13)$$

z upoštevanjem (8) pa

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EI_y}{L^2} \quad n = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Enačba (14) določa torej tiste kritične vrednosti sile P , pri katerih obravnavani steber pod vplivom čistega tlaka preide iz ravne v ukrivljeno lego – se ukloni. Če zvezo (13) upoštevamo v sistemu enačb (11) dobimo $B = C = D = 0$, konstanta A pa ostaja nedoločena [1]. Splošna rešitev za pomike tako postane:

$$w(x) = A \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (15)$$

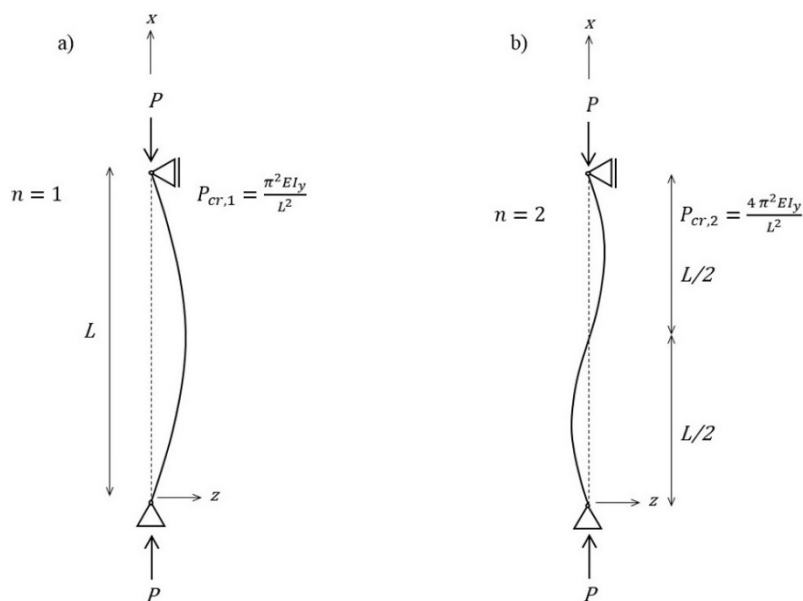
Zaradi neznane konstante A ta enačba ne omogoča določitve točne vrednosti pomikov, mogoča pa je določitev oblike, v katero se element ukloni. Problem uklona je matematično gledano problem lastnih vrednosti, za katerega je značilno, da netrivialne rešitve obstajajo samo pri določenih vrednostih nekega parametra. V tem primeru so kritične obremenitve, ki jih določa enačba (14) lastne vrednosti, uklonske oblike, v katere se element pri teh vrednostih ukloni (enačba (15)) pa lastni vektorji [5]. Primera prvih dveh uklonskih oblik, za $n = 1$ in $n = 2$, sta prikazana na sliki 5. Za prakso je pomembna samo najnižja vrednost, ko je $n = 1$, največkrat pa je označena s P_{cr} :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_y}{L^2}. \quad (16)$$

To je Eulerjeva kritična obremenitev oz. kritična sila za primer stebra preprosto podprtega stebra [5]. Kot že rečeno, ta vrednost postavlja teoretično zgornjo mejo osne tlačne obtežbe, ki jo tak element lahko nosi, čeprav jo v realnosti zaradi neidealnih pogojev ne moremo doseči. Če enačbo delimo s ploščino prečnega prereza A pa dobimo izraz za kritično napetost σ_{cr} :

$$\frac{P_{cr}}{A} = \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 EI_y}{L^2 A}. \quad (17)$$

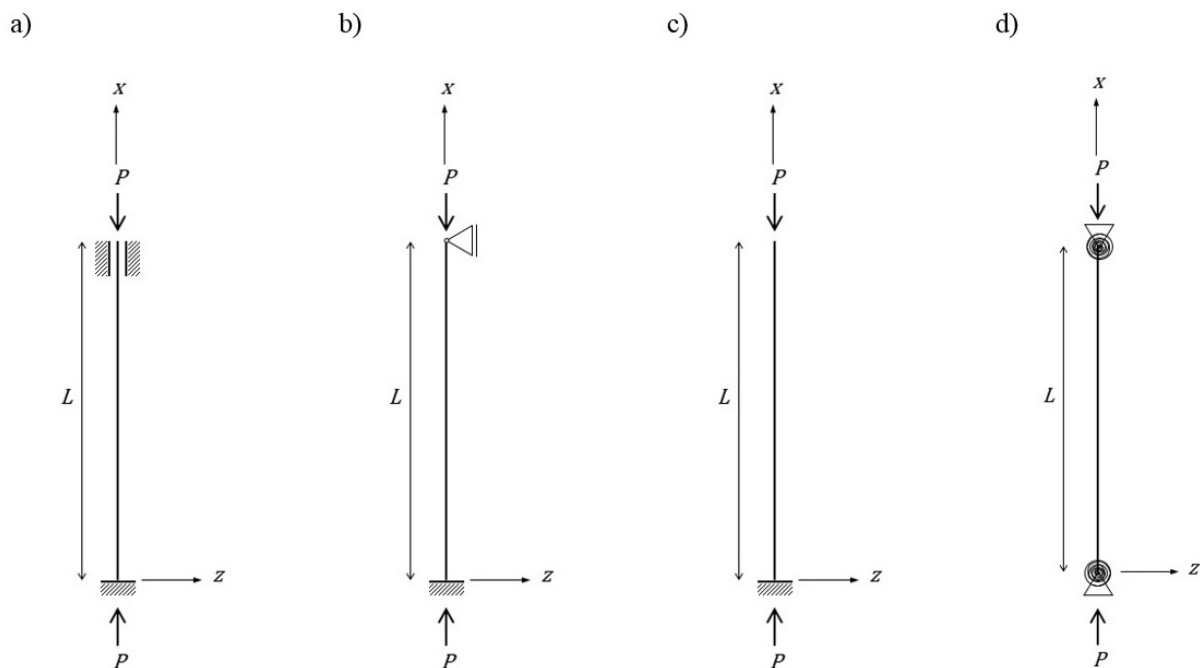
Vidimo, da v enačbah za kritično silo oz. napetost trdnost materiala sploh ne nastopa. Edina materialna karakteristika v enačbah je modul elastičnosti, sicer pa sta kritični vrednosti odvisni le od geometrijskih podatkov. To pomeni, da zgolj uporaba bolj trdnih materialov ne poveča varnosti proti uklonu, če ostale lastnosti ostanejo enake.



Slika 5: Uklonski obliki Eulerjevega stebra (a) prva oblika (b) druga oblika (prirejeno po [1]: str. 52)

2.2.2 Drugi primeri podpiranja

Enak postopek določitve kritične obremenitve lahko uporabimo tudi za elemente, ki so podprti drugače kot v primeru iz prejšnje točke. Prav tako lahko izhajamo iz enačbe (10), pri tem pa moramo za določitev konstant upoštevati robne pogoje, ki ga za vsak obravnavan primer določajo podpore. V nadaljevanju so zbrani rezultati za nekaj tipičnih primerov, prikazanih na sliki 6, ki jih podaja Timoshenko [1]. Možnost takih oblik podpiranja sem vdelal tudi v računalniški program, katerega rezultate kasneje primerjam s spodnjimi analitičnimi vrednostmi.



Slika 6: Različni primeri podpiranja (a) fiksna-fiksna podpora (b) fiksna-vrtljiva (c) konzolni steber (d) elastične vzmeti

Fiksni podpori (slika 6a)

- Spodaj: preprečena pomika in zasuk.
- Zgoraj: preprečen prečni pomik in zasuk.
- Kritična obremenitev:

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 EI_y}{L^2}. \quad (18)$$

Fiksna-vrtljiva podpora (slika 6b)

- Spodaj: preprečena pomika in zasuk.
- Zgoraj: preprečen prečni pomik.
- Kritična obremenitev:

$$P_{cr} = \frac{20.19 EI_y}{L^2}. \quad (19)$$

Konzolni steber (slika 6c)

- Spodaj: preprečena pomika in zasuk.
- Zgoraj: prosto.
- Kritična obremenitev:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_y}{4L^2}. \quad (20)$$

Podpore z elastičnimi vzmetmi (slika 6d)

- Zgoraj in spodaj: preprečena sta pomika, zasuku se upira elastična zasučna vzmet.
- Kritična obremenitev: $\frac{\pi^2 EI_y}{L^2} \leq P_{cr} \leq \frac{4\pi^2 EI_y}{L^2}$.

Računski model stebra z elastičnimi vzmetmi je pomemben, ker z njim lahko obravnavamo stebre kot dele konstrukcij in ne zgolj kot izolirane elemente, pri čemer vzmeti nadomeščajo vpliv sosednjih priključenih elementov. S tem modelom pa lahko zajamemo tudi vpliv podajnih stikov, ki so ena od značilnosti lesenih konstrukcij. Preprostega splošnega izraza za kritično silo v tem primeru ni, vemo pa, da leži nekje med vrednostma za vrtljivo in fiksno podprt element. Če je togost vzmeti, ki jo označim s k_φ , enaka nič, to ustreza vrtljivi podpori, ko gre proti neskončnosti pa fiksному vpetju. Postopek za analitično določitev kritične sile v takih primerih sicer prikaže Timoshenko [1], temelji pa na enačbah odziva stebrov-nosilcev (točka 2.3).

2.2.3 Koncept uklonske dolžine

Če primerjamo izraze za kritične obremenitve različno podprtih stebrov iz prejšnje točke z enačbo (16) lahko ugotovimo, da vse vrednosti predstavljajo nek delež obtežbe, ki pripada osnovnemu uklonskemu primeru. To velja splošno za vse primere podpiranja [5], zato lahko problem določitve kritične obremenitve rešujemo tudi na drug način. V vseh primerih bi lahko uporabili kar enačbo (16), ob tem pa namesto dejanske dolžine L v imenovalcu upoštevali učinkovito uklonsko dolžino L_u , ki jo pogosto imenujemo kar uklonska dolžina in ki bi nas pripeljala do enakih rezultatov. Če torej poznamo vrednosti L_u , ki pripadajo različnim primerom podpiranja, lahko kritično obremenitev enostavno določimo kot:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_y}{L_u^2}. \quad (21)$$

oziroma izraženo v obliki napetosti kot:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 EI_y}{L_u^2 A}. \quad (22)$$

Za konzolni steber iz prejšnje točke lahko npr. uklonsko dolžino najdemo iz zveze:

$$\frac{\pi^2 EI_y}{L_u^2} = \frac{\pi^2 EI_y}{4L^2} \Rightarrow L_u = 2L.$$

Tako vsakemu primeru podpiranja (robnim pogojem) pripada neka uklonska dolžina, ki nas z uporabo v osnovni uklonski enačbi (16) privede do vrednosti kritične obremenitve. Ta dolžina pa ni samo neka navidezna količina, ampak ima tudi fizikalni pomen, saj predstavlja razdaljo med t.i. inflekcijskimi točkami, to je točkami na krivulji uklonske oblike, v katerih je moment enak nič. Del elementa med temi točkami je tako enakovreden elementu s členkastimi podporami v krajiščih - osnovnemu uklonskemu primeru [1].

2.2.4 Uklonska krivulja

V enačbi (21) lahko upoštevamo definicijo vztrajnostnega radija prečnega prereza [5]:

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}, \quad (23)$$

kjer sem vztrajnostni radij označil z i_y (v literaturi je pogosta tudi oznaka r) in v tem primeru pripada obravnavani osi upogiba y . S tem dobimo izraz za kritično napetost v obliki:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L_{ef}}{i_y}\right)^2}. \quad (24)$$

Izraz v imenovalcu zgornje enačbe je kvadrat količine, ki je definirana kot mera vitkosti elementa λ (v tem primeru je to vitkost pri upogibu v ravnini x - z oziroma okoli osi y):

$$\lambda_y = \frac{L_{ef}}{i_y}. \quad (25)$$

S tem (24) postane:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_y^2}. \quad (26)$$

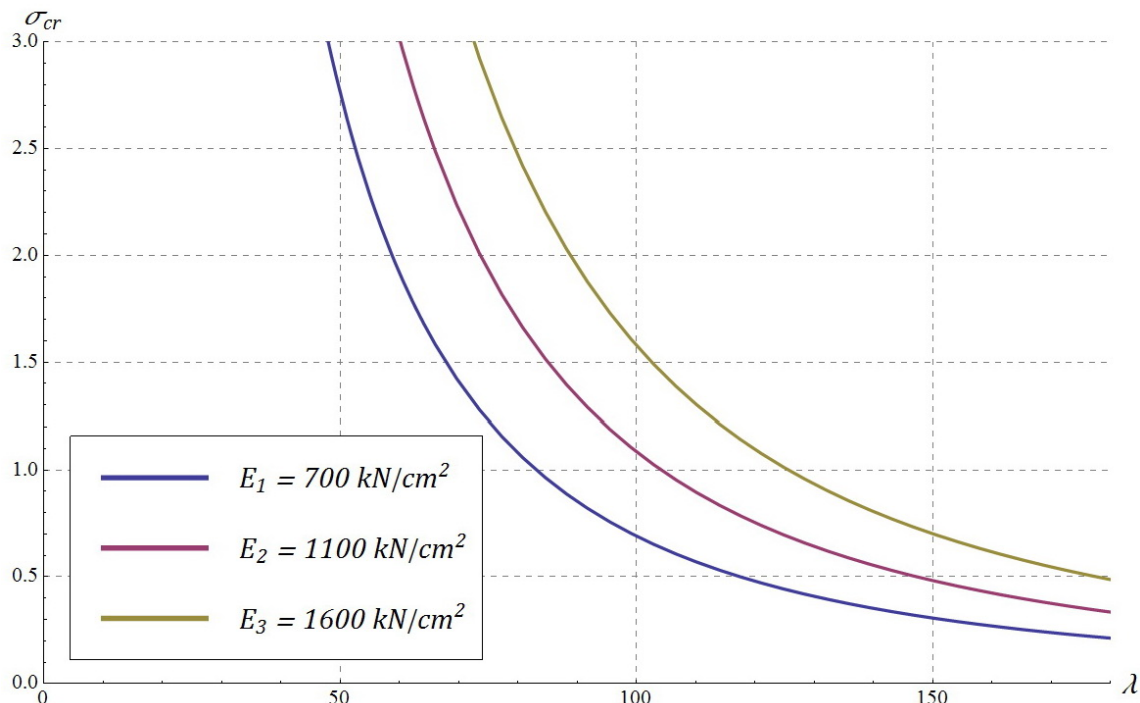
Tako dobimo pomembno zvezo med kritično napetostjo in vitkostjo elementa, katere grafični prikaz imenujemo uklonska krivulja (tudi Eulerjeva krivulja oz. hiperbola). Njena koristnost se kaže v tem, da ena sama krivulja velja za vse primere podpiranja, če je le v vseh primerih uporabljen material z enakim modulom elastičnosti E [5].

Na sliki 7 prikazujem uklonsko krivuljo za 3 različne materiale z moduli elastičnosti 700 kN/cm^2 , 1100 kN/cm^2 in 1600 kN/cm^2 . To so npr. vrednosti, ki ustrezajo masivnemu lesu iglavcev nizke, srednje in visoke kvalitete.

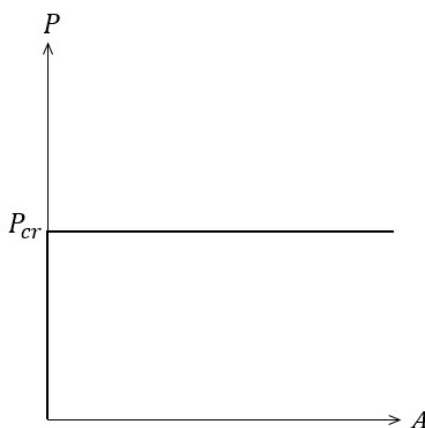
2.3 Odziv stebrov-nosilcev

Kot sledi iz prejšnje točke, v primerih idealnih stebrov ni mogoče določiti točnega odziva elementa, saj ostajajo ravni vse dokler ni dosežena kritična obremenitev, potem pa se uklonijo v obliko neznane

amplitude. Situacijo za osnovni primer, torej Eulerjev steber, grafično prikazuje slika 8, pri čemer vrednost A na abscisi predstavlja vrednost konstante v enačbi (15), torej amplitude pomikov v uklonski legi.



Slika 7: Uklonske krivulje pri različnih modulih elastičnosti



Slika 8: Obnašanje Eulerjevega stebra (prirejeno po [5]: str. 7)

Drugače je v primerih, ko so na elementih že v začetku nanašanja sile prisotni neki prečni pomiki, bodisi kot posledica prečnih obtežb, nepopolnosti elementa (odstopanja od ravnosti) ali ekscentričnosti obremenitve. V vseh teh primerih ima, kot bomo videli v naslednjih točkah, tlačna osna sila učinek amplifikacije začetnih pomikov in vseh z njimi povezanih notranjih statičnih količin. Z večanjem osne sile pomiki nelinearno naraščajo in gredo proti neskončnosti, ko je osna sila blizu kritični vrednosti. Začetni pomiki tako narekujejo obliko odziva, ki ga pri vsaki vrednosti sile P lahko tudi računsko določimo. Pri tem je osnova spet lahko enačba (7), ki ima v omenjenih primerih od nič različno desno

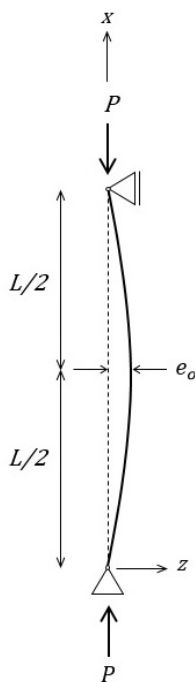
stran, torej gre za nehomogeno diferencialno enačbo, ki jo rešujemo z znanimi matematičnimi postopki. V razdelkih 2.3.1 do 2.3.3 so zbrani točni izrazi za določitev prečnega pomika v primeru nepopolnosti, ekscentričnosti osne sile in porazdeljene prečne obtežbe za primer členkasto podprtega stebra-nosilca, ki jih podaja Timoshenko [1].

2.3.1 Vpliv začetnih nepopolnosti

Začetne nepopolnosti oziroma odstopanja od ravnosti elementa lahko opišemo npr. z ukrivljenostjo v obliki sinusne krivulje. Tako imajo predpostavljeni začetni pomiki $w_0(x)$ obliko

$$w_0(x) = e_0 \sin \frac{\pi x}{L}, \quad (27)$$

kjer je e_0 vrednost največjega začetnega pomika na sredini elementa, kakor je prikazano na sliki 9. Taka oblika pomikov ustreza tudi prvi uklonski obliki tako podprtega stebra.



Slika 9: Steber z začetno nepopolno geometrijo

Pomike v tem primeru opisuje enačba:

$$w(x) = \frac{e_0}{1 - \alpha} \sin \frac{\pi x}{L}, \quad (28)$$

kjer je

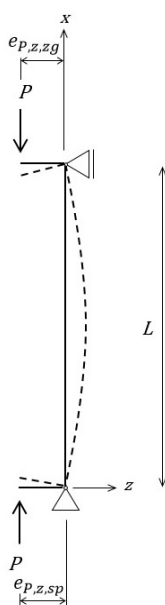
$$\alpha = \frac{P}{P_{cr}}. \quad (29)$$

α torej predstavlja razmerje med osno obtežbo in vrednostjo kritične obremenitve pri teh robnih pogojih, $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_y}{L^2}$.

Največji pomik se pojavi na sredini razpona, ki ga kot v [1] označim z δ . Izračunamo ga, če v enačbi (28) upoštevamo $x = L/2$:

$$w(x = L/2) = \delta = \frac{e_0}{1 - \frac{P}{P_{cr}}}. \quad (30)$$

2.3.2 Ekscentričnost osne sile



Slika 10: Ekscentrična osna sila

Slika 10 prikazuje steber-nosilec, na katerega osna sila P deluje ekscentrično, zato v njem povzroča še momente in inducira upogib. Ker v vseh primerih privzemam vertikalne elemente, označim ekscentričnosti (v ravnini $x - z$ sta to ekscentričnosti v smeri osi z) kot $e_{P,z,sp}$ v spodnjem in $e_{P,z,zg}$ v zgornjem prerezu. Enačba za pomike je s tem:

$$w(x) = e_{z,zg} \left(\frac{\sin kx}{\sin kL} - \frac{x}{L} \right) + e_{z,sp} \left(\frac{\sin k(L-x)}{\sin kL} - \frac{L-x}{L} \right). \quad (31)$$

V primeru, da sta ekscentričnosti osne sile v obeh prerezih enaki, torej $e_{z,zg} = e_{z,sp} = e_z$, se tudi v tem primeru maksimalni pomik pojavi na sredini razpona in ga lahko zapišemo kot

$$w(x = L/2) = \delta = \frac{Pe_z L}{2EI_y} \lambda(u), \quad (32)$$

kjer je

$$\lambda(u) = \frac{2(1-\cos u)}{u^2 \cos u}. \quad (33)$$

Količina u pa je definirana kot:

$$u = \frac{L}{2}k = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{P}{EI_y}}, \quad (34)$$

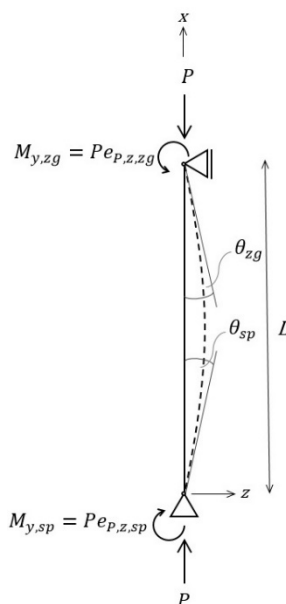
kjer je upoštevana še definicija (8). Ekscentričnost osne sile pa si lahko predstavljamo tudi kot delovanje točkovnih momentov v krajiščih elementa, pri čemer je njuna velikost določena kot $M_{y,i} = Pe_{z,i}$. To prikazuje slika 11, kjer sta označena tudi zasuka v skrajnih prerezih elementa, θ_{zg} in θ_{sp} . Tudi za ti dve količini zapišem točni enačbi, ki jih podaja [1]:

$$\begin{aligned} \theta_{sp} &= \frac{M_{y,sp}L}{3EI_y} \psi(u) + \frac{M_{y,zg}L}{6EI_y} \phi(u) \\ \theta_{zg} &= \frac{M_{y,zg}L}{3EI_y} \psi(u) + \frac{M_{y,sp}L}{6EI_y} \phi(u). \end{aligned} \quad (35)$$

Pri tem sta funkciji $\psi(u)$ in $\phi(u)$ definirani kot:

$$\phi(u) = \frac{3}{u} \left(\frac{1}{\sin(2u)} - \frac{1}{2u} \right), \quad (36)$$

$$\psi(u) = \frac{3}{2u} \left(\frac{1}{2u} - \frac{1}{\tan(2u)} \right). \quad (37)$$



Slika 11: Ekscentričnost osne sile kot momentna obtežba (prirejeno po [1]: str. 13)

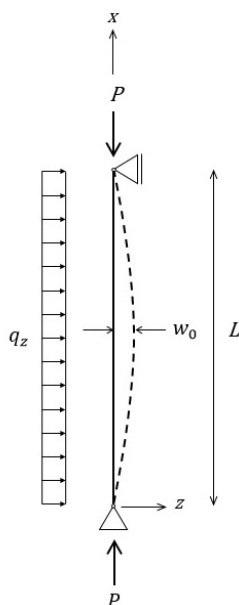
Enačbi (35) sta uporabni pri računanju statično nedoločenih primerov, npr. takih s fiksnimi podporami. Kot pokaže Timoshenko [1], je mogoče omenjeni enačbi uporabiti za račun neznanih momentov v podporah in sicer iz pogoja, da zasuka v fiksni podpori ni. Tako najprej računamo element kot členkasto podprt (statično določen) in določimo zasuka θ v podporah zaradi vseh zunanjih obtežb, nato pa iz enačb (35) določimo momenta, ki ta zasuk izničita. Ta momenta predstavljata dodatno

obtežbo na prvotnem statično določenem sistemu, z uporabo principa superpozicije pa pridemo do rezultatov za izhodiščni statično nedoločen primer. Ob tem je treba povedati, da princip superpozicije, kot ga poznamo iz TPR, z vpeljavo geometrijske nelinearnosti v splošnem preneha veljati. Vseeno pa ga lahko uporabimo pod pogojem, da vse vplive, ki jih seštevamo, izračunamo pri istem nivoju osne sile [1]. Isti postopek je uporaben v vseh primerih, ko imamo zaradi statične nedoločenosti neznan upogibne momente, npr. v primeru kontinuirnih nosilcev ali elastičnih podpor.

2.3.3 Prečna porazdeljena obtežba

Prečna obtežba q_z , v primeru da ni osne sile ($P = 0$), povzroča začetne pomike z maksimalno vrednostjo w_0 na sredini razpona, kot prikazuje slika 10. Pomike v primeru hkratnega delovanja osne sile P določimo z enačbo ([1]):

$$w(x) = \frac{q_z L^4}{16EI_y u^4} \left(\frac{\cos(u - 2ux/L)}{\cos(u)} - 1 \right) - \frac{q_z L^2}{8EI_y u^2} x(L - x). \quad (38)$$



Slika 12: Element s prečno porazdeljeno obtežbo

Enačba za pomik na sredini razpona δ , ki tudi v tem primeru predstavlja največji pomik na elementu, pa je:

$$w(x = L/2) = \delta = \frac{5q_z L^4}{384EI_y} \eta(u), \quad (39)$$

kjer funkcijo $\eta(u)$ določa izraz:

$$\eta(u) = \frac{12(2 \sec u - 2 - u^2)}{5u^4}. \quad (40)$$

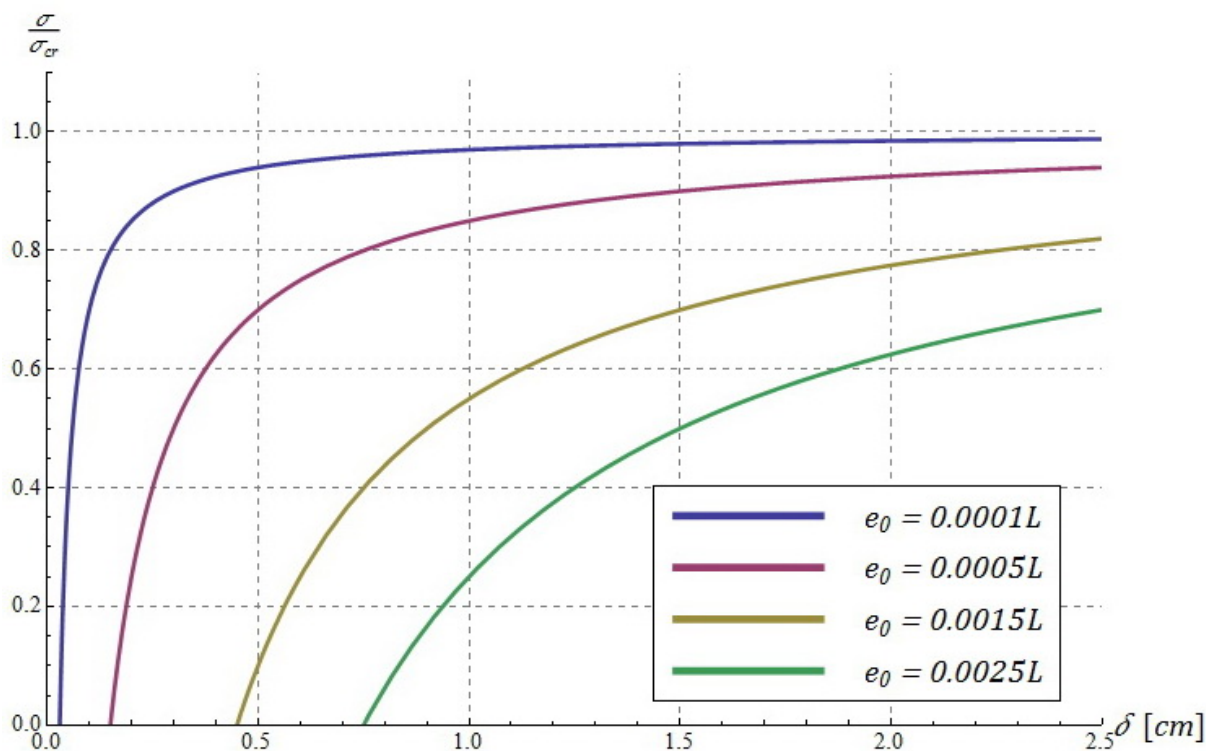
2.3.4 Povzetek

Zgornji primeri potrjujejo prej zapisane trditve glede učinka osne sile. Iz enačbe (30) za pomik na sredini razpona v primeru začetnih nepopolnosti npr. sledi, da se vrednost začetnih pomikov poveča s faktorjem:

$$\frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \quad (41)$$

Pri majhnih razmerjih $\frac{P}{P_{cr}}$ je ta faktor blizu vrednosti 1 in ima zato zanemarljiv vpliv na povečanje pomikov. Ko se P približuje P_{cr} pa gre vrednost faktorja proti neskončnosti. Podoben vpliv kot faktor (41) ima v primeru ekscentričnosti osne sile funkcija $\lambda(u)$, v primeru prečne porazdeljene obtežbe pa funkcija $\eta(u)$. S skupnim imenom jih lahko imenujemo faktorji amplifikacije in pomenijo tiste parametre, v katerih je zajet vpliv osne sile na povečanje pomikov. Če ta vpliv zanemarimo ($P = 0$), dobimo take enačbe kot pri TPR.

Kot ugotavlja Timoshenko [1] pa ne naredimo velike napake, če vrednost faktorja amplifikacije v vseh primerih določimo kar z izrazom (41). Osnova ima torej v vseh primerih podoben vpliv na odziv elementa, ki ga grafično za primer začetne nepopolnosti prikazujem na sliki 13. Slika 13 prikazuje zvezo med normirano napetostjo σ/σ_{cr} in pomikom δ za 5 primerov različnih začetnih odstopanj e_0 . Pri generiranju teh grafov sem upošteval podatke $E = 800 \text{ kN/cm}^2$, $L = 3 \text{ m}$ in $I_y = 20^4/12 = 13333.3 \text{ cm}^4$.

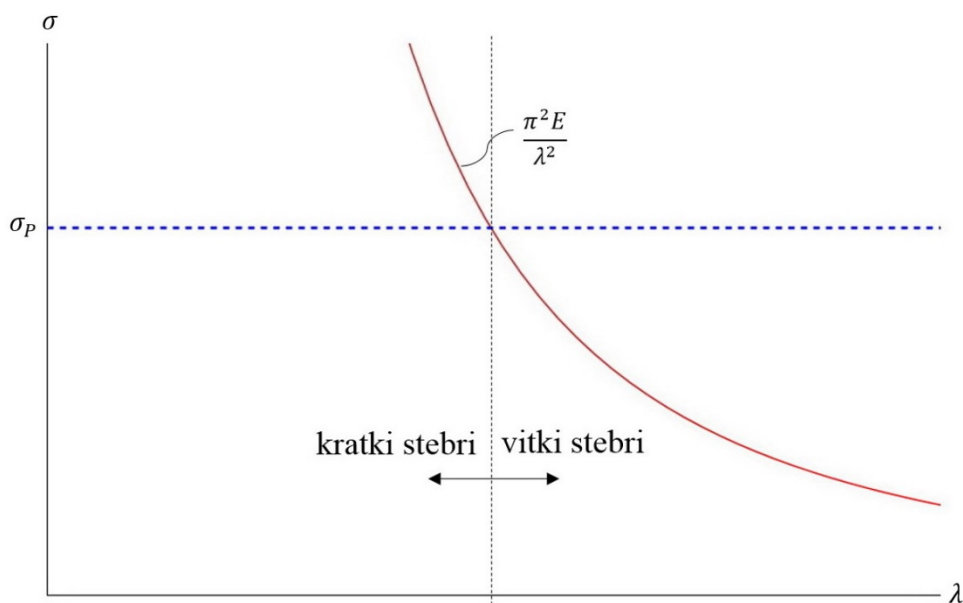


Slika 13: Zveza med normirano obtežbo in maksimalnim pomikom pri različnih začetnih nepopolnostih (vrtljivo podprt element)

Na podlagi zgornjih ugotovitev pa lahko zaključimo tudi, da je kritična obremenitev idealnih stebrov (točka 2.2) dobra ocena maksimalne nosilnosti stebra, saj se ji primeri, ki so blizu idealnim, zelo približajo. To tudi pomeni, da lahko z opazovanjem neidealnih primerov pridemo do dobre ocene za kritično obremenitev in se tako izognemo iskanju le-te iz enačbe (9), ki nas privede do problema lastnih vrednosti [5].

2.4 Neelastičen uklon

Vse do sedaj prikazane enačbe so temeljile na predpostavki, da se material obnaša linearno elastično (Hookov zakon). Modul elastičnosti E , ki nastopa v enačbah, je zato konstantna vrednost. Kot je bilo že omenjeno je ta predpostavka primerna za vitke stebre, pri katerih pride do uklona, preden je dosežena meja proporcionalnosti materiala. Predpostavka pa ne velja v primeru kratkih stebrov, kjer je teoretična kritična napetost višja od te meje. To razmejitev jasno prikazuje slika 14, na kateri je prikazana elastična uklonska krivulja, ki jo določa enačba (26) ter meja proporcionalnosti σ_p . Za vitkosti λ manjše od določene meje tako elastična obravnava ni več primerna in pri določitvi kritične obremenitve je potrebno upoštevati nelinearno elastično obnašanje in s tem spreminjanje vrednosti modula elastičnosti.



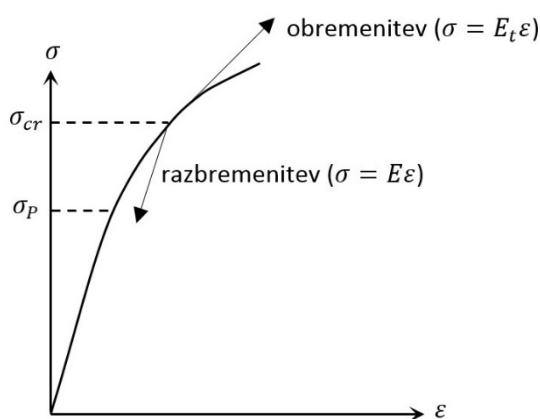
Slika 14: Razmejitev med kratkimi in vitkimi stebri (prirejeno po [5]: str. 36)

To pa velja tudi v primeru materialov, ki se ne obnašajo v skladu s Hookovim zakonom, kakršen je tudi les. Zanj je značilno nelinearno obnašanje v tlaku brez jasne meje proporcionalnosti, zato vrednost modula elastičnosti pada vse od začetka naraščanja tlačnih napetosti. Ker je eden izmed ciljev te diplomske naloge tudi modeliranje neelastičnega obnašanja lesenih stebrov v tej točki na kratko povzamem tudi teorijo, ki obravnava neelastičen uklon.

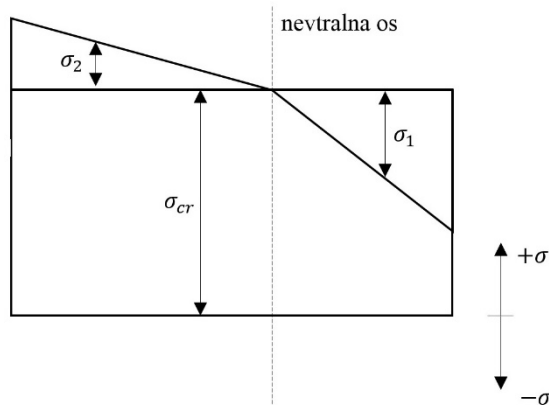
2.4.1 Reducirani in tangenti modul

Kot sem omenil že v uvodu, je neelastičen uklon predstavljal precejšen teoretičen problem, ki je dolgo ostal nerešen in zaradi katerega je bila celo Eulerjeva teorija dolgo obravnavana kot nepravilna. Ta se je uveljavila šele po letu 1910, ko je Theodore von Kármán razvil teorijo reduciranega modula (čeprav je, kot ugotavlja Chajes [5], do istega zaključka pred njim prišel že Friderich Engesser). Po tej teoriji

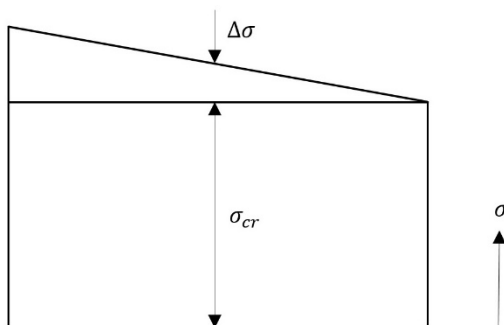
osna sila P_{cr} , ki povzroči uklon, ostaja konstantna tudi po začetku uklanjanja, kar ima za posledico, da se pri prehodu iz ravne v ukrivljeno obliko vlakna na konveksni strani razbremenijo. Zveza med napetostjo in deformacijo je v primeru razbremenitve vedno linearna in jo diktira modul elastičnosti E , torej $\sigma = E\epsilon$ [5]. Medtem pa se vlakna na drugi strani prereza obremenijo, zvezo med napetostjo in deformacijo pa v tem primeru diktira tangenti modul E_t , ki predstavlja naklon krivulje $\sigma(\epsilon)$ na mestu $\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A}$ (slika 15). Napetostno stanje v prerezu po tej teoriji prikazuje slika 16. Končni rezultat teorije so izrazi za kritične obremenitve, ki imajo enako obliko kot v primeru elastičnega materiala, le da namesto konstantnega modula elastičnosti E v njih nastopa reducirani modul E_r , ki je odvisen od konstitutivnega zakona materiala in tudi od oblike prečnega prereza, podrobnosti pa so podane v [5].



Slika 15: Teorija reduciranega modula (prirejeno po [5]: str. 38)



Slika 16: Napetosti v prerezu v trenutku uklona po teoriji reduciranega modula. $\sigma_1 \rightarrow$ razbremenitev, $\sigma_2 \rightarrow$ obremenitev (prirejeno po [5]: str. 38)



Slika 17: Napetosti v prerezu v trenutku uklona po teoriji tangentnega modula (vsa vlakna se obremenijo, prirejeno po [5]: str. 38)

Ta teorija je bila široko sprejeta, dokler ni približno 30 let kasneje F.R. Shanley pokazal, da pridemo do boljših rezultatov, če upoštevamo, da odvisnost med napetostjo in deformacijo po celotnem prerezu diktira tangentni modul [2]. Zato to teorijo imenujemo teorijo tangentnega modula, temelji pa na predpostavki, da po začetku uklanja osna sila še vedno narašča in zato celoten prezek ostaja tlačni (v nobenem vlaknu ne pride do razbremenitve, slika 17). Tudi v tem primeru pridemo do enačb za kritično obremenitev, ki imajo enako obliko kot v elastičnem primeru, le da v njih namesto modula elastičnosti E nastopa tangentni modul E_t , ki pa za razliko od reduciranega modula ni odvisen od prečnega prereza, ampak le od konstitutivnega zakona materiala.

2.4.2 Kritična napetost po teoriji tangentnega modula

Za praktično dimenzioniranje je v zvezi z zgoraj opisanima teorijama najpomembnejši zaključek, da po teoriji tangentnega modula dobimo rezultate, ki se najboljše ujemajo z eksperimenti. Kot ugotavlja Chajes [5], lahko zato kritično obremenitev, ki jo dobimo po tej teoriji, smatramo kot pravilno posplošitev Eulerjeve obremenitve v nelineasno elastičnem območju. Za členkasto podprt steber sta enačbi za kritično silo in napetost po teoriji tangentnega modula tako velja [1]:

$$P_{t,cr} = \frac{\pi^2 E_t I}{L^2}, \quad (42)$$

$$\sigma_{t,cr} = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda^2}. \quad (43)$$

Ker E_t v zgornjih izrazih ni konstantna vrednost ampak je odvisen od nivoja napetosti, moramo pri določanju kritičnih vrednosti poznati zvezo med napetostjo in deformacijo za dani material, od koder lahko določimo E_t pri posameznem nivoju napetosti. Izhajamo lahko direktno iz eksperimentalno določenega delovnega diagrama, če imamo na voljo analitičen izraz $\sigma(\epsilon)$, pa lahko E_t določimo z odvajanjem, saj velja:

$$\frac{d\sigma(\epsilon)}{d\epsilon} = E_t. \quad (44)$$

V prvem primeru bi npr. za izbrane vrednosti $\sigma_{t,cr}$ iz delovnega diagrama določili pripadajoče E_t , iz enačbe (43) pa nato vitkost, ki ustreza izbrani σ_{cr} , s tem pa dobili eno točko na uklonski krivulji. S

pomočjo te krivulje je potem enostavno tudi določanje σ_{cr} pri znani vitkosti, kar je uporabno v praksi, kjer je vitkost običajno znan podatek. V drugem primeru, če imamo analitičen izraz $\sigma(\epsilon)$, pa lahko upoštevamo dejstvo, da sta tako σ kot E_t funkciji deformacije ϵ , zato lahko iščemo tisto vrednost ϵ , pri kateri bo za podano vitkost zadoščeno enačbi (43).

Timoshenko [1] pa podaja tudi sledeč izraz, s katerim direktno računamo tangentni modul E_t :

$$E_t(\sigma) = E \frac{\sigma_{YP} - \sigma}{\sigma_{YP} - c\sigma}. \quad (45)$$

Izraz lahko uporabimo za različne materiale, pri tem pa moramo poznati vrednosti σ_{YP} , ki predstavlja mejo tečenja materiala, ter koeficient c , za katerega avtor vira podaja nekaj priporočenih vrednosti. Vrednost c je sicer med 0 in 1, $c = 1$ pa ustreza linearno elastičnemu materialu. Za jeklo tako dobro oceno dobimo z upoštevanjem $c = 0.96$ do 0.99 . Pri materialih, ki meje tečenja nimajo jasno izražene, kot je npr. les, pa vrednost σ_{YP} v enačbi (45) nadomestimo z mejno napetostjo σ_{ult} . Timoshenko [1] za borov les podaja vrednost $c = 0.875$.

Pri prikazu uklonske krivulje za neelastičen uklon je ugodno vpeljati še količino λ_{rel} , ki jo imenujemo relativna vitkost in je definirana kot:

$$\lambda_{rel} = \sqrt{\frac{f_c}{\sigma_{cr}}}, \quad (46)$$

kjer f_c mejna tlačna napetost (oz. napetost na meji tečenja za materiale kot je npr. jeklo), σ_{cr} pa elastična kritična napetost.

Če sedaj enačbo (43), ki določa kritično napetost po teoriji tangentnega modula, normiramo s tlačno trdnostjo materiala f_c , ter števec in imenovalc pomnožimo z modulom elastičnosti E , z upoštevanjem zgornje definicije dobimo:

$$\frac{\sigma_{t,cr}}{f_c} = \frac{1}{\lambda_{rel}^2} \frac{E_t(\sigma_{t,cr})}{E}, \quad (47)$$

kjer je poudarjeno, da je tangentni modul E_t funkcija napetosti z leve strani enačbe. Če v enačbi (45) upoštevam namesto meje tečenja σ_{YP} mejno napetost $\sigma_{ult} = f_c$, kar po zgornji ugotovitvi ustreza lesenim elementom, ter jo vstavim v (47), lahko relativno vitkost λ_{rel} zapišemo kot funkcijo kritične napetosti:

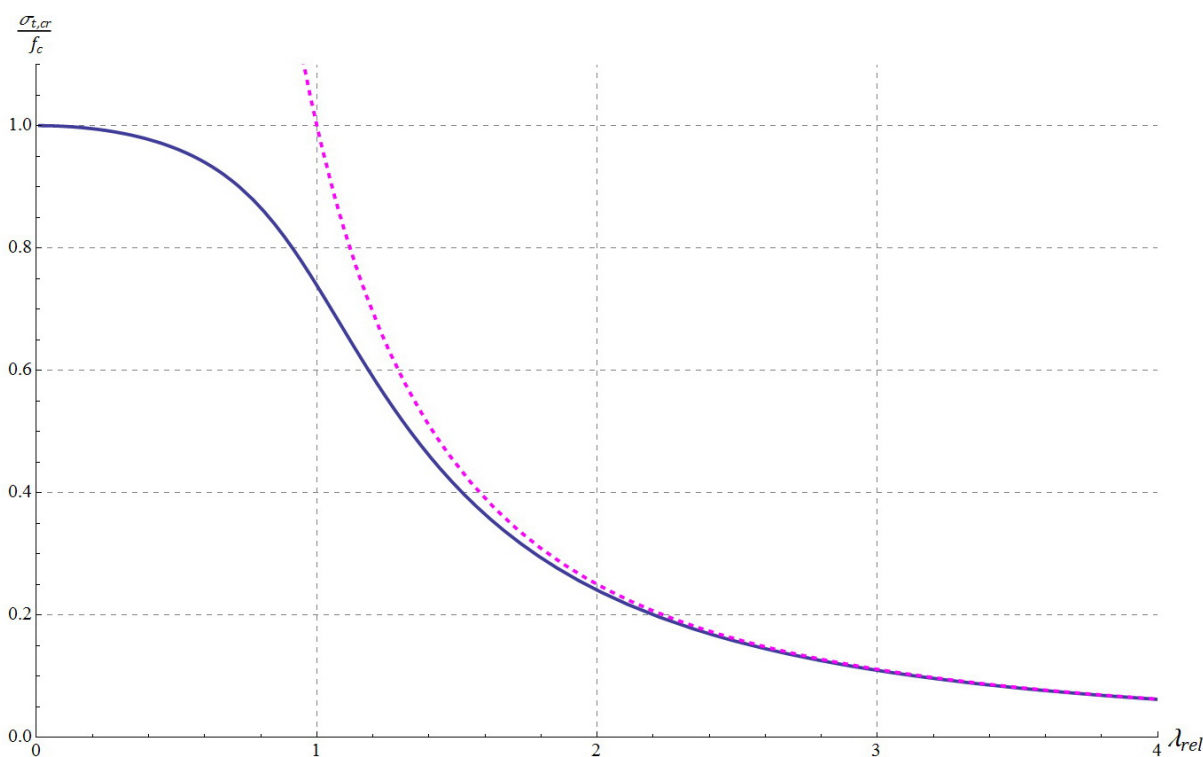
$$\lambda_{rel}^2 = \frac{f_c(f_c - \sigma_{t,cr})}{\sigma_{t,cr}(f_c - c\sigma_{t,cr})}. \quad (48)$$

Tako lahko za vsako izbrano vrednost kritične napetosti $\sigma_{t,cr}$ z zgornjo enačbo določimo relativno vitkost, ki pripada tej kritični napetosti. S to enačbo lahko definiramo uklonsko krivuljo v parametrični obliki, pri čemer je parameter napetost $\sigma_{t,cr}$, koordinato na abscisni osi določa koren omenjene enačbe, koordinato na ordinatni osi pa določa vrednost $\sigma_{t,cr}/f_c$. Izris parametričnih krivulj omogoča

npr. program Mathematica, s katerim sem generiral krivuljo na sliki 18. Pri tem sem vzel $c = 0.875$, vrednost f_c pa zaradi normiranja nima vpliva na obliko krivulje. Na sliki je s črtkano črto prikazana še Eulerjeva hiperbola, ki je prav tako normirana na tlačno trdnost f_c in zato določena z enačbo (46), iz katere izrazimo normirano napetost:

$$\frac{\sigma_{cr}}{f_c} = \frac{1}{\lambda_{rel}^2}.$$

Kot je razvidno s slike, so pri velikih relativnih vitkosti vrednosti kritičnih napetosti praktično enake za elastičen in neelastičen primer. Pri manjših vitkosti pa krivulja za neelastičen primer določa bistveno nižje vrednosti. S padanjem vitkosti sicer nosilnost narašča, a je omejena s trdnostjo materiala.



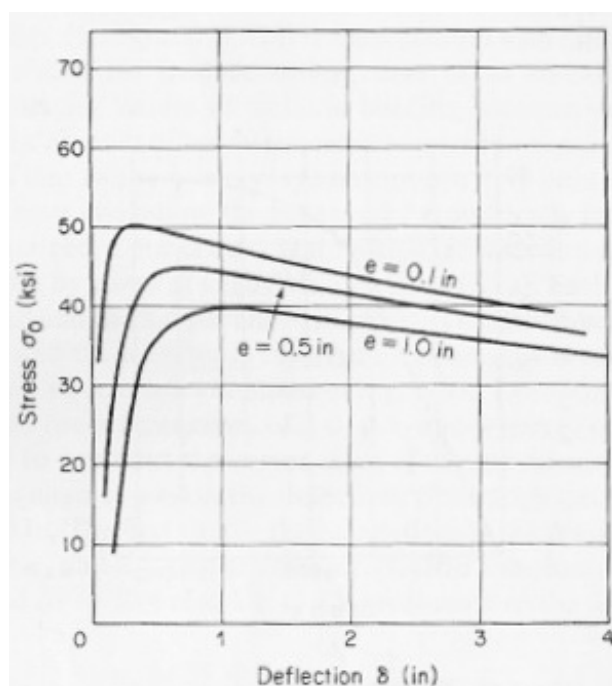
Slika 18: Uklonska krivulja za neelastičnem uklon, kjer tangenti modul določa enačba (45)

Zgornja uklonska krivulja zaradi tako normiranih vrednosti velja za vse materiale, pri katerih se tangenti modul v odvisnosti od nivoja napetosti spreminja, kot je bilo predpostavljeno z enačbo (45), skupaj s pripadajočimi vrednostmi konstant.

2.4.3 Odziv stebrov-nosilcev v nelinearno elastičnem območju

Kritične vrednosti, ki jih za različne relativne vitkosti prikazuje slika 18, veljajo za idealne stebre, ki so do uklona ravni ter pod vplivom čistega tlaka. V trenutku, ko je dosežena kritična obremenitev, se pojavijo upogibne deformacije, ki pa so infinitezimalno majhne, zato lahko upoštevamo eno vrednost tangentnega modula E_t po celem elementu (konstantno vrednost E_t oz. E_r po celem elementu privzemata obe teoriji opisani v prejšnji točki [5]).

V primeru stebrov-nosilcev so upogibne deformacije prisotne že na začetku obremenjevanja, osna obtežba pa jih povečuje. Zato se vrednost tangenta modula spreminja vzdolž elementa, zaradi česar ni mogoče dobiti zaključenih enačb odziva kot v elastičnem primeru [5]. Potrebni so poenostavljeni modeli oz. numerični iterativni postopki, kar bistveno podaljša račun že v preprostih primerih. Chajes [5] prikaže postopek primeren tudi za ročni račun na primeru členkasto vpetih aluminijastih stebrov, obremenjenih z ekscentrično osno silo, s katerim pride do zveze med tlačno napetostjo in maksimalnim pomikom, ki ga neposredno iz vira prikazujem na sliki 19. Krivulje so izračunane za stebre z vitkostjo $\lambda = 30.4$, pomik (vrednosti na abscisi) in napetosti (vrednosti na ordinati) pa so izražene v imperialnih enotah*. Za ta primer avtor navaja kritično napetost po teoriji tangenta modula $\sigma_{t,cr} = 52.5 \text{ ksi}$. Vidimo, da se tej vrednosti steber z najmanjšo ekscentričnostjo zelo približa, kar se sklada z zapisanim v prejšnjih točkah.



Slika 19: Porušitev ekscentrično obremenjenih stebrov ([5]: str. 56)

Na sliki 19 je v vseh primerih ekscentričnosti dosežena neka maksimalna napetost, pri kateri pomiki pričnejo naraščati pri tem ko obtežba pada. Padajoči deli krivulj predstavljajo nestabilne lege, ki v realnosti niso mogoče, zato bi se elementi porušili, ko bi bila dosežena najvišja točka na zgornjih krivuljah [5].

* $1 \text{ in} = 2.54 \text{ cm}$; $50 \text{ ksi} \approx 34.5 \text{ kN/cm}^2$

3 PROGRAM ZA NUMERIČNO SIMULACIJO ODZIVA STEBROV

3.1 Splošno o programu

Cilj diplomske naloge je bil oceniti postopke, ki jih za dimenzioniranje lesenih stebrov podaja standard EC-5. To sem skušal doseči s pomočjo orodja v obliki lastnega računalniškega programa, ki sem ga ustvaril znotraj okolja Microsoft Excel, ki je sicer program za delo s preglednicami v zbirki Microsoft Office, a omogoča tudi napredno uporabo kot je programiranje v programskem okolju Visual Basic for Applications (VBA). To okolje ponuja širok nabor možnosti, od preproste manipulacije celic na delovnih listih (»Worksheet«), do zahtevnejših programov, ki lahko tečejo tudi povsem neodvisno od delovnih listov osnovnega programa Excel. V programu Excel je tudi orodje za samodejno generiranje programske kode v obliki »snemanja« t.i. makrev, a to je primerno le za najenostavnejše primere. Programiranje tako poteka v obliki pisanja funkcij in procedur, ki jih potem na različne načine zaženemo oz. priključimo iz Excela. Novo definirane funkcije uporabljamo kot vse ostale že vgrajene funkcije, v primeru procedur pa so za njihov zagon možni številni načini. Ena od glavnih prednosti okolja VBA se kaže v povezavi z osnovnim programom, saj lahko pri programiranju uporabljamo ali manipuliramo večino funkcionalnosti programa Excel. Običajno v osnovnem programu tudi prikažemo rezultate, možni pa so tudi drugi načini zapisa izhodnih podatkov (npr. v datoteko, izvoz v drug program, ...). Za vnos in izpis podatkov lahko tako uporabljamo kar običajne delovne liste programa Excel, kamor lahko tudi vstavljamo razne kontrolnike (gumbe za zagon procedur, polja za vnos ali izbiro podatkov, ...), ki nam omogočajo interakcijo s pripravljenimi procedurami. Okolje VBA pa omogoča tudi ustvarjanje lastnih grafičnih vmesnikov (»UserForm«), ki se odprejo v samostojnem oknu in imajo izgled samostojnih okenskih programov, čeprav še vedno tečejo znotraj osnovnega programa Excel. Pri tem uporabljamo vnaprej pripravljene gradnike oz. kontrolnike (»Controls«) kot so gumbi, tekstovna polja in podobno, ki jim nato priredimo poljubno programsko kodo. Podrobnosti o okolju VBA so v obsežni dokumentaciji [8] na voljo na spletu. Ker poleg definicij vsebuje tudi razlage in praktične primere, lahko predstavlja tudi izhodišče, če se prvič srečamo z omenjenim okoljem.

Ker je program v okviru te diplomske naloge izdelan zgolj kot orodje, ki sem ga uporabil za pridobitev kasneje prikazanih rezultatov, je uporabniški vmesnik drugotnega pomena. Vse napisane procedure se sicer lahko kadarkoli vključi v poljubno oblikovan uporabniški vmesnik, a za to v mojem primeru pravzaprav ni bilo potrebe. Vnos in izpis podatkov tako poteka kar na delovnih listih, kjer so tudi kontrolni gumbi za zagon različnih procedur. Tudi sicer program ni zasnovan za splošnega uporabnika, torej ne vsebuje veliko kontrolnih procedur, ki bi opozarjale na napačen vnos podatkov in podobno. Osredotočil sem se torej na izdelavo modela, s katerim bi lahko izračunal odziv različno podprtih in obteženih stebrov in v katerem bi bili zajeti tako geometrijska kot materialna nelinearnost. Kot je bilo rečeno v točki 2.4.3, v takih primerih ne obstajajo zaključene rešitve, zato so potrebne poenostavljene metode ali numerični račun. Sam sem pri zasnovi programa okvirno sledil principu, ki je bil uporabljen pri računanju uklonskih krivulj, na podlagi katerih je določen koeficient k_c za redukcijo nosilnosti v primeru tlačnih napetosti v standardu EC-5. Pri tem gre za iterativni numerični račun, ki ga lahko povzamem v naslednjih alinejah [4]:

- predpostavimo neko začetno nepopolnost (odstopanje od ravnosti). Za členkasto podprt steber je primerno vzeti začetne pomike v obliki sinusne krivulje (glej točko 2.3.1), za druge primere podpiranja pa je potrebno vzeti tako obliko začetnih pomikov, ki sovpadajo s pričakovano uklonsko obliko elementa,
- pri neki začetni oceni osne obremenitve izračunamo razporeditev momentov v elementu,

- v vseh prerezih izračunamo togost (ta z naraščanjem osnih in upogibnih obremenitev pada)
- izračunamo pomike pri novih vrednostih togosti ter določimo novo razporeditev momentov, kar spet pomeni spremembo togosti ter momentov, ...
- če pomiki divergirajo, to pomeni, da je kritična obremenitev presežena, zato je potrebno vzeti nižjo vrednost osne obremenitve.
- če pomiki konvergirajo, je potrebno preveriti morebitno prekoračitev nosilnosti. Ta je prekoračena če:
 - je presežena tlačna trdnost f_c (ali mejna deformacija ϵ_c),
 - je presežena natezna trdnost f_t ,
- če je nosilnost presežena, je potrebno račun ponoviti pri nižji oceni osne obremenitve, sicer pa pri višji,
- račun ponavljamo dokler ni doseženo ravnovesje med osno obremenitvijo in nosilnostjo prečnih prerezov.

Za izvedbo zgoraj opisanega postopka program mora omogočati račun tako na nivoju elementa kot na nivoju prečnih prerezov. Bistvo programa tako predstavljata dve proceduri. Prva iz vhodnih podatkov izračuna odziv (pomike ter notranje statične količine) konstrukcije oz. elementa, pri čemer gre za numerično reševanje osnovne diferencialne enačbe stebrov-nosilcev (enačba (7)) z metodo končnih diferenc. Tako dobljeni rezultati pa predstavljajo vhodne podatke za drugo proceduro, ki na podlagi računanja ravnotežja v prerezih določi nove togosti podelementov, na podlagi katerih s prvo proceduro spet določi nove vrednosti pomikov, to pa se ponavlja dokler se pomiki med sosednjima korakoma ne razlikujejo za neko izbrano vrednost (odvisno od željene natančnosti).

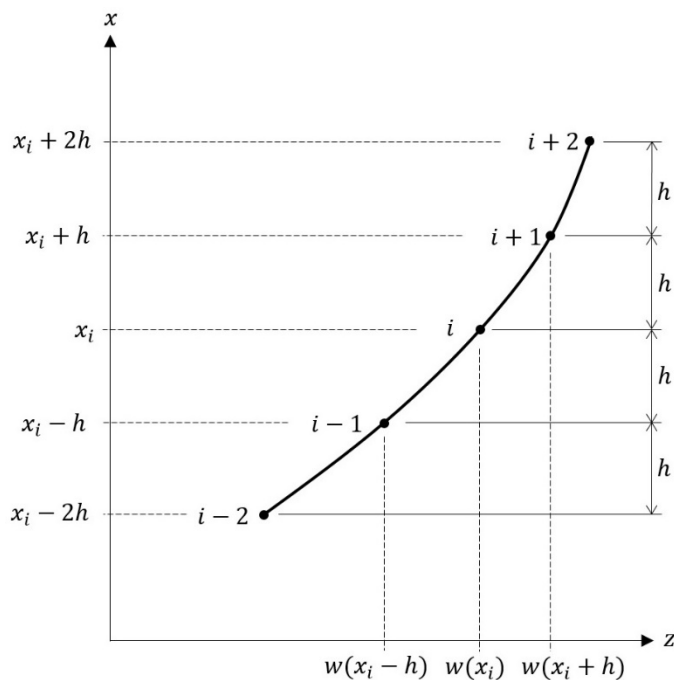
Ti dve proceduri tako predstavljata jedro računanja v programu, na katerem temeljijo ostale procedure, ki služijo pridobivanju različnih rezultatov.

3.2 Določitev linearno elastičnega odziva z metodo končnih diferenc

3.2.1 Splošno o metodi končnih diferenc

Metoda končnih diferenc omogoča numerično aproksimacijo rešitev diferencialnih enačb ([5], [9]). Bistvo metode je zamenjava odvodov iskane funkcije z algebrajskimi izrazi, ki v izbranih točkah računa aproksimirajo vrednost teh odvodov. V omenjenih izrazih nastopajo vrednosti iskane funkcije v obravnavani ter v sosednjih točkah. Tako diferencialno enačbo, katere reševanje predstavlja iskanje rešitve v obliki zvezne funkcije, nadomestimo s sistemom algebrajskih enačb, s katerimi iščemo rešitve v diskretnih točkah.

Na sliki 20 je prikazan graf funkcije $w(x)$, ki lahko npr. predstavlja funkcijo pomikov iz enačbe (7).



Slika 20: Aproximacija odvodov pri metodi končnih diferenc (prirejeno po [9]: str. 431)

Na krivulji si lahko zamislimo točke na enakomernih razmakih koordinate x , kakor je razvidno s slike. Odvod obravnavane funkcije v točki i lahko približno izrazimo kot [5]:

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=x_i} \cong \frac{w(x_i + h) - w(x_i - h)}{2h}. \quad (49)$$

Pri tem je poenostavljeno vzeto, kot da se vrednost $w(x)$ med točkama $(i - 1)$ in $(i + 1)$ spreminja linearno, kar privede do določene napaka, ki se manjša z gostitvijo točk, torej z manjšanjem razdalje h . Drugi odvod v točki i predstavlja hitrost spreminjanja naklona tangente na krivuljo v tej točki. Če prva odvoda vzamemo v točkah na krivulji s x -koordinatama $x = x_i + h/2$ in $x = x_i - h/2$ ter ju izrazimo v obliki diferenc, lahko drugi odvod v točki i približno zapišemo kot:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)_{x=x_i} &\cong \frac{\left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=x_i+\frac{h}{2}} - \left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=x_i-\frac{h}{2}}}{h} \\ &\cong \frac{\frac{w\left(x_i + \frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right) - w\left(x_i + \frac{h}{2} - \frac{h}{2}\right)}{h} - \frac{w\left(x_i - \frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right) - w\left(x_i - \frac{h}{2} - \frac{h}{2}\right)}{h}}{h} \\ &= \frac{w(x_i + h) - 2w(x_i) + w(x_i - h)}{h^2}. \end{aligned} \quad (50)$$

Na podoben način so izpeljani tudi izrazi za višje odvode, v katerih poleg točk, ki sta neposredno sosednji obravnavani točki i nastopajo tudi bolj oddaljene točke. Enačbi (51) in (52) določata še tretji in četrti odvod funkcije $w(x)$ v točki i [5].

$$\left(\frac{d^3 w}{dx^3}\right)_{x=x_i} \cong \frac{w(x_i + 2h) - 2w(x_i + h) + 2w(x_i - h) - w(x_i - 2h)}{2h^3}. \quad (51)$$

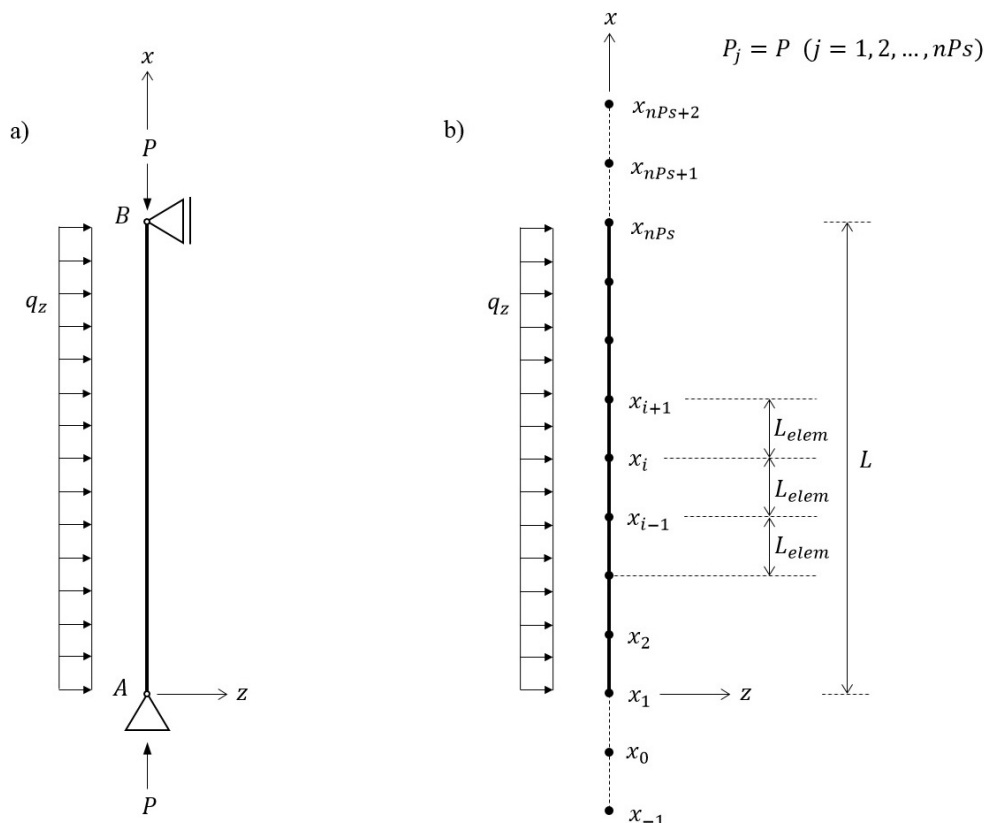
$$\left(\frac{d^4 w}{dx^4}\right)_{x=x_i} \cong \frac{w(x_i + 2h) - 4w(x_i + h) + 6w(x_i - h) - 4w(x_i - 2h) + w(x_i - 2h)}{h^4}. \quad (52)$$

Zgornji izrazi predstavljajo končne difference po centralni shemi, pri kateri so za aproksimacijo odvodov v točki i uporabljene vrednosti funkcije v točkah, ki se nahajajo na obeh straneh te točke. Možni so tudi izrazi po t.i. shemah naprej oz. nazaj, kjer upoštevamo samo točke z x -kordinatami višjimi oz. nižjimi od x_i , a je račun po teh shemah manj natančen. Prav tako je možna tudi izpeljava izrazov, s katerimi lahko upoštevamo neenakomerne razdalje med točkami, v katerih izvajamo račun (glej npr. [5]).

Sam sem pri izdelavi programa uporabljal samo zgornje izraze po centralni shemi ter predpostavil enakomerne razdalje med izbranimi točkami računa.

3.2.2 Račun pomikov

Z izrazi za odvode v obliki končnih diferenc lahko tako v vsaki točki zapišem diferencialno enačbo kot običajno algebrasko enačbo, pri čemer so neznanke vrednosti iskane funkcije v obravnavani točki ter v njej sosednjih točkah. Pri reševanju osnovne diferencialne enačbe stebrov-nosilcev (7) si zato na obravnavanem elementu zamislim izbrano število točk na enakomernih razmakih, v katerih bom izvajal račun.



Slika 21: Metoda končnih diferenc (a) primer stebra-nosilca (b) vozlišča za račun z metodo končnih diferenc

Imenujemo jih lahko vozliščne točke ali preprosto vozlišča, element pa delijo na določeno število namišljenih podelementov. Če v vseh teh točkah napišemo enačbo (7) v obliki končnih diferenc dobimo sistem enačb, ki je enostavno rešljiv, končni rezultat pa so pomiki vozliščnih točk.

Za ponazoritev postopka si oglejmo primer členkasto podprtega stebra-nosilca na sliki 21a, na katerega poleg osne sile P deluje še konstantna prečna porazdeljena obtežba $q_z(x) = q_z$. Element tako z izbranim številom vozliščnih točk najprej razdelim na podelemente, kot prikazuje slika 21b. Izbrano število točk označim z nPs , s čimer ponazorim tudi, da število teh točk pravzaprav predstavlja število prostostnih stopenj, ki jih ima tako prirejen model. Dolžina enega podelementa, ki jo označim z L_{elem} , je z izbranim številom vozlišč določena kot

$$L_{elem} = \frac{L}{(nPs - 1)}. \quad (53)$$

Število vozlišč je ugodno izbrati tako, da se ujemajo s položaji morebitnih točkovnih sil in momentov, saj je pri zapisu enačb v vozliščih upoštevano, da je vsa obtežba koncentrirana v vozlišču (kar bo konkretno prikazano v nadaljevanju). Ugodno je tudi, da imam vozlišče na mestu, kjer pričakujem največji pomik. V mnogo primerih npr. vnaprej vem, da se bo največji pomik pojavil na sredini razpona, zato je smiselno izbrati liho število vozlišč (oz. sodo število elementov) in s tem tam zagotoviti vozlišče, saj tako dobim najbolj natančno oceno maksimalnega pomika. Kot rečeno, ker z metodo računam samo v diskretnih točkah, lahko maksimalni pomik zgrešim, če na njegovem mestu ni uvedeno vozlišče (tudi ta napaka pa se z gostitvijo vozlišč manjša). Za kakršnekoli rezultate mora

biti število vozlišč sicer najmanj 3 (2 podelementa), pri tem pa je natančnost zelo groba (več o natančnosti metode je zapisano v točki 3.2.5).

Na sliki 21b so izbrane vozliščne točke označene z x_j , torej njihovimi koordinatami na osi x , pri čemer indeks j označuje zaporedno številko vozlišča v smeri naraščanja koordinate. Tako velja:

$$x_j = (j - 1)L_{elem}, \quad (j = 1, 2, \dots, nPs). \quad (54)$$

Zaradi preglednejšega zapisa tudi pomike $w(x)$ v točkah x_j zapišem kot

$$w(x_j) = w_j. \quad (55)$$

Poleg točk x_1 do x_{nPs} , ki ležijo na elementu, pa so na sliki 21b označene še štiri točke, po dve na vsakem koncu elementa. To so dodatne točke, ki ležijo že izven obravnavanega elementa, a jih potrebujem pri zapisu diferenčnih izrazov (49)-(52) v bližini robnih točk, katere sicer nimajo sosednjih točk, ki v teh izrazih nastopajo. Sicer pa pomiki izračunani v teh točkah nimajo fizikalnega pomena.

Če torej osnovno diferencialno enačbo stebra-nosilca (7)

$$EI_y \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 w}{dx^2} = q_z(x)$$

zapišem v točki x_i in pri tem upoštevam izraza (49) in (52), v katerih je $h = L_{elem}$, ter oznaki (54) in (55), dobim:

$$w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2} + \frac{P L_{elem}^2}{EI_y} (w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}) = \frac{q_z L_{elem}^4}{EI_y}. \quad (56)$$

Na tem mestu velja še enkrat omeniti, da v zgornji enačbi osna sila P v pozitivni vrednosti predstavlja tlačno silo. Enačbo (56) lahko zapišem v vsakem vozlišču na elementu, torej od x_1 do x_{nPs} . Tako dobim nPs enačb, v katerih pa je $(nPs + 4)$ neznank, saj v enačbah nastopajo tudi pomiki dodatnih točk x_{-1} in x_0 ter x_{nPs+1} in x_{nPs+2} (slika 21b). Sistem lahko rešim z upoštevanjem robnih pogojev, ki jih prav tako izrazim v obliki končnih diferenc in tako dobim potrebne 4 dodatne enačbe. Za primer elementa na sliki 21 tako lahko zapišem pogoje ničelnih pomikov in momentov v podporah:

Vozlišče x_1 (podpora A)

- 1) $w(x_1) = w_1 = 0$
- 2) $M(x_1) = -EI_y \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x_1} = 0 \rightarrow w_2 - 2w_1 + w_0 = 0.$

Vozlišče x_{nPs} (podpora B)

- 3) $w(x_{nPs}) = w_{nPs} = 0$
- 4) $M(x_{nPs}) = -EI_y \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x_{nPs}} = 0 \rightarrow w_{nPs+1} - 2w_{nPs} + w_{nPs-1} = 0.$

Skupaj s temi štirimi robnimi pogoji torej dobim sistem $(nP_s + 4)$ enačb za $(nP_s + 4)$ neznank, iz katerega lahko izračunam neznane pomike vozliščnih točk. Za obravnavan primer je sistem enačb v matrični obliki prikazan na sliki 22. Ob tem sem zaradi preglednosti uvedel novi oznaki:

$$\beta = P \frac{L_{elem}^2}{EI_y} \quad (57)$$

in

$$q^* = q_z \frac{L_{elem}^4}{EI_y}. \quad (58)$$

Kot je razvidno se v matriki koeficientov na levi strani matrične enačbe ponavlja enak vzorec v vseh vrsticah, ki pripadajo vozliščem od x_1 do x_{nP_s} . Izjema sta prvi ter zadnji dve vrstici, s katerimi so izraženi robni pogoji. S tem je konstrukcija matrike preprosta ne glede na število izbranih vozliščnih točk. Prav tako je enostavno upoštevanje drugačnih robnih pogojev, saj je v tem primeru treba nadomestiti samo zgoraj omenjene vrstice.

Če matriko koeficientov označim s $[\mathbf{K}]$, vektor vozliščnih pomikov z $\{w\}$ ter vektor desnih strani s $\{q^*\}$, lahko sistem enačb metode končnih diferenc zapišem kot:

$$[\mathbf{K}]\{w\} = \{q^*\}, \quad (59)$$

od koder sledi rešitev:

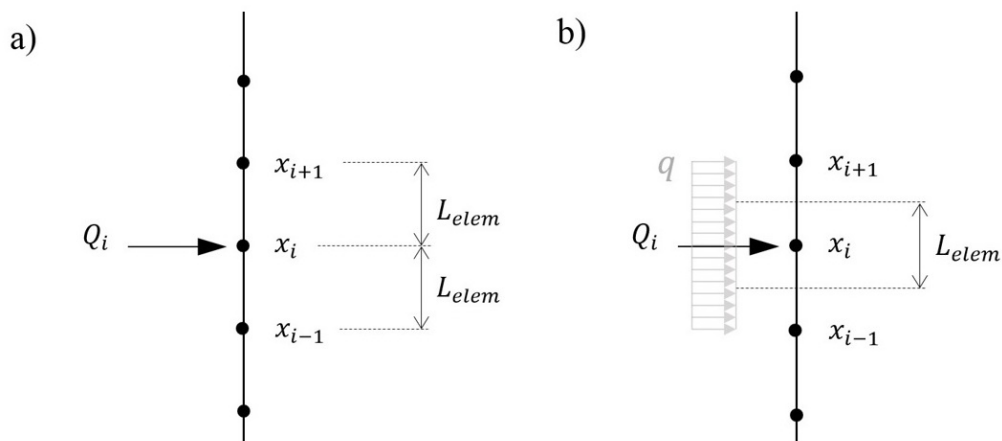
$$\{w\} = [\mathbf{K}]^{-1}\{q^*\}. \quad (60)$$

Reševanje se torej reducira na račun inverzne matrike koeficientov $[\mathbf{K}]^{-1}$. V programu se to izvrši s funkcijo *MINVERSE*, ki je že vključena v program Excel ter je tako kot večina funkcij na voljo tudi v okolju VBA.

S tem dobim rešitve za neznane pomike, od koder lahko določim tudi notranje sile, kot bo prikazano v točki 3.2.3.

V zgornjem primeru je po celem elementu učinkovala porazdeljena obtežba q_z . V program sem vdelal tudi možnost podajanja točkovnih sil oz. momentov, ekscentričnosti osne sile ter začetnih nepopolnosti. Postopek upoštevanja je v vseh primerih relativno enostaven, kot bo razloženo v naslednjih razdelkih.

3.2.2.1 Upoštevanje točkovnih sil



Slika 23: Delovanje točkovne sile v vozlišču

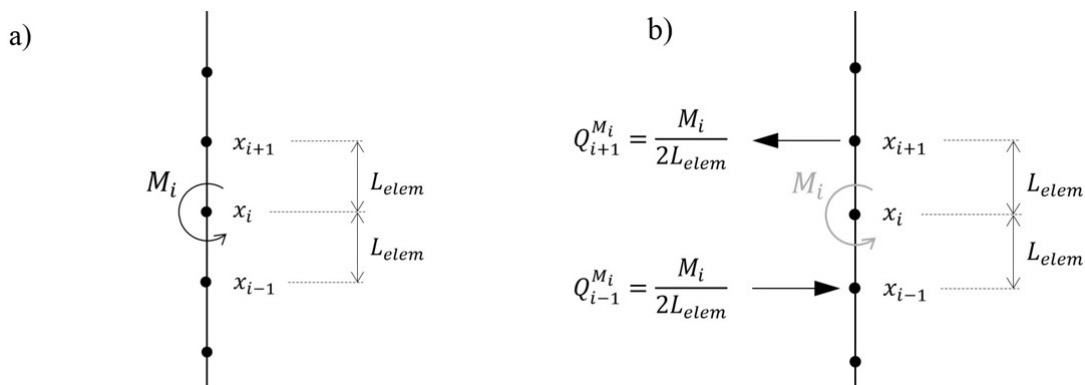
V programu je predpostavljeno učinkovanje točkovnih sil v vozliščih, zato njihove vrednosti prirejam neposredno ustreznim vozliščem z vpisom na ustrezno mesto v preglednici za njihovo podajanje. Učinek teh sil je potem upoštevan enostavno z drugim računom desnih strani q^* v enačbah za tako obtežena vozlišča. Koncentrirano silo Q_i v vozlišču x_i (slika 23a) si lahko predstavljamo tudi kot koncentracijo porazdeljene obtežbe q , ki deluje med vozliščema x_{i-1} in x_{i+1} , pri čemer velja $Q_i = qL_{elem}$ (slika 23b). V oznaki (58) lahko namesto q_z tako zapišem $q = \frac{Q_i}{L_{elem}}$ in dobim vrednost na desni strani enačbe (56), ki velja v primeru koncentrirane sile na mestu x_i :

$$q^* = Q_i \frac{L_{elem}^3}{EI_y}. \quad (61)$$

Če točkovna sila in porazdeljena obtežba v nekem vozlišču delujeta hkrati, člena desnih strani za oba primera preprosto seštejem.

3.2.2.2 Upoštevanje koncentriranih momentov

Vpliv točkovnega momenta v točki x_i je mogoče nadomestiti z ekvivalentno dvojico sil, kot prikazuje slika 24.



Slika 24: Vpliv točkovnega momenta (a) moment (b) nadomestna dvojica sil

Podajanje točkovnih momentov v programu poteka enako kot v primeru točkovnih sil, torej v pripravljeno preglednico za vnos točkovne obtežbe na ustrezno mesto vpišem vrednost momenta, pri čemer so pozitivne smeri take kot na sliki 3. Program potem pretvori te momente v pare sil skladno z zgornjo sliko.

Na tak način lahko nadomestim točkovne momente v vseh točkah, razen v obeh skrajnih točkah elementa x_1 ter x_{nP_S} . Morebitno točkovno momentno obtežbo v teh dveh točkah lahko upoštevam direktno v robnih pogojih. Če npr. v podporah elementa na sliki 21a delujeta točkovna momenta M_A in M_B so robni pogoji:

Vozlišče x_1 (podpora A)

1) $w(x_1) = w_1 = 0$
 2) $M(x_1) = -EI_y \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)_{x_1} = M_A \rightarrow \frac{EI_y}{L_{elem}^2} (2w_1 - w_2 - w_0) = M_A$.

Vozlišče x_{nP_S} (podpora B)

3) $w(x_{nP_S}) = w_{nP_S} = 0$
 4) $M(x_{nP_S}) = -EI_y \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)_{x_{nP_S}} = M_B \rightarrow \frac{EI_y}{L_{elem}^2} (2w_{nP_S} - w_{nP_S+1} - w_{nP_S-1}) = M_B$.

Tako se druga vrstica sistema enačb s slike 22 spremeni, kot je prikazano spodaj:

	-1	0	1	2	...	$nP_S + 2$
-1			1		...	
0		-1	2	-1	...	
1					...	
2					...	
⋮					...	

 \times

w_{-1}
w_0
w_1
w_2
⋮

 $=$

0
$L_{elem}^2 M_A / (EI_y)$
q_1^*
q_2^*
⋮

Predzadnja vrstica pa podobno:

⋮		...				
$nP_S - 1$						
nP_S		...				
$nP_S + 1$...	-1	2	-1	
$nP_S + 2$...		1		
	-1	...	$nP_S - 1$	nP_S	$nP_S + 1$	$nP_S + 2$

 \times

⋮
w_{nP_S-1}
w_{nP_S}
w_{nP_S+1}
w_{nP_S+2}

 $=$

⋮
$q_{nP_S-1}^*$
$q_{nP_S}^*$
$L_{elem}^2 M_B / (EI_y)$
0

Zgoraj so prikazana samo relevantna polja v matriki oz. vektorjih, s pikami pa je ponazorjen izpuščen del. Spremenjena polja so obarvana, vsa ostala polja pa so sicer enaka kot na sliki 22.

V programu se tako samodejno izvršijo navedene spremembe v sistemu enačb, če točkovni moment podam v členkasti podpori. Na tak način pa je mogoče upoštevati tudi ekscentričnost osne sile, saj je ta vpliv ekvivalenten točkovnemu momentu v krajišču (točka 2.3.2). Ta vpliv lahko podam ločeno od točkovnega momenta in sicer v obliki ekscentričnosti, katere vrednost vnesem v ustrezno polje. Momenta M_A in M_B sta potem določena kot

$$M_A = Pe_A$$

in

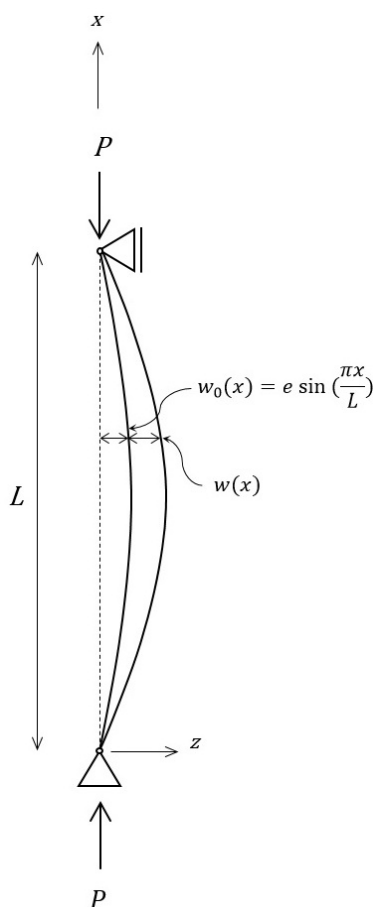
$$M_B = Pe_B,$$

kjer sta e_A in e_B podani ekscentričnosti osne sile P .

3.2.2.3 Upoštevanje začetnih nepopolnosti

Na sliki je steber z začetno neravno obliko, ki jo opisuje sinusna funkcija, enako kot v primeru iz točke 2.3.1. S slike 25 je razvidno, da osna sila P v vsaki točki elementa povzroča upogibni moment:

$$M(x) = P[w_0(x) + w(x)], \tag{62}$$



Slika 25: Pomiki vrtljivo podrtga stebra z začetnimi nepopolnostmi (prirejeno po [5]: str. 29)

kjer pomiki $w(x)$ predstavljajo prirastek začetnih pomikov zaradi učinkovanja osne sile. Moment $M(x)$ je s tem funkcija tako začetnih pomikov kot njihovih prirastkov. Zvezo med prirastki pomikov $w(x)$ in momentom dobim, če (62) vstavim v (5):

$$-EI_y \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = P[w_0(x) + w(x)]. \quad (63)$$

Če zgornjo enačbo dvakrat odvajamo po x , dobimo:

$$EI_y \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + P \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = -P \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2}. \quad (64)$$

S primerjavo zgornje enačbe z osnovno diferencialno enačbo stebrov-nosilcev (7) vidimo, da je primer nepopolnega stebra pravzaprav ekvivalenten primeru ravnega stebra, ki je obtežen s prečno obtežbo določeno z izrazom na desni strani zgornje enačbe. Pri nepopolnem elementu se moramo zavedati le, da pomiki $w(x)$ predstavljajo prirastke in jim moramo prišteti še začetne pomike.

Nepopolnosti v programu tako upoštevam pri računu desnih strani sistema enačb (59). Pri tem funkcijo $w_0(x)$, ki opisuje začetne pomike, pretvorim v diskretno obliko, kot je na primeru sinusne funkcije prikazano spodaj:

$$w_0(x) = e \sin \frac{\pi x}{L} \rightarrow w_0(x_j) = e \sin \frac{\pi x_j}{L},$$

$$\frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{L^2} e \sin \frac{\pi x}{L} \rightarrow \frac{d^2 w_0(x_j)}{dx_j^2} = -\frac{\pi^2}{L^2} e \sin \frac{\pi x_j}{L} \quad j = (1, 2, \dots, nPs), \quad (65)$$

kjer x_j določa enačba (54).

Desne strani v sistemu enačb (59) lahko za primer začetnih nepopolnosti sinusne oblike tako izrazim kot:

$$q_j^* = -P \frac{L_{elem}^4}{EI_y} \frac{d^2 w_0(x_j)}{dx_j^2} = P \frac{L_{elem}^4}{EI_y} \frac{\pi^2}{L^2} e \sin \frac{\pi x_j}{L}. \quad (66)$$

S tako sestavljenim sistemom enačb izračunam torej prirastke pomikov w . Če vse vozliščne pomike zapišem v obliki vektorjev z nPs elementi, potem skupne pomike $\{w_{tot}\}$ lahko zapišem kot vsoto prirastkov $\{w\}$ in začetnih pomikov $\{w_0\}$:

$$\{w_{tot}\} = \{w_0\} + \{w\}. \quad (67)$$

Na podoben način lahko upoštevam tudi nepopolnosti, opisane z drugimi oblikami. V primeru konzolnega stebra program določi začetno funkcijo oblike $w_0(x_j)$, ki se sklada s prvo uklonsko obliko za konzolo (glej npr. [1]):

$$w_0(x) = e \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2L}\right) \rightarrow w_0(x_j) = e \left(1 - \cos \frac{\pi x_j}{2L}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow q_j^* = P \frac{L_{elem}^4}{EI_y} \frac{\pi^2}{4L^2} e \cos \frac{\pi x_j}{2L}. \quad (68)$$

Podajanje nepopolnosti poteka enostavno kot vnos izbrane vrednosti e , torej največjega začetnega pomika, v ustrezno polje. Ko program prebere podatke glede na način podpiranja določi funkcijo začetnih pomikov, ter z uporabo vrednosti e v zgoraj opisanih enačbah sestavi vektor začetnih pomikov $\{w_0\}$ ter desnih strani $\{q_j^*\}$.

Sama oblika nepopolnosti pa sicer ni bistvena, pomembno je le, da predpostavljeni začetni pomiki pri računu kritične obremenitve privedejo do prve uklonske oblike.

3.2.2.4 Upoštevanje drugačnih primerov podpiranja

Kot je bilo razloženo so robni pogoji v matrični enačbi na sliki 22 upoštevani v prvih dveh in predzadnji ter zadnji vrstici matrike na levi strani ter vektorja na desni enačbe. Drugačne robne pogoje torej upoštevam s spremembo teh vrstic.

Fiksna podpora

Fiksna podpora preprečuje pomik in zasuk. V primeru take podpore v prvem vozlišču ($x = x_1 = 0$) velja

- 1) $w_1 = 0$
- 2) $\varphi_{y,1} = \left(-\frac{dw}{dx}\right)_{x_1} = 0 \rightarrow w_2 = w_0$

kjer je upoštevana zveza $\varphi_y = -\frac{dw}{dx}$. Prvi dve vrstici v sistemu enačb s tem zapišem kot:

	-1	0	1	2	...	$nPs + 2$			
-1			1		...		w_{-1}		0
0		-1	0	1	...		w_0		0
1					...		w_1		q_1^*
2					...		w_2		q_2^*
⋮					...		⋮		⋮

Če je fiksna podpora v končnem vozlišču ($x = x_{nPs} = L$) pa velja

- 1) $w_{nPs} = 0$

$$2) \varphi_{y,nPs} = \left(-\frac{dw}{dx}\right)_{x_{nPs}} = 0 \rightarrow w_{nPs+1} = w_{nPs-1}$$

v skladu s tem pa se zadnji dve vrstici v sistemu enačb spremenita kot je prikazano spodaj:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ nPs-1 \\ nPs \\ nPs+1 \\ nPs+2 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & \dots & & & & \\ \hline & \dots & & & & \\ \hline & \dots & & & & \\ \hline & \dots & -1 & 0 & 1 & \\ \hline & \dots & & 1 & & \\ \hline -1 & \dots & nPs-1 & nPs & nPs+1 & nPs+2 \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline \vdots \\ \hline w_{nPs-1} \\ \hline w_{nPs} \\ \hline w_{nPs+1} \\ \hline w_{nPs+2} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \vdots \\ \hline q_{nPs-1}^* \\ \hline q_{nPs}^* \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

Prosti konec

Če je robno vozlišče nepodprto, kot npr. v primeru konzolnega stebra, sta tam moment in prečna sila enaka nič. Pogoj ničelnega momenta je tako enak kot v primeru členkaste podpore, prečno silo V pa lahko s pomiki izrazim z enačbama (3) in (5), ki jih z upoštevanjem izrazov iz točke 3.2.1 pretvorim v diferencialno obliko.

Če je prosto prvo vozlišče ($x = x_1 = 0$) dobim

$$\begin{aligned} 1) V(x_1) &= -EI_y \left(\frac{d^3w}{dx^3}\right)_{x_1} - P \left(\frac{dw}{dx}\right)_{x_1} = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow w_3 - w_2 \left(2 - \frac{P L_{elem}^2}{EI_y}\right) + w_0 \left(2 - \frac{P L_{elem}^2}{EI_y}\right) - w_{-1} = 0 \end{aligned}$$

$$2) M(x_1) = -EI_y \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)_{x_1} = 0 \rightarrow w_2 - 2w_1 + w_0 = 0$$

V skladu s tem se vrstici v sistemu enačb, ki ustrezata zgornjima robnima pogojema, zapišeta kot

$$\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline -1 & 2 - \beta & 0 & \beta - 2 & 1 & \dots & \\ \hline & 1 & -2 & 1 & & \dots & \\ \hline & & & & & \dots & \\ \hline & & & & & \dots & \\ \hline & & & & & \dots & \\ \hline & & & & & \dots & \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline w_{-1} \\ \hline w_0 \\ \hline w_1 \\ \hline w_2 \\ \hline w_3 \\ \hline \vdots \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline q_1^* \\ \hline q_2^* \\ \hline q_3^* \\ \hline \vdots \end{array}$$

V primeru prostega zadnjega vozlišča ($x = x_{nPs} = L$) pa sledi

$$\begin{aligned} 1) V(x_{nPs}) &= -EI_y \left(\frac{d^3w}{dx^3}\right)_{x_{nPs}} - P \left(\frac{dw}{dx}\right)_{x_{nPs}} = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow w_{nPs+2} - w_{nPs+1} \left(2 - \frac{P L_{elem}^2}{EI_y}\right) + w_{nPs-1} \left(2 - \frac{P L_{elem}^2}{EI_y}\right) - w_{-nPs-2} = 0 \end{aligned}$$

$$2) M(x_{nPs}) = -EI_y \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)_{x_1} = 0 \rightarrow w_2 - 2w_1 + w_0 = 0.$$

v skladu s tem pa zadnji dve vrstici v sistemu enačb določim kot je prikazano spodaj:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ nPs-2 \\ nPs-1 \\ nPs \\ nPs+1 \\ nPs+2 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & \dots & & & & & \\ \hline & & \dots & & & & & \\ \hline & & \dots & & & & & \\ \hline & & \dots & & -1 & -2 & 1 & \\ \hline & & \dots & -1 & 2-\beta & 0 & \beta-2 & 1 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline \vdots \\ \hline W_{nPs-2} \\ \hline W_{nPs-1} \\ \hline W_{nPs} \\ \hline W_{nPs+1} \\ \hline W_{nPs+2} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \vdots \\ \hline Q_{nPs-2}^* \\ \hline Q_{nPs-1}^* \\ \hline Q_{nPs}^* \\ \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

V primeru, da v vozlišču na prostem koncu elementa deluje zunanja točkovna sila Q_1 oz. Q_{nPs} , pa ta vrednost nadomesti vrednost 0 na desni strani zgornjih robnih pogojev za prečno silo, v skladu s tem pa tudi vrednosti na pripadajočih mestih na desni strani sistema enačb.

Zasučna vzmet

Na tak način kot v zgornjih točkah lahko upoštevam tudi podporo z elastično zasučno vzmetjo (element s takšnimi podporami je na sliki 6d). Vzmet se upira zasuku s togostjo k_φ , pri čemer velja

$$M_v = k_\varphi \varphi. \tag{69}$$

V vzmeti se pod vplivom zunanje obtežbe pojavi moment, ki ga označim z M_v , določa pa ga zgornja enačba. Zapis robnih pogojev je tako enak kot v primeru obtežbe s točkovnim momentom v podpori (točka 3.2.2.2), le da namesto zunanjih momentov M_A oz. M_B v pogojih zapišem moment v vzmeti M_v . Kot v prejšnjih primerih, spodaj podajam zapis robnih pogojev ter pripadajoče spremembe v sistemu enačb (slika 22) za primer podpor z vzmetmi v obeh končnih vozliščih elementa.

Vzmet pri $x = x_1 = 0$:

1) $w_1 = 0$

$$\begin{aligned} 2) M(x_1) = -EI_y \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x_1} &= k_\varphi \varphi = -k_\varphi \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x_1} \rightarrow \\ &\rightarrow w_2 \left(-k_\varphi - \frac{2 EI_y}{L_{elem}} \right) + \frac{4 EI_y}{L_{elem}} w_1 + w_0 \left(k_\varphi - \frac{2 EI_y}{L_{elem}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Tako prvi dve vrstici sistema enačb postaneta

$$\begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & & 1 & & \dots & \\ \hline & k_\varphi - \frac{2 EI_y}{L_{elem}} & \frac{4 EI_y}{L_{elem}} & -k_\varphi - \frac{2 EI_y}{L_{elem}} & \dots & \\ \hline & & & & \dots & \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline w_{-1} \\ \hline w_0 \\ \hline w_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline q_1^* \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \begin{vmatrix} | & | \\ | & | \\ | & | \end{vmatrix} \times \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} = \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix}$$

Vzmet pri $x = x_{nP_s} = L$:

1) $w_{nP_s} = 0$

2) $M(x_{nP_s}) = -EI_y \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x_{nP_s}} = k_\varphi \varphi = -k_\varphi \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x_{nP_s}} \rightarrow$
 $\rightarrow w_{nP_s+1} \left(-k_\varphi - \frac{2 EI_y}{L_{elem}} \right) + \frac{4 EI_y}{L_{elem}} w_{nP_s} + w_{nP_s-1} \left(k_\varphi - \frac{2 EI_y}{L_{elem}} \right) = 0.$

\vdots	\dots					\times	\vdots	$=$	\vdots
$nP_s - 1$	\dots						w_{nP_s-1}	$=$	$q_{nP_s-1}^*$
nP_s	\dots						w_{nP_s}	$=$	$q_{nP_s}^*$
$nP_s + 1$	\dots	$k_\varphi - \frac{2 EI_y}{L_{elem}}$	$\frac{4 EI_y}{L_{elem}}$	$-k_\varphi - \frac{2 EI_y}{L_{elem}}$			w_{nP_s+1}	$=$	0
$nP_s + 2$	\dots						w_{nP_s+2}	$=$	0
	$-1 \quad \dots$	$nP_s - 1$	nP_s	$nP_s + 1$	$nP_s + 2$				

Pri izbiri podpore z vzmetjo v programu je potrebno podati še togost oz. koeficient vzmeti k_φ z vpisom vrednosti v ustrezno polje in sicer v enotah $[kNm/rad]$.

Preprečen vmesni pomik

V račun je enostavno vpeljati tudi preprečen pomik v vmesnem vozlišču med koncema elementa, kar ustreza podpori v tem vozlišču. V sistemu enačb je potrebno le v vrstici, ki pripada vozlišču s preprečenim prečnim pomikom, izraziti pogoj ničelnega pomika:

\vdots	-1	\dots	$i - 1$	i	$i + 1$	\dots	$nP_s + 2$	\times	\vdots	$=$	\vdots
$i - 1$	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots		w_{i-1}	$=$	q_{i-1}^*
i	\dots	\dots	\dots	1	\dots	\dots	\dots		w_i	$=$	0
$i + 1$	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots		w_{i+1}	$=$	q_{i+1}^*
\vdots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots		\vdots	$=$	\vdots

S tem je mogoče računati tudi vmesno podprte elemente, npr. kontinuirne nosilce ali nosilce s previsom. V program sem sicer vdelal možnost izbire le enega takega vozlišča, saj primerov z vmesnimi preprečenimi pomiki nisem podrobno obravnaval.

3.2.2.5 Prostorski primeri

V vseh prejšnjih točkah sem elemente obravnaval v ravnini $x - z$, povsem analogno pa do vseh enačb lahko pridem tudi v ravnini $x - y$, pri čemer upoštevam desnosučni koordinatni sistem s slike 2. Osnovna diferencialna enačba zapisana v tej ravnini je tako

$$EI_z \frac{d^4 v}{dx^4} + P \frac{d^2 v}{dx^2} = q_y(x). \tag{70}$$

kjer v predstavlja prečni pomik v smeri osi y , q_y prečna obtežba v tej smeri, I_z pa vztrajnostni moment glede na os z (pri čemer ta os predstavlja glavno vztrajnostno os prereza). Kot je razvidno, lahko odziv v obeh ravninah obravnavam ločeno, saj v enačbah (7) in (70) pomika $w(x)$ in $v(x)$ nista odvisna od vplivov, ki učinkujejo v drugi koordinatni ravnini. Osna sila P , ki se pojavlja v obeh enačbah, pa je konstantna po celem elementu in deluje v osi x , torej je identična z obe ravnini upogiba.

Program zato primere, pri katerih je obtežba oz. nepopolnost elementa podana v obeh ravninah, razdeli na dva ravninska primera in za vsakega sestavi ter reši ločen sistem enačb (59). S tem dobim odziva v obeh pravokotnih koordinatnih ravninah, katerih vsota predstavlja prostorski odziv. Pri tem pa moram še enkrat poudariti, da pri takem računu niso zajeti drugi prostorski pojavi kot npr. torzijski uklon in bočna zvrnitev. Kljub temu pa to pri stebrih ne predstavlja velike omejitve, saj omenjeni obliki nestabilnosti zaradi geometrije elementov redkokdaj prideta v poštev. Tudi standard EC-5 navaja ločeni kontroli stabilnosti za stebre in nosilce, pri čemer je kontrola bočne stabilnosti predvidena le za nosilce.

3.2.3 Račun momentov in prečnih sil

Ko po postopku opisanem v točki 3.2.2 pridem do vozliščnih pomikov, lahko določim notranje sile z enačbama (3) in (5), ki ju zapišem v diferencialni obliki. Tako dobim spodnja izraza za določitev momentov in prečnih sil v vozliščih:

$$M_{y,j} = -EI_y \frac{w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}}{L_{elem}^2}$$

$$V_{z,j} = -EI_y \frac{w_{j+2} - 2w_{j+1} + 2w_{j-1} - w_{j-2}}{2L_{elem}^3} + P \frac{w_{j+1} - w_{j-1}}{2L_{elem}}.$$

($j = 1, \dots, nPs$) (71)

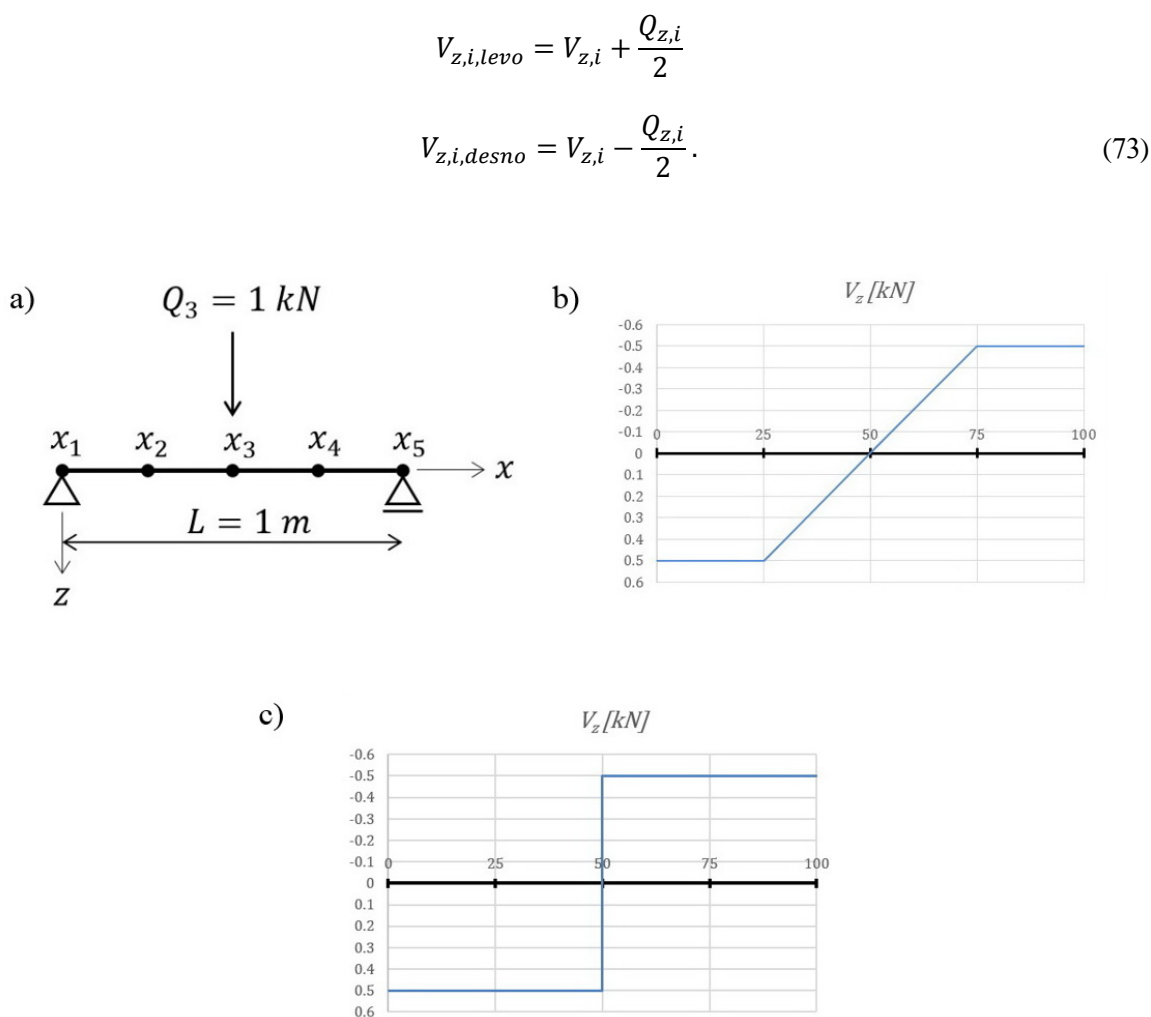
Enačbi ponovno veljata v $x - z$ ravnini, analogno pa za ravnino $x - y$ dobim:

$$M_{z,j} = EI_z \frac{v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}}{L_{elem}^2}$$

$$V_{y,j} = -EI_z \frac{v_{j+2} - 2v_{j+1} + 2v_{j-1} - v_{j-2}}{2L_{elem}^3} + P \frac{v_{j+1} - v_{j-1}}{2L_{elem}}.$$

($j = 1, \dots, nPs$) (72)

V primeru obtežbe s točkovnimi silami oz. momenti pa je potrebno zgornje vrednosti korigirati. V izhodiščni enačbi (7), ki velja po celem elementu, namreč nastopajo zvezne funkcije, točkovne sile pa niso zajete. Te so z obravnavano metodo upošteevane kot rezultanta namišljene porazdeljene obtežbe v obravnavani točki (glej 3.2.2.1), zato na njihovih mestih ne dobimo pravih vrednosti prečnih sil (slika 26). Kot vemo iz statike se na mestih, kjer delujejo točkovne sile, pojavi skok v vrednosti notranje prečne sile oz. ima tam prečna sila levo in desno vrednost. Te vrednosti pri obravnavani metodi dobim tako, da prečni sili, dobljeni z enačbo (71) oz. (72), prištejem oz. odštejem polovično vrednost točkovne sile, ki deluje v tem vozlišču. Če v vozlišču x_i (ki ni krajno vozlišče) deluje točkovna sila $Q_{z,i}$, potem ima prečna sila v tem vozlišču vrednosti:



Slika 26: Korekcija notranje prečne sile v primeru točkovne obtežbe (a) primer elementa s koncentrirano silo (b) izračunan osnovni potek prečne sile (c) potek prečne sile po korekciji

Te korekcije ne izvajam pri točkovnih silah oz. dvojicah, s katerimi so nadomeščeni koncentrirani momenti (opisani v točki 3.2.2.2), je pa potrebno v primeru točkovnih momentov po enakem principu kot notranjo prečno silo korigirati vrednosti notranjega upogibnega momenta.

3.2.4 Prikaz rezultatov

Po vnosu podatkov o geometriji in obtežbi ter izbiri materiala in podpor program torej sestavi ter reši sistem enačb (59) ter določi notranje sile, kot je opisano v točki 3.2.3. Rezultati se izpišejo na za to namenjen delovni list (»Worksheet«) programa Excel (primer na sliki 27), vse relevantne vrednosti pa so sicer shranjene v deklariranih spremenljivkah programa, tako da procedure v nadaljnjem računu lahko do njih direktno dostopajo (in ni potrebno branje vrednosti iz celic na delovnem listu).

Za primerjavo sem s programom izračunal elastičen odziv, ki je bil v točki 2.3.4 za primer členkasto podprtega elementa z različnimi začetnimi nepopolnostmi določen analitično. Na sliki 28 so prikazane iste krivulje kot na sliki 13, točke pa predstavljajo vrednosti, izračunane s programom. Pri tem sem element razdelil na 10 podelementov, rezultati pa se, kot je razvidno, dobro ujemajo. Še natančnejše rezultate bi lahko dobil z večjim številom podelementov (oz. bolj gosto mrežo vozliščnih točk), izkaže pa se, da je mogoče natančnost zelo izboljšati tudi na drug način (točka 3.2.5).

3.2.5 Natančnost metode

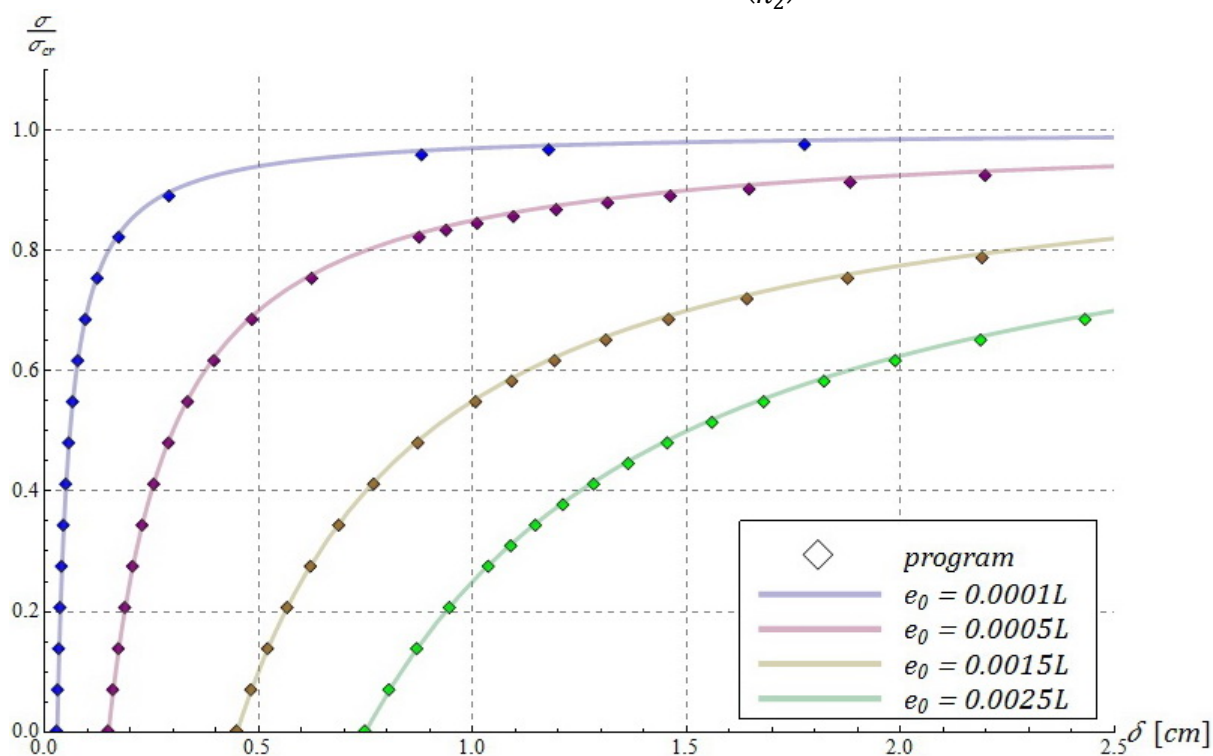
Napaka metode končnih diferenc je v grobem sorazmerna kvadratu dolžine enega podelementa [5], torej:

$$\text{napaka} \sim c L_{elem}^2, \quad (74)$$

kjer je c neka konstanta. Za primera delitve elementa na n_1 in n_2 podelementov z dolžinami L/n_1 in L/n_2 lahko napako izrazimo kot:

$$\text{napaka}(n_1) = \beta - \beta_1 = c(L/n_1)^2$$

$$\text{napaka}(n_2) = \beta - \beta_2 = c\left(\frac{L}{n_2}\right)^2.$$



Slika 28: Primerjava izračunanih pomikov na sredini razpona za enostavno (vrtljivo) podprt steber s točnimi vrednostmi za element z različnimi začetnimi nepopolnostmi sinusne oblike

kjer β_1 in β_2 predstavljata približka točne rešitve β . Iz zgornjih enačb lahko točno vrednost β izrazimo z njenima približkoma:

$$\beta = \frac{(n_2^2 \beta_2 - n_1^2 \beta_1)}{n_2^2 - n_1^2}. \quad (75)$$

Prikazan postopek je znan kot Richardsonova ekstrapolacija, z njim pa dobimo ekstrapolirano vrednost točne rešitve, pod pogojem da se ji približka β_1 in β_2 monotono približujeta (kar lahko dosežemo s primerno izbiro delitev n_1 in n_2). Gre za zelo učinkovit postopek, s katerim na enostaven

način že pri majhnem številu podelementov lahko pridemo do zelo dobrih približkov točnih vrednosti. Postopek lahko uporabimo pri vseh količinah, izračunanih z metodo končnih diferenc, pri tem pa je treba upoštevati le, da ekstrapoliramo iste količine. Za pomik na sredini razpona moramo npr. izbrati taki delitvi n_1 in n_2 , ki imata obe vozlišče na tem mestu, pomika izračunana pri teh delitvah pa predstavljata vrednosti β_1 in β_2 v enačbi (75). Če želimo ekstrapolirati vrednostih v vseh vozliščih na elementu je tako najpreprosteje izbrati $n_2 = 2 n_1$, saj s tem zagotovimo, da se mreži v vseh vozliščih prve delitve prekrivata. V nadaljevanju pa bo prikazana uporaba metode za določitev kritične obremenitve, kjer pa prekrivanje vozlišč ni nujno potrebno, saj kritična obremenitev ni vezana na določeno vozlišče. Tako lahko uklonsko uporabimo opisan postopek že pri takih delitvah n_1 in n_2 , pri katerih je npr. $n_2 = n_1 + 1$.

Možnost računa z uporabo opisane ekstrapolacije sem za račun linearno elastičnega odziva vdelal tudi v program, posebej pa pride v poštev pri majhnem številu podelementov in tudi pri statično nedoločenih primerih, pri katerih je natančnost metode končnih diferenc manjša. Pri tem program za račun približkov β_2 podvoji število prvotnih vozlišč, nato pa jim priredi vrednosti po enačbi (75).

3.2.6 Določitev elastične kritične obremenitve

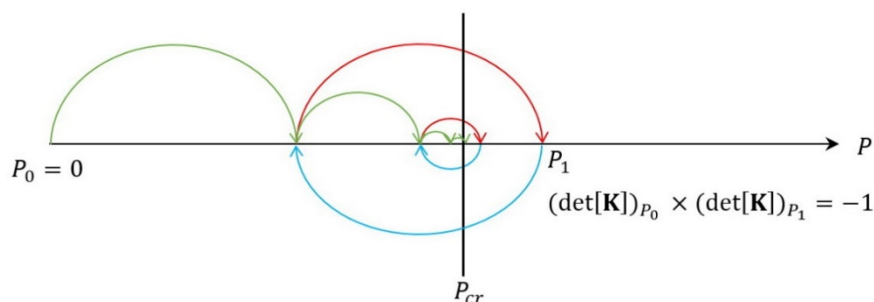
Kot je bilo pojasnjeno v točki 2.2 je kritična obremenitev lastnost idealno ravnih in prečno neobteženih elementov, ki jo dobimo kot rešitev homogene diferencialne enačbe (7) oz. pripadajočega problema lastnih vrednosti. Če omenjeno diferencialno enačbo z metodo končnih diferenc pretvorimo v sistem algebrajskih enačb in ga kot v enačbi (59) zapišemo v matrični obliki, dobimo:

$$[\mathbf{K}]\{w\} = \{0\}. \quad (76)$$

Zgornja enačba ima netrivialne rešitve samo v primeru, če je matrika $[\mathbf{K}]$ singularna oz. je njena determinanta enaka nič, take rešitve pa pripadajo kritičnim obremenitvam.

Zgornjo ugotovitev sem uporabil pri snovanju procedure v programu, ki za katerikoli izbran primer podpiranja določi elastično kritično obremenitev. Račun poteka po preprostem principu preizkušanja, pri katerem se osna sila v korakih povečuje, pri vsaki stopnji pa se izračuna vrednost determinante matrike $[\mathbf{K}]$. Pri povečevanju osne obtežbe absolutna vrednost determinante pada in se v bližini kritične sile približuje vrednosti 0. Pri takem postopnem povečevanju osne obremenitve pa je praktično nemogoče, da bi zadeli ravno točno vrednost kritične obremenitve, pri kateri bi bila determinanta točno nič. V nekem koraku je kritična obremenitev presežena, takrat pa determinanta $[\mathbf{K}]$ zamenja predznak glede na začetno vrednost. Procedura je zasnovana tako, da se v tem primeru osna sila vrne na vrednost iz prejšnjega koraka, nadaljnje povečevanje pa poteka s polovico manjšimi koraki. Tak račun se ponavlja, dokler velikost prirastka ni manjša od neke izbrane vrednosti, s čimer se s poljubno natančnostjo približamo kritični obremenitvi. Vrednosti osne obremenitve, pri katerih je prišlo do prekoračenja (torej pri katerih determinanta matrike $[\mathbf{K}]$ zamenja predznak), se tekom računa shranjujejo, da ne pride do ponavljajočih kontrol pri isti vrednosti (na začetku vsakega koraka se preveri, da osna sila ne presega že najdenih mejnih vrednosti, v nasprotnem primeru pa se korak že takoj zmanjša za polovico). Opisan princip je ponazorjen na sliki 29. Pri takem postopku je pomembna dobra izbira prirastka osne obremenitve v vsakem koraku, saj lahko premajhna izbira koraka pomeni daljši čas računa, saj mora preteči precej korakov, preden je prvič presežena kritična vrednost. Na

drugi strani pa lahko s prevelikim prirastkom pridemo že v območje višjih uklonskih oblik (ko npr. determinanta že drugič zamenja predznak).

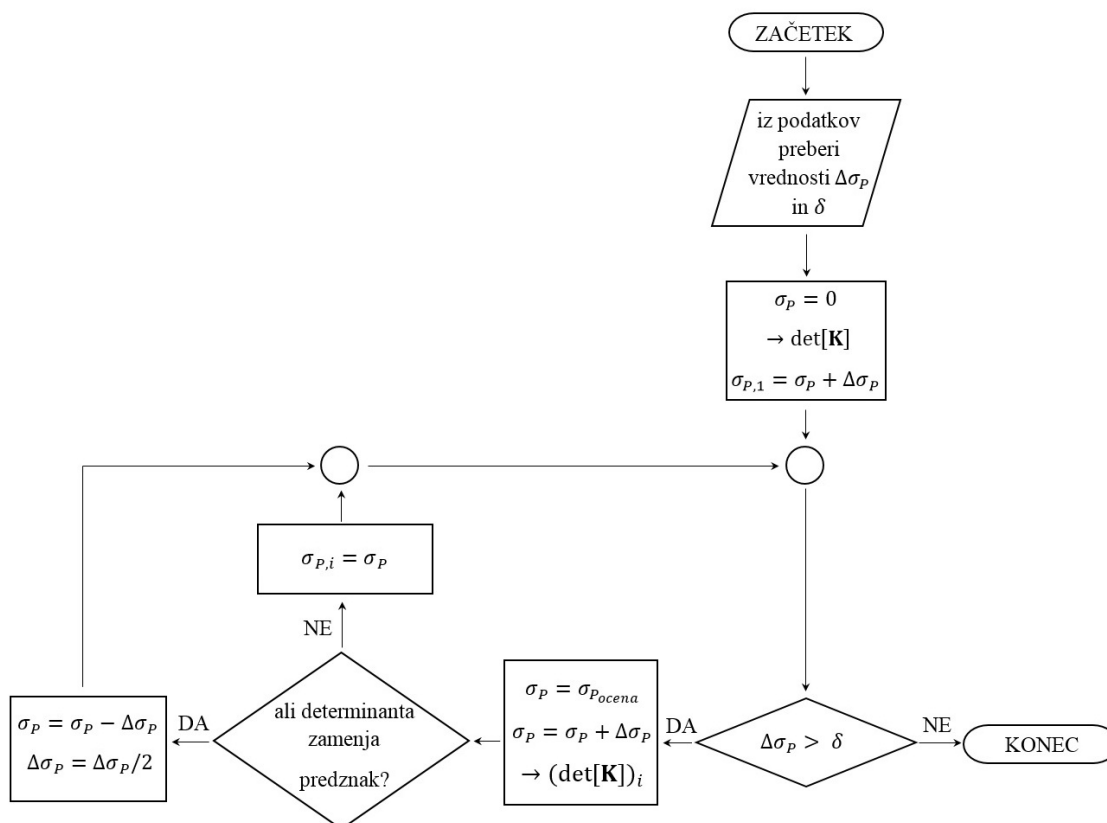


Slika 29: Princip iskanja kritične obremenitve s preizkušanjem

Izkaže se, da lahko postopek precej izboljšam, če v vsakem posameznem koraku na podlagi vrednosti determinant iz trenutnega in prejšnjega koraka ocenim kritično vrednost z linearno ekstrapolacijo, ta vrednost pa predstavlja izhodišče v naslednjem koraku. Na sliki 30 je prikazan algoritem opisane procedure, na njej pa $\Delta\sigma_P$ pomeni prirastek tlačne napetosti v posameznem koraku, δ izbrana mejna vrednost velikosti tega prirastka, σ_P tlačna napetost v trenutnem koraku, $\sigma_{P_{ocena}}$ pa je v posameznem koraku, kot rečeno, določena z ekstrapolacijo:

$$\sigma_{P_{ocena}} = \frac{(\det[\mathbf{K}])_{i-1} \sigma_{P_i} - (\det[\mathbf{K}])_i \sigma_{P_{i-1}}}{(\det[\mathbf{K}])_i - (\det[\mathbf{K}])_{i-1}}, \quad (77)$$

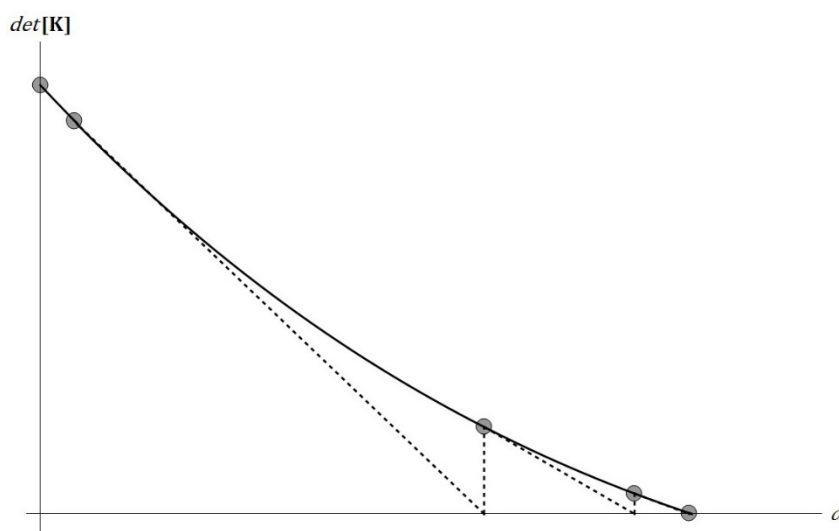
kjer i označuje zaporedno številko koraka.



Slika 30: Algoritem za določitev elastične kritične obremenitve

Na tak način pridem za vse primere vitkosti do rešitve v nekaj korakih tudi pri majhnem začetnem prirastku $\Delta\sigma_p$. Tipičen potek konvergence proti kritični napetosti, ki je podoben za vse uklonske primere, je ponazorjen s sliko 31.

S takim postopkom pa lahko določim samo kritične sile, ki pripadajo prvim uklonskim oblikam za posamezen primer podpiranja, vpliv zunanjih obtežb pa ni zajet. Kot pokaže Timoshenko [1], primerom, pri katerih zunanja obtežba povzroča tako obliko upogibnice, ki sovpada z višjimi uklonskimi oblikami, ustrezajo tudi pripadajoče (višje) kritične sile. Gre sicer za bolj teoretične primere, saj je v realnosti težko pričakovati takšno stanje, lahko pa te kritične vrednosti iščem s skoraj enako proceduro kot je opisana zgoraj, le da namesto vrednosti determinante v posameznih korakih preverjam maksimalni pomik na elementu. Za razliko od zgornjega postopka je treba v tem primeru v prvem koraku imeti na elementu neke začetne pomike, saj sicer osna sila nima nobenega vpliva na odziv in vse vrednosti ostajajo enake nič. Ti pomiki so lahko posledica katerekoli obtežbe oziroma podane nepopolnosti ali ekscentričnosti osne sile, njihova velikost pa ni pomembna.

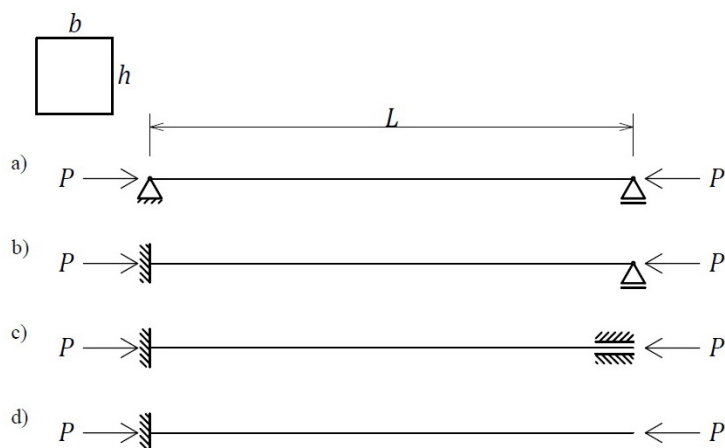


Slika 31: Konvergenca opisanega postopka proti kritični napetosti

V proceduri torej shranim vrednost in mesto maksimalnega pomika iz prvega koraka, nato pa primerjam vrednosti pomikov na tem mestu v naslednjih korakih. V bližini kritične obremenitve pomik neodvisno od začetne velikosti skokovito naraste, z nadaljnjim višanjem osne sile pa, podobno kot prej vrednost determinante, zamenja predznak, kar je očitno napačen rezultat in znak, da je bila presežena kritična obremenitev.

V spodnjih preglednicah za tipične primere, prikazane na sliki 32, podajam rezultate kritičnih vrednosti, določenih na način opisan v tej točki ter jih primerjam z analitičnimi vrednostmi, ki sledijo iz enačb točke 2.3. Pri vseh primerih sem upošteval naslednje podatke:

- $L = 8.0 \text{ m}$,
- $h = b = 30 \text{ cm}$,
- $E = 940 \text{ kN/cm}^2$.



Slika 32: Uklonski primeri, za katere primerjam rezultate programa s točnimi vrednostmi

Preglednica 1: Rezultati za primer (a) s slike 32

$P_{cr,točno} = 978.48 \text{ kN}$	$P_{cr,MKD} [\text{kN}]$	Napaka
4 elementi	928.56	-5.10%
8 elementov	965.78	-1.30%
20 elementov	976.32	-0.22%
Ekstrapolacija 4+8 elementov	978.22	-0.03%

Preglednica 2: Rezultati za primer (b) s slike 32

$P_{cr,točno} = 2002.61 \text{ kN}$	$P_{cr,MKD} [\text{kN}]$	Napaka
4 elementi	1761.71	-12.03%
8 elementov	1939.1	-3.17%
20 elementov	1990.92	-0.58%
Ekstrapolacija 4+8 elementov	1998.62	-0.20%

Preglednica 3: Rezultati za primer (c) s slike 32

$P_{cr,točno} = 3913.91 \text{ kN}$	$P_{cr,MKD} [\text{kN}]$	Napaka
4 elementi	3172.41	-18.95%
8 elementov	3716.75	-5.04%
20 elementov	3881.66	-0.82%
Ekstrapolacija 4+8 elementov	3898.25	-0.40%

Preglednica 4: Rezultati za primer (d) s slike 32

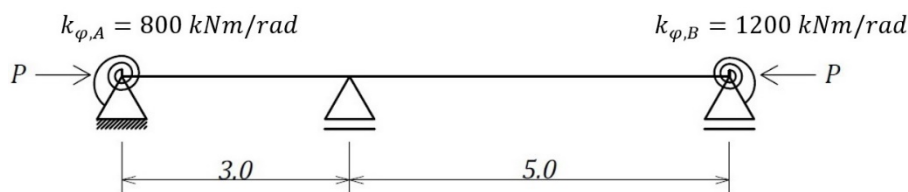
$P_{cr,točno} = 244.62 \text{ kN}$	$P_{cr,MKD} [\text{kN}]$	Napaka
4 elementi	241.48	-1.28%
8 elementov	243.40	-0.50%
20 elementov	243.88	-0.30%
Ekstrapolacija 4+8 elementov	244.61	-0.003%

Kot je razvidno iz preglednic je natančnost metode manjša, čimbolj statično nedoločen je obravnavan primer. Tako npr. s štirimi delitvami elementa dobim še zadovoljivo oceno kritične sile v primeru konzole in členkasto podprtega elementa (primera (d) in (a)), za druga dva primera pa je taka mreža pregroba. Z delitvijo na 20 elementov dobim v vseh primerih vrednosti z napako manj kot 1%, razvidna pa je tudi učinkovitost Richardsonove ekstrapolacije, ki da v vseh primerih najboljše rezultate, za ta račun pa sta uporabljeni vrednosti iz računa s 4 in 8 elementi.

Seveda pa omenjen postopek pride v poštev, kadar elastična kritična sila s točnimi enačbami ni tako enostavno določljiva kot v zgornjih primerih. Primer na sliki 33 je analitično npr. potrebno reševati s pomočjo enačb (35), zaradi funkcij $\psi(u)$ in $\phi(u)$ pa je treba uporabiti numerične postopke oz. imeti te funkcije tabelirane. Rezultate za ta primer podajam v preglednici 5.

Preglednica 5: Kritična sila za elastično vpet element z vmesno podporo

$P_{cr, točno} = 4028.76 kN$	$P_{cr, MKD} [kN]$	Napaka
Ekstrapolacija 8+16 elementov	4028.62	-0.003%



Slika 33: Elastično vpet element z vmesno podporo

Podobno proceduro sem potreboval tudi za določanje kritičnih obremenitev v nelinearno elastičnih primerih, ta račun pa je opisan v točki 3.3.6.

3.2.7 Povzetek

Z opisanim postopkom pridem do elastičnega odziva po teoriji II. reda. V njem je upoštevana geometrijska nelinearnost, material pa je vzet kot linearno elastičen (konstantna vrednost modula elastičnosti E). Opisan je bil tudi postopek za določitev elastične kritične obremenitve za vse primere podpor, ki jih podpira program.

To pa predstavlja šele prvi korak do zelenega cilja – določitev odziva, v katerem je upoštevana tudi nelinearnost materiala.

3.3 Nelinearno elastičen odziv

3.3.1 Določitev upogibne togosti

Pri določitvi upogibne togosti sem izhajal iz enačb, ki jih za primer osno-upogibne obremenitve elementov v nelinearno elastičnem območju podaja Timoshenko [1], ob tem pa v spodnjih enačbah uporabljam nekatere drugačne oznake, element pa obravnavam v ravnini $x - z$ (v desnosučnem koordinatnem sistemu s slike 2). Zaradi predpostavke o veljavnosti Bernoulli-Navierove hipoteze (točka 2.1.1) lahko vzdolžno deformacijo vsakega vlakna v prečnem prerezu, v primeru enosnega upogiba, zapišemo kot:

$$\epsilon = \epsilon_0 + z \beta_{y,x}, \quad (78)$$

kjer je ϵ_0 elongacija oz. kontrakcija težiščne osi elementa, $\beta_{y,x}$ je odvod zasuka prečnega prereza okoli y osi, z pa koordinata obravnavanega vlakna v težiščnem koordinatnem sistemu. Deformaciji ϵ_1 na zgornjem in ϵ_2 na spodnjem robu prereza lahko v skladu s tem zapišemo kot:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \epsilon_0 - \frac{h}{2} \beta_{y,x} \\ &\text{in} \\ \epsilon_2 &= \epsilon_0 + \frac{h}{2} \beta_{y,x}, \end{aligned} \quad (79)$$

velja pa tudi:

$$\epsilon_2 - \epsilon_1 = h \beta_{y,x}. \quad (80)$$

Tako sledi, da je celotno deformacijsko stanje v prerezu določeno z dvema parametroma: elongacijo oz. kontrakcijo ϵ_0 in odvodom zasuka $\beta_{y,x}$ ali pa z robnima deformacijama ϵ_1 in ϵ_2 . Neznani par parametrov lahko določimo iz pogojev ravnotežja v prerezu, pri tem pa izhajamo iz zvez, ki povezujeta vzdolžne normalne napetosti v prerezu z notranjo osno silo in upogibnim momentom (prirejeno po [1]):

$$N_x = \int_{A_x} \sigma_x dA_x \quad (81)$$

in

$$M_y = \int_{A_x} z \sigma_x dA_x. \quad (82)$$

Ti dve količini morata biti v ravnotežju z osno silo in upogibnim momentom, ki ju povzročata zunanja obtežba. V primeru pravokotnega prečnega prereza zgornji enačbi zapišemo kot:

$$N_x = \int_{A_x} \sigma_x dA_x = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz \quad (83)$$

in

$$M_y = \int_{A_x} \sigma_x dA_x = b \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz. \quad (84)$$

Z odvajanjem enačbe (78) lahko izrazimo diferencial dz (prirejeno po [1]):

$$dz = \frac{d\epsilon}{\beta_{y,x}}, \quad (85)$$

od koder po vstavitvi v (81) in (82) sledi (prirejeno po [1]):

$$N_x = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = \frac{b}{\beta_{y,x}} \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} \sigma_x d\epsilon \quad (86)$$

in

$$M_y = \frac{b}{\beta_{y,x}^2} \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} \sigma_x (\epsilon - \epsilon_0) d\epsilon. \quad (87)$$

Enačbo (87) lahko z upoštevanjem (80) in nekaj preoblikovanja zapišemo tudi kot (prirejeno po [1]):

$$M_y = \frac{b h^3}{12} \frac{12\kappa_y}{(\epsilon_2 - \epsilon_1)^3} \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} \sigma_x (\epsilon - \epsilon_0) d\epsilon. \quad (88)$$

V prvem členu na desni strani zgornje enačbe lahko prepoznamo vztrajnostni moment pravokotnega prereza $I_y = bh^3/12$. Če v nadaljevanju upoštevam, da je odvod zasuka prečnega prereza z ukrivljenostjo težiščne osi elementa povezan z enačbo (glej npr. [7]):

$$\beta_{y,x} = -\kappa_y, \quad (89)$$

po primerjavi z enačbo (6), ki velja v primeru linearno elastičnega materiala, lahko zapišem (prirejeno po [1]):

$$M_y = E' I_y \beta_{y,x}, \quad (90)$$

kjer količino E' določa izraz:

$$E' = \frac{12}{(\epsilon_2 - \epsilon_1)^3} \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} \sigma_x (\epsilon - \epsilon_0) d\epsilon \quad (91)$$

Ta količina ima iste dimenzije kot modul elastičnosti E (enota sile deljena z enoto površine [1]) in tako pomnožena z vztrajnostnim momentom I_y predstavlja upogibno togost prereza, ko se material ne nahaja v elastičnem območju.

Iz vsega zapisanega v tej točki sledi, da lahko v primeru, če nam pri znanih notranjih silah uspe iz enačb (81) in (82) določiti parametra ϵ_0 in $\beta_{y,x}$, novo upogibno togost $E' I_y$ določimo preprosto kot:

$$E' I_y = \frac{M_y}{\beta_{y,x}}. \quad (92)$$

Na tak način pri računu s programom določim nove vrednosti upogibnih togosti v prerezi, pri čemer so notranje sile v teh prerezi rezultat računa odziva iz točke 3.2, enačbi (81) in (82) pa rešujem z numerično integracijo napetosti s pomočjo Excelovega orodja Reševalnik (»Solver«), kot je opisano v nadaljevanju. Kot je bilo že rečeno, moramo pri opisanem postopku imeti na razpolago zvezo med napetostjo in deformacijo materiala, ki ga v mojem primeru določa analitičen izraz $\sigma(\epsilon)$, opisan v naslednji točki.

3.3.2 Uporabljena zveza σ - ϵ

Za les je značilna linearna zveza med napetostjo in deformacijo v nategu ter izrazito nelinearna zveza v tlaku. Celovito študijo obnašanja je na velikem številu dejanskih tržno dostopnih primerkov lesa leta 1978 izvedel Glos ter določil analitično funkcijo $\sigma(\epsilon)$, ki velja za najbolj natančen prikaz dejanskega obnašanja lesa v tlaku ([10], [11], [13]). Grafično je funkcija prikazana na sliki 34, določa pa jo sledeča enačba (navedeno iz [4]):

$$\sigma(\epsilon) = \frac{E\epsilon + k_1 \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_c}\right)^7}{1 + k_2\epsilon + \frac{k_1 \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_c}\right)^7}{f_{c,y}}}, \quad (93)$$

kjer sta koeficienta k_1 in k_2 določena kot:

$$k_1 = \frac{f_{c,y}}{6(1 - (f_c/f_{c,y}))} \quad (94)$$

in

$$k_2 = \frac{E}{f_c} - \frac{7}{6\epsilon_c}. \quad (95)$$

Parametri, ki v nastopajo v zgornjih enačbah, imajo naslednji pomen:

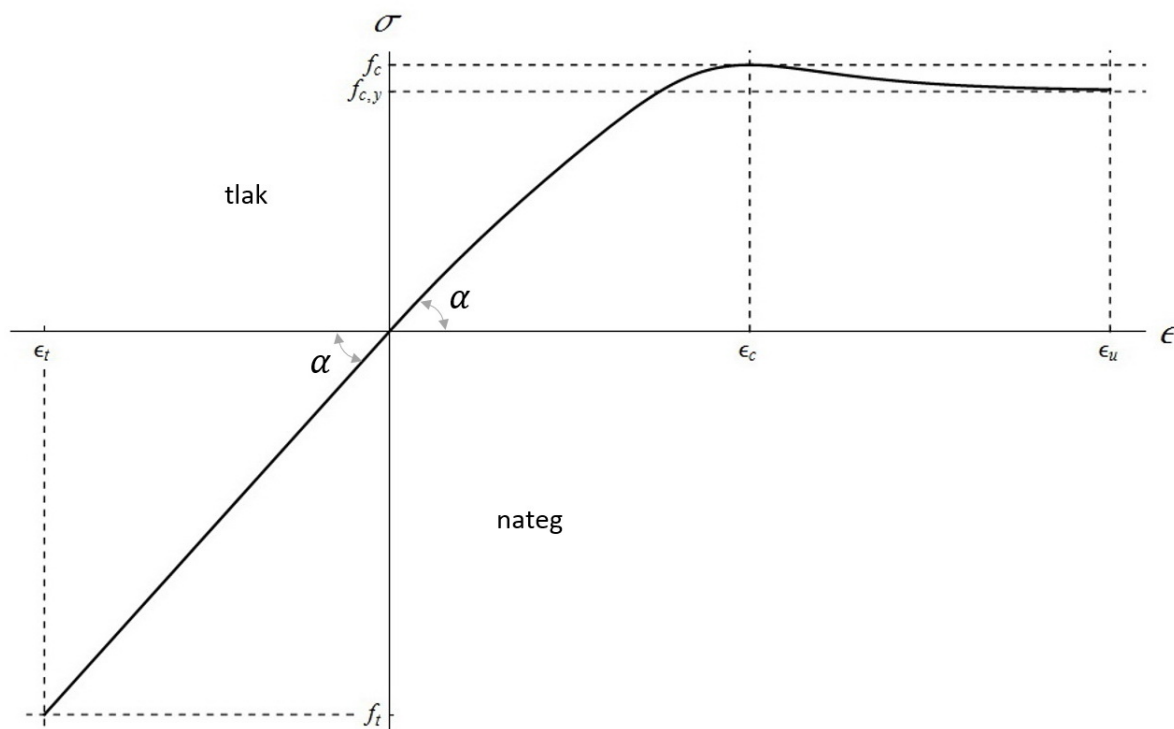
- E ... modul elastičnosti lesa,
- f_c ... tlačna trdnost,
- $f_{c,y}$... asimptotična tlačna trdnost (slika 34),
- ϵ_c ... tlačna deformacija pri največji tlačni napetosti.

Na sliki 34 so poleg omenjenih parametrov označeni še natezna trdnost f_t s pripadajočo deformacijo ϵ_t , mejna tlačna deformacija ϵ_u ter naklon krivulje v izhodišču α , ki določa vrednost modula elastičnosti po enačbi

$$E = \tan \alpha. \quad (96)$$

Sam sem privzel enako vrednost E v tlačnem in nateznem območju, kar je pogosta predpostavka (tudi SIST EN 338:2004 podaja vrednosti modula elastičnosti neodvisno od predznaka deformacij), čeprav se lahko vrednosti nateznih, tlačnih in upogibnih modulov elastičnosti razlikujejo za nekaj odstotkov

[11]. V nateznem območju je po Glosu ta vrednost konstantna vse do porušitve, v tlaku pa z naraščanjem napetosti naklon krivulje in s tem modula elastičnosti pada ter ima v točki tlačne trdnosti (ϵ_c, f_c) vrednost 0 – v tej točki material izgubi togost in deformacija prične naraščati pri nižanju napetosti, kar ponazarja padajoča veja krivulje – pri tem pa z naraščanjem tlačne deformacije v lesu ostanejo asimptotične oziroma rezidualne napetosti [12].



Slika 34: Zveza med napetostjo in deformacijo po enačbi (93)

Izbira vrednosti parametrov ima, kot bo prikazano v nadaljevanju, odločilen učinek na računsko določene značilne vrednosti, kot so nosilnost, interakcija tlaka in upogiba ter uklonsko obnašanje elementa. Več o izbiri parametrov ter vplivu na omenjene značilnosti je zapisano v poglavju 5.1.

3.3.3 Numerična integracija napetosti v prerezu

3.3.3.1 Ravninski primer

Integral iz enačbe (81) lahko rešujem numerično, če prerez razdelim na več delnih ploskev (lamel), ter na vsaki njih predpostavim konstantno vrednost napetosti, ki je določena glede na deformacijo v njenem središču (slika 35).

Na ta način lahko vsaki delni ploskvi priredim silo:

$$F_{p,i} = \sigma(\epsilon_{p,i}) A_p, \quad (97)$$

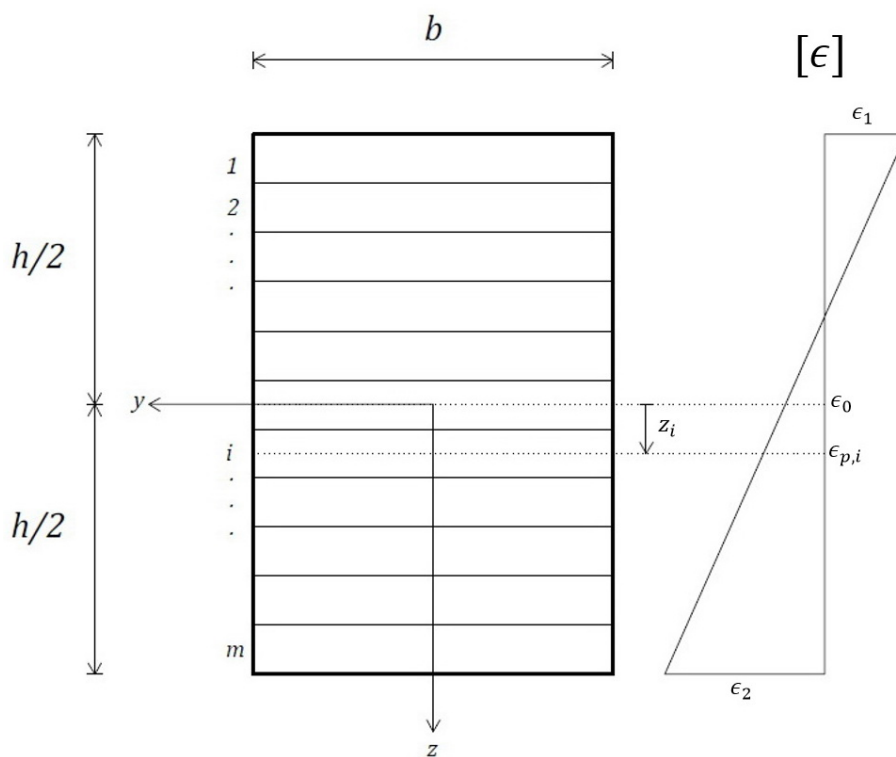
kjer indeks i označuje zaporedno številko delne ploskve, $F_{p,i}$ je sila v tej ploskvi, A_p njena ploščina, $\epsilon_{p,i}$ pa deformacija na sredini ploskve lamele, ki je določena z enačbo (78). V tem primeru jo zapišem glede na središče obravnavane delne ploskve:

$$\epsilon_{p,i} = \epsilon_0 + \beta_{y,x} z_i, \quad (98)$$

pri čemer je z_i koordinata središča obravnavane lamele v lokalnem težiščnem koordinatnem sistemu (slika 35). Funkcija $\sigma(\epsilon)$ je lahko poljubna, sam pa sem uporabil zvezo opisano v prejšnji točki. Na tak način lahko z delitvijo prereza na m delnih ploskev nadomestim integral iz enačbe (81) z vsoto:

$$\int_{\mathcal{A}_x} \sigma_x dA_x \cong \sum_{i=1}^m F_{p,i} A_l. \quad (99)$$

Ploščina ene delne ploskve je odvisna od njihovega izbranega števila m ter enaka $A_p = b (h/m)$.



Slika 35: Delitev prereza na delne ploskve

Podobno lahko zapišem za momente:

$$\int_{\mathcal{A}_x} z \sigma_x dA_x \cong \sum_{i=1}^m F_{p,i} A_p z_i, \quad (100)$$

Za predpostavljen potek deformacij, ki je določen z izbranimi deformacijskima parametroma ϵ_0 in $\beta_{y,x}$ lahko torej z zgornjima vsotama določim notranjo silo in moment, ki pripadata tem deformacijam.

3.3.3.2 Prostorski primer

Pri računu odziva sem lahko prostorske primere razdelil na dva ločena ravninska primera (točka 3.2.2.5), pri računu ravnotežja v prerezu pa moram hkrati upoštevati vplive v obeh koordinatnih ravninah, saj vsi ti vplivi učinkujejo na isto vzdolžno deformacijo ϵ . V tem primeru prerez razdelim na delne ploskve v obeh smereh, kot je prikazano na sliki 36, vzdolžna deformacija v težiščih delnih ploskev pa je v tem primeru določena z:

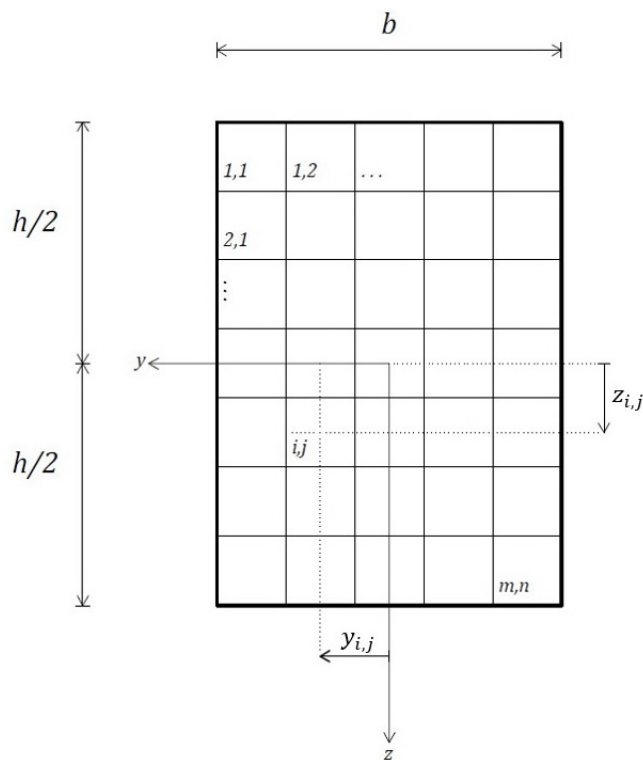
$$\epsilon_{p,ij} = \epsilon_0 + \beta_{y,x} z_{i,j} - \beta_{z,x} y_{i,j}, \quad (101)$$

kjer $\beta_{y,x}$ predstavlja zasuk prečnega prereza okoli koordinatne z osi, $z_{i,j}$ in $y_{i,j}$ sta koordinati težišča obravnavane delne ploskve (slika 36), drugi dve oznaki pa imata enak pomen kot v enačbi (98). Od tu naprej poteka račun enako kot v ravninskem primeru. Sila v posamezni ploskvi je določena kot:

$$F_{p,ij} = \sigma(\epsilon_{p,ij}) A_p. \quad (102)$$

Ploščina ene delne ploskve je v tem primeru enaka $A_p = hb/mn$, kjer je vzeto, da je prerez razdeljen na m ploskev v smeri z ter n ploskev v smeri y. Integral napetosti, ki določa osno silo, lahko tako približno zapišem kot:

$$\int_{\mathcal{A}_x} \sigma_x dA_x \cong \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n F_{p,ij} A_p. \quad (103)$$



Slika 36: Delitev prereza v prostorskih primerih

Približek integrala, ki določa notranji upogibni moment M_y (upogib v ravnini x - z) se glasi:

$$M_y = \int_{A_x} z \sigma_x dA_x \cong \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n F_{p,ij} A_p z_{i,j} \quad (104)$$

in analogno tudi približek integrala, ki določa notranji upogibni moment M_z (upogib v ravnini x - y):

$$M_z = - \int_{A_x} y \sigma_x dA_x \cong - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n F_{p,ij} A_p y_{i,j} \quad (105)$$

Če izberem $n = 1$ pa sledi ravninski primer, ki sem ga zaradi nazornosti posebej opisal v prejšnji točki.

3.3.4 Iskanje rešitev z orodjem Reševalnik

Orodje Reševalnik (ang. »Solver«) je v programu Excel na voljo kot dodatek, gre pa za zmogljivo orodje, s pomočjo katerega lahko rešujemo različne probleme kot je npr. optimizacija, reševanje sistemov enačb, ... Dodatek je produkt podjetja Frontline Systems [14], v Excel pa je sicer vključena osnovna različica programa, bolj napredne verzije pa je potrebno posebej dokupiti. Kljub temu je že osnovna verzija dovolj zmogljiva, da je bila uporabna v mojem primeru.

Pri reševanju problemov z omenjenim orodjem moramo na delovnem listu (»Worksheet«) programa Excel problem definirati na način, pri katerem s spreminjanjem izbranih parametrov vplivamo na končni rezultat, zapisan v izbrani celici. Pri tem gre za običajen postopek v programu Excel, kjer celicam prirejamo formule oz. odvisnosti od drugih celic, ob vsaki spremembi vnosa pa se vrednosti vseh celic na novo preračunajo. Tako si lahko izberemo ciljno celico (»Target Cell«), ki je preko poljubnega števila vmesnih celic oz. računov povezana s celicami, v katere vnašamo vrednosti izbranih parametrov (celice s spremenljivkami, »Variable cells«). Orodje Reševalnik omogoča samodejno iskanje takih vrednosti parametrov, da je zadoščeno namenu, ki ga priredimo ciljni celici – pri tem lahko iščemo minimalno, maksimalno ali točno določeno vrednost ciljne celice. Poleg pogoja, ki ga priredimo ciljni celici, lahko uvedemo tudi druge pogoje oz. omejitve (»Constraints«), ki jim mora biti pri iskanju rešitve zadoščeno.

V mojem primeru iskanja ravnotežja v prerezu so parametri elongacija težiščne osi ϵ_0 ter ukrivljenosti $\epsilon_{M,y}$ in $\epsilon_{M,z}$ (v ravninskem primeru samo prva dva). Napisana procedura glede na izbrano število delnih ploskev pripravi preglednico, v kateri so za vsako od njih pripadajoče vrednosti (opisane v točki 3.3.3) ter zapiše vrednosti notranjih sil po enačbah (99) in (100) oz. (103), (104) in (105). Te vrednosti morajo biti enake obremenitvam zaradi zunanjih vplivov, torej morajo biti robne deformacije take, da to velja. Postopek za ravninski primer je shematično ponazorjen na sliki 37, ker sta komponenti vektorja odpornosti prereza označena indeksom R_d , komponenti vektorja projektnih obremenitev pa z E_d . Vrednost v ciljni celici tako predstavlja razliko med notranjimi in zunanjimi silami, ki delujejo v prerezu, v primeru ravnotežja pa mora biti ta vrednost enaka 0, kar je torej pogoj, ki ga predpišem v Reševalniku. Pri tem postopam tako, da najprej izračunam kvadrata napak ΔN^2 in ΔM_y^2 , določena kot:

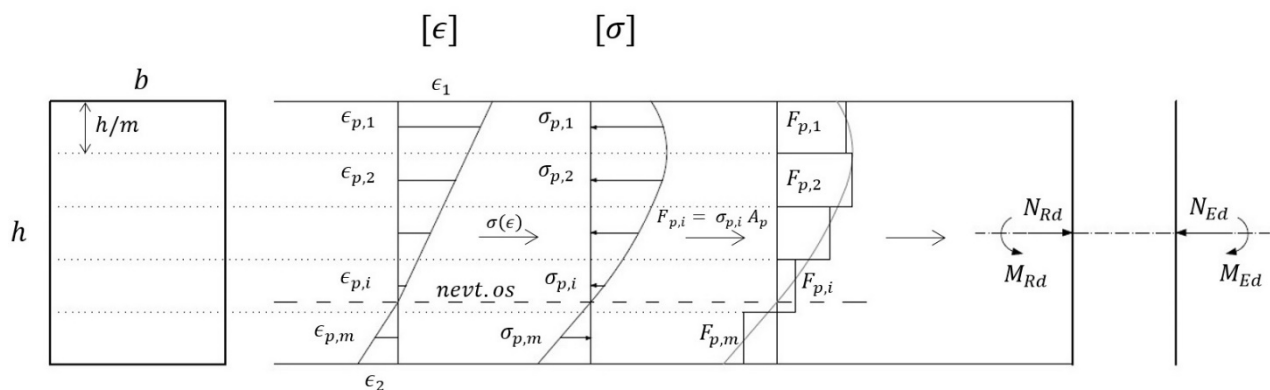
$$\Delta N^2 = (N_{not} - N_{zun})^2 \quad (106)$$

in

$$\Delta M_y^2 = (M_{y,not} - M_{y,zun})^2, \quad (107)$$

pogoj v ciljni celici pa potem določim kot:

$$\Delta = \Delta N^2 + \Delta M^2 = 0. \quad (108)$$



Slika 37: Določitev ravnotežja v prerezu

V zgornjih enačbah so razlike kvadrirane zaradi boljše konvergence pri iskanju rešitve. V prostorskem primeru pa imam še pogoj razlike momentov ΔM_z , ki ga zapišem analogno enačbi (107), pogoj ciljne celice pa je takrat

$$\Delta = \Delta N^2 + \Delta M_y^2 + \Delta M_z^2 = 0. \quad (109)$$

Poleg pogoja ciljne celice pa uvedem še dodatne pogoje oz. omejitve, ki jih mora Reševalnik pri iskanju rešitve upoštevati. To so mejne vrednosti robnih deformacij (v ravninskem primeru sta to deformaciji ϵ_1 in ϵ_2 na zgornjem oz. spodnjem robu prereza – slika 37), ki se jih v računu ne sme preseči, saj bi tako stanje pomenilo porušitev. Pri tem se kaže podobnost z metodo, ki jo poznamo iz dimenzioniranja betonskih konstrukcij, ki prav tako omejuje nosilnost prereza z mejnimi vrednostmi robnih deformacij. Konkretnih vrednosti deformacij, ki sem jih pri računu upošteval kot mejne, so predstavljene v točki 5.1.

V primeru, da Reševalnik najde take deformacijske parametre, da je zadoščeno vsem navedenim pogojem, predstavljajo vrednosti teh parametrov iskano rešitev, iz katere lahko določim nove upogibne togosti prerezov oz. vozlišč z enačbo (92). V primeru prostorskega računa omenjeno enačbo zapišem za upogibni togosti v obeh ravninah:

$$E' I_y = \frac{M_y}{\beta_{y,x}} \quad (110)$$

in

$$E' I_z = \frac{M_z}{\beta_{z,x}}. \quad (111)$$

S tem imam pripravljeno vse za iterativni račun, s katerim določam odziv konstrukcije z upoštevanjem tako geometrijske kot materialne nelinearnosti. Celoten postopek računa in uporabljen algoritem bo prikazan v naslednji točki, spodaj pa je nekoliko bolj podrobno opisana izbira nastavitvev Reševalnika in njegova uporaba znotraj opisanih procedur.

Nastavitve orodja Reševalnik

Pri računu z Reševalnikom imamo na izbiro tri metode iskanja rešitev:

- metodo simpleksov,
- metodo GRG (»Generalized Reduced Gradient«) oz. gradientno metoda [15]
- evolucijske algoritme.

Za nelinearne probleme je primerna metoda GRG, zato sem v proceduri računanja ravnotežja privzel to metodo. Specifično za to metodo lahko določimo tudi pogoj konvergence ter vrsto uporabljenih približkov odvodov (centralna shema ali shema naprej), pri tem pa je centralna shema bolj natančna, a zahteva več procesorskega časa [15]. Skupna vsem metodam je izbira željene natančnosti ter možnosti samodejnega normiranja vrednosti tekom računa (»Automatic scaling«). Ta opcija pride v poštev, kadar se vrednosti v ciljni celici in celicah z omejitvenimi pogoji razlikujejo za več velikostnih razredov, torej tudi v mojem primeru, kjer so deformacije majne količine v primerjavi z vrednostjo napake, ki je velika že pri majhnem odstopanju od ravnotežja (enačbi (106) in (107)).

Na uspešnost iskane rešitve vplivajo tudi začetne vrednosti parametrov, ki so podane v ustreznih celicah na začetku računa z Reševalnikom. Lahko se zgodi, da pri nekaterih začetnih vrednostih ne najde rešitve, čeprav obstaja in jo pri drugih začetnih vrednostih tudi najde. V primeru mojega računa se je izkazalo, da na to predvsem vpliva predznak podanih začetnih deformacij – v nekaterih primerih je ugodno podati začetni robni deformaciji različnega predznaka medtem ko v drugih Reševalnik lažje najde rešitev pri deformacijah istega predznaka. Prav tako se lahko zgodi, da Reševalnik v prvem poskusu ne najde rešitve, a se ji zelo približa, nakar pri ponovnem zagonu (z vrednostmi parametrov iz rezultatov prvega poskusa) to rešitev najde. Ena možnost, kako zaobiti te težave, je uporaba opcije »Multistart«, ki jo lahko izberemo v primeru metode GRG. Če je ta opcija vključena, se Reševalnik samodejno večkrat zažene, ob tem pa izbira različne začetne vrednosti parametrov. Čeprav to največkrat učinkuje, pa tak postopek zelo podaljša čas računa in za moj primer, ko se Reševalnik za en sam račun odziva mnogokrat zažene, ne pride v poštev. Zato sem že v samo proceduro vključil postopek, po katerem so po enem neuspešnem iskanju rešitve Reševalnik ponovno zažene le enkrat (ob izključeni opciji »Multistart«) in ob tem tudi spremeni vrednost v celicah s parametri oz. spremenljivkami. To se je izkazalo za učinkovito, saj tako Reševalnik precej zanesljivo najde rešitve v vseh primerih, ob tem pa je čas računa le nekoliko daljši. Poleg tega sem dobil boljše rezultate, če sem dodatno k pogoju ciljne celice (108) oz. (109) uvedel še posebej za vsako od komponent vektorja odpornosti pogoj enakosti z ustrežno komponento vektorja obremenitve.

V preglednici 6 podajam konkretne vrednosti nastavitvev, ki sem jih vključil v proceduro računa ravnotežja. Poleg omenjenih lahko izbiramo še med nekaterimi drugimi nastavitvami, ki pa vsaj v mojem primeru niso bistvene, podrobnosti pa so na voljo v [8].

Preglednica 6: Izbrane nastavitve orodja Reševalnik (»Solver«)

Opcija	Vrednost
»Constraint Precision« (Natančnost)	0.000001
»Automatic Scaling« (Samodejno prilagajanje)	vključeno
»Convergence« (Konvergenca)	0.0001
»Multistart« (Večkratni zagon)	izključeno

3.3.5 Iterativni račun nelinearno elastičnega odziva

V prvem koraku iteracije je račun identičen kot pri elastičnem odzivu – program sestavi matriko konstrukcije in vektor desnih strani, ki nastopata v enačbi (oz. sistemu enačb) (59) ter določi pomike in notranje sile v vozliščih elementa, kot je opisano v točki 3.2 in njenih podtočkah. Pri tem se vsem vozliščem priredi začetna vrednost modula elastičnosti E , ki se v enačbah pojavlja na mestih, kot je prikazano na sliki 22. V naslednjem koraku pa v vseh vozliščih oz. prerezih elementa iščem ravnotežje z izračunanimi notranjimi silami iz prvega koraka, kot je bilo opisano v prejšnji točki. Celoten postopek je avtomatiziran, saj je tudi dodatek Reševalnik možno krmiliti s programsko kodo v okolju VBA. Če Reševalnik v vseh prerezih najde rešitve sledi določitev novih upogibnih togosti oz. modulov E' , ki jih nato priredim pripadajočim vozliščem.

S tem pa postopek še ni končan, saj zgoraj določene vrednosti pripadajo prečnim prerezom oz. vozliščem, bolj pravilno pa je nove togosti modulov E' prirediti podelementom. To postane očitno npr. v primeru, ko ima moment v določenem vozlišču skok oz. levo in desno vrednost, s čimer zgornji postopek vodi do dvoumnosti glede togosti v obravnavanem vozlišču. Zato postopam na sledeči način:

- Ko so določene togosti v vseh vozliščih, na podlagi teh vrednosti določim togosti podelementov kot povprečje togosti vozlišč, ki ta podelement omejujeta. Če sta v nekem vozlišču kot posledica skoka momentov določeni dve vrednosti E' , v računu togosti podelementa upoštevam relevantno vrednost (levo za podelement na levi strani obravnavanega vozlišča in desno za podelement na desni strani).
- V naslednjem koraku pa iz tako določenih upogibnih togosti podelementov ponovno priredim vrednosti vozliščem, saj so to mesta, v katerih se izvaja račun. Pri tem togost vozlišča določim kot povprečje togosti sosednjih podelementov, to pa so tudi končne vrednosti, ki jih upoštevam v računu.

V nadaljevanju sestavim vektor $\{E'\}$, ki ima toliko dimenzij, kot je vozlišč na elementu, vrednosti E_j' na vsakem mestu tega vektorja pa pripadajo ustreznemu vozlišču j . Pogoj za končanje iteracije je konvergenca pomikov v sosednjih korakih, zato primerjam vrednosti maksimalnih pomikov izračunanih pri togostih iz trenutnega in prejšnjega koraka. Pri tem procedura, ki sestavi matriko konstrukcije, v vsakem novem koraku vozliščem (oz. vrstici v sistemu enačb) priredi nove vrednosti modulov iz vektorja $\{E'\}$. Tak postopek se ponavlja, dokler se pomika v sosednjih korakih ne razlikujeta za neko poljubno izbrano vrednost oz. dokler ne pride do prekoračenja nosilnosti prereza. Pri tem sem vzel, da je nosilnost prekoračena, kadar:

- reševalnik v določenem vozlišču ne najde rešitve, ki bi zadostila pogoju ciljne celice in podanim omejitvam,
- je izračunana razlika pomikov med sosednjima korakoma je v trenutnem koraku večja kot v prejšnjem (divergenca pomikov),

- je izračunana vrednost E_j' v trenutnem koraku večja kot vrednost E_j' iz prejšnjega koraka, ali
- determinanta matrice $[K]$ tekom iteracije zamenja predznak (podoben pogoj kot v primeru določanja elastične kritične obremenitve).

Algoritem procedure prikazuje slika 38, na njej pa oznake z indeksi k predstavljajo količine v trenutnem koraku iteracije, indeks $(k - 1)$ pa označuje, da gre za vrednost iz prejšnjega koraka. Količina δ na sliki predstavlja tisto izbrano vrednost, ki jo vzamem kot pogoj konvergence pomikov – ko je razlika pomikov v sosednjih korakih nižja od te vrednosti, proceduro prekinem in zapišem rešitve.

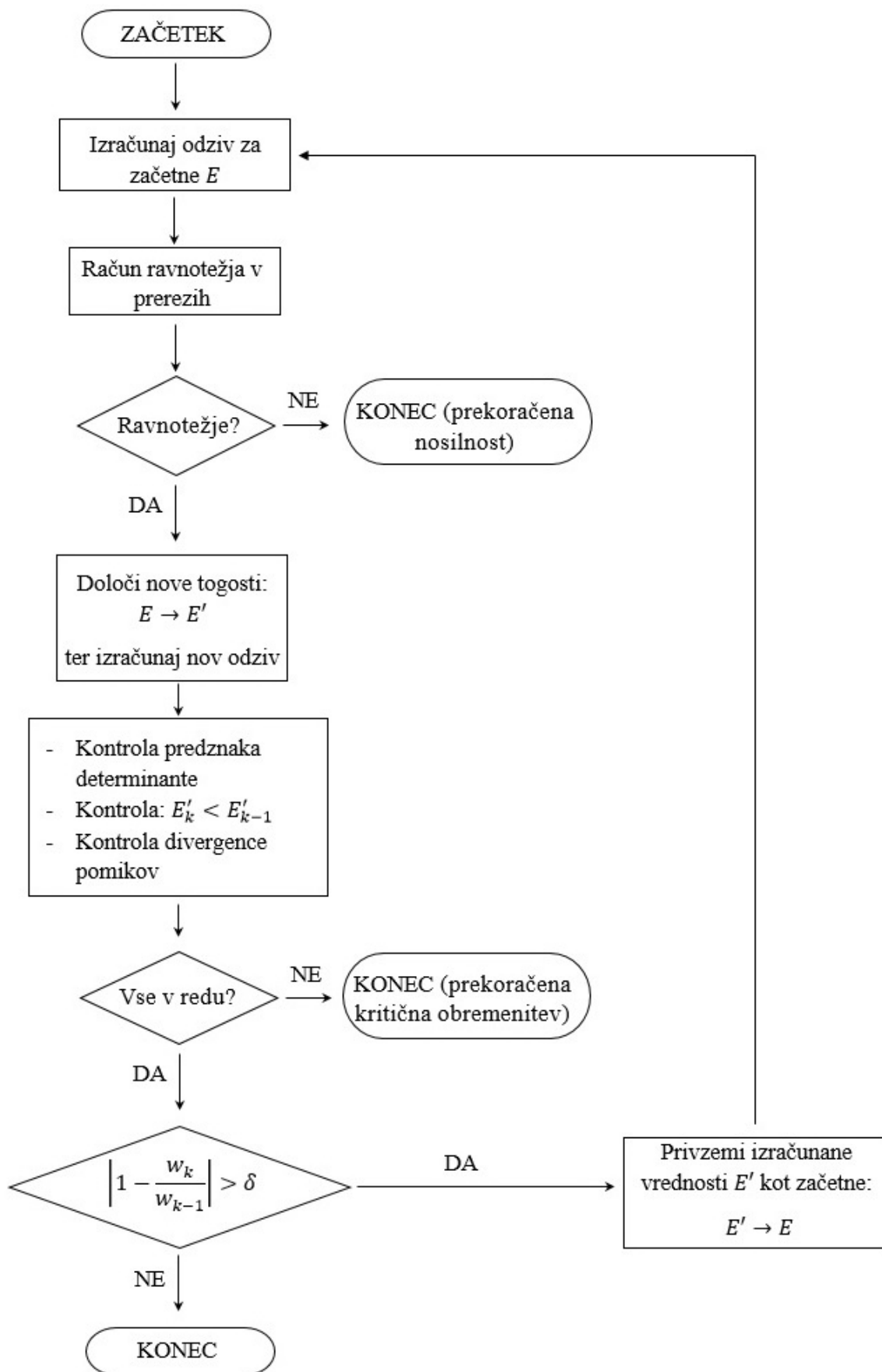
Opisan iterativni račun togosti je neprimerno daljši in računsko zahtevnejši od elastičnega računa. Pri tem bistven del časa predstavlja račun ravnotežja v prerezih z Reševalnikom, kar je seveda odvisno od števila vozlišč in tudi od izbrane natančnosti konvergence pomikov (vrednost δ na sliki 38). Tudi uporaba Richardosonove ekstrapolacije (točka 3.2.5) v nelinearno elastičnem primeru ni tako učinkovita, saj del napake poleg približkov metode končnih diferenc izvira tudi iz numerične integracije napetosti ter predpostavke o konstanti togosti podelementov, ta napaka pa se povečuje z manjšanjem števila teh podelementov. Zato te metode pri nelinearno elastičnih primerih nisem uporabljal.

3.3.6 Račun kritične obremenitve

Tudi v nelinearno elastičnem primeru poteka račun kritične obremenitve oz. maksimalne nosilnosti s podobno proceduro kot je opisana v točki 3.2.6 za elastičen primer, s tem da je sedaj potrebno v vsakem koraku povečanja osne obremenitve izvesti iteracijo opisano v prejšnji točki. Absolutna vrednost determinante matrice $[K]$ tudi v tem primeru pada in se približuje vrednosti 0 v bližini kritične obremenitve, s tem da na njeno vrednost ne vpliva le povečevanje te obremenitve ampak tudi zmanjševanje upogibnih togosti. Izkaže se, da iz tega razloga v posameznih korakih ne morem uporabiti linearne ekstrapolacije (enačba (77)) za oceno novih približkov in s tem izhodiščnih vrednosti za naslednje korake, saj v neki točki za razliko od elastičnega primera vrednost determinante strmo pade, zaradi česar omenjena ekstrapolacija praviloma privede do močno precenjenih vrednosti, ki niso uporabne kot novi približki kritične obremenitve. Zato osno obremenitev povečujem v enakomernih korakih, za velikost koraka pa sem izbral vrednost, za katero sem ocenil, da je blizu kritične, s tem pa sem relativno hitro prišel do rezultata oz. zaključka iteracije. Največkrat sem za velikost koraka izbral kar 70% vrednosti elastične kritične obremenitve za obravnavni primer.

3.3.7 Povzetek

V točki 3.3 in podtočkah je opisana zasnova procedure, ki z iterativnim računom določi nove upogibne togosti v vozliščih, kar mi v kombinaciji s proceduro za račun odziva iz točke 3.2 omogoča določitev nelinearno elastičnega odziva konstrukcije. Tako sem prišel do orodja, ki mi v nadaljevanju omogoča primerjavo rezultatov s postopki standarda EC-5, ki jih opišem v naslednji točki.



Slika 38: Algoritem za račun nelinearno elastičnega odziva

4 DIMENZIONIRANJE STEBROV V SKLADU S STANDARDOM EVROKOD 5

4.1 Splošno o standardu

Spodnja dva odstavka sta povzeta po viru [16].

Evrokod 5 ali SIST EN 1995 [18] (v nadaljevanju EC-5) je del evropskih standardov za projektiranje gradbenih konstrukcij, ki pokriva področje lesenih konstrukcij (sem spadajo stavbe in gradbeni inženirski objekti iz masivnega in lepljenega lameliranega lesa ter iz drugih lesnih konstrukcijskih proizvodov, npr. slojnatega furnirnega lesa ali lesnih panelov, povezanih z lepili ali mehanskimi veznimi sredstvi). V Sloveniji so se standardi Evrokod pričeli uporabljati s sprejetjem in pričetkom uporabe Pravilnika o mehanski odpornosti in stabilnosti objektov [3] 1.1 2006, od 1.1.2008 pa je uporaba teh standardov pri projektiranju obvezna. EC-5 je razdeljen na dva dela: prvi del obsega standarda SIST EN 1995-1-1 (Splošna pravila in pravila za stavbe) in SIST EN 1995-1-2 (Splošna pravila – projektiranje požarnovarnih konstrukcij), drugi del pa predstavlja SIST EN 1995-2 (Mostovi). Sestavni del vseh standardov Evrokod so tudi nacionalni dodatki, s katerimi posamezne države lahko v predvidenih točkah predpisujejo specifične zahteve, ki so drugačne kot v osnovnem standardu.

Kot ostali standardi Evrokod, ki pokrivajo specifična področja projektiranja, se tudi EC-5 uporablja skupaj s splošnim standardom SIST EN 1990 (Evrokod – Osnove projektiranja konstrukcij) [19] in SIST EN 1991 (Evrokod 1: Vplivi na konstrukcije) [20], v primeru projektiranja na potresnih območjih pa je potrebno upoštevati še SIST EN 1998 (Projektiranje potresnoodpornih konstrukcij) [21]. Ob tem se EC-5 navezuje še na vrsto drugih standardov, ki klasificirajo materiale, predpisujejo zahteve za uporabo specifičnih materialov in njihove trajnosti, predpisujejo metode preizkušanja in podobno. Osnovo za projektiranje v skladu z EC-5 tako predstavljata standarda, ki določata trdnostne razrede masivnega (SIST EN 338:2004) [22] in lepljenega lameliranega lesa (SIST EN 1194:2000) [23].

4.2 Pregled pomembnih določil

V naslednjih točkah kratko povzamem (iz vira [17] oz. direktno iz standarda [18]) nekatera splošna določila, ki jih EC-5 navaja v zvezi s projektiranjem lesenih konstrukcij in so relevantna tudi za dimenzioniranje stebrov, nato pa se omejim na mejno stanje nosilnosti oz. konkretno na točke, ki zadevajo dimenzioniranje lesenih stebrov.

4.2.1 Karakteristične vrednosti vplivov in materialnih lastnosti

Karakteristične vrednosti vplivov

V skladu z metodo delnih faktorjev so vplivi na konstrukcijo definirani s tako imenovanimi reprezentativnimi vrednostmi, od katerih je glavna karakteristična vrednost. Karakteristične vrednosti so praviloma določene na podlagi statističnih podatkov in sicer na način, da z določeno stopnjo verjetnosti v življenjski dobi konstrukcije niso presežene. Tako so glede na vrsto vpliva (stalni, spremenljivi, nezgodni), vzete kot srednje, minimalne, maksimalne ali nominalne vrednosti (slednje se vzamejo, kadar ni na voljo dovolj statističnih podatkov [17]). Pri računu lastne teže se npr. pri konstrukcijah iz lesa vzame srednja vrednost gostote, saj je variabilnost tega vpliva tekom življenjske

dobe konstrukcije majhna. Konkretno vrednosti za različne vrste vplivov podaja že omenjen standard SIST EN 1991.

Druge reprezentativne vrednosti vplivov, ki se uporabljajo v standardih Evrokod so še kombinacijska, pogosta in navidezno-stalna. Uporabljajo se v različnih kontrolah MSN in MSU, dobljene pa so z množenjem karakterističnih vrednosti z redukcijskimi faktorji, kakor predpisuje standard SIST EN 1990.

Karakteristične vrednosti materialnih lastnosti

Podobno kot vplivi so tudi materialne lastnosti določene s karakterističnimi vrednostmi [17]. Pri lesu oz. lesnih proizvodih se kot karakteristične uporabljajo ali srednje vrednosti ali pa vrednosti, ki ustrezajo 5% kvantili v pripadajoči statistični porazdelitvi. Praviloma se za lastnosti, povezane s trdnostjo, uporablja vrednosti pri 5% kvantili, za lastnosti povezane s togostjo pa srednje vrednosti. Izjema so primeri, kjer so funkcije povezane s togostjo uporabljene pri določanju trdnostnih lastnosti, kot npr. pri kontroli stabilnosti elementov. Takrat se namesto srednje vrednosti vzame vrednost pri 5% kvantili.

Karakteristične vrednosti teh lastnosti so določene z drugimi standardi, odvisno od vrste lesnega proizvoda. Kot je bilo omenjeno, trdnosti masivnega lesa določa standard SIST EN 338:2004, ki razdeli masivni les iglavcev v 12 ter masivni les listavcev v 6 trdnostnih razredov. Ker je les izrazito anizotropen material vsakemu razredu pripada 6 različnih trdnostnih lastnosti odvisno od vrste obremenitve (upogibna, tlačna v smeri vlaken, tlačna pravokotno na vlakna, natezna v smeri vlaken, natezna pravokotno na vlakna, strižna). Pri tem razvrstitev v posamezni trdnostni razred temelji le na treh vrednostih in sicer na karakterističnih vrednostih (pri 5% kvantili) upogibne trdnosti in gostote ter srednji vrednosti modula elastičnosti. Te vrednosti se eksperimentalno določijo kot zahteva standard SIST EN 408:2004, vse ostale pa so določene z enačbami standarda SIST EN 338:2004. Po podobnem principu se v trdnostne razrede deli tudi lepljen lamelirani les (LLL), kar obravnava standard SIST EN 1194. Ta razlikuje med homogenim in kombiniranim LLL. Pri prvem so vse lamele iz lesa enake kvalitete, pri drugem pa gre za kombinacijo lamel iz različnih kvalitet, pri čemer so tiste iz bolj kvalitetnega lesa na zunanjih ploskvah elementa (zgornji in spodnji). Zahteve glede ostalih lesnih proizvodov, ki se lahko uporabljajo v skladu z EC-5, podajajo drugi standardi oz. sami proizvajalci, več podrobnosti pa je na voljo v [17].

4.2.2 Vpliv trajanja obtežbe

Pod vplivom zunanjih obremenitev se vrednosti trdnostnih lastnosti lesnih elementov manjšajo, redukcija pa je tem večja, čim dalj trajajoča je obremenitev [17]. Standard EC-5 v povezavi s tem pojavom deli vplive v 4 razrede trajanja: stalne (>10 let), dolgotrajne (do 10 let), srednje dolge (do 6 mesecev), kratkotrajne (do 1 tedna) in trenutne vplive. Vsakemu razredu pripada modifikacijski faktor za trdnost k_{mod} , s katerim pri določanju projektnih vrednosti reduciramo karakteristične. V primeru, da je obtežna kombinacija sestavljena iz različnih razredov trajanja, je potrebno uporabiti faktor k_{mod} , ki pripada tisti z najkrajšim trajanjem [18].

4.2.3 Vpliv vlage

Les je izjemno občutljiv material na spremembe vlažnosti v okolju, saj je higroskopičen material, kar pomeni, da teži k ohranjanju take koncentracije vlažnosti, kakršna je prisotna v okolju, v katerem se

nahaja [17]. To ima izrazito negativen vpliv, saj se z višanjem vlažnosti lesa njegove trdnostne in togostne karakteristike slabšajo. V povezavi s tem EC-5 deli konstrukcije v 3 razrede uporabnosti (točka 2.3.1.3 v standardu [18]), za vsakega od njih pa definira pogoje okolja in v opombah podaja vrednosti vsebnosti vlage v materialih, ki pri večini mehkih vrst lesa ustrezajo takim pogojem. Glede na razred uporabnosti pa predpisuje faktorje k_{def} , s katerimi zmanjšamo togostne lastnosti materiala (npr. modul elastičnosti) in tako upoštevamo vpliv lezenja na deformacije, to pa pride v poštev pri preverjanju mejnih stanj uporabnosti.

4.2.4 Projektne vrednosti vplivov

V splošnem se projektne vrednosti vplivov F_d določijo kot [17]:

$$F_d = \gamma_f F_{rep}, \quad (112)$$

kjer je

$$F_{rep} = \psi F_k. \quad (113)$$

V zgornjem izrazu F_{rep} predstavlja vrednost, ki jo je potrebno upoštevati v pripadajoči kombinaciji vplivov. To je lahko karakteristična vrednost (F_k), kombinacijska vrednost, pogosta vrednost ali navidezno stalna vrednost. Različne vrednosti upoštevamo z množenjem karakteristične vrednosti F_k s koeficienti ψ , ki imajo lahko vrednost 1.0, ψ_0 , ψ_1 ali ψ_2 kot določa standard SIST EN 1990.

4.2.5 Projektne vrednosti učinkov vplivov

Z izrazom učinki vplivov standardi Evrokod označujejo odziv konstrukcije zaradi zunanjih obremenitev in vse z njim povezane količine (npr. notranje sile, pomike) [17]. Po standardu SIST EN 1990 je projektni učinek vplivov v splošni obliki zapišemo kot:

$$E f_d = \gamma_{Sd} E_f \{ \gamma_{f,i} F_{rep,i}; a_d \}, \quad (114)$$

kjer je γ_{Sd} delni faktor, ki zajema negotovosti pri modeliranju učinkov vplivov, $\gamma_{f,i}$ delni faktor za vpliv i , ki zajema morebitno odstopanje vrednosti vpliva od karakteristične vrednosti, a_d pa je projektna vrednost geometrijskih podatkov. Za projektiranje konstrukcij iz lesa in lesnih proizvodov v skladu z EC-5 sta delna faktorja $\gamma_{f,i}$ in $\gamma_{S,d}$ združena v en sam faktor $\gamma_F = \gamma_f \gamma_{Sd}$ [17]. Ob tem se v splošnem v standardih Evrokod pri stalnih vplivih uporaba oznaka delnega faktorja γ_G , pri spremenljivih vplivih pa γ_Q .

4.2.6 Projektne vrednosti lastnosti materialov (točka 2.4.1 v standardu EC-5)

Projektne vrednosti trdnosti se določijo kot:

$$X_d = k_{mod} \frac{X_k}{\gamma_M}, \quad (115)$$

kjer je X_k karakteristična vrednost ustrezne trdnostne lastnosti, k_{mod} faktor, opisan v 4.2.2, γ_M pa delni faktor za material. EC-5 podaja priporočene vrednosti faktorjev γ_M , drugačne vrednosti pa lahko določajo nacionalni dodatki. Za masivni les je priporočena vrednost $\gamma_M = 1.3$.

Projektne vrednosti lastnosti togosti pa se določijo kot

$$E_d = \frac{E_{mean}}{\gamma_M} \quad (116)$$

$$G_d = \frac{G_{mean}}{\gamma_M}, \quad (117)$$

kjer je E_{mean} srednja vrednost modula elastičnosti, G_{mean} pa srednja vrednost strižnega modula. Kot je ugotovljeno v [17], pa zgornji enačbi prideta v poštev le pri računu po linearno elastični teoriji zaradi trenutnih vplivov v mejnem stanju uporabnosti, pri katerem velja $\gamma_M = 1$ ter pri računu po linearno elastični teoriji II. reda. V slednjem primeru lahko redukcijo modula elastičnosti z enačbo (116) razumemo kot upoštevanje zmanjšanja upogibne togosti (in s tem povečanja deformacij), ki sicer v linearno elastični teoriji ni zajeto [11]. Sicer EC-5 v točki 2.2.2 za mejna stanja nosilnosti predpisuje uporabo naslednjih vrednosti lastnosti togosti [18]:

- za linearno elastično analizo prvega reda, kjer na razporeditev notranjih sil ne vpliva razporeditev togosti znotraj konstrukcije, se uporabijo srednje vrednosti,
- za linearno elastično analizo prvega reda, kjer na razporeditev notranjih sil vpliva razporeditev togosti znotraj konstrukcije, se kot končna srednja vrednost uporabi vrednost, prilagojena komponenti obtežbe, ki povzroči največjo napetost glede na trdnost (vrednosti se zmanjšajo z redukcijskimi faktorji k_{def} , kot predpisuje standard),
- za linearno elastično analizo drugega reda konstrukcije se uporabijo projektne vrednosti, ki niso prilagojene trajanju obtežbe (enačbi (116) in (117)).

4.2.7 Projektne vrednosti odpornosti

Projektna vrednost odpornosti se določi kot:

$$R_d = k_{mod} \frac{R_k}{\gamma_M}, \quad (118)$$

kjer je R_k karakteristična vrednost odpornosti.

4.2.8 Zveze med napetostmi in deformacijami

Ker so karakteristične vrednosti materialnih lastnosti določene ob predpostavki linearne zveze med napetostmi in deformacijami vse do porušitve mora biti tudi preverjanje trdnosti posameznih elementov zasnovano na taki zvezi. Izjema so tlačno obremenjeni elementi, kjer se lahko upošteva tudi nelinearna zveza (elasto-plastičen model) [18].

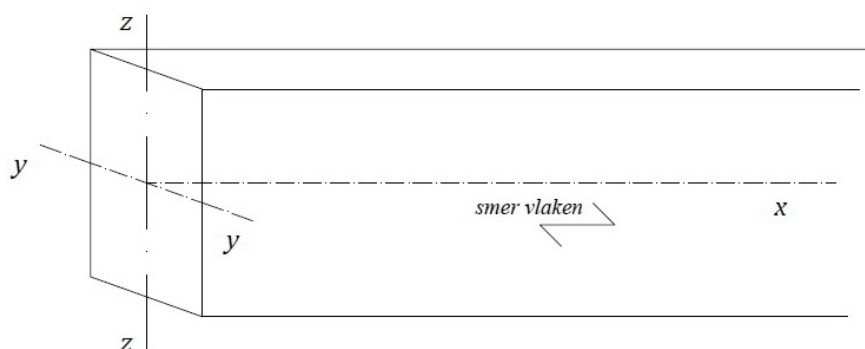
4.2.9 Vpliv velikosti elementov

Na nosilnost lesenih elementov vpliva tudi njihova velikost, kar se pokaže zlasti pri obremenitvah, ki povzročajo krhko porušitev, kot je nateg ter tudi upogib. Eno razlago za ta pojav ponuja tako imenovana teorija najšibkejšega člena, ki predpostavlja, da so po volumnu lesenega elementa naključno porazdeljene napake v materialu, ki zmanjšujejo trdnost [17]. Natezno obremenjen element (ki se glede na obnašanje lesa pri taki obremenitvi ruši krhko) si lahko tako predstavljamo kot verigo, katere člene predstavljajo manjši volumni elementa z različnimi trdnostmi, nosilnost takega elementa pa je enaka nosilnosti najšibkejšega člena. Pri večjih elementih tako ob tej predpostavki obstaja večja verjetnost, da vsebujejo šibek člen, zaradi česar je razmerje med nosilnostjo in velikostjo prečnega prereza manjše kot pri elementih manjših dimenzij. Vpliv na nosilnost pa ima lahko tudi vrsta obremenjevanja in razporeditev napetosti po elementu, a kot ugotavlja [17], kljub številnim raziskavam na to temo še ni prišlo do konsenza o upoštevanju teh efektov in njihovi vključitvi v proces dimenzioniranja. Podrobno je sicer vplive velikosti (tako velikosti prečnega prereza oz. globine elementa kot njegove dolžine) na nosilnost preučeval Buchanan [10].

EC-5 v povezavi s temi pojavi za elemente s pravokotnim prečnim prerezom iz masivnega in lepljenega lameliranega podaja referenčne višine prečnih prerezov pri upogibu oz. širine pri nategu. Za elemente, ki imajo dimenzije manjše od referenčnih, standard dovoljuje povečanje karakterističnih upogibnih ali natezних nosilnosti s faktorji k_h , ki jih določimo z izrazi, podanimi v standardu. V primeru slojnega furnirnega lesa pa standard ločeno podaja referenčno višino pri upogibu ter dolžina elementa pri nategu, skladno s tem pa določa izraze za faktorja k_h in k_l , s katerima lahko v primeru dimenzij, manjših od referenčnih, povečamo karakteristično upogibno oz. natezno trdnost.

4.3 Mejno stanje nosilnosti

Standard EC-5 pri preverjanju mejnih stanj nosilnosti ločuje primere, kjer so elementi izpostavljeni napetostim v smeri samo ene glavne osi in primere, kjer so izpostavljeni kombiniranim vplivom oziroma napetostim, ki potekajo v smeri dveh ali treh glavnih osi elementa (slika 39). Ker so v diplomski nalogi v ospredju izrazi oz. postopki, ki jih EC-5 podaja za stebre pod vplivom kombinirane osno-upogibne obremenitve, se v nadaljevanju osredotočim le na podpoglavje standarda 6.3 – Stabilnost elementov, ki obravnava te primere.



Slika 39: Element z označenimi glavnimi osmi in smerjo poteka vlaken (prirejeno po [16] str.: 5-15)

4.3.1 Stebri pod vplivom kombinirane osno upogibne obremenitve

Kot je bilo v nalogi že večkrat omenjeno, standard EC-5 za preverjanje stabilnosti stebrov uporablja postopek, ki temelji na izračunu redukcijskega koeficienta k_c , s katerim zmanjšamo tlačno nosilnost ter s tem upoštevamo pojave, povezane z izgubo stabilnosti. To omogoča, da opravimo analizo konstrukcije po običajni teoriji I. reda, kontrolo nosilnosti posameznih elementov pa potem preverimo z izrazo, v katerih je tlačna nosilnost zmanjšana na omenjen način. Izrazi za izračun koeficienta k_c temeljijo na numeričnih simulacijah, ki jih je izvajal Blass [4], in katerih princip je opisan v točki 3.1. Simulacije so bile izvedene na velikem številu primerov, pri čemer je bila uporabljena metoda Monte Carlo, v skladu s katero so bile vse lastnosti simuliranih lesenih elementov (kot npr. trdnost, vlažnost, odstopanje od ravnosti, grčavost) vzete kot naključne spremenljivke z določenimi oblikami statističnih porazdelitev, kar ustreza tudi dejanski razpršenosti teh vrednosti, ki je pri lesu kot naravnem materialu mnogo večja kot pri umetnih materialih. Na tak način so v koeficientu k_c že implicitno zajete nepopolnosti elementov, nehomogenost materiala, grčavost in druge lastnosti, ki so bile simulirane na omenjen način.

Prvi korak pri izračunu koeficienta k_c predstavlja določitev relativne vitkosti, ki je v osnovi definirana z enačbo (46), EC-5 pa jo podaja v obliki, ki jo dobimo, če v njej upoštevamo še enačbo (26). Izraza za relativni vitkosti za obe osi upogiba se tako glasita:

$$\lambda_{rel,y} = \frac{\lambda_y}{\pi} \sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0,05}}} \quad (119)$$

in

$$\lambda_{rel,z} = \frac{\lambda_z}{\pi} \sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0,05}}}, \quad (120)$$

kjer je $f_{c,0,k}$ karakteristična tlačna trdnost v smeri vlaken, λ_y in λ_z pa sta geometrijski vitkosti v ustreznih smereh. V zgornjih enačbah nastopa karakteristična vrednost modula elastičnosti, kot je bilo pojasnjeno v točki 0.

Tako lahko zapišem izraza za določitev koeficientov $k_{c,y}$ (za upogib okoli y-osi oz. uklon v smeri z-osi) ter $k_{c,z}$ (za upogib okoli z-osi oz. uklon v smeri y-osi), ki sta podana v standardu:

$$k_{c,y} = \frac{1}{k_y + \sqrt{k_y^2 - \lambda_{rel,y}^2}} \quad (121)$$

$$k_{c,z} = \frac{1}{k_z + \sqrt{k_z^2 - \lambda_{rel,z}^2}}. \quad (122)$$

Vrednosti pomožnih koeficientov k_y in k_z , ki nastopata v zgornjih enačbah, sta določeni z izrazoma:

$$k_y = 0.5(1 + \beta_c(\lambda_{rel,y} - 0.3)) + \lambda_{rel,y}^2$$

$$k_z = 0.5(1 + \beta_c(\lambda_{rel,z} - 0.3)) + \lambda_{rel,z}^2, \quad (123)$$

vrednost β_c pa je enaka $\beta_c = 0.2$ za masivni les ter $\beta_c = 0.1$ za lepljeni lamelirani in slojnati furnirni les.

Redukcija nosilnosti s koeficientom k_c pa ni potrebna v vseh primerih. Če ima obravnavani element obe relativni vitkosti manjši od vrednosti 0.3, kontrolo nosilnosti lahko opravimo z izrazoma iz podpoglavja standarda 6.2.4 (»Kombinacija upogiba in tlaka«):

$$\begin{aligned} \text{Če velja} & \quad \left(\frac{\sigma_{c,0,d}}{f_{c,0,d}}\right)^2 + \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} + k_m \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1 \\ \lambda_{rel,y} \leq 0.3 & \\ \text{in} & \\ \lambda_{rel,z} \leq 0.3: & \quad \left(\frac{\sigma_{c,0,d}}{f_{c,0,d}}\right)^2 + k_m \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} + \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1. \end{aligned} \quad (124)$$

kjer so:

$\sigma_{c,0,d}$	projektna tlačna napetost v smeri vlaken,
$\sigma_{m,y,d}$ in $\sigma_{m,z,d}$	največji projektni upogibni napetosti glede na glavne osi (slika (41)),
$f_{m,y,d}$ in $f_{m,z,d}$	ustrezni projektni upogibni trdnosti, ki se lahko razlikujeta zaradi faktorjev, s katerimi upoštevamo velikost prečnega prereza elementa (točka 4.2.9),
k_m	faktor, s katerim se upošteva zmanjšanje napetosti zaradi možnosti njihove prerazporeditve in vpliva nehomogenosti materiala v prečnem prerezu. Ta vrednost je za elemente iz masivnega, lepljenega lameliranega in slojnega furnirnega pravokotnega prečnega prereza enaka 0.7, za druge prečne prereze in elemente iz drugih lesnih konstrukcijskih proizvodov pa je enaka 1.

V zgornjih enačbah sta člena s tlačnimi napetostmi kvadrirana, s čimer standard EC-5 upošteva plastično obnašanje lesa v tlaku in s tem povečano nosilnost – tu gre za primer, ko je za odpornost merodajna trdnost materiala.

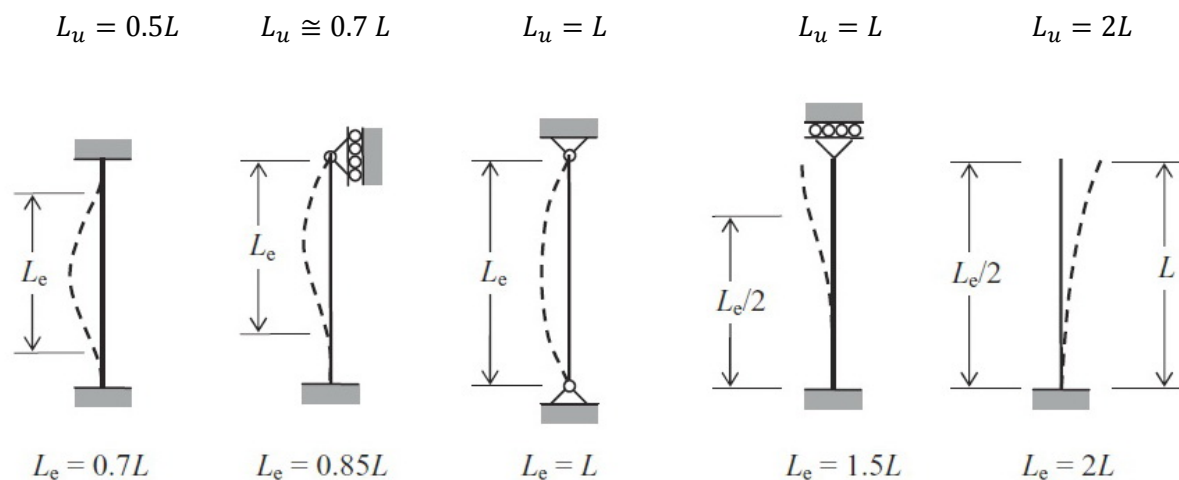
Končno pa zapišem še kontroli, ki jima morajo zadostiti elementi, pri katerih je vsaj ena od relativnih vitkosti večja od 0.3, kar pomeni, da obstaja nevarnost uklona elementa:

$$\begin{aligned} \text{Če velja} & \quad \frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,y}f_{c,0,d}} + \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} + k_m \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1 \\ \lambda_{rel,y} > 0.3 & \\ \text{in/ali} & \\ \lambda_{rel,z} > 0.3: & \quad \frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,z}f_{c,0,d}} + k_m \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} + \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1. \end{aligned} \quad (125)$$

Opisan postopek preverjanja stabilnosti je znan kot metoda uklonske dolžine (ang. »Effective Length Method«) [13], saj temelji na določitvi vitkosti λ_y in λ_z (glej enačbi (119) in (120)), ki sta funkciji

uklonske dolžine. Kot je bilo pojasnjeno v točki 2.2.3, je uklonska dolžina odvisna od načina podpiranja oz. robnih pogojev. V primeru lesenih elementov so ti robni pogoji težje določljivi kot v primeru drugih materialov, saj so vse zveze nekoliko podajne, stopnja vpetosti pa ni točno znana. Iz tega razloga so uklonske dolžine lesenih elementov večje od teoretičnih vrednosti oz. uklonskih dolžin elementov iz drugih materialov [16]. EC-5 vrednosti uklonskih dolžin ne podaja, priporočene pa je mogoče najti v literaturi. Spodaj so za nekaj primerov podpiranja prikazane vrednosti uklonskih dolžin, ki jih podaja [17]. Nad njimi za primerjavo podajam tudi teoretične vrednosti za primere podpiranja oziroma robne pogoje. Na sliki iz vira ima oznaka L_e enak pomen kot L_u , ki sem kot oznako uklonske dolžine uporabljal sam.

Teoretične vrednosti:



Slika 40: Priporočene vrednosti uklonskih dolžin ([17]: str. 152)

5 REZULTATI PROGRAMA IN PRIMERJAVE

5.1 Materiali in izbira parametrov

V izračunih sem poskušal simulirati obnašanje lesenih elementov štirih različnih trdnostnih razredov, in sicer C16, C24 in C30, kot jih določa SIST EN 338:2004. Pri tem oznaka C označuje les iglavcev (ang. "conifers"), ki jih omenjen standard razdeli v 12 trdnostnih razredov, poleg tega pa določa še 6 trdnostnih razredov lesa listavcev, ki so označeni z oznako D (ang. "deciduous") [16]. Številka razreda pa je določena glede na karakteristično upogibno trdnost v MPa , ki pripada temu razredu (to je razvidno tudi iz preglednice 7 spodaj). Za les je značilno, da z naraščanjem kvalitete narašča tudi razmerje med natezno in tlačno trdnostjo, kar ima za posledico velike razlike v obnašanju pod vplivom osno-upogibne obremenitve, kot bo razvidno v nadaljevanju. V spodnji preglednici so zbrane karakteristične vrednosti lastnosti za izbrane trdnostne razrede, kot jih določa zgoraj omenjen standard in ki so relevantne v primeru osno-upogibne obremenitve.

Preglednica 7: Karakteristične vrednosti materialnih lastnosti za izbrane trdnostne razrede lesa (SIST EN 338:2004)

Količina [kN/cm^2]	C16	C24	C30
$f_{m,k}$	1.6	2.4	3.0
$f_{c,0,k}$	1.7	2.1	2.3
$f_{t,0,k}$	1.0	1.4	1.8
E_{mean}	800	1100	1200
$E_{0.05}$	540	740	800

Rezultati, ki jih dobim z uporabljenim materialnim modelom (točka 3.3.2) so v celoti odvisni od izbire parametrov tega modela. Prvi korak v izračunih tako predstavlja izbira takih parametrov, ki ustrezajo obravnavanemu trdnostnemu razredu. Ti parametri so natezna trdnost f_t , tlačna trdnost f_c , modul elastičnosti E , deformacija pri najvišji tlačni napetosti ϵ_c , mejna tlačna deformacija ϵ_u in asimptotična tlačna trdnost $f_{c,y}$. Za pridobivanje rezultatov, ki bi se najbolj približali dejanskemu stanju, bi bilo nujno kalibrirati model na podlagi eksperimentalnih preiskav, ker pa sam nisem imel te možnosti, sem si pomagal s podatki iz literature. Obširno je tematiko dimenzioniranja lesenih elementov pod vplivom osno-upogibne obremenitve obdelal že Buchanan [10], ki je tudi razvil model za simuliranje obnašanja lesenih elementov pod temi pogoji. Čeprav ta model ni temeljil na Glosovi funkciji napetosti, pa jo med drugimi opiše ter podrobno razloži vpliv parametrov, ki v tem modelu nastopajo, ter navaja tudi ocene primernih vrednosti. V novejšem času pa se je z isto tematiko ukvarjalo več raziskovalcev ([11], [13] in [12]). Tudi v teh primerih so avtorji izvajali numerične simulacije na modelih, ki temeljijo na deformacijskem stanju prečnih prereзов (ang. »strain-based model«), v teh primerih z uporabo Glosove funkcije in metode Monte Carlo (modeliranje lastnosti s slučajnimi spremenljivkami). Ta dela so se izkazala za koristen vir podatkov, na podlagi katerih sem prišel do vrednosti, ki sem jih pri računu z računalniškim programom uporabil sam. Opis parametrov je podan v naslednjih točkah, nato pa so za vsak uporabljen trdnosti razred prikazane izbrane vrednosti in utemeljitve za tako izbiro.

5.1.1 Natezna trdnost

Dejanska vrednost natezne trdnosti pri lesenih elementih močno variira, kar je med drugim tudi posledica vplivov velikosti (glej točko 4.2.9). Pri modeliranju upogiba pa natezna trdnost, ki pripada

določenemu trdnostnemu razredu, ni relevanten podatek. Ta vrednost namreč velja v primeru, ko je celoten prerez izpostavljen nateznim napetostim, pri čemer omenjeni vplivi velikosti pridejo do izraza v polni meri. Zato so karakteristične vrednosti nateznih trdnosti precej nižje od vrednosti nateznih napetosti, ki jih lahko prevzamejo skrajna vlakna prereza pri upogibu. Iz tega razloga je v teh primerih potrebno upoštevati natezno trdnost skrajnih vlaken pri upogibu, $f_{t,m,0}$. Kot primerna ocena je v viru [12] navedena vrednost, ki je nekoliko višja od upogibne trdnosti. Za nižje trdnostne razrede je navedena oceno $f_{t,m,0} = 1.05 f_m$, za višje pa $f_{t,m,0} = 1.1 f_m$. V viru [4] pa je podana ocena natezne nosilnosti vlaken pri upogibu $f_{t,m,0} = 1.5 f_m$. Sam sem uporabil vrednosti v navedenih mejah, pri čemer sem poskušal izbrati take, pri katerih sem dobil približno enako upogibno odpornost prereza, kot sledi iz linearne teorije:

$$M_{Rk} = W f_{m,k}, \quad (126)$$

kjer je W odpornostni moment prereza in je enak $W = (h^2 b)/6$, $f_{m,k}$ pa karakteristična upogibna trdnost. Zaradi primerljivosti rezultatov sem za primerjavo uporabljal karakteristične vrednosti in nisem upošteval delnih (varnostnih) in modifikacijskih faktorjev, ki jih sicer predpisujejo standardi Evrokod.

5.1.2 Tlačna trdnost

Tudi trdnost tlačne cone pri kombinaciji tlaka in upogiba, $f_{c,m,0}$, je načeloma drugačna od osnovne tlačne trdnosti v smeri vlaken $f_{c,0}$, ki pripada določenemu trdnostnemu razredu lesa. Ker pa v tlaku vplivi velikosti ne igrajo velike vloge, ter tudi zaradi prerazporeditve napetosti pa sta ti dve vrednosti skoraj povsem enaki [11]. Zato sem v vseh primerih za vrednost tlačne trdnosti izbral kar karakteristične vrednosti $f_{c,0,k}$, ki jih za posamezne trdnostne razrede določa SIST EN 338:2004.

5.1.3 Modul elastičnosti

Modul elastičnosti je relativno lahko določljiva lastnost in jo lahko s sodobnimi metodami (tudi neporušnimi, npr. z ultrazvočnimi preiskavami) dokaj zanesljivo določimo [12]. To je tudi tista vrednost, ki se pri določevanju karakterističnih vrednosti trdnostnih razredov lesa v skladu z SIST EN 338:2004 eksperimentalno določi, zato lahko v materialnem modelu upoštevam direktno vrednosti, ki jih podaja ta standard.

Nekoliko nejasna je le izbira med srednjo in karakteristično vrednostjo. SIST EN 1995-1-1 v točki 6.3.1(2)P predpisuje uporabo karakteristične vrednosti modula elastičnosti $E_{0,05}$ za preverjanje stabilnosti, kar pa velja pri uporabi metode uklonske dolžine (glej 4.3.1). V primeru analize po linearno elastični teoriji drugega reda (ki jo lahko razumemo kot alternativo metodi uklonske dolžine, glej npr. [13]) pa standard v točki 2.2.2(1)P predpisuje uporabo projektne vrednosti modula elastičnosti (glej 4.2.6). Ob tem standard ne omenja nelinearno elastične analize po teoriji II. reda, kakršno sem izvajal s programom. Glede na zgoraj predpisani vrednosti bi bilo možno sklepati, da z nelinearno elastično analizo dobimo primerljive rezultate, če uporabimo kar srednjo vrednost modula elastičnosti, saj je v njej padanje njegove vrednosti z naraščanjem obremenitve že vključeno. Sem pa zaradi te nejasnosti račune izvedel z obema vrednostma ter podal primerjave.

Z izbrano natezno trdnostjo in modulom elastičnosti je zaradi elastičnega obnašanja v nategu določena tudi mejna natezna deformacija ϵ_t , ki predstavlja zgornjo mejo deformacij pri računu ravnotežja prereza v Reševalniku, ki je robne deformacije ne smejo preseči.

5.1.4 Deformacija pri maksimalni tlačni napetosti

Ta podatek sem podobno kot tlačno in natezno trdnost dobil iz literature. V [4] je vrednost deformacije pri maksimalni tlačni napetosti ocenjena na $\epsilon_c \sim 0.8-1.2\%$, kar pa se je izkazalo kot prevelika vrednost, s katero nisem prišel do primerljivih rezultatov. Na podlagi obsežnih raziskav, ki jih je opravil Glos, je v viru [10] podano $\epsilon_c = 1.35\epsilon_0$, kjer je ϵ_0 deformacija, ki bi ustrezala linearni zvezi v tlaku:

$$\epsilon_0 = \frac{f_{c,0,k}}{E}. \quad (127)$$

V viru [12] je podobna vrednost in sicer $\epsilon_c = 1.25\epsilon_0$. Ta vrednost se je izkazala za ustrezno, saj z njeno uporabo dobim tudi dokaj dobro ujemanje upogibne nosilnosti prereza v primerjavi z elastičnim računom. Zato sem v vseh primerih uporabil $\epsilon_c = 1.25\epsilon_0$.

5.1.5 Mejna tlačna deformacija

Edino oceno mejne tlačne deformacije sem našel v viru [4], kjer je navedena ocena $\epsilon_u \sim 3\epsilon_c$. Ostali avtorji, ki so pri numeričnih simulacijah uporabljali Glosovo funkcijo napetosti, te vrednosti sploh ne podajajo in je očitno niso uporabljali. Sam sem zato vzel zgoraj navedeno vrednost, ki sem jo pri računu ravnotežja v prerezu uporabil kot mejno tlačno deformacijo, katere robne deformacije v prerezu ne smejo preseči.

Ker je vrednost ϵ_u tako odvisna od deformacije ϵ_c sledi, da je mejna tlačna napetost odvisna od izbrane tlačne trdnosti in modula elastičnosti (glej prejšnjo točko).

5.1.6 Asimptotična tlačna trdnost

Vrednost asimptotične oz. rezidualne tlačne trdnosti $f_{c,y}$ vpliva na naklon padajoče veje v σ - ϵ diagramu (slika 34), to pa ima, kot ugotavlja Buchanan [10], vpliv na naklon padajoče veje v zvezi $\sigma(\epsilon)$ ter na obliko interakcijskega diagrama momenta in osne sile. V viru [4] je ta vrednost ocenjena na $f_{c,y} \sim 0.8f_c$, sam pa sem prevzel vrednost, ki jo je predlagal Theiler [12] in sicer $f_{c,y} = 0.85f_c$.

5.1.7 Izbrane vrednosti

Kot je bilo zgoraj omenjeno sem z izbranimi parametri želel doseči podobno upogibno nosilnost prereza, kot sledi iz elastične analize (enačba (126)) ob uporabi karakteristične vrednosti upogibne trdnosti $f_{m,k}$ po SIST EN 338:2004. Upogibno nosilnost prereza s programom lahko enostavno določim in sicer uporabim pripravljeno proceduro za račun ravnotežja v prerezu. Za razliko od računa ravnotežja pa v tem primeru ni potreben račun odziva elementa in uravnoteženje dobljenih sil, zadostujejo le podatki o prerezu in materialu ter podana funkcija $\sigma(\epsilon)$. Kot ciljno celico potem določim celico, v kateri je izračunan moment (kot rezultanta napetosti v prerezu), pogoj za rešitev pa je maksimalna vrednost v tej celici, ki jo Reševalnik išče s spreminjanjem robnih deformacij. Omejitve

glede slednjih ostanejo enake, dodatni pogoj pa je vrednost osne sile, ki mora biti v tem primeru enaka 0.

Na tak način pa lahko pridem tudi do interakcijskih diagramov upogibnega momenta in osne sile, s katerimi so na jasn način prikazane mejne kombinacije omenjenih vrednosti, ki jih prerez lahko prenese. Če pri različnih izbranih vrednostih osne sile na zgoraj opisan način iščem maksimalni moment, pridem do interakcijskih diagramov.

V naslednjih točkah so za vse tri izbrane trdnostne razrede podane vrednosti izbranih parametrov ter interakcijski diagrami, ki jih s temi vrednostmi dobim. Pri tem sem upogibno nosilnost in interakcijske diagrame računal pri dimenzijah prereza $h = b = 20 \text{ cm}$.

5.1.7.1 Les trdnostnega razreda C16

Preglednica 8: Vrednosti parametrov za les trdnostnega razreda C16 (upoštevana srednja vrednosti modula elastičnosti)

C16 (E_{mean})		
Parameter	Izraz	Vrednost
Natezna trdnost	$f_t = 1.05f_{m,k}$	1.68 kN/cm ²
Tlačna trdnost	$f_c = f_{c,k}$	1.7 kN/cm ²
Modul elastičnosti	$E = E_{mean}$	800 kN/cm ²
Deformacija pri maksimalni napetosti	$\epsilon_c = 1.25f_{c,k}/E_{mean}$	2.66‰
Asimptotična tlačna trdnost	$f_{c,y} = 0.85f_c$	1.45 kN/cm ²
Mejna tlačna deformacija	$\epsilon_u = 3\epsilon_c$	7.97‰
Mejna natezna deformacija	$\epsilon_t = f_t/E_{mean}$	2.10‰
Upogibna nosilnost prereza (program)	-	22.1 kNm

Preglednica 9: Vrednosti parametrov za les trdnostnega razreda C16 (upoštevana karakteristična vrednosti modula elastičnosti)

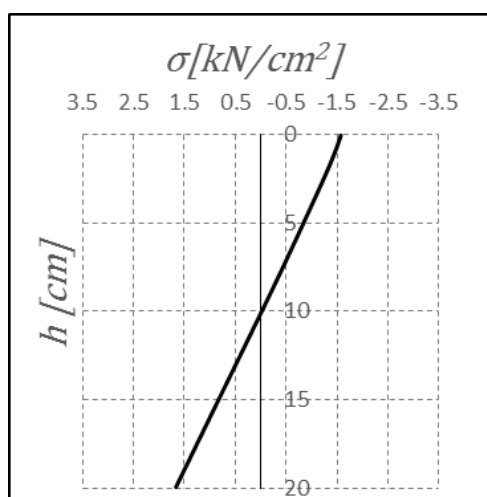
C16 ($E_{0.05}$)		
Parameter	Izraz	Vrednost
Natezna trdnost	$f_t = 1.05f_{m,k}$	1.68 kN/cm ²
Tlačna trdnost	$f_c = f_{c,k}$	1.7 kN/cm ²
Modul elastičnosti	$E = E_{0.05}$	540 kN/cm ²
Deformacija pri maksimalni napetosti	$\epsilon_c = 1.25f_{c,k}/E_{0.05}$	3.94‰
Asimptotična tlačna trdnost	$f_{c,y} = 0.85f_c$	1.45 kN/cm ²
Mejna tlačna deformacija	$\epsilon_u = 3\epsilon_c$	11.81‰
Mejna natezna deformacija	$\epsilon_t = f_t/E_{0.05}$	3.11‰
Upogibna nosilnost prereza (program)	-	22.1 kNm

Kot je bilo pojasnjeno v točkah 5.1.3 in 5.1.5 je z vrednostjo modula elastičnosti določena tako natezna kot tlačna mejna deformacija. Ker sem račun izvajal pri srednji in karakteristični vrednosti zato v zgornjih preglednicah podajam parametre, ki pripadajo obema vrednostma. Kot pa je razvidno to nima vpliva na maksimalni moment oz. upogibno nosilnost prereza, saj se zaradi načina določitve mejnih deformacij le-te pri manjšem modulu elastičnosti preprosto povečajo, nosilnost prereza (pri enakih trdnostih) pa ostaja enaka.

V primeru izbranega prečnega prereza $h = b = 20 \text{ cm}$ je upogibna nosilnost po linearno elastični teoriji določena z enačbo (126):

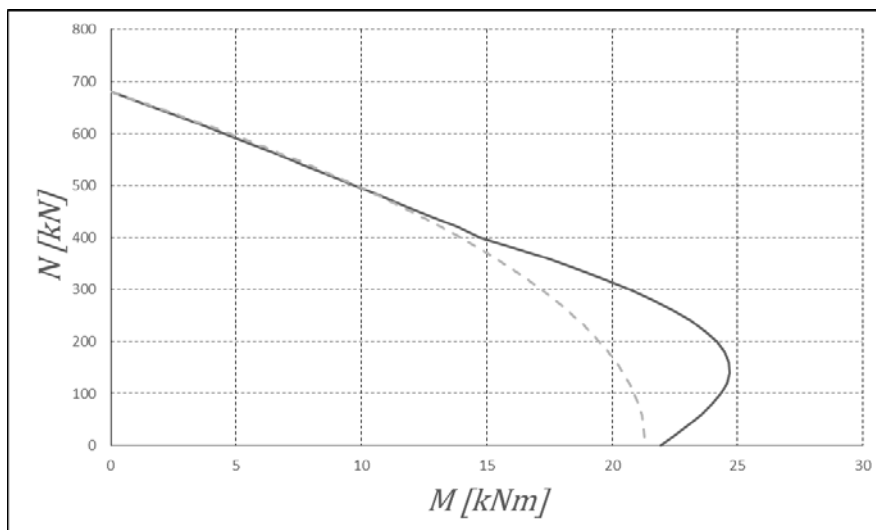
$$M_{Rk} = \frac{20^3}{6} \cdot \frac{1.6}{100} = 21.3 \text{ kNm},$$

kar je blizu izračunani vrednosti s programom 22.1 kNm .



Slika 41: Napetosti v prerezu pri maksimalnem momentu v primeru čistega upogiba (les trdnostnega C16, upoštevana srednja vrednost modula elastičnosti)

Na sliki 41 je direktno iz programa prikazano napetostno stanje v prerezu pri izračunanem maksimalnem momentu pri čistem upogibu. Kot je razvidno je potek napetosti praktično linearen, kar je posledica dejstva, da je za omenjen trdnostni razred razmerje med tlačno in natezno trdnostjo skoraj enako 1. Ker je z doseženo mejno natezno deformacijo nosilnost prereza izčrpana sledi, da se plastične deformacije v tlačnem delu ne morejo razviti. Slika 42 pa prikazuje izračunani interakcijski diagram (v tlačnem območju), na katerem je tudi interakcijska krivulja, ki jo določa EC-5 z enačbama (124). Kot je razvidno se krivulji pri vrednosti osne sile, višji od približno $2/3$ osne tlačne odpornosti pokrivata, pri nižjih vrednostih pa po izračunani krivulji dobim precej višje vrednosti momentov, ki jih prerez lahko prenese.



Slika 42: Interakcijski diagram v tlačnem območju (les trdnostnega razreda C16). Črtkano je prikazan pogoj interakcije, ki sledi iz enačb standarda EC-5

5.1.7.2 Les trdnostnega razreda C24

Preglednica 10: Vrednostni parametrov za les trdnostnega razreda C24 (upoštevana srednja vrednosti modula elastičnosti)

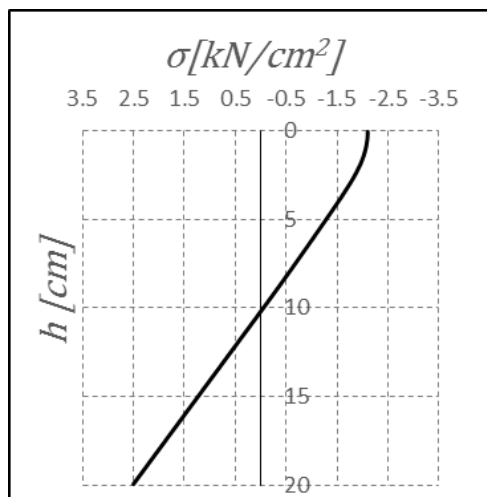
C24 (E_{mean})		
Parameter	Izraz	Vrednost
Natezna trdnost	$f_t = 1.05f_{m,k}$	2.52 kN/cm ²
Tlačna trdnost	$f_c = f_{c,k}$	2.1 kN/cm ²
Modul elastičnosti	$E = E_{mean}$	1100 kN/cm ²
Deformacija pri maksimalni napetosti	$\epsilon_c = 1.25f_{c,k}/E_{mean}$	2.39‰
Asimptotična tlačna trdnost	$f_{c,y} = 0.85f_c$	1.79 kN/cm ²
Mejna tlačna deformacija	$\epsilon_u = 3\epsilon_c$	7.16‰
Mejna natezna deformacija	$\epsilon_t = f_t/E_{mean}$	2.29‰
Upogibna nosilnost prereza (program)	-	32.6 kNm

Preglednica 11: Vrednostni parametrov za les trdnostnega razreda C24 (upoštevana karakteristična vrednosti modula elastičnosti)

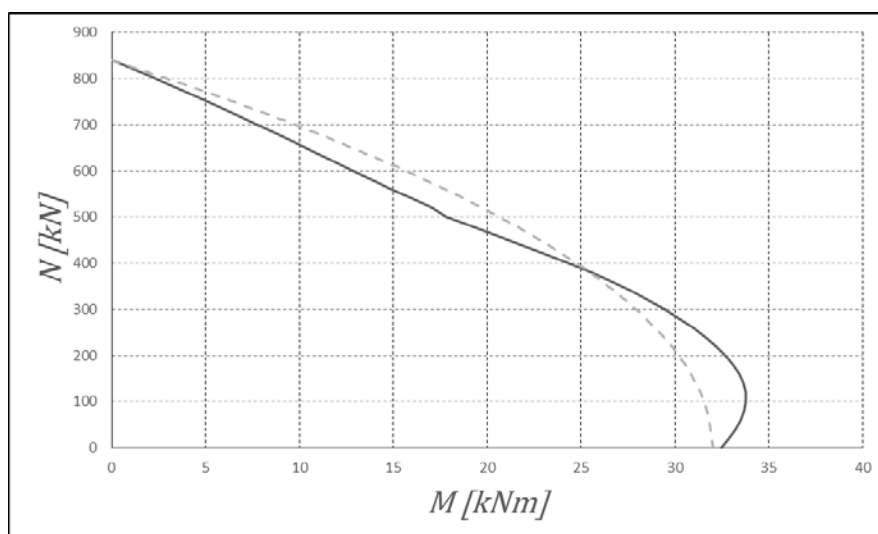
C24 ($E_{0.05}$)		
Parameter	Izraz	Vrednost
Natezna trdnost	$f_t = 1.05f_{m,k}$	2.52 kN/cm ²
Tlačna trdnost	$f_c = f_{c,k}$	2.1 kN/cm ²
Modul elastičnosti	$E = E_{0.05}$	740 kN/cm ²
Deformacija pri maksimalni napetosti	$\epsilon_c = 1.25f_{c,k}/E_{0.05}$	3.55‰
Asimptotična tlačna trdnost	$f_{c,y} = 0.85f_c$	1.79 kN/cm ²
Mejna tlačna deformacija	$\epsilon_u = 3\epsilon_c$	10.64‰
Mejna natezna deformacija	$\epsilon_t = f_t/E_{0.05}$	3.41‰
Upogibna nosilnost prereza (program)	-	32.6 kNm

Po linearno elastični teoriji dobimo naslednjo vrednost karakteristične upogibne odpornosti za dane dimenzije prereza:

$$M_{Rk} = \frac{20^3}{6} \cdot \frac{2.4}{100} = 32.0 \text{ kNm}.$$



Slika 43: Napetosti v prerezu pri maksimalnem momentu v primeru čistega upogiba (les trdnostnega C24, upoštevana srednja vrednost modula elastičnosti)



Slika 44: Interakcijski diagram v tlačnem območju (les trdnostnega razreda C24). Črtkano je prikazan pogoj interakcije, ki sledi iz enačb standarda EC-5

V tem primeru napetosti na tlačnem robu prereza (slika 43) preidejo v plastično obočje, še preden je v nateznem delu dosežena natezna trdnost (oz. mejna natezna deformacija). To je posledica večjega razmerja natezne proti tlačni trdnosti kot v primeru lesa trdnostnega razreda C16. Interakcijski diagram s slike 44 pa kaže odstopanja od pogoja interakcije iz EC-5 v celotnem območju, pri čemer so dopustni upogibni momenti pri osni obremenitvi do približno polovice tlačne odpornosti nekoliko večji kot jih dopušča pogoj iz EC-5 (na sliki prikazan črtkano), pri višjih vrednostih osnih obremenitev pa nekoliko manjši.

5.1.7.3 Les trdnostnega razreda C30

Preglednica 12: Vrednostni parametrov za les trdnostnega razreda C30 (upoštevana srednja vrednosti modula elastičnosti)

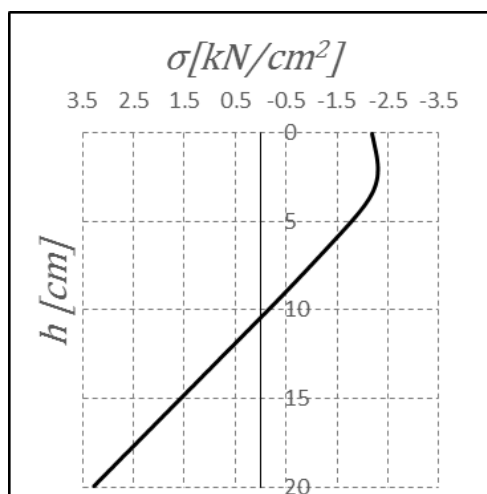
C30 (E_{mean})		
Parameter	Izraz	Vrednost
Natezna trdnost	$f_t = 1.1f_{m,k}$	3.3 kN/cm ²
Tlačna trdnost	$f_c = f_{c,k}$	2.3 kN/cm ²
Modul elastičnosti	$E = E_{mean}$	1200 kN/cm ²
Deformacija pri maksimalni napetosti	$\epsilon_c = 1.25f_{c,k}/E_{mean}$	2.40‰
Asimptotična tlačna trdnost	$f_{c,y} = 0.85f_c$	1.96 kN/cm ²
Mejna tlačna deformacija	$\epsilon_u = 3\epsilon_c$	7.19‰
Mejna natezna deformacija	$\epsilon_t = f_t/E_{mean}$	2.75‰
Upogibna nosilnost prereza (program)	-	40.9 kNm

Preglednica 13: Vrednostni parametrov za les trdnostnega razreda C30 (upoštevana karakteristična vrednosti modula elastičnosti)

C30 ($E_{0.05}$)		
Parameter	Izraz	Vrednost
Natezna trdnost	$f_t = 1.1f_{m,k}$	3.3 kN/cm ²
Tlačna trdnost	$f_c = f_{c,k}$	2.3 kN/cm ²
Modul elastičnosti	$E = E_{0.05}$	800 kN/cm ²
Deformacija pri maksimalni napetosti	$\epsilon_c = 1.25f_{c,k}/E_{0.05}$	3.59‰
Asimptotična tlačna trdnost	$f_{c,y} = 0.85f_c$	1.96 kN/cm ²
Mejna tlačna deformacija	$\epsilon_u = 3\epsilon_c$	10.08‰
Mejna natezna deformacija	$\epsilon_t = f_t/E_{0.05}$	4.13‰
Upogibna nosilnost prereza (program)	-	40.9 kNm

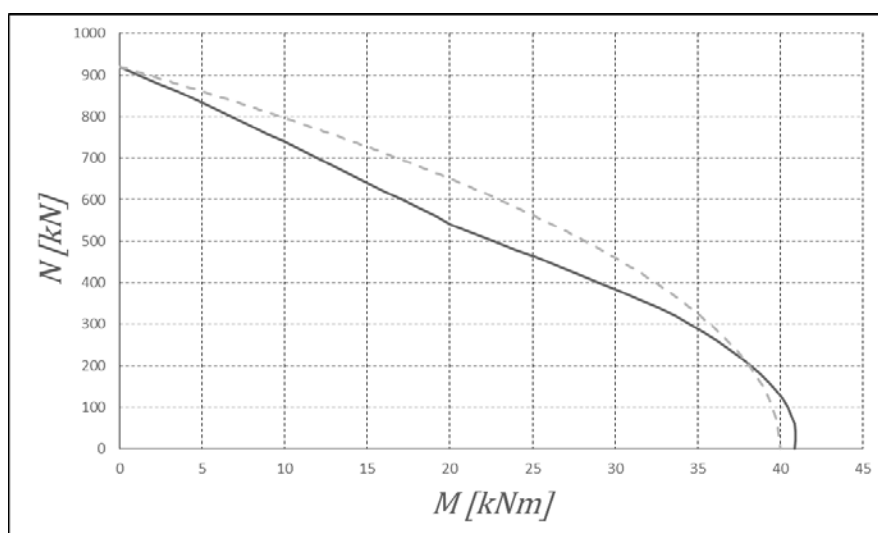
Za ta trdnostni razred sem v skladu z obrazložitvijo v točki 5.1.1 upošteval nekoliko večjo natezno trdnost, s tem pa sem dobil podobno upogibno nosilnost kot sledi iz linearno elastične teorije:

$$M_{Rk} = \frac{20^3}{6} \cdot \frac{2.3}{100} = 40.0 \text{ kNm}.$$



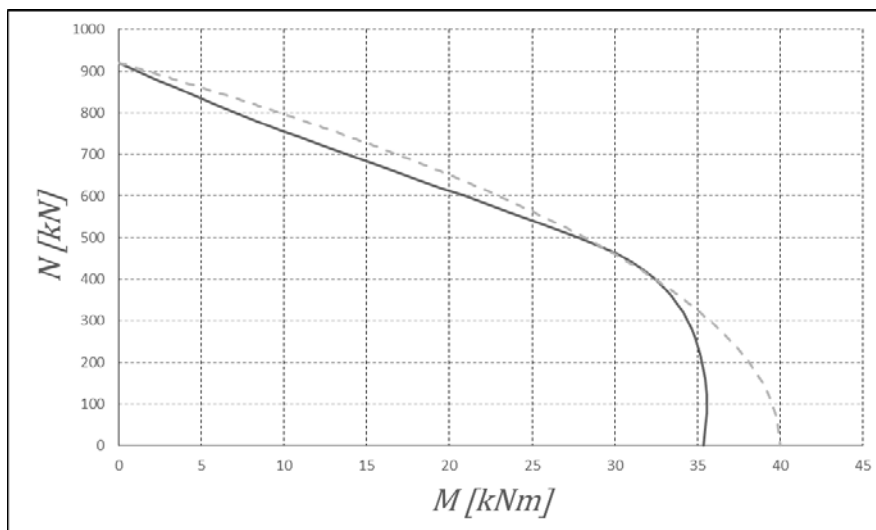
Slika 45: Napetosti v prerezu pri maksimalnem momentu v primeru čistega upogiba (les trdnostnega razreda C30, upoštevana srednja vrednost modula elastičnosti)

Kot je razvidno s slike 45 v tem primeru pride do še bolj očitne plastifikacije v tlačni coni.



Slika 46: Interakcijski diagram v tlačnem območju (les trdnostnega razreda C30). Črtkano je prikazan pogoj interakcije, ki sledi iz enačb standarda EC-5

Tudi interakcijski diagram na sliki 46 ima v tem primeru bistveno drugačno obliko, kar kaže na velik vpliv razmerja med tlačno in natezno trdnostjo. V tem primeru izračunan diagram interakcije N/M_y glede na interakcijski pogoj iz EC-5 v celotnem območju dopušča manjše kombinacije momenta in osne sile. Glede na velika odstopanja se postavlja vprašanje ustreznosti izbranih deformacijskih parametrov za ta trdnosti razred lesa, a s spremembami je težko doseči ujemanje krivulj z zgornje slike. S povečanjem tlačne deformacije pri največji tlačni napetosti ϵ_c lahko npr. dosežem boljše ujemanje krivulj na srednjem delu, a to vpliva na zmanjšanje odpornosti pri čistem upogibu. S povečanjem ϵ_c na 8‰ tako ta odpornost znaša le še 35.6 kNm, interakcijski diagram za tako vrednost deformacije pri maksimalni tlačni napetosti pa je prikazan na sliki 47.



Slika 47: Interakcijski diagram v tlačnem območju za les trdnostnega razreda C30 pri povečanju parametra ϵ_c na 8‰

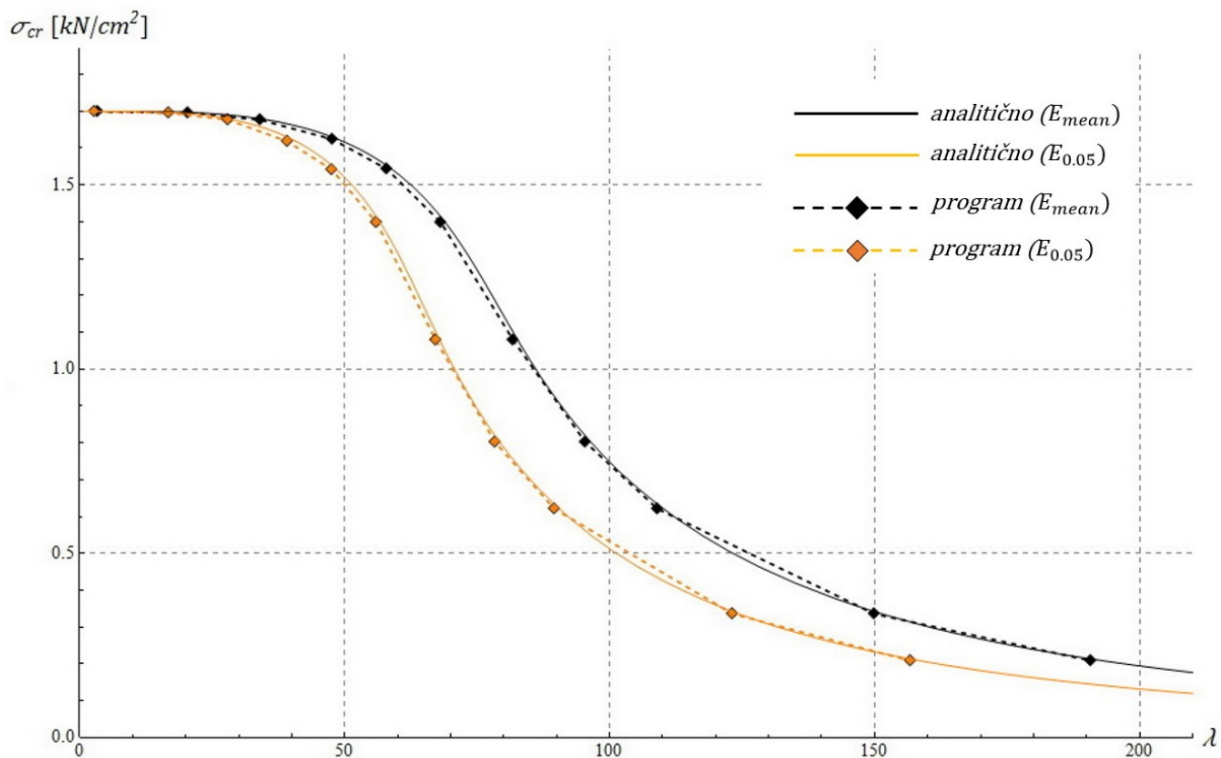
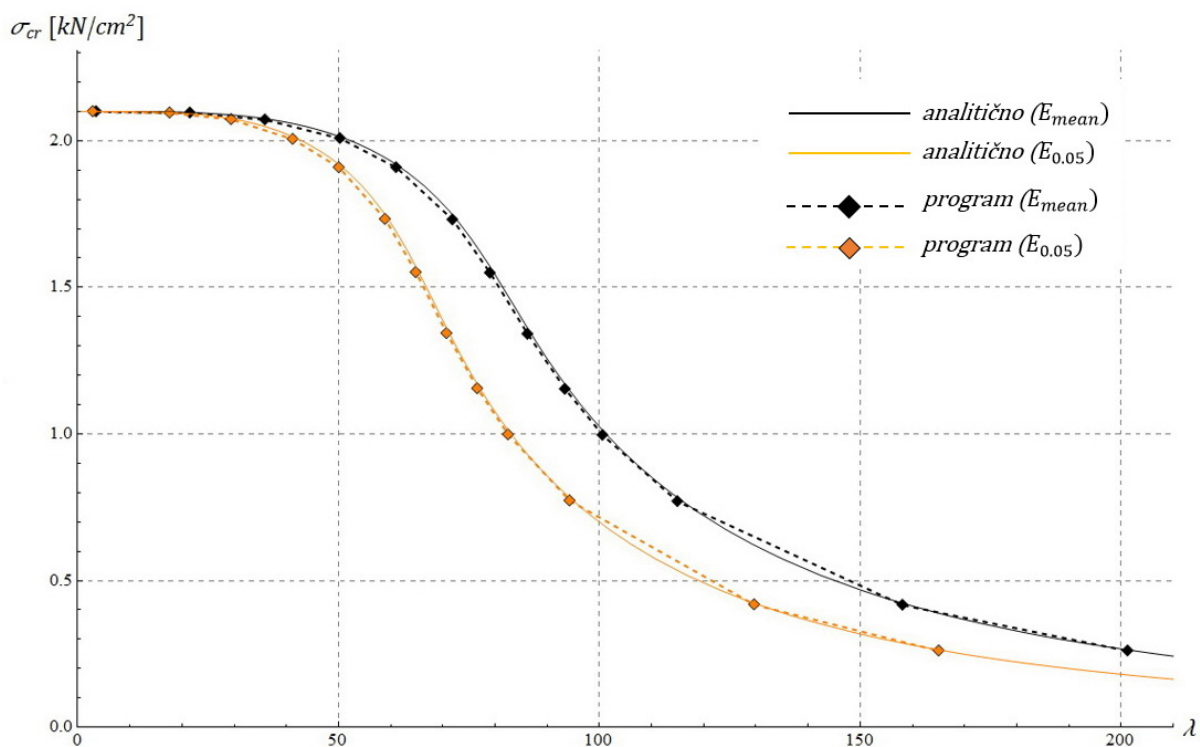
5.2 Uklonske krivulje

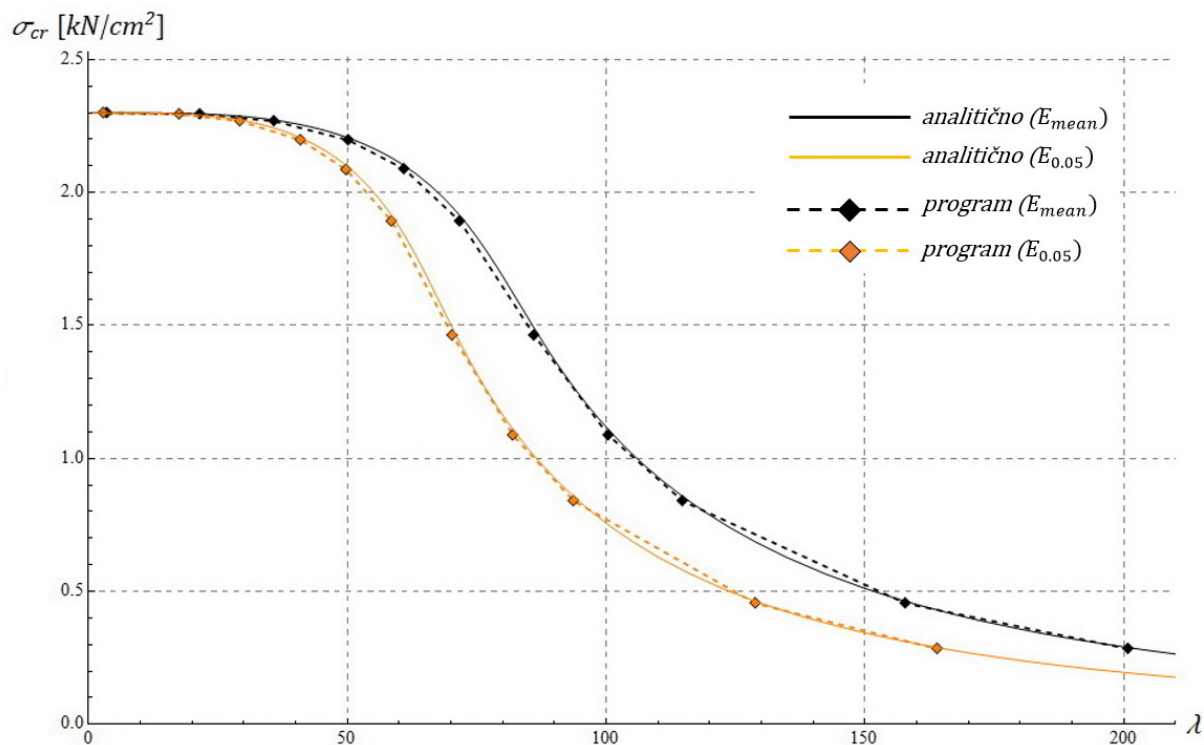
Če pri različnih vitkosti elementa določim nelinearno elastično kritično obremenitev (točka 3.3.6) lahko rezultate predstavim v obliki uklonskih krivulj. Za vsak trdnostni razred sem izračunal tri take krivulje in sicer z upoštevanjem treh različnih začetnih nepopolnosti, ki so predpostavljene v obliki sinusne krivulje z maksimalnim odstopanjem od ravnosti e_0 :

- $e_0 = 0.001 \text{ cm}$
- $e_0 = 0.001L$ in
- $e_0 = 0.0025L$.

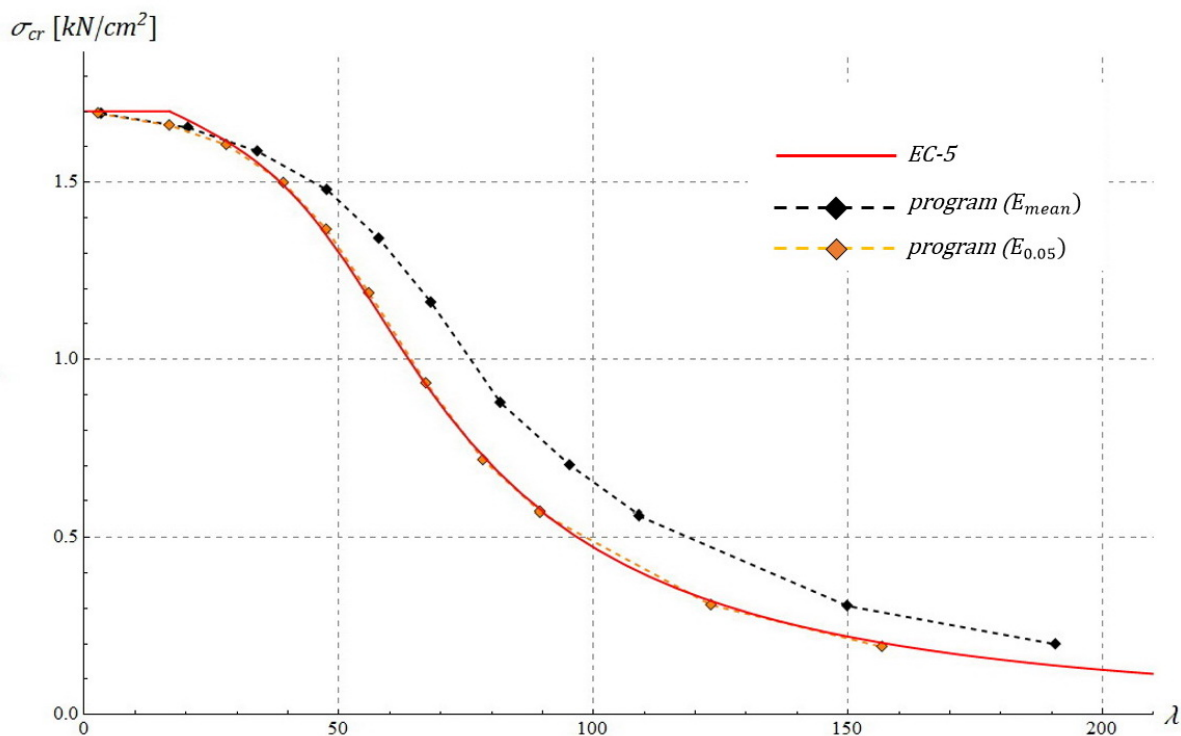
Prva vrednost predstavlja približek idealno ravnega stebra, zato te vrednosti primerjam z analitično določeno krivuljo po enačbi (43), ki velja za tak primer. Izrisal sem jo s pomočjo programa Mathematica in sicer po istem principu, kot krivuljo na sliki 18, s tem da sem tu izhajal iz enačbe za napetost (93). Rezultate, ki sledijo z upoštevanjem drugih dveh vrednosti e_0 pa primerjam s krivuljo, ki sledi iz pogoja za kontrolo stabilnosti standarda EC-5, ki ga določa prva od enačb (125), v kateri upoštevam $\sigma_{m,y,d} = \sigma_{m,z,d} = 0$. Tako stanje torej ustreza čistemu tlaku, vrednosti pa so primerljive s tistimi iz programa zato, ker so v enačbi preko redukcijskega koeficienta k_c med drugim zajete tudi začetne nepopolnosti elementov, kot je bilo pojasnjeno v točki 4.3.1. Vrednost $e_0 = 0.0025L$ sem izbral zato, ker je to najmanjša vrednost, ki jo je po standardu EC-5 (točka 5.4.4(2) v standardu) potrebno upoštevati pri analizi po teoriji II. reda.

Za vsak primer trdnostnega razreda sem s programom krivulje izračunal enkrat z upoštevanjem srednje vrednosti modula elastičnosti E_{mean} in drugič z upoštevanjem karakteristične vrednosti $E_{0,05}$, torej sem za vsak razred skupno dobil 6 takih krivulj, ki jih prikazujem na spodnjih slikah.

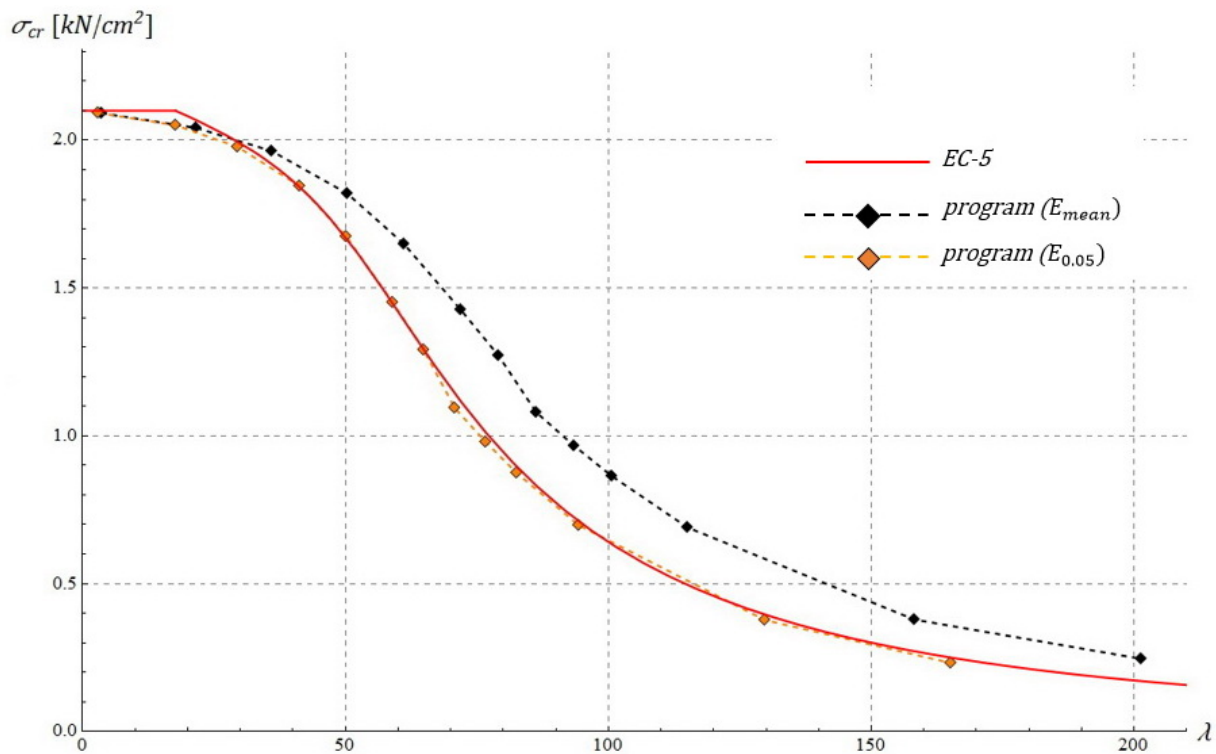
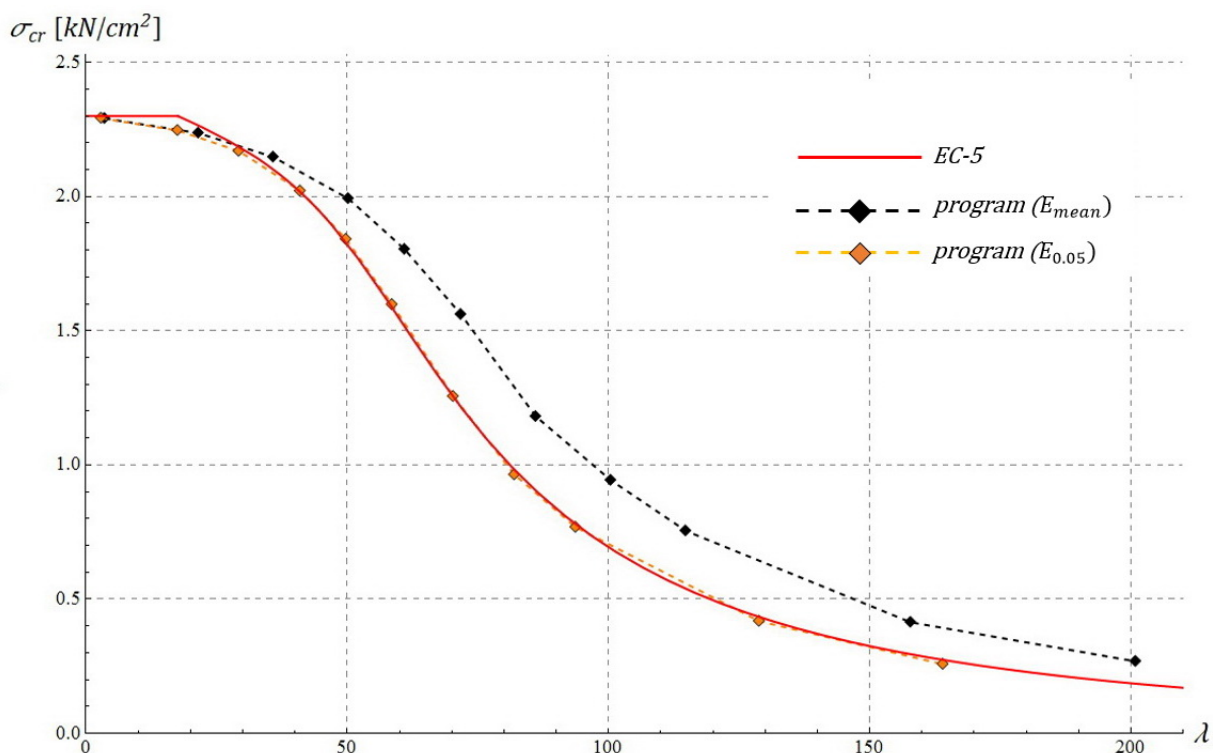
Slika 48: Uklonski krivulji pri začetnih nepopolnostih $e_0 = 0.001\text{cm}$ (les trdnostnega razreda C16)Slika 49: Uklonski krivulji pri začetnih nepopolnostih $e_0 = 0.001\text{cm}$ (les trdnostnega razreda C24)

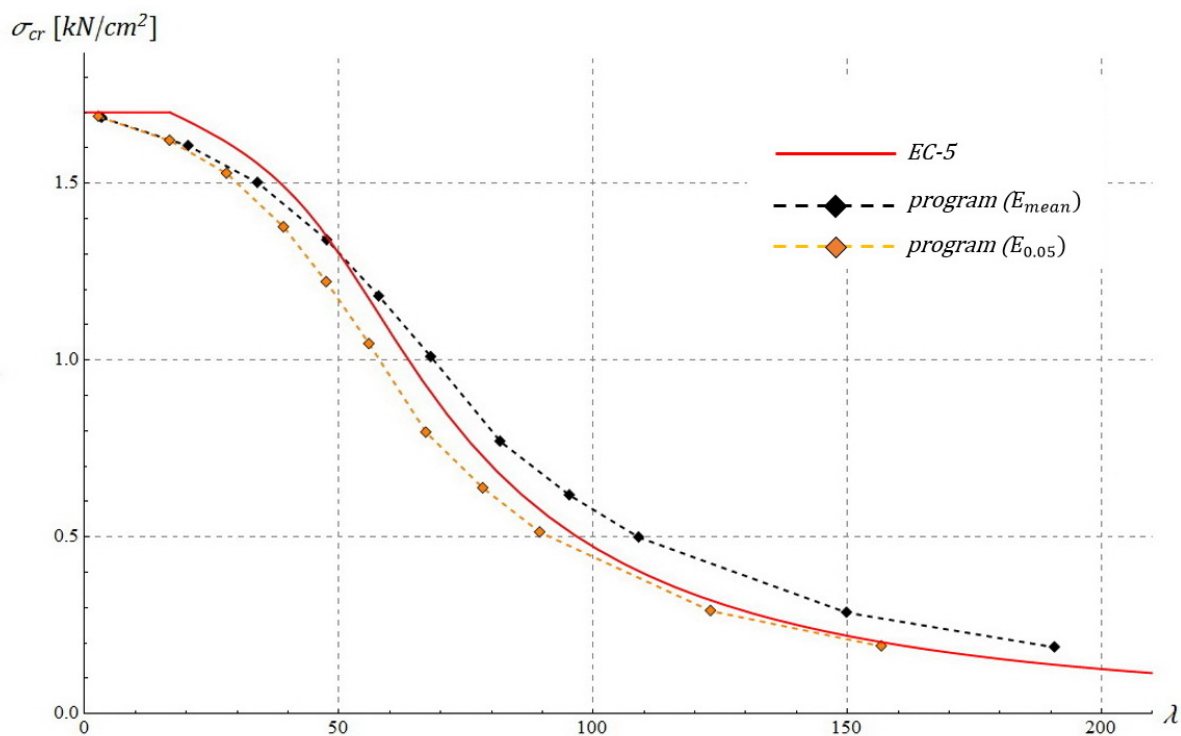


Slika 50: Uklonski krivulji pri začetnih nepopolnostih $e_0 = 0.001cm$ (les trdnostnega razreda C30)

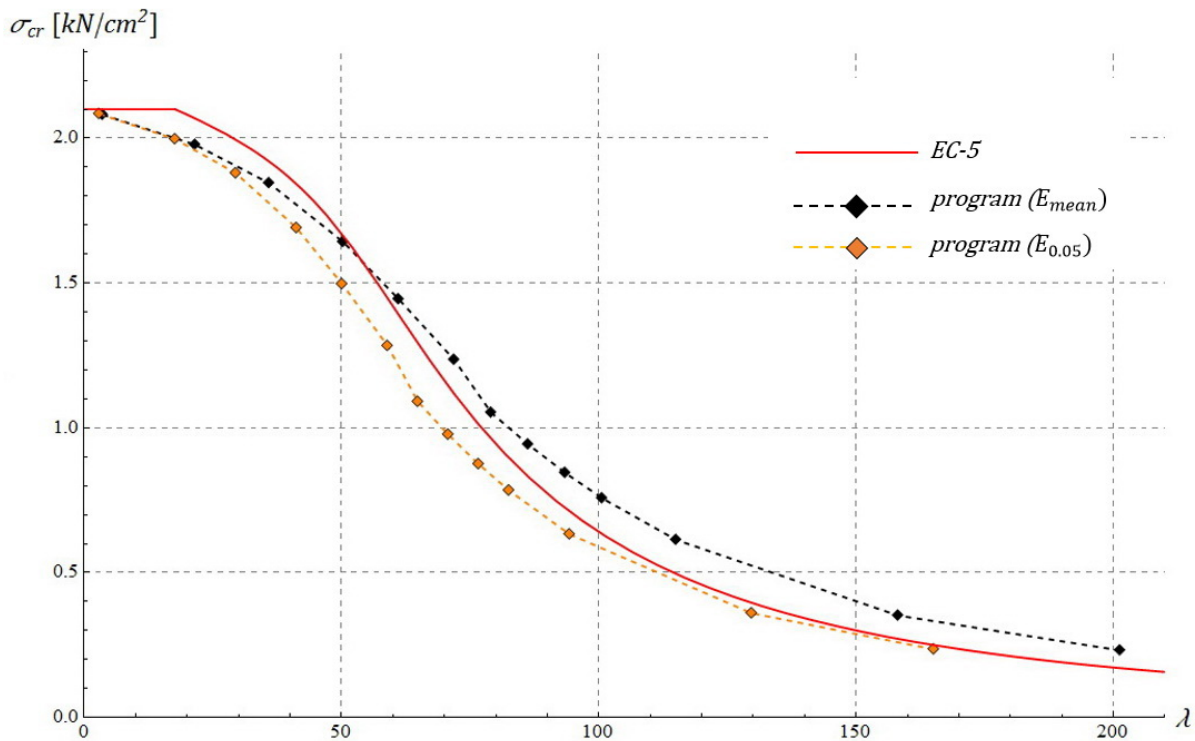


Slika 51: Primerjava uklonskih krivulji pri $e_0 = 0.001L$ s krivuljo iz EC-5 (les trdnostnega razreda C16)

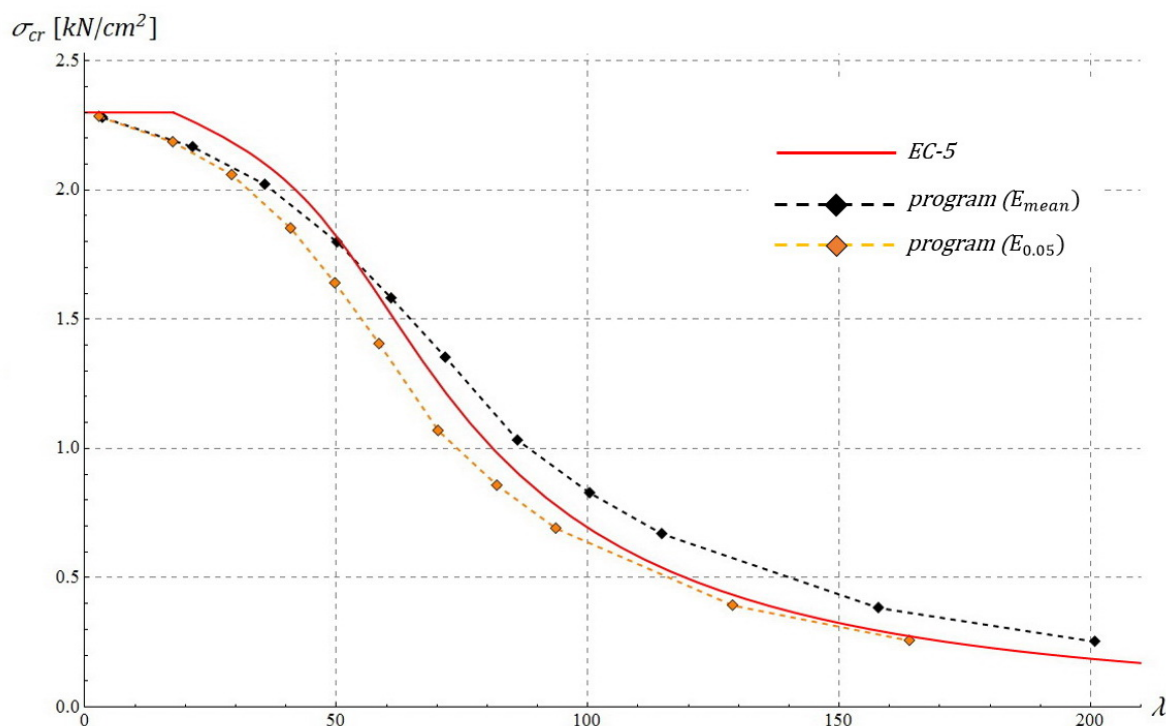
Slika 52: Primerjava uklonskih krivulj pri $e_0 = 0.001L$ s krivuljo iz EC-5 (les trdnostnega razreda C24)Slika 53: Primerjava uklonskih krivulj pri $e_0 = 0.001L$ s krivuljo iz EC-5 (les trdnostnega razreda C30)



Slika 54: Primerjava uklonskih krivulj pri $e_0 = 0.0025L$ s krivuljo iz EC-5 (les trdnostnega razreda C16)



Slika 55: Primerjava uklonskih krivulj pri $e_0 = 0.0025L$ s krivuljo iz EC-5 (les trdnostnega razreda C24)



Slika 56: Primerjava uklonskih krivulj pri $e_0 = 0.0025L$ s krivuljo iz EC-5 (les trdnostnega razreda C30)

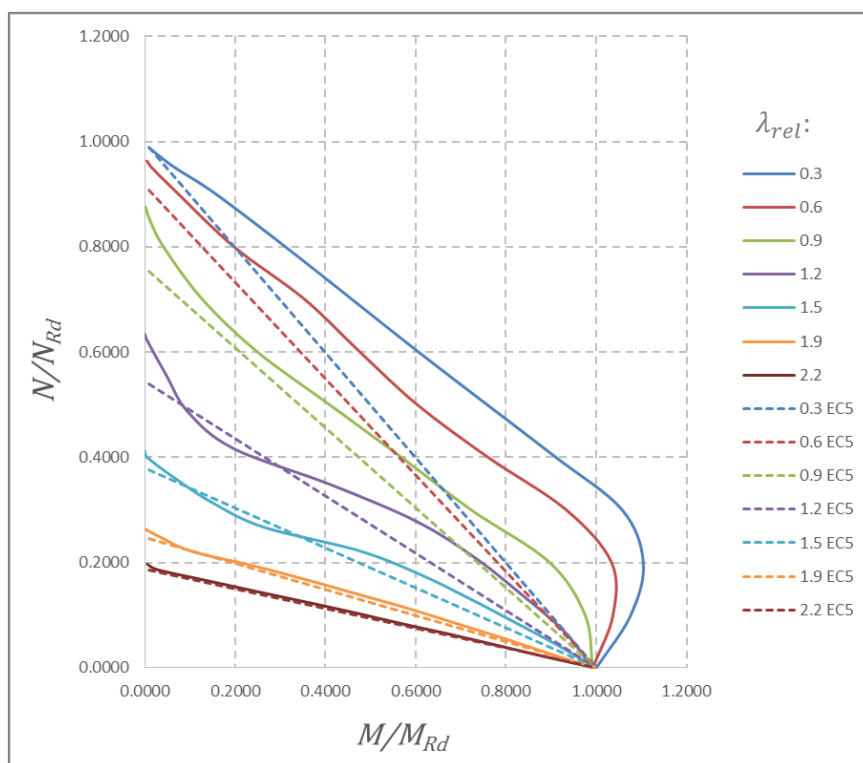
Kot je razvidno v vseh primerih dobim podobne rezultate. Primeri, ki so približek idealnega stebra ($e_0 = 0.001cm$) se dobro ujemajo z analitično določenimi krivuljami, pogoju EC-5 pa se najbolj približajo tisti z začetnimi odstopanji $e_0 = 0.001L$ in karakteristično vrednostjo modula elastičnosti. Pri odstopanjih $e_0 = 0.0025L$ pa dobim v primeru računa s srednjo vrednostjo modula elastičnosti za vse trdnostne razrede lesa pri geometrijskih vitkosti višjih od približno 50 višje vrednosti kritične obremenitve od vrednosti, ki jih določa pogoj iz EC-5, pri nižjih vitkosti pa so te vrednosti nekoliko nižje. Pri računu s karakterističnimi vrednostmi modulov elastičnosti pa so izračunane vrednosti kritičnih obremenitev za vse vitkosti nižje od tistih, ki jih določa pogoj iz EC-5, se pa pri velikih vitkosti (višjih od približno 100) te vrednosti približajo.

5.3 Interakcija P-M na nivoju elementa

Uklonske krivulje v prejšnji točki ustrezajo primerom čistega tlaka, saj je bila pri njihovem računu upoštevana samo nepopolnost elementa, edina obtežba pa je bila osna sila, ki sem jo v računu upošteval kot centrično.

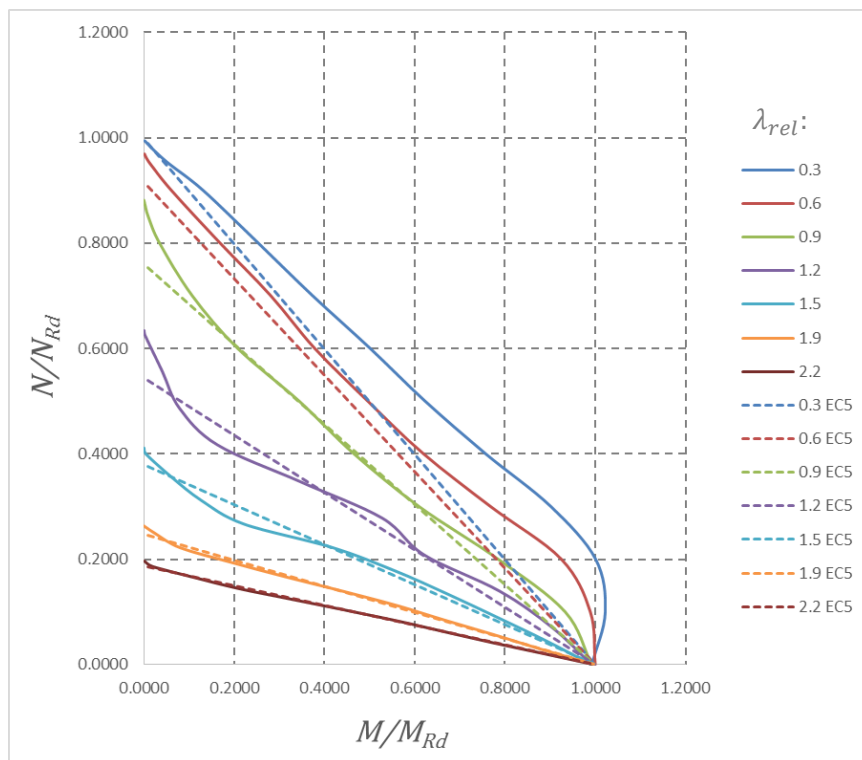
Če želim opazovati, kako na kritično obremenitev vplivajo dodatne obtežbe, ki v elementu povzročajo momente, pa ga lahko obremenim z ekscentrično osno silo. Taka obremenitev v elementu povzroča upogibne momente, ki se povečujejo z naraščanjem osne sile. Naraščanje tega momenta v krajnih prerezih (kjer sila prijmlje) se povečujejo v sorazmerju s to silo, v polju pa se dodatno povečajo zaradi učinkov teorije II. reda. Če osno silo povečujem v korakih in v vsakem poiščem maksimalno ekscentričnost, ki jo element pri takem nivoju osne obremenitve še lahko prenese, to pa ponavljam dokler osna sila ni enaka kritični obremenitvi, ki pripada centričnemu tlaku (torej je maksimalna ekscentričnost pri takem nivoju sile enaka ali blizu 0), s tem pridem do interakcijskega diagrama momenta in osne sile za obravnavano vitkost elementa.

Na spodnjih slikah so prikazani rezultati, ki sem jih dobil na tak način za 7 primerov različnih relativnih vitkosti. Pri tem momenti v diagramih pripadajo krajnim prerezom in torej v njih ni zajet učinek povečanja zaradi učinkov teorije II. reda, torej tak prikaz predstavlja interakcijo med maksimalno (kritično) obremenitvijo in momenti v elementu, ki so enaki, kot če bi jih računali po TPR. Na tak način je mogoča tudi primerjava z interakcijo, ki jo določata enačbi za preverjanje stabilnosti v standardu EC-5 (125), v katerih prav tako nastopajo momenti, ki jih računamo po TPR. Te interakcijske linije so na spodnjih slikah prikazane črtkano. Pri računu spodnjih krivulj nisem upošteval nepopolnosti elementa – edini izvor prečnih obremenitev je tako predstavljal ekscentričnost osne sile.

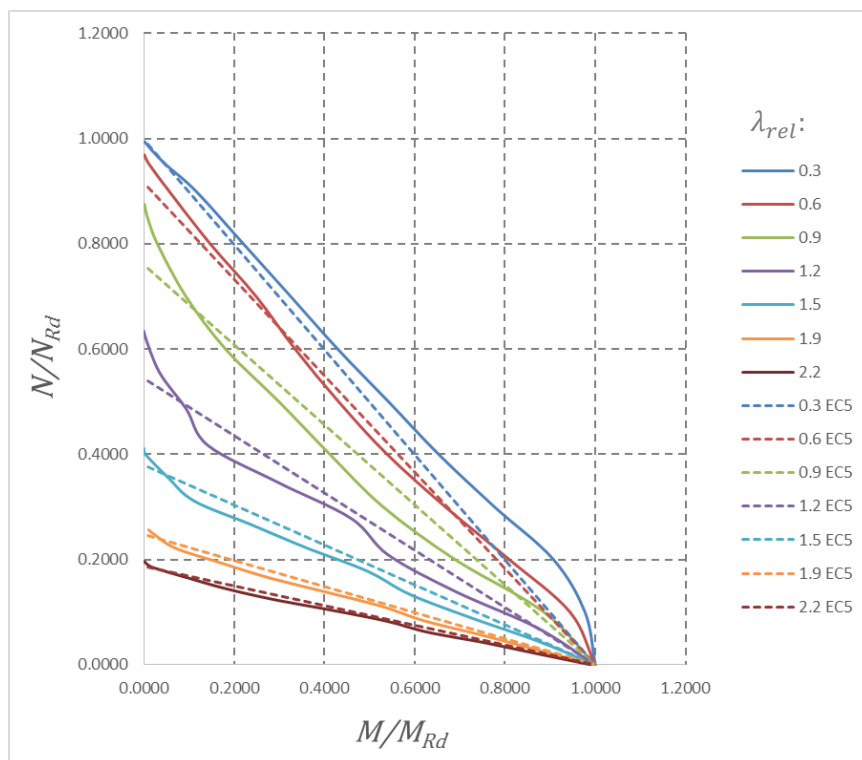


Slika 57: Interakcija upogibnih in normalnih napetosti pri različnih relativnih vitkostiha elementa (les trdnostnega razreda C16)

Tudi v teh primerih je očitna razlika med obravnavanimi trdnostnimi razredi lesa. Pri zmernih osnih silah in elementih z majhno relativno vitkostjo je pri trdnostnih razredih lesa C16 in C24 razvidno povečanje upogibne odpornosti v primerjavi z odpornostjo pri čistem upogibu (krivulje, ki segajo preko vrednosti 1 na abscisi na slikah 57 in 58). To povečanje je najbolj izrazito za trdnostni razred lesa C16, pri razredu C30 pa tudi pri najmanjši relativni vitkosti takega povečanja ni. To si lahko razlagamo z razmerjem natezne proti tlačni trdnosti, ki je najmanjše pri najnižjem obravnavanem trdnostnem razredu (C16). Tlačna osna sila namreč razbremeni natezno cono prereza in s tem omogoča, da se v tlačni coni razvijejo večje deformacije oz. napetosti kot v primeru čistega upogiba. Za trdnostni razred lesa C16 so npr. napetosti pri čistem upogibu skoraj linearne (slika 41), dodatna obremenitev z osno silo pa zato v tem primeru povzroči večje relativno povečanje upogibne odpornosti kot pri razredu C24, pri katerem se tudi pri čistem upogibu tlačna cona v neki meri že plastificira (slika 43). Pri vseh razredih sicer lahko opazimo, da je pri manjših relativnih vitkostiha linearna zveza P/M , ki jo predpisuje EC-5, glede na izračunane krivulje zelo konservativna. Z naraščanjem vitkostiha pa se krivulje približujejo linijam, ki jih določa pogoj iz EC-5 in je zato mogoče sklepati, da je linearna zveza P/M za velike vitkostiha ustrezna.



Slika 58: Interakcija upogibnih in normalnih napetosti pri različnih relativnih vitkostih elementa (les trdnostnega razreda C24)



Slika 59: Interakcija upogibnih in normalnih napetosti pri različnih relativnih vitkostih elementa (les trdnostnega razreda C30)

Na zgornjih slikah je mogoče opaziti določene anomalije, ki se kažejo kot »vijuganje« nekaterih krivulj (posebej je to izrazito za $\lambda_{rel} = 1.2$). Za to nimam jasne razlage, najbolj verjeten vzrok pa se mi zdi izbrana natančnost pri določanju kritične obremenitve, ki sem jo v teh primerih zaradi dolgotrajnosti računa nekoliko zmanjšal.

5.4 Povzetek

V tem poglavju je bilo prikazanih nekaj rezultatov do katerih sem prišel z uporabo izdelanega računalniškega programa. Pri tem pa je potrebno povedati, da bi bilo za bolj zanesljive zaključke nujno potrebno kalibrirati model na podlagi dejanskih eksperimentalnih preiskav, saj je ujemanje z dejanskim stanjem zanesljivo zgolj toliko, kolikor so zanesljivi vhodni parametri modela. Ker sem uporabljal determinističen materialni model s točno določenimi vrednostmi parametrov je torej prikazano obnašanje striktno veljavno le za elemente iz materialov, pri katerih so dejanski parametri enaki (ali zelo blizu) tistim, uporabljenim v računu. Za bolj splošno oceno obnašanja lesenih elementov, pri katerih so vrednosti parametrov med posameznimi primerki v populaciji raztresene, pa bi bilo potrebno uporabiti slučajni model in metodo Monte Carlo, pri tem pa bi bila spet v ospredju zanesljivost določitve pravilne statistične porazdelitve uporabljenih slučajnih spremenljivk (parametrov).

6 ZAKLJUČEK

V diplomski nalogi sem najprej predstavil osnove stabilnosti tlačnih elementov, nato pa sem se osredotočil na dimenzioniranje stebrov iz lesa, ki ima v primerjavi z drugimi konstrukcijskimi materiali specifične lastnosti. Bistven del naloge je predstavljala izdelava računalniškega programa za račun odziva linijskih elementov z upoštevanjem tako geometrijske kot materialne nelinearnosti, ki sem jo tudi podrobno opisal. Program je precej splošen, saj omogoča račun pri različnih robnih pogojih oz. načinih podpiranja, različnih vrstah obremenitve, možno pa je upoštevati tudi začetne nepopolnosti. Poleg tega program ni omejen na nelinearno elastičen odziv, saj je del, s katerim je določen odziv z upoštevanjem geometrijske nelinearnosti, povsem samostojen. Ker program podpira tudi uvajanje vmesnih podpor in podpor z vzmetmi ga je mogoče uporabiti tudi v preprostih primerih računa okvirnih konstrukcij. Poleg tega je z vdelanim postopkom mogoče na hiter in enostaven način priti do precej dobrih približkov kritičnih obremenitev za vse primere robnih pogojev, ki jih program podpira. Del programa za račun nelinearno elastičnega odziva temelji na materialnem modelu, ki v stroki velja za najboljši približek dejanskega obnašanja lesa (Glosova funkcija napetosti), brez težav pa bi bilo zaradi načina računa uvesti tudi druge materialne modele.

Po kratki predstavitvi standarda za projektiranje lesenih konstrukcij Evrokod 5 so podani računski primeri, v katerih sem predstavil nekatere rezultate programa ter jih primerjal z zahtevami, ki sledijo iz standarda. Za bolj zanesljive zaključke na podlagi teh rezultatov pa bi bilo potrebno kalibrirati materialni model na podlagi eksperimentalnih preiskav ter tako tudi oceniti natančnost rezultatov programa. Sam sem se bil primoran zanašati na podatke iz literature, ki pa niso nujno ustrezni v vseh obravnavanih primerih. Zaradi strojnih omejitev sem tudi nekoliko skrčil obseg računskih primerov, v katerih npr. niso zajeti primeri z dvojno ekscentrično obremenitvijo, račun katere program v principu sicer omogoča. Na podlagi prikazanih primerov je bilo kljub temu možno priti do nekaterih zaključkov o obnašanju lesenih elementov pod vplivom osno-upogibnih obremenitev. Menim, da je opravljeno delo – zlasti izdelan računalniški program – lahko dobra podlaga za morebitno nadaljnje raziskovanje.

7 VIRI

- [1] Timoshenko, S. P., Gere, J. M. 1961. Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition. New York, McGraw-Hill Book Company: str. 1-211.
- [2] Yoo, C.H., Lee, S.C. 2011. Stability of Structures Principles and Applications. New York, Elsevier Inc: str. 8-18, 56.
- [3] Pravilnik o mehanski odpornosti in stabilnosti objektov. Uradni list RS št. 101-4408/2005: 10637.
- [4] Thelandersson, S. (ur.), Larsen, H. J. (ur.). 2003. Timber Engineering. Chichester, John Wiley and Sons: str. 201-220.
- [5] Chajes, A. 1974. Principles of Structural Stability Theory. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall Inc: str. 1-173.
- [6] Duhovnik, J. 2005. Statika linijskih konstrukcij I, 2. izdaja. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo: str.19, 20.
- [7] Srpčič, S. 2003. Mehanika trdnih teles. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo: str. 516-524.
- [8] Office VBA Language Reference.
<https://msdn.microsoft.com/en-us/library/office/gg264383.aspx> (pridobljeno 17.12.2015)
- [9] Ghali, A., Neville, A. M. 1997. Structural analysis A unified classical and matrix approach, Fourth edition. London, E & FN Spon, str. 430-448.
- [10] Buchanan, A. H. 1984. Strength model and design methods for bending and axial load interaction in timber members. Vancouver, University of British Columbia: 298 str.
<https://open.library.ubc.ca/cIRcle/collections/831/items/1.0062943> (pridobljeno 2.5.2016).
- [11] Theiler, M., Frangi, A., Steiger, R. 2012. Design of timber columns based on 2nd order structural analysis: International council for research and innovation in building and construction, Working Commission W18 – Timber Structures, Meeting Forty Five, Växjö, Sweden, August 2012: 14 str.
<http://cib-w18.com/sites/default/files/proceedings/No.%2045,%20V%C3%A4xj%C3%B6,%20Sweden,%20August%202012.pdf> (pridobljeno 5.6.2016).
- [12] Theiler, M. 2014. Stabilität von axial auf Druck beanspruchten Bauteilen aus Vollholz und Brettschichtholz, Zürich, ETH-Zürich: 155 str.
<http://dx.doi.org/10.3929/ethz-a-010273734> (pridobljeno 5.6.2016).

- [13] Frangi, A., Steiger, R., Theiler, M. 2015. Design of timber members subjected to axial compression or combined axial compression and bending based on 2nd order theory. Conference: Meeting 48 of the International Network on Timber Engineering Research INTER, Šibenik, Croatia, Volume: 48.
https://www.researchgate.net/publication/286921797_Design_of_timber_members_subj ected_to_axial_compression_or_combined_axial_compression_and_bending_based_on_2nd_order_theory (pridobljeno 5.6.2016).
- [14] FrontlineSolvers, Frontline Systems Inc. Uradna spletna stran.
<http://www.solver.com> (pridobljeno 13.7.2016).
- [15] Solver Uses Generalized Reduced Gradient Algorithm. Microsoft Support.
<https://support.microsoft.com/en-us/kb/82890> (pridobljeno 20.8.2016).
- [16] Beg, D. (ur.), Pogačnik, A. (ur.). 2009. Priročnik za projektiranje gradbenih konstrukcij po Evrokod standardih. Ljubljana, Inženirska zbornica Slovenije: str. 5-1 do 5-117.
- [17] Porteous, J., Kermani, A. 2007. Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition. Chichester, John Wiley and Sons: str. 50-94.
- [18] SIST EN 1995-1-1:2005 – Evrokod 5: Projektiranje lesenih konstrukcij – 1-1. del: Splošna pravila in pravila za stavbe. CEN, Brussels; SIST, Ljubljana.
- [19] SIST EN 1990:2004 – Evrokod – Osnove projektiranja. CEN, Brussels; SIST, Ljubljana.
- [20] SIST EN 1990:2004 – Evrokod – Osnove projektiranja. CEN, Brussels; SIST, Ljubljana.
- [21] SIST EN 1998 – Evrokod 8 – Projektiranje potresnoodpornih konstrukcij (več delov). CEN, Brussels; SIST, Ljubljana.
- [22] SIST EN 338:2004 – Konstrukcijski les – Trdnostni razredi. CEN, Brussels; SIST, Ljubljana.
- [23] SIST EN 1194:200 – Lesene konstrukcije – Lepljen lamelirani les – Trdnostni razredi in ugotavljanje karakterističnih vrednosti. CEN, Brussels; SIST, Ljubljana.