

Univerza
v Ljubljani
Fakulteta
*za gradbeništvo
in geodezijo*

*Janova 2
1000 Ljubljana, Slovenija
telefon (01) 47 68 500
faks (01) 42 50 681
fgg@fgg.uni-lj.si*



Univerzitetni program Geodezija,
smer Geodezija

Kandidat:

Blaž Jelenc

Relativnostni vplivi na GPS opazovanja

Diplomska naloga št.: 686

Mentor:

izr. prof. dr. Bojan Stopar

Somentor:

doc. dr. Mitja Lakner

Ljubljana, 30. 6. 2006

IZJAVA O AVTORSTVU

Podpisani **Blaž Jelenc** izjavljam, da sem avtor diplomske naloge z naslovom: **RELATIVNOSTNI VPLIVI NA GPS OPAZOVANJA**.

Izjavljam, da se odpovedujem materialnim avtorskim pravicam za potrebe elektronskega arhiva.

BIBLIOGRAFSKO-DOKUMENTACIJSKA STRAN IN IZVLEČEK

UDK: 528.28(043.2)
Avtor: Blaž Jelenc
Mentor: izr.prof.dr.Bojan Stopar
Somentor: doc.dr.Mitja Lakner
Naslov: Relativnostni vplivi na GPS opazovanja
Obseg: 64 str.
Ključne besede: splošna relativnost, GPS opazovanja

Izveček Diplomsko delo obravnava relativnostne vplive na GPS opazovanja. Na začetku sta na kratko predstavljeni posebna in splošna teorija relativnosti. V poglavju posebne relativnosti sta predstavljena pojma Lorentzove transformacije in lastnega časa. V poglavju o splošni relativnosti sta definirana in na kratko predstavljena pojma tenzorja in mnogoterosti, v nadaljevanju pa še slavne Einsteinove enačbe polja ter oris fizikalnega ozadja teh enačb. Sledi podrobna izpeljava enačb za Dopplerjev pojav in lastni čas v Schwartzschildovi metriki, ki jih nato uporabim na relaciji satelit-sprejemnik, kjer se sprejemnik nahaja na geoidu. V nadaljevanju si ogledamo postopke sinhronizacije ur, ki so bistveni pri vzpostavitvi koordinatnega časa. Zadnje poglavje vse dotedanje ugotovitve uporabi pri obravnavi kodnih in faznih opazovanj, kjer nekoliko presenetljivo (a pričakovano) odkrijemo, da so relativnostni vplivi na obe vrsti opazovanj praktično enaki.

BIBLIOGRAPHIC-DOKUMENTALISTIC INFORMATION

UDC: 528.28(043.2)
Author: Blaž Jelenc
Supervisor: assoc.prof.dr.Bojan Stopar
Cosupervisor: doc.dr.Mitja Lakner
Title: Relativistic effects on GPS observations
Notes: 64 p.
Key words: general relativity, GPS observations

Abstract Diploma presents relativistic effects on GPS observations. First and second chapter are a short introduction to special and general theory of relativity, where notions of proper time, Lorentz transform, tensor and manifold are presented. Famous Einstein field equations follow and I give a brief explanation of physical background. A detailed derivation of Doppler effect and proper time equations in Schwartzschild metric follows, which are then used in connection with satellite and reciver, where the reciver is supposed to be placed on geoid. An important chapter on clock synchronisation is also included, methods described there are important in construction of coordinate time. Last chapter deals with code and phase observations, and an important conclusion is that relativistic effects on these two different types of observations are basically the same.

Kazalo

1	Uvod	1
2	Posebna teorija relativnosti (SR)	2
2.1	Inercialni koordinatni sistemi	2
2.2	Lorentzova transformacija	3
2.3	Dopplerjev pojav	5
3	Splošna teorija relativnosti (GR)	6
3.1	Tenzorji	6
3.2	Mnogoterosti	7
3.3	Gravitacija	8
3.3.1	Schwartzschildova metrika	10
4	Prostor-čas v okolici Zemlje	11
4.1	Posebna relativnost	11
4.1.1	Vpliv na tek ur	11
4.1.2	Dopplerjev pojav	12
4.2	Splošna relativnost	16

4.2.1	Vpliv na tek ur	17
4.2.2	Dopplerjev pojav	18
4.3	Tirnice satelitov	22
4.4	Sinhronizacija	25
4.4.1	Sinhronizacija ur na Zemlji	30
4.5	Povzetek	36
4.5.1	Posebna relativnost	36
4.5.2	Splošna relativnost	37
5	Relativnostni vplivi na GPS opazovanja	39
5.1	Kodna opazovanja	40
5.1.1	Primer 1	40
5.1.2	Splošno	41
5.2	Fazna opazovanja	44
5.2.1	Primer 2	50
6	Zaključek	55

Slike

4.1	Dopplerjev pojav v primeru mirujočega oddajnika	12
4.2	Dopplerjev pojav v primeru gibajočega oddajnika	14
4.3	Oddajnik in sprejemnik se gibljeta (ni Dopplerjevega pojava)	15
4.4	Opisani pojav gledano iz koordinatnega sistema v katerem oddajnik miruje (spet ni Dopplerjevega pojava)	15
4.5	Širjenje svetlobnih signalov v sferično izotropni metriki	19
4.6	Dva svetlobna bliska izsevana v časovnem razmiku t_0	21
4.7	Tir satelita	23
4.8	Prenos časa s pomočjo prenosne ure	26
4.9	Prava razdalja med točkama	27
4.10	Sočasna dogodka (koordinatni čas dogodkov se ne ujema)	28
4.11	Sočasna dogodka v primeru metrike za katero je $g_{0\alpha} \equiv 0$	29
4.12	Prikaz stanj ur na vrteči krožnici v nekem (fiksni) trenutku koordinatnega časa: (A) ure so sinhronizirane z Einsteinovo sinhronizacijo, (B) popravljeno stanje ur	32
4.13	Pot svetlobnega signala v rotirajočem koordinatnem sistemu	33
4.14	Skica dokaza zgornje trditve	34

4.15	Sinhronizacija gibajoče ure	36
4.16	Popravek sinhronizacije je sorazmeren s ploščino S	37
5.1	Navidezno spreminjanje položaja sprejemnika	41
5.2	Kodna opazovanja	42
5.3	Fazna opazovanja	45
5.4	Navidezno dnevno gibanje sprejemnika, določeno z nadobzornimi sateliti	51
5.5	Navidezno dnevno gibanje sprejemnika, določeno z vsemi sateliti	51

Literatura

- [1] Callahan, J.J., 2001, The geometry of spacetime. New York, Springer: 352 str.
- [2] Seeber, G., 1993, Satellite geodesy. Berlin, Walter de Gruyter: 488 str.
- [3] Pavlovčič, P., Stopar, B., 2001, GPS v geodetski praksi. Ljubljana, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo: 115 str.
- [4] Križanič, F., 1996, Vektorska in tenzorska analiza. Ljubljana, DZS: 672 str.
- [5] Goldstein, P. et al., 2002, Classical mechanics. San Francisco, Pearson Education: 515 str.
- [6] Landau, L.D., Lifshitz, E.M., 1985, The classical theory of field. New York, Pergamon Press Ltd.: 332 str.
- [7] Ashby, N., Relativity in the Global Positioning System.
<http://www.livingreviews.org/Articles/Volume6/2003-1ashby>, 2006 (15.5.)
- [8] Carroll, M.S., Lecture notes on general relativity.
<http://itp.ucsb.edu/carroll/notes/>, 2006 (15.5.)

Poglavje 1

Uvod

GPS je ena redkih tehnologij, katere delovanje je tako močno vezano na geometrijo prostor-časa. Celoten sistem namreč temelji na izredno natančnih atomskih urah in kot bomo videli (Ashby,2003[7]) so vplivi kot jih predvideva splošna relativnost ogromni v primerjavi s stabilnostjo teh ur. Ravno to pa je še toliko večji motiv, da se natančno preuči te posledice, ker po eni strani s tem izboljšamo natančnost sistema, po drugi strani pa boljše razumevanje predmeta lahko privede do raznih novih dognanj ali aplikacij sistema (npr. določitev ploskve geoida s pomočjo ur,...).

Poglavje 2

Posebna teorija relativnosti (SR)

2.1 Inercialni koordinatni sistemi

Koordinatni sistem v SR sestavlja prostorski koordinatni sistem z množico ur. V vsaki točki prostora se nahaja ura in vse ure so med seboj sinhronizirane, torej kažejo enak čas. Vsakemu dogodku priredimo 4 koordinate; čas in kraj. Množico vseh dogodkov imenujemo **prostor-čas**.

Koordinatni sistem je inercialen, če ni pospešen in je dovolj daleč od velikih teles. Inercialni sistemi se torej eden glede na drugega gibljejo s konstantno hitrostjo ali pa mirujejo.

Osnovna načela SR:

- Svetlobna hitrost je enaka c v vseh inercialnih koordinatnih sistemih
- Fizikalni zakoni imajo v vseh inercialnih koordinatnih sistemih enako obliko.
- Homogenost časa in homogenost in izotropnost prostora.

Drugo načelo lahko izrazimo še na druge načine, kot npr. vsi inercialni sistemi so enakovredni, ni absolutnega koordinatnega sistema glede na katerega bi se fizikalni zakoni nanašali. De-

jstvo, da morajo imeti fizikalni zakoni enako obliko, pa pomeni da imajo enačbe s katerimi izražamo te zakone enako obliko.

2.2 Lorentzova transformacija

Lorentzova transformacija nam omogoča opis dogodkov iz različnih inercialnih koordinatnih sistemov. Transformacija po obliki spominja na Galilejevo transformacijo.

Poleg zasukov in translacij je zelo pogosta transformacija med koordinatnima sistemoma, ki se eden glede na drugega gibljeta s konstantno hitrostjo pri čemer ostanejo koordinatne osi med seboj vzporedne.

Naj bosta S in S' inercialna koordinatna sistema. Dogodke v S označimo z (ct, \vec{r}) ter z (ct', \vec{r}') v S' . S' naj se giblje enakomerno v smeri hitrostnega vektorja \vec{v} in ob času $t = t' = 0$ naj izhodišči koordinatnih sistemov sovpadata. V tem primeru se Lorentzova transformacija glasi (Goldstein, 2003[5]):

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \vec{\beta} \cdot \vec{r}) \\ \vec{r}' &= \vec{r} + \frac{(\vec{\beta} \cdot \vec{r})\vec{\beta}(\gamma - 1)}{\beta^2} - \vec{\beta}\gamma ct \\ \vec{\beta} &= \frac{\vec{v}}{c} \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

V veliko primerih se da problem poenostaviti tako, da se S' giblje v smeri osi x sistema S .

V tem primeru se Lorentzova transformacija poenostavi v:

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma ct - \gamma\beta x \\ x' &= -\gamma\beta ct + \gamma x \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

Prostor-čas je 4-dimenzionalen prostor na katerem je definiran tudi pojem razdalje med posameznimi dogodki. Kvadrat razdalje med bližnjima dogodkoma računamo po formuli $ds^2 = \sum_{i,j=1}^4 \eta_{ij} dx^i dx^j$. Količini τ pravimo lastni čas, pri čemer velja $d\tau = \frac{ds}{c}$. Količini η_{ij} pravimo tudi metrični tenzor in je oblike:

$$\eta = \eta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pojem Lorentzove transformacije je dejansko širši od zgoraj omenjenega, Lorentzovo transformacijo definiramo kot transformacijo glede na katero je izraz ds^2 invarianten. To pomeni, da je vrednost izraza po transformaciji enaka kot pred njo, pa tudi da v novih koordinatah izraz izračunamo po isti formuli, le x^i nadomestimo z $x^{i'}$.

To pa pravzaprav pomeni, da je količina η_{ij} v vseh koordinatnih sistemih enaka. Če so u nove koordinate in je $x = Lu$, kjer je L linearna transformacija, potem L ohranja η , če je izpolnjena zahteva $\eta = L^T \eta L$.

Z drugimi besedami, lahko rečemo da η_{ij} karakterizira inercialnost koordinatnega sistema. Zaradi zahteve, ki jo mora izpolnjevati transformacija L , je očitno, da je transformirani koordinatni sistem spet inercialen.

Gibanje materialnega delca v prostor-času opišemo s krivuljo $x^i(\zeta)$, kjer je ζ nek parameter. Lastni čas delca kaže ura, ki se giblje skupaj z delcem, izračunamo pa ga po formuli:

$$\tau = \frac{1}{c} \int_0^\zeta \sqrt{\sum_{i,j} \eta_{ij} \frac{dx^i}{d\zeta'} \frac{dx^j}{d\zeta'}} d\zeta'$$

Izraz po korenem ni nikoli negativen, ker hitrost materialnega delca ne more preseči svetlobne hitrosti.

2.3 Dopplerjev pojav

Dopplerjev pojav je odgovoren za razliko v opazovani frekvenci (valovni dolžini) elektromagnetnega valovanja, v odvisnosti od relativne hitrosti oddajnika in sprejemnika. Elektromagnetno valovanje si lahko mislimo kot serijo svetlobnih sunkov, ki si sledijo v enakomernih časovnih intervalih. Le ti so obratnosorazmerni s frekvenco valovanja. Lahko si mislimo, da vir miruje v izhodišču koordinatnega sistema in oddaja te sunke svetlobe. Sprejemnik pa naj se giblje npr. v smeri osi x s hitrostjo v .

Če hočemo izračunati vpliv Dopplerjevega efekta moramo torej izračunati časovne presledke lastnega časa v katerih sprejemnik prejema signal. Dogodka, ki jih moramo dobiti sta torej preseka tira sprejemnika z dvema zaporednima svetlobnima stožcema sunkov svetlobe. Lastni časovni razmik potem dobimo po formuli $\frac{\Delta s}{c}$. Dobimo:

$$\begin{aligned}\lambda' &= \lambda \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \\ \nu' &= \nu \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\end{aligned}$$

Poglavje 3

Splošna teorija relativnosti (GR)

3.1 Tenzorji

Večina enačb v splošni relativnosti je izražena v tenzorski obliki. Neformalno je tenzor količina, ki jo lahko izrazimo kot polje števil, pri čemer vsako število lahko označimo z ustreznim številom indeksov. Npr. $T_{i_1 \dots i_l}^{j_1 \dots j_k}$, si lahko predstavljamo kot $k + l$ dimenzionalno matriko. Da je določena količina res tenzor, pa mora izpolnjevati še določene pogoje pri prehodu iz enega koordinatnega sistema v drugega.

Dogovor o seštevanju pravi, da v primeru da se v določenem izrazu nek indeks ponovi, je potrebno po tem indeksu seštevati pri čemer sumacijskega znaka ne pišemo.

Naj bodo x^i stare koordinate, u^i nove koordinate ter znana naj bo preslikava (transformacija) $x = x(u)$. Izračunamo lahko Jacobijevo matriko te preslikave $\partial x^i / \partial u^j$. Da bo količina T tenzor mora izpolnjevati spodnji pogoj:

$$T_{j'_1 \dots j'_l}^{i'_1 \dots i'_k} = \frac{\partial x^{j_1}}{\partial u^{j'_1}} \dots \frac{\partial x^{j_l}}{\partial u^{j'_l}} \frac{\partial u^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial u^{i'_k}}{\partial x^{i_k}} T_{j_1 \dots j_l}^{i_1 \dots i_k}$$

Primeri tenzorjev so npr. η_{ij} , matrike, ...

3.2 Mnogoterosti

Prostor-čas je v GR 4-dimenzionalna mnogoterost, torej posebne vrste topološki prostor, ki je lokalno podoben \mathbb{R}^4 . Npr. v primeru dveh dimenzij 2-sfera ni enaka \mathbb{R}^2 niti je ne moremo homeomorfno (bijektivno in zvezno) preslikati na ravnino. Ker je sama mnogoterost lokalno podobna \mathbb{R}^4 , lahko dogodkom na mnogoterosti priredimo koordinate, preprosto identificiramo ustrezna dela mnogoterosti in \mathbb{R}^4 .

Naslednji korak je, da na mnogoterosti definiramo metrični tenzor g_{ij} . Metrični tenzor je $(0, 2)$ simetrični tenzor. V prvi vrsti nam g_{ij} pomaga izračunati lastni čas, izračun gre po isti poti kot v SR:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$
$$\tau = \int_{\gamma} \frac{ds}{c}$$

Druga pomembna informacija, ki jo nosi metrični tenzor je ta, da pove vse o ukrivljenosti mnogoterosti. Pravzaprav to informacijo vsebuje Riemannov tenzor ukrivljenosti $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$, ki ga izračunamo preko g_{ij} po naslednjem postopku:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} (\partial_j g_{kl} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk})$$
$$R^i_{jkl} = \partial_k \Gamma^i_{lj} - \partial_l \Gamma^i_{kj} + \Gamma^i_{km} \Gamma^m_{lj} - \Gamma^i_{lm} \Gamma^m_{kj}$$

Enostavno je po zgornjih formulah preveriti, da Riemannov tenzor ukrivljenosti kakršnekoli gladke krivulje enak 0, torej Riemannov tenzor res meri nekakšno notranjo ukrivljenost mnogoterosti. Za nadaljevanje je potrebnih še nekaj količin:

- Riccijev tenzor: $R_{ij} = R^n_{inj}$
- Riccijev skalar: $R = g^{ij} R_{ij}$
- Einsteinov tenzor: $G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij}$

Geodetske krivulje Na ukrivljenih mnogoterostih je potrebno navaden parcialni odvod tenzorskega polja zamenjati s t.i. kovariantnim odvodom. Navaden parcialni odvod namreč, že od začetka privzame, da imajo koordinate tudi metričen pomen, kar pa ni nujno res (to informacijo pridobimo iz g_{ij}):

$$\nabla_{\mu} V^{\nu} = \partial_{\mu} V^{\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} V^{\lambda}$$

Naj bo $x^i(\lambda)$ neka krivulja. Potem pravimo, da je tenzorsko polje vzdolž krivulje konstantno, če velja:

$$\left(\frac{D}{d\lambda} T \right)_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} := \frac{dx^{\sigma}}{d\lambda} \nabla_{\sigma} T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} = 0$$

Za tenzorsko polje, ki izpolnjuje zgornji pogoj pravimo, da smo ga vzdolž krivulje vzporedno premaknili. Geodetsko krivuljo definiramo kot krivuljo, ki vzporedno premika svoj tangentni vektor, torej velja:

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\mu} \frac{dx^{\rho}}{d\lambda} \frac{dx^{\sigma}}{d\lambda} = 0$$

Pri tem je λ nek parameter s katerim je krivulja parametrizirana. Za rešitev te enačbe potrebujemo 8 začetnih pogojev; 4 začetne položaje in 4 začetne hitrosti. Narava parametra s katerim bo krivulja parametrizirana je odvisna od začetnih hitrosti, torej bodisi bo to lastni čas bodisi bo krivulja opisala svetlobni žarek ..., saj se izraz $g_{\rho\sigma} \dot{x}^{\rho} \dot{x}^{\sigma}$ vzdolž geodetske krivulje ne spreminja.

(Poglavji o tenzorjih in mnogoterostih sta povzeti po Landau et al.,1985[6] in Carrol,2006[8].)

3.3 Gravitacija

V splošni relativnosti gravitacije ne obravnavamo kot sile ampak kot ukrivljenost prostor-časa. Prisotnost masivnih teles spremeni metriko prostor-časa, namesto navadne Minkowski metrike dobimo neko bolj komplicirano metriko. Gravitacija ima kar nekaj skupnih značilnosti s sistemskimi silami (centrifugalna sila), torej silami, ki se pojavijo po transformaciji v neinercialni koordinatni sistem. Po transformaciji v neinercialni koordinatni sistem ravno

tako spremenimo metriko prostor-časa. Vendar obstaja bistvena razlika, kajti prostor-čas je v primeru neinercialnega koordinatnega sistema še vedno raven (Riemannov tenzor ukrivljenosti je enak 0), medtem ko v primeru gravitacije ni več. Ta podobnost med gravitacijo in pospešenimi koordinatnimi sistemi, torej da ima pospešen koordinatni sistem podoben učinek kot gravitacija, pa da t.i. načelo ekvivalence, ki ga lahko izrazimo na več načinov:

- Gravitacijska masa je enaka vztrajnostni masi.
- V množico inercialnih koordinatnih sistemov prištejemo tudi prostopadajoče koordinatne sisteme
- Če je v SR veljalo, da lahko vsak inercialni opazovalec zase trdi da miruje in se vse ostalo giblje glede na njega, moramo v GR ta princip nekoliko popraviti. Zdaj velja, vsak opazovalec lahko zase trdi, da miruje in se vse ostalo giblje glede nanj, če v svojo okolico všteje primerno gravitacijsko polje.

Fizikalni zakoni so vsekakor neodvisni od koordinatnega sistema v katerem opišemo neko dogajanje. Npr. gibanje nekega telesa je lahko videti zelo različno iz različnih koordinatnih sistemov, vendar če vemo kako sta koordinatna sistema povezana (s katero transformacijo) lahko vidimo gre za isto gibanje. V primeru Newtonove mehanike (v standardni formulaciji) se od enega koordinatnega sistema do drugega lahko spreminja tudi dinamični zakon (potrebno je upoštevati sistemske sile). V splošni relativnosti se tem težavam izognemo tako, da zagotovimo, da je vsaka enačba, ki opisuje nek fizikalni zakon, zapisana v tenzorski obliki, npr. $\Psi_{\alpha\beta}^{\gamma} = 0$. Ker je leva stran enačbe tenzor in se transformira v skladu z opisanimi pravili je potem vedno enaka 0. Torej enačba velja v vsakem koordinatnem sistemu. Pravilnost enačbe pa lahko preverimo tako, da transformiramo v prostopadajoč koordinatni sistem, kjer po principu ekvivalence (lokalno) veljajo zakoni posebne relativnosti.

Einsteinove enačbe Če je Φ Newtonov gravitacijski potencial ter ρ gostota snovi v neki točki, potem velja enačba $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$. V GR se na komponente metričnega tenzorja g_{ij}

gleda kot na gravitacijske potenciale, gostoto snovi pa nadomestimo z tenzorjem **energije-impulza** T_{ij} . Podobna naj bi bila tudi oblika enačb, torej nek parcialni diferencialni operator 2. reda naj bi deloval na g_{ij} vse skupaj pa naj bi bilo sorazmerno T_{ij} . Tako dobimo Einsteinove enačbe (v dveh enakovrednih oblikah ter za vakuum):

$$\begin{aligned} G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}Rg_{ij} &= 8\pi GT_{ij} \\ T_{ij} - \frac{1}{2}Tg_{ij} &= \frac{1}{8\pi G}R_{ij} \\ R_{ij} &= 0 \end{aligned}$$

Nekako bi lahko rekli, da je ukrivljenost v neki točki sorazmerna s stanjem snovi v okolici te točke, oz. s tenzorjem T_{ij} , katerega komponente merijo pretoke snovi in energije skozi majhno območje, ki je okolica te točke.

3.3.1 Schwarzschildova metrika

Schwartzschildovo metriko dobimo v primeru, da nas zanima gravitacijsko polje zunaj telesa s sferično simetrično razporeditvijo mas. Polje dobimo kot rešitev enačb $R_{ij} = 0$ z upoštevanjem sferične simetrije. Rešitev predstavimo v sferičnih koordinatah (Landau et al., 1985[6]):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

m ... masa telesa, G ... gravitacijska konstanta

Poglavje 4

Prostor-čas v okolici Zemlje

4.1 Posebna relativnost

V posebni relativnosti je prostor-čas raven, metrika je dana z izrazom (kartezične ali sferične koordinate)

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (4.1)$$

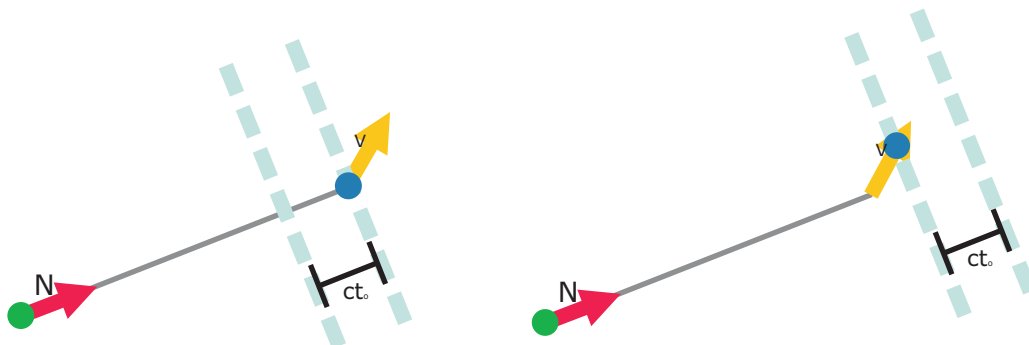
$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)) \quad (4.2)$$

4.1.1 Vpliv na tek ur

Delec (oz. satelit) naj se v nekem trenutku giblje s hitrostjo \vec{v} . Za dovolj majhen časovni interval dt je ta hitrost približno konstantna, torej se delec premakne za $\vec{v}dt$ v prostoru in za dt po času. Zanima nas koliko lastnega časa je medtem preteklo delcu. Po zgoraj navedeni formuli dobimo

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - \vec{v}\vec{v}dt^2 \quad (4.3)$$

$$d\tau^2 = dt^2 \left(1 - \frac{\vec{v}\vec{v}}{c^2}\right) \quad (4.4)$$



Slika 4.1: Dopplerjev pojav v primeru mirujočega oddajnika

Torej na koncu dobimo že znan izraz

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} \approx \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) dt \quad (4.5)$$

Čim se delec giblje z neko hitrostjo lastni čas mineva počasneje od t.i. koordinatnega časa.

4.1.2 Dopplerjev pojav

Formula za Dopplerjev pojav je bila sicer že zapisana, vendar pa le ta velja le za premočrtno gibanje medtem ko se sateliti lahko eden glede na drugega gibljejo v poljubnih smereh.

Potrebni bo tudi nekaj poenostavitev:

- Hitrosti oddajnika in sprejemnika ne bosta preveliki v primerjavi s svetlobno hitrostjo.
- Elektromagnetno valovanje ki ga oddaja oddajnik bomo predstavili kot serijo svetlobnih sunkov, ki si sledijo tako na gosto, da ravno ustrezajo frekvenci valovanja.
- Svetlobni sunki se v resnici po prostoru širijo kot krogle, zato bo veljaja predpostavka, da je bodisi oddaljenost med oddajnikom in sprejemnikom bodisi frekvenca valovanja tako velika, da valovanje obravnavamo kot ravno v smeri zveznice oddajnik - sprejemnik.

Najprej obravnavamo primer, ko oddajnik miruje v izbranem inercialnem sistemu. Potrebno je izračunati lastni čas sprejemnika, ki preteče med dvema zaporednima prejetima sunkoma svetlobe.

Pri tem je t_0 nihajni čas signala \vec{N} pa je enotski vektor v smeri oddajanja oz. sprejemanja signala. Iz slike 4.1 je razvidno, da velja zveza $ct_0 + \vec{N}\vec{v}\Delta t = c\Delta t$, kjer je Δt koordinatni časovni razmik v katerem sprejemnik sprejme dva zaporedna sunka. Le ta v zvezi z lastnim časom sprejemnika $\Delta t = \gamma\tau_0$. Na koncu dobimo:

$$\frac{\tau_0}{t_0} = \frac{1}{\gamma \left(1 - \frac{\vec{N}\vec{v}}{c}\right)} \quad (4.6)$$

Če upoštevamo, da velja $\nu_0 = \frac{1}{t_0}$ in $\lambda_0 = ct_0$, dobimo zvezi med sprejeto in oddano frekvenco in valovno dolžino:

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \gamma \left(1 - \frac{\vec{N}\vec{v}}{c}\right) \quad (4.7)$$

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{\gamma \left(1 - \frac{\vec{N}\vec{v}}{c}\right)} \quad (4.8)$$

V primeru, da vstavimo $\vec{N}\vec{v} = v$ dobimo Dopplerjev pojav za premočrtno gibanje.

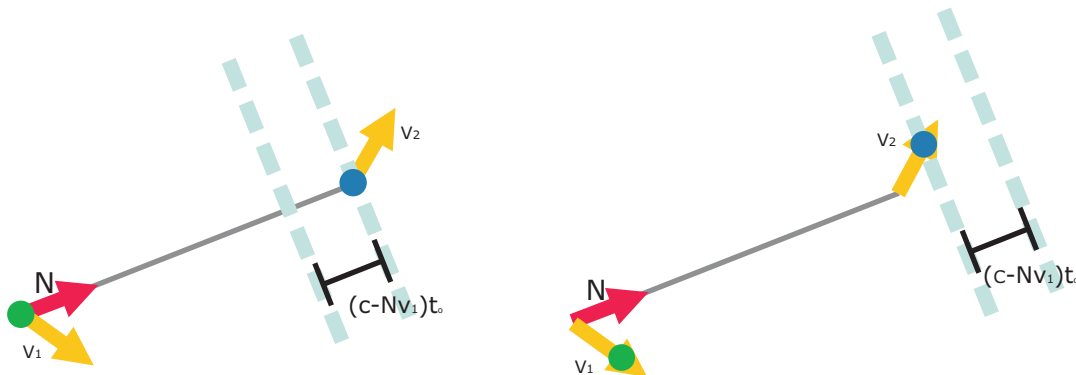
Ostane še primer, ko se gibljeta tako oddajnik (\vec{v}_1) in sprejemnik (\vec{v}_2). Razmik med svetlobnimi frontami ni več ct_0 ampak $(c - \vec{N}\vec{v}_1)t_0$ torej bodisi večji ali manjši odvisno od smeri gibanja oddajnika. Podobno kot prej (slika 4.2) velja $c\Delta t = (c - \vec{N}\vec{v}_1)t_0 + \vec{N}\vec{v}_2\Delta t$. Po preoblikovanju dobimo:

$$\frac{\Delta t}{t_0} = \frac{1 - \frac{\vec{N}\vec{v}_1}{c}}{1 - \frac{\vec{N}\vec{v}_2}{c}} \quad (4.9)$$

Nazadnje upoštevamo še, da je $t_0 = \gamma_1\tau_1$ in $\Delta t = \gamma_2\tau_2$ in dobimo:

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cdot \frac{1 - \frac{\vec{N}\vec{v}_1}{c}}{1 - \frac{\vec{N}\vec{v}_2}{c}} \quad (4.10)$$

τ_1 je nihajni čas valovanja, ki ga oddajnik oddaja (ne t_0). Z enakimi substitucijami kot prej dobimo še formule za frekvenco in valovno dolžino.



Slika 4.2: Dopplerjev pojav v primeru gibajočega oddajnika

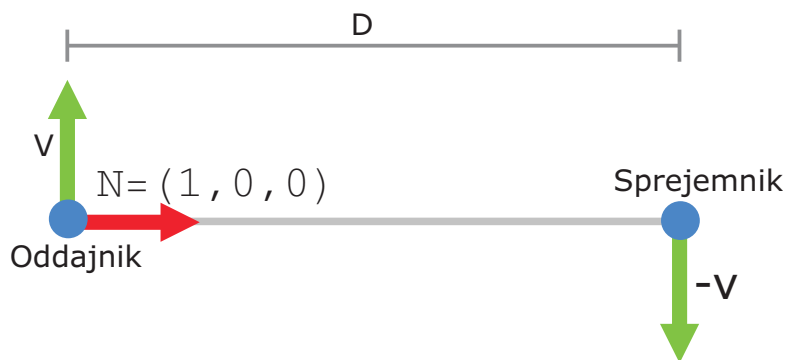
Pri zgornji formuli je zanimivo, da v primeru ko je $\vec{N}\vec{v}_1 = 0$, $\vec{N}\vec{v}_2 = 0$ in $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$ dobimo, da je razmerje med sprejeto in oddano frekvenco enako 1. To je v navideznem nasprotju s prejšnjo situacijo, ko je oddajnik miroval, pa smo kljub $\vec{N}\vec{v} = 0$ dobili razmerje različno od 1. Očitno v obeh situacijah ne gre za isti vektor \vec{N} .

◊ Bolj podroben pogled v izpeljavo formul za Dopplerjev pojav razkrije kaj je vektor \vec{N} . Pomembna sta dva dogodka, dogodek oddaje signala ter dogodek sprejema signala. Ta dva dogodka določata 4-dimenzionalni vektor v prostor-času. Za \vec{N} vzamemo krajevni del tega četverca (ki ga še normiramo).

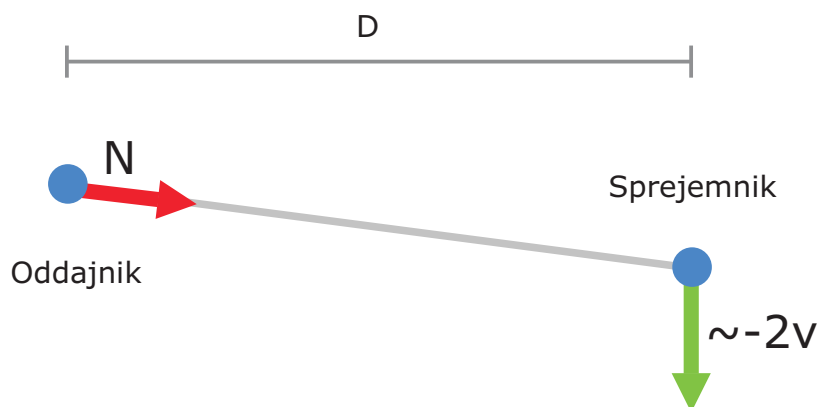
Najprej nas zanima kdaj ni Dopplerjevega pojava v primeru mirujočega oddajnika. Očitno mora veljati $\gamma(1 - \vec{N}\vec{v}/c) = 1$ oziroma $\vec{N}\vec{v} = c(1 - \frac{1}{\gamma})$. Od tu dobimo takoj potrební pogoj $\vec{N}\vec{v} \geq 0$, ali z drugimi besedami, sprejemnik mora dohitevati valove, ki jih oddaja oddajnik.

V primeru ko se tako oddajnik in sprejemnik gibljeta in je $\vec{N}\vec{v}_1 = 0$, $\vec{N}\vec{v}_2 = 0$ in $\vec{v} := \vec{v}_1 = -\vec{v}_2$ izberemo koordinatni sistem tako, da ustreza oddaji signala dogodek $(0, (0, 0, 0))$ ter dogodku sprejema signala dogodek $(d, (d, 0, 0))$. Pri tem je d oddaljenost med točko oddaje in sprejema signala ter hkrati tudi $d = c\Delta t$, kjer je Δt čas potovanja signala. Iz zgornjih formul se vidi, da v tem primeru ni Dopplerjevega efekta.

Ker lahko na celotno situacijo gledamo tudi iz koordinatnega sistema v katerem oddajnik miruje,



Slika 4.3: Oddajnik in sprejemnik se gibljeta (ni Dopplerjevega pojava)



Slika 4.4: Opisani pojav gledano iz koordinatnega sistema v katerem oddajnik miruje (spet ni Dopplerjevega pojava)

se najprej zdi da bo v tem primeru prišlo do Dopplerjevega efekta, saj ima v tem sistemu sprejemnik skoraj dvakrat večjo hitrost. V resnici pa je v tem primeru potrebno uporabiti drug vektor \vec{N}' . Le tega pa dobimo tako, da oba dogodka s pomočjo Lorentzove transformacije izrazimo v sistemu v katerem oddajnik miruje. Hitrost sprejemnika znaša $\vec{v}' = \frac{-2\vec{v}}{1+(v/c)^2}$, transformirani vektor \vec{N} pa je $\vec{N}' = (1, -\beta\gamma, 0)$. Zdaj lahko zopet uporabimo formulo za mirujoči oddajnik in dobimo pravilni rezultat, torej da ni Dopplerjevega pojava. Že brez računanja se takoj vidi, da je izpolnjen potreben pogoj $\vec{N}'\vec{v}' \geq 0$.

4.2 Splošna relativnost

V tem primeru bo prostor-čas opremljen s Schwarzschildovo metriko:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right)} - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$$

m je masa Zemlje, G gravitacijska konstanta ter c svetlobna hirtost. Pri tem je potrebno omeniti, da znaša količina $\frac{2Gm}{c^2}$ približno $9mm$. Torej, če bi celotno Zemljo stlačili v kroglico s polmerom $\approx 9mm$ bi postala črna luknja. Dejstvo, da gre za zelo majhno količino bo omogočilo, da bodo formule nekoliko bolj enostavne.

Schwarzschildova metrika pa še ni v obliki, ki bi bila najbolj primerna za takojšnjo uporabo. Zato bomo najprej metriko transformirali v t.i. sferično izotropno metriko. Hočemo obliko metrike pri kateri bo krajevni del oblike $F(r)(dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2))$, torej evklidski diferencial dolžine pomnožen z nekim faktorjem. Zdi se, da bi bilo dovolj transformirati le r koordinato.

V ta namen postavimo $r = A(\rho)\rho$, kjer je $A(\rho)$ neka (neznana) funkcija (nove) koordinate ρ . Torej je $dr = (A'\rho + A)d\rho$. Če to vstavimo v krajevni del Schwarzschildove metrike dobimo:

$$\frac{(A'\rho + A)^2 d\rho^2}{1 - \frac{2Gm}{c^2 A\rho}} + A^2 \rho^2 (d\vartheta^2 + \dots) \quad (4.11)$$

Če ta izraz primerjamo s tistim, ki ga hočemo dobiti pridemo do zaključka:

$$\frac{(A'\rho + A)^2}{1 - \frac{2Gm}{c^2 A\rho}} = A^2 \quad (4.12)$$

To nam da naslednjo zvezo $A'^2 \rho^2 + 2AA'\rho + A^2 = A^2 - \frac{2GmA}{c^2 \rho}$ oziroma $A'^2 \rho^2 + 2AA'\rho + \frac{2GmA}{c^2 \rho} = 0$. Zdaj je potrebno to diferencialno enačbo še rešiti.

Z novo funkcijo $z := A\rho$ in $z' = A'\rho + A$ dobimo $z'^2 = \frac{c^2 z^2 - 2Gmz}{c^2 \rho^2}$. Očitno lahko korenimo ter vzamemo kar pozitivni del.

Z nadaljno uvedbo novih funkcij $u = cz - \frac{Gm}{c}$ in $w = \frac{cu}{Gm}$ prevedemo enačbo v $w' = \frac{\sqrt{w^2-1}}{\rho}$.

$$\int \frac{dw}{\sqrt{w^2-1}} = \cosh^{-1} w \quad (4.13)$$

$$\int \frac{d\rho}{\rho} = \ln D\rho \quad (4.14)$$

Zamenjamo nazaj vse substitucije, ki smo jih naredili in dobimo $A(\rho) = \frac{Gm}{2c^2} \left(D + \frac{2}{\rho} + \frac{1}{D\rho^2} \right)$.

Iz pogoja $\rho \rightarrow \infty \Rightarrow A \rightarrow 1$ dobimo $D = \frac{2c^2}{Gm}$.

Rezultat:

$$A(\rho) = \left(1 + \frac{2Gm}{4c^2\rho} \right)^2 \quad (4.15)$$

Izotropna metrika je torej:

$$ds^2 = \left(\frac{1 - \frac{2Gm}{4c^2\rho}}{1 + \frac{2Gm}{4c^2\rho}} \right)^2 c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2Gm}{4c^2\rho} \right)^4 (d\rho^2 + \rho^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)) \quad (4.16)$$

Za poenostavitev zgornjega izraza upoštevamo, da za $x \approx 0$ velja $\left(\frac{1-x}{1+x} \right)^2 \approx 1 - 4x$ ter $(1+x)^4 \approx 1 + 4x$ in dobimo ($\rho \leftrightarrow r$):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2Gm}{c^2 r} \right) (dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)) \quad (4.17)$$

Oziroma za potencial $V = -\frac{Gm}{r}$ dobimo:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2V}{c^2} \right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2V}{c^2} \right) (dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)) \quad (4.18)$$

4.2.1 Vpliv na tek ur

Zgornjo enačbo delimo z $c^2 dt^2$, upoštevamo $ds = cd\tau$ ter definiramo $v^2 := \frac{dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)}{dt^2}$ za hitrost delca.

Dobimo:

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{\left(1 + \frac{2V}{c^2} \right) - \left(1 - \frac{2V}{c^2} \right) \left(\frac{\vec{v}}{c} \right)^2} \approx \sqrt{1 + \frac{2V}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}} \quad (4.19)$$

$$\approx 1 + \frac{V}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} \quad (4.20)$$

Tako dobimo zvezo med lastnim in koordinatnim časom za delec, ki se giblje s hitrostjo v :

$$d\tau = \left(1 + \frac{V}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}\right) dt \quad (4.21)$$

Lastni čas gibajočega delca očitno vedno teče počasneje od koordinatnega časa.

4.2.2 Dopplerjev pojav

V tem primeru vzamemo kar formulo za Dopplerjev pojav v ravnem prostoru, le za lastna časa vstavimo drugačne vrednosti. Torej imamo:

$$\frac{dt_2}{dt_1} = \frac{1 - \frac{\vec{N}\vec{v}_1}{c}}{1 - \frac{\vec{N}\vec{v}_2}{c}} \quad (4.22)$$

Indeks 1 se nanaša na oddajnik, 2 pa na sprejemnik.

Upoštevamo da je $d\tau_1 = \left(1 + \frac{V_1}{c^2} - \frac{v_1^2}{2c^2}\right) dt_1$ in $d\tau_2 = \left(1 + \frac{V_2}{c^2} - \frac{v_2^2}{2c^2}\right) dt_2$. Če ta izraza vstavimo v zgornjo enačbo, potem po preureditvi in delni poenostavitvi dobimo:

$$\frac{d\tau_2}{d\tau_1} = \left(1 + \frac{2V_2 - 2V_1 + v_1^2 - v_2^2}{2c^2}\right) \cdot \frac{1 - \frac{\vec{N}\vec{v}_1}{c}}{1 - \frac{\vec{N}\vec{v}_2}{c}} \quad (4.23)$$

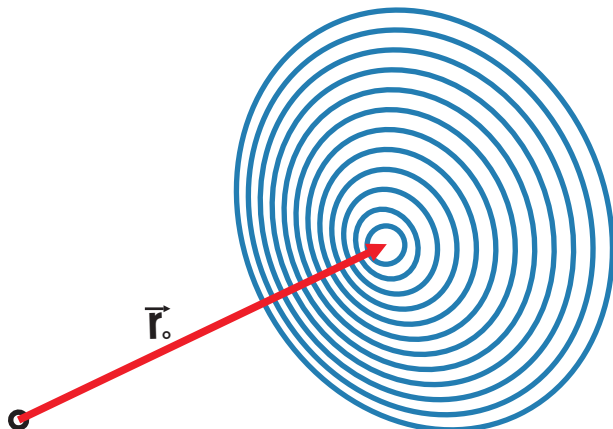
Ter podobno za frekvenco:

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \left(1 + \frac{2V_1 - 2V_2 + v_2^2 - v_1^2}{2c^2}\right) \cdot \frac{1 - \frac{\vec{N}\vec{v}_2}{c}}{1 - \frac{\vec{N}\vec{v}_1}{c}} \quad (4.24)$$

Pri tem je ν_1 lastna frekvenca, ki jo oddaja oddajnik, ν_2 pa frekvenca, ki jo izmeri sprejemnik.

Formula, ki smo jo dobili je pravzaprav le malenkostno modificirana formula, ki je veljala za raven prostor. Gotovo pa velja, da je ta formula aproksimacija točne formule, ki pa bi jo (če bi jo) le s težavo dobili. Vseeno pa bi poskušal približno oceniti zanesljivost te formule.

Zaradi enostavnosti bi se omejil na primer mirujočega oddajnika. V primeru ravnega prostora je veljalo, da je razdalja med dvema zaporednima svetlobnima frontama enaka ct_0 , kjer



Slika 4.5: Širjenje svetlobnih signalov v sferično izotropni metriki

je bil t_0 nihajni čas, oziroma količina obratno sorazmerna s frekvenco valovanja. Ta razdalja je bila hkrati prava ter tudi koordinatna razdalja in se je ohranjala tekom celotnega potovanja signala. V primeru splošne relativnosti se (vsaj) koordinatna razdalja prav gotovo ne bo ohranjala, saj koordinate lahko poljubno izbiramo in same po sebi ne nosijo kakšne informacije o metriki. Če bomo torej lahko koordinatno razdaljo med dvema zaporednima svetlobnima frontama zapisali kot $ct_0 + \epsilon$ za $\epsilon \approx 0$, bomo to vzeli kot argument, da je približna formula dovolj natančna.

V ta namen najprej pogledamo kako se širi signal v majhni okolici neke točke. Točka naj ima koordinate $(ct, r_0, \varphi, \vartheta = 90^\circ)$, pri čemer sta t in φ poljubna, $r_0 > \frac{2GM}{c^2}$, z $\vartheta = 90^\circ$ pa se omejimo na 2 prostorski dimenziji.

Izotropno metriko lahko zapišemo tudi v obliki

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) dl^2$$

kjer je dl evklidski diferencial dolžine. Za svetlobni signal potem dobimo

$$dl^2 = \frac{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}{1 + \frac{2GM}{c^2 r}} c^2 dt^2$$

Izberemo nek kratek dt in pogledamo kako se širi signal iz točke r_0 . Na začetku se signal širi kot krogla. V naslednjem trenutku je pa že potrebno upoštevati (v zgornji formuli), da

je potrebno vzeti različne r za različne smeri širjenja signala. V radialni smeri, za primer oddaljevanja signala od izhodišča, moramo vzeti večji r kot v smeri približevanja izhodišču. V smeri pravokotno na radialno smer pa lahko vzamemo, da se r ne spreminja (v dovolj majhni okolici).

Ko to upoštevamo vidimo, da pri fiksnem dt signal najhitreje napreduje v radialni smeri oddaljevanja izhodišču, najpočasneje pa v smeri približevanja. Širjenje v pravokotni smeri (kot tudi v vseh ostalih smereh) je vmes med tema skrajnostima. Širjenje približno podaja slika 4.5.

V nadaljevanju bi zato pogledali širjenje svetlobe samo v radialni smeri. Malo bolj enostavno gre v Schwarzschildovi metriki, kjer za svetlobni signal dobimo:

$$\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 = \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)}$$

oziroma

$$cdt = \pm \frac{dr}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)}$$

Plus uporabimo v primeru, ko gledamo tisti del signala, ki se oddaljuje od izhodišča, minus pa za tisti del ki se mu približuje.

Zgornjo enačbo integriramo:

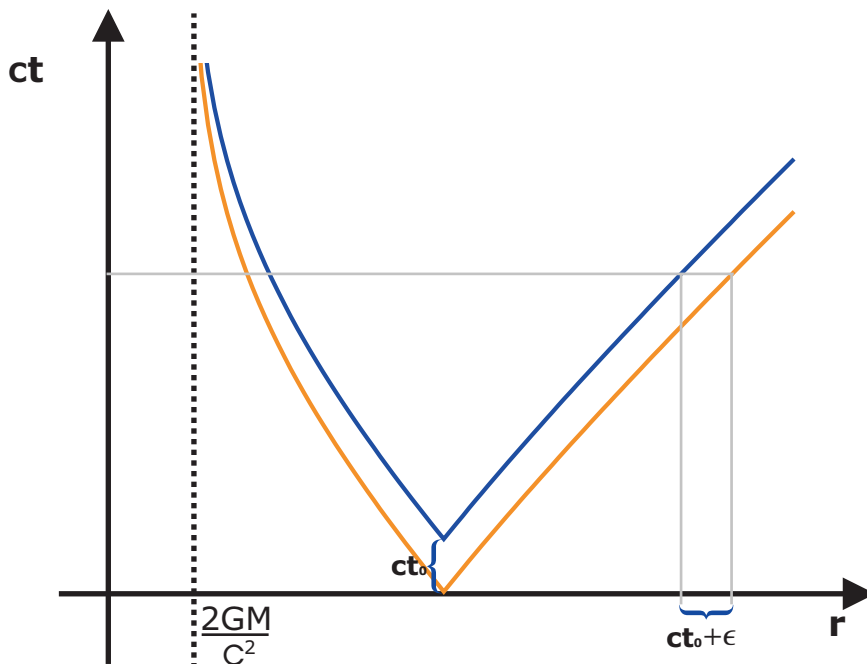
$$ct + D = \int cdt = \pm \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} = \pm r \pm \frac{2GM}{c^2} \ln(c^2 r - 2GM)$$

Konstanto D določimo tako, da bo veljalo $ct = ct_0 \Leftrightarrow r = r_0$. Rezultat je:

$$ct = ct_0 \pm (r - r_0) \pm \frac{2GM}{c^2} \ln \left(\frac{r - \frac{2GM}{c^2}}{r_0 - \frac{2GM}{c^2}} \right)$$

Zdaj pa vzamemo dva svetlobna bliska, oba izsevana iz koordinate r_0 ter v (koordinatnem) časovnem razmiku t_0 . Gledamo lahko samo del, ko se signala oddaljujeta od izhodišča. Po nekem času t pride prvi blisk do koordinate r_1 , drugi pa do r_2 in velja $r_1 > r_2$. Imamo

$$ct = (r_1 - r_0) + \frac{2GM}{c^2} \ln \left(\frac{r_1 - \frac{2GM}{c^2}}{r_0 - \frac{2GM}{c^2}} \right)$$



Slika 4.6: Dva svetlobna bliska izsevana v časovnem razmiku t_0

in

$$ct = ct_0 + (r_2 - r_0) + \frac{2GM}{c^2} \ln \left(\frac{r_2 - \frac{2GM}{c^2}}{r_0 - \frac{2GM}{c^2}} \right)$$

Enačbi odštejemo in po preureditvi dobimo

$$r_1 - r_2 = ct_0 - \frac{2GM}{c^2} \ln \left(\frac{r_1 - \frac{2GM}{c^2}}{r_2 - \frac{2GM}{c^2}} \right) \approx ct_0 - \frac{2GM}{c^2} \ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right)$$

Dodatno približno velja $r_1 \approx r_2 + ct_0$, nakar dobimo:

$$r_1 - r_2 = ct_0 - \frac{2GM}{c^2} \ln \left(1 + \frac{ct_0}{r_2} \right) \approx ct_0 - \frac{2GMt_0}{cr_2}$$

Velikost zadnjega člena ocenimo kot $\frac{2GMt_0}{cr_2} = \frac{2GM}{cr_2\nu_0} \leq \frac{2GM}{cR_0\nu_0}$, kjer je R_0 polmer Zemlje, $\nu_0 = 10^6 \text{ Hz}$, torej najmanjša frekvenca, ki se uporablja v GPS (C/A koda). Dobimo $\frac{2GM}{cR_0\nu_0} \approx 10^{-6} \text{ m}$.

Torej je razlika med koordinatno razdaljo $r_1 - r_2$ in ct_0 , torej razdaljo, ki jo uporabimo pri izpeljavi enačb Dopplerjevega pojava res (v primeru Zemlje) zanemarljivo majhna, saj

bi moral sprejemnik meriti čas z natančnostjo boljšo od 10^{-15} s, da bi zaznal tako majhno razdaljo.

4.3 Tirnice satelitov

Za potrebe analize relativističnih vplivov na GPS, torej vpliv na tek ur in Dopplerjev pojav, se izkaže, da je dovolj dober približek, če vzamemo za tirnice satelitov elipse, oziroma gibanje satelita v težnostnem polju, ki ga ustvarja točkasto telo - Zemlja. Bolj natančna obravnava upošteva (med drugim) tudi sploščenost Zemlje, ki povzroči precesijo ravnine v kateri leži tir satelita in s tem veliko odstopanje od eliptičnih tirnic. Vendar je ta vpliv velik le za satelite, ki imajo zelo nizko tirnico. Težnostni potencial, ki ga povzroča sploščenost je obratno sorazmeren s kubikom razdalje in ima zato na višini GPS satelitov že zelo majhen vpliv.

Potrebno je torej le poiskati tirnico satelita, ki bo dala informacijo o položaju in hitrosti, kar bomo nato upoštevali v že izpeljanih splošnih enačbah.

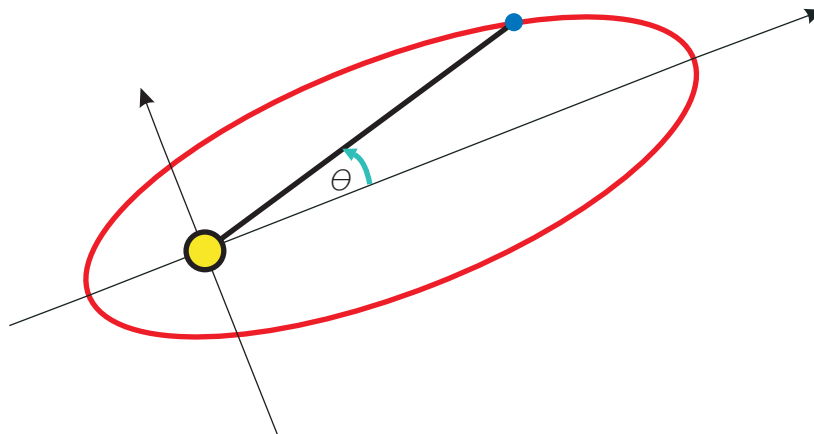
Satelit se giblje pod vplivom potenciala $V(r) = -\frac{GM}{r}$, kjer je G gravitacijska konstanta, M pa masa Zemlje. Ker je polje potencialno in sila teže centralna, si lahko pomagamo z dvema ohranitvenima zakonoma, ohranitev energije E_0 in vrtilne količine L_0 (na enoto mase satelita).

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} = E_0 \quad (4.25)$$

in

$$\vec{r} \times \vec{v} = L_0 \quad (4.26)$$

Problema se lotimo v polarnih koordinatah, pri čemer je Zemlja v izhodišču, ravnina pa je orientirana tako, da se ujema s tirnico gibanja satelita. Postavimo $\vec{r} = r(\cos(\theta), \sin(\theta))$ in dobimo $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$, ohranitvena zakona pa $\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GM}{r} = E_0$ in $r^2\dot{\theta} = L_0$.



Slika 4.7: Tir satelita

Hočemo tir oblike $r = r(\theta)$. Od tu $\dot{r} = r'\dot{\theta}$ ter nazadnje

$$\frac{L_0 r'}{r^2 \sqrt{2 \left(E_0 + \frac{GM}{r} - \frac{L_0^2}{2r^2} \right)}} = 1 \quad (4.27)$$

Enačbo lahko integriramo in kot rezultat dobimo:

$$r(\theta) = \frac{L_0^2}{GM + \sqrt{(GM)^2 + 2E_0 L_0^2} \cos(\theta - \theta_0)} \quad (4.28)$$

Potem ko ustrezne količine identificiramo z veliko polosjo elipse a in ekscentriciteto e zadnjo enačbo zapišemo kot (Goldstein, 2002[5]):

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

Zdaj izberemo še položaj ravnine tira satelita in s tem je položaj satelita določen. Kljub temu, da zgornje enačbe ne povedo kako se položaj satelita spreminja s časom, pa lahko določimo hitrost satelita, ko se ta nahaja na določenem položaju.

Iz ohranitve celotne energije dobimo $\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} = -\frac{GM}{2a}$, pri čemer je $E_0 = -\frac{GM}{2a}$. Od tu hitro dobimo zvezo med koordinatnim časom in lastnim časom na satelitu (Ashby, 2003[7])

$$d\tau = \left(1 - \frac{3Gm}{2ac^2} + \frac{2Gm}{c^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) \right) dt \quad (4.29)$$

Modificirame formule za tek ur in Dopplerjev pojav, ki jih hočemo dobiti bodo odražale odnos med satelitom in sprejemnikom. Za sprejemnik bomo vzeli nek delec, ki se nahaja na zemeljski površini in glede na Zemljo miruje oziroma se zelo počasi giblje. Kljub temu pa se zaradi rotacije Zemlje glede na izbrani (inercialni sistem, če zanemarimo težnost) koordinatni sistem giblje z dokaj veliko hitrostjo.

V enačbi za metriko

$$ds^2 = (1 + 2V/c^2) c^2 dt^2 - (1 - 2V/c^2) (dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2))$$

smo uporabili za potencial $V = -\frac{Gm}{r}$. Izkaže pa se, da lahko za potencial V vzamemo kar točno obliko gravitacijskega potenciala za Zemljo, torej $V = -\frac{Gm}{r} \left(1 - J_2 \left(\frac{a_1}{r}\right)^2 P_2(\cos \vartheta) + \dots\right)$.

Za delec (uro), ki miruje na zemeljski površini velja, da ima glede na koordinatni sistem hitrost $v = \omega r \sin \vartheta$, oziroma $v^2 = \omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta$. Če to vstavimo v enačbo, ki podaja zvezo med lastnim in koordinatnim časom

$$d\tau = \left(1 + \frac{V}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}\right) dt \quad (4.30)$$

dobimo

$$d\tau = \left(1 + \frac{V}{c^2} - \frac{\omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta}{2c^2}\right) dt \quad (4.31)$$

Iz zgornje enačbe je razvidno, da je količina $V - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta$ ravno težnostni potencial Zemlje, torej vsota gravitacijskega in centrifugalnega potenciala. Če se zdaj omejimo na ure, ki se nahajajo na geoidu, pridemo do presenetljivega dejstva, da vse ure na geoidu tečejo enako hitro, saj je geoid ravno ploskev kjer je težnostni potencial konstanten. Na geoidu velja $V - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta = \Phi_0$ in tako dobimo zvezo

$$d\tau = \left(1 + \frac{\Phi_0}{c^2}\right) dt \quad (4.32)$$

Končno dobimo še formulo za Dopplerjev pojav v primeru satelita in opazovalca, ki miruje na zemeljski površini (oz. geoidu). Indeks 1 se nanaša na oddajnik, 2 pa na sprejemnik.

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \left(1 + \frac{2Gm}{c^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) - \left(\frac{3Gm}{2ac^2} + \frac{\Phi_0}{c^2}\right)\right) \frac{1 - \frac{\vec{N}\vec{v}_2}{c}}{1 - \frac{\vec{N}\vec{v}_1}{c}} \quad (4.33)$$

Čas, ki ga kažejo ure na geoidu je v bistvu čas, ki ga dojemamo na Zemlji in ki ga merijo (npr.) atomske ure. Zato bi bilo dobro vedeti kako naj te ure med seboj sinhroniziramo.

4.4 Sinhronizacija

V inercialnem koordinatnem sistemu si lahko pomagamo z Einsteinovo sinhronizacijo ali pa s pomočjo prenosljivih ur. Iz poznane razdalje med urama in konstantne svetlobne hitrosti lahko izračunamo popravke ur, ki jih umerjamo glede na dano uro. V primeru, da ne poznamo razdalje je postopek sledeč. V točki A naj bo referenčna ura, v točki B pa ura, ki jo hočemo sinhronizirati z uro v A (ura v A naj kaže kar koordinatni čas). Iz B pošljemo svetlobni signal, ki potuje do A in nato nazaj v B . Povratni signal naj tudi vsebuje informacijo o stanju ure v A v trenutku odboja t_A . Izmerimo tudi časovni presledek med oddajo in sprejetjem signala v B δt . Naslednja dogodka sta sočasna:

- Dogodek v B s časovno koordinato ravno na polovici med oddajo in sprejemom signala.
- Dogodek, ko v A prispe signal iz B .

V primeru prenosljive ure naj bo s razdalja, v pa hitrost ure. Potem velja, da ura, ki smo jo prestavili preko te razdalje z dano hitrostjo zaostaja za $dt = \frac{s}{v}(1 - \frac{1}{\gamma})$ časa. Kot kaže slika 4.8 lahko ta zaostanek poljubno zmanjšamo, če je le hitrost ure dovolj majhna (kljub temu da je čas potovanja vedno daljši).

V primeru Zemlje imamo opravka z gibajočimi urami ali pa z neinercialnim koordinatnim sistemom, če si mislimo koordinatni sistem, ki rotira skupaj z Zemljo. V tem sistemu ure sicer mirujejo, vendar pa uporaba Einsteinove sinhronizacije (ki jo uporabimo) pomeni, da se vseh ur ne bo dalo sinhronizirati.

Najprej si pogledamo kako razširimo pojem razdalje in sočasnosti na poljubne koordinatne sisteme. Prostor-čas naj bo določen z metričnim tenzorjem g_{ij} oz. $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$, pri



Slika 4.8: Prenos časa s pomočjo prenosne ure

čemer na bo x^0 časovna (času podobna) koordinata, x^α ($\alpha = 1, 2, 3$) pa poljubne krajevne koordinate.

Lastni čas Ogledamo si dva bližnja dogodka, ki imata iste krajevne koordinate. Torej $dx^\alpha = 0$ in dobimo $ds^2 = g_{00}dx^0$. Ker je $ds = cd\tau$ nazadnje dobimo

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}dx^0$$

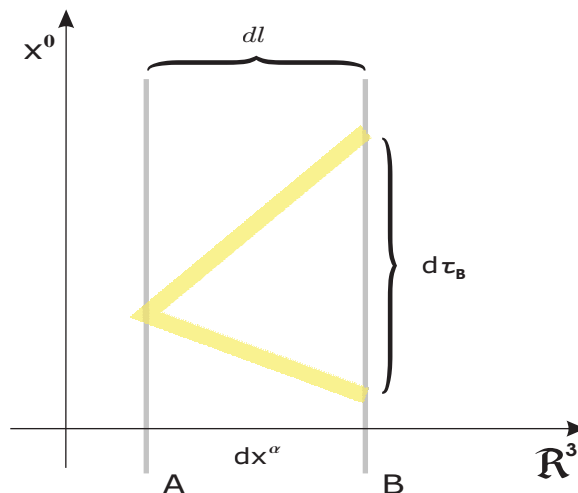
Prava razdalja Pravo razdaljo definiramo na naslednji način. Vzamemo dve bližnji točki A in B . Iz B posvetimo proti A in potem izmerimo lastni čas (v B) med oddajo in prihodom signala nazaj v B . Ta čas pomnožen s $\frac{c}{2}$ proglasimo za razdaljo med točkama A in B .

Naj bo $A = x^\alpha$ in $B = x^\alpha + dx^\alpha$. Iz B posvetimo proti A . Velja

$$ds^2 = 0 = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0\alpha}dx^0dx^\alpha + g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$$

To enačbo razrešimo na dx^0 in dobimo

$$dx^{0(1)} = \frac{1}{g_{00}} \left(-g_{0\alpha}dx^\alpha - \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{00}g_{\alpha\beta}) dx^\alpha dx^\alpha} \right) \quad (4.34)$$



Slika 4.9: Prava razdalja med točkama

$$dx^{0(2)} = \frac{1}{g_{00}} \left(-g_{0\alpha} dx^\alpha + \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{00}g_{\alpha\beta}) dx^\alpha dx^\alpha} \right)$$

Koordinatni čas med oddajo in sprejemom signala v B je torej $dx^{0(2)} - dx^{0(1)}$. To pomnožimo z $\frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}$, da dobimo lastni čas, nato pa še z $\frac{c}{2}$, da dobimo razdaljo. Rezultat je (Landau et al., 1985[6])

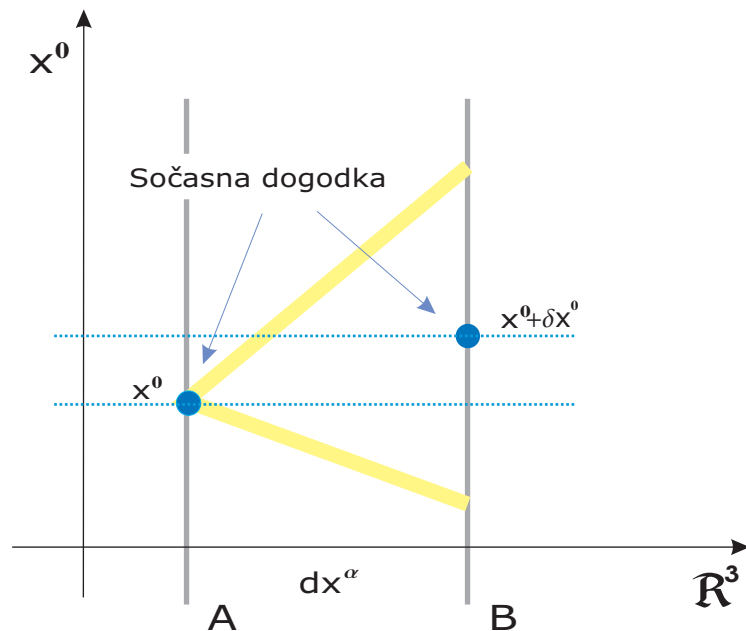
$$dl^2 = \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}} \right) dx^\alpha dx^\beta$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3$$

Od tu se vidi, da prava razdalja ni nujno najbolj nazoren pojem, saj se lahko spreminja, če so g_{ij} odvisni od časa oz. koordinate x^0 (npr. merjenje gravitacijskih valov).

Očitno je tudi, da prave razdalje ne bi dobili, če bi v enačbi za metriko preprosto vzeli $dx^0 = 0$. Ta način se izide le, če velja $g_{0\alpha} \equiv 0$.

Sočasni dogodki Sočasne dogodke definiramo podobno kot v primeru inercialnih koordinatnih sistemov. Vzamemo bližnji točki A in B . Iz B pošljemo signal, ki potuje do A in nato nazaj do B . Za sočasna proglasimo naslednja dogodka:



Slika 4.10: Sočasna dogodka (koordinatni čas dogodkov se ne ujema)

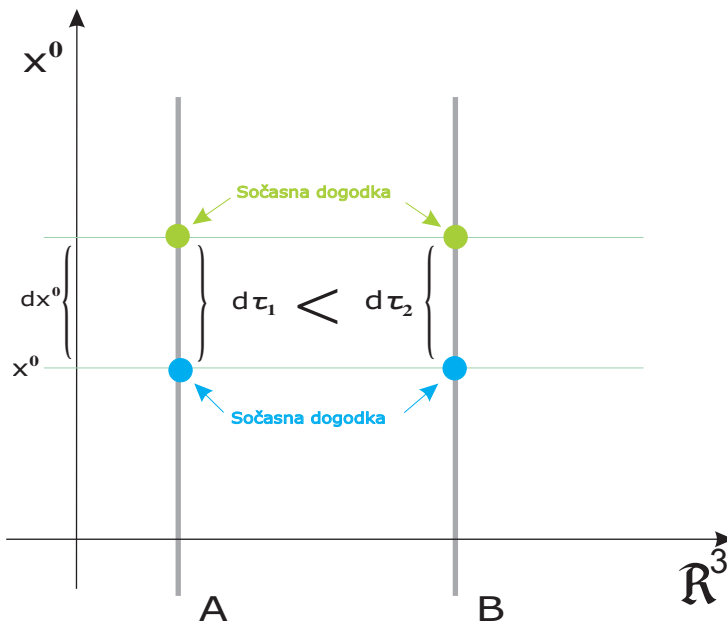
- V A prispe signal, časovna koordinata naj bo x^0 .
- Dogodek na kraju B , ki ima časovno koordinato ravno na polovici med oddajo in sprejemom signala.

Glede na zgornjo definicijo lahko zaključimo, sočasna sta dogodka (x^0, x^α) in $(x^0 + \delta x^0, x^\alpha + dx^\alpha)$. Pri tem je (Landau et al., 1985[6])

$$\delta x^0 = \frac{1}{2}(dx^{0(1)} + dx^{0(2)}) = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha$$

Torej sočasni dogodki nimajo nujno enake x^0 koordinate. To se zgodi le v primeru, da velja $g_{0\alpha} \equiv 0$.

S pomočjo zgornje formule lahko poiščemo danemu dogodku sočasne dogodke le v (infinitesimalno) majhni okolici danega dogodka. Problem nastane, ko skušamo to območje razširiti. Najprej obravnavamo primer, ko skušamo danemu dogodku A poiskati sočasne dogodke, ki bodo (krajevno gledano, vključno z A) ležali na neki odprti krivulji $\vec{r} = \vec{r}(\lambda)$ (λ nek



Slika 4.11: Sočasna dogodka v primeru metrike za katero je $g_{0\alpha} \equiv 0$

parameter). Časovno koordinato točke $\vec{r}(\lambda)$ dobimo kot $x^0 + \Delta x^0$, kjer je

$$\Delta x^0 = - \int \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha = - \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} \dot{\vec{r}}(\zeta) d\zeta$$

Problem se pojavi v primeru sklenjene krivulje, ko dobimo

$$\Delta x^0 = - \oint \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha = - \oint_{\lambda} \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} \dot{\vec{r}}(\zeta) d\zeta$$

V splošnem za zadnji izraz dobimo količino različno od nič. To pa pomeni, da po tem ko začnemo v točki A in obhodimo celotno krivuljo, ugotovimo, da bi moral biti dogodek A sočasen z dogodkom, ki se je zgodil v isti točki kot A, le ob drugem času.

V primeru, da $g_{0\alpha} \equiv 0$ zgoraj opisanega problema ni in danemu dogodku so sočasni vsi dogodki z enako časovno koordinato.

Sinhronizacija ur Sočasni dogodki so nam v pomoč pri sinhronizaciji ur. Namen je vzpostaviti mrežo ur po prostoru, ki bodo "kazale" enak čas. Na prvi pogled se to zdi težko,

saj vemo, da v splošnem lastni čas teče različno hitro v različnih točkah prostora. Zato je že takoj jasno, da bo potrebno izbrati neko referenčno uro, ki bo kazala njen (npr. lastni) čas, čas ostalih ur pa ustrezno popravljati.

V primeru inercialnega koordinatnega sistema je sinhronizacija ur praktično isto kot iskanje sočasnih dogodkov. Če ob nekem času v množici sočasnih dogodkov nastavimo vse ure na isto vrednost, te ure ostanejo sinhronizirane, ko pogledamo to množico od nekem drugem času.

V splošnem primeru, izberemo referenčno uro v točki A . V trenutku x^0 določimo dogodku A sočasne dogodke na neki odprti krivulji. Vrednost ur teh sočasnih dogodkov nastavimo na vrednost, ki jo kaže ura v A . Tek teh ur je zdaj potrebno prilagajati njihovem položaju glede na A . S tem dosežemo, da kadarkoli spet določimo sočasne dogodke k A , res vse ure v tej množici kažejo enak odčitek časa.

Podobno kot prej se pojavi problem sinhronizacije ur na sklenjeni krivulji, saj po obhodu krivulje ura v A ne more biti sinhronizirana sama s sabo (ne more kazati dva različna časa hkrati).

V primeru, da je $g_{0\alpha} \equiv 0$ pa lahko sinhroniziramo vse ure po prostoru, oziroma delu prostora, ki ga pokriva izbran koordinatni sistem.

Pomembna je tudi ugotovitev, da možnost sinhronizacije ali nesinhronizacije ur ni lastnost prostor-časa ampak izbranega koordinatnega sistema, saj je npr. pri izbiri rotirajočega koordinatnega sistema popolna sinhronizacija nemogoča, če pa transformiramo nazaj v inercialni sistem pa lahko sinhroniziramo vse ure.

4.4.1 Sinhronizacija ur na Zemlji

Metriko

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2V}{c^2}\right) (cdt)^2 - \left(1 - \frac{2V}{c^2}\right) (dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2))$$

transformiramo v koordinatni sistem, ki se rotira skupaj z Zemljo preko $t = t'$, $r = r'$, $\vartheta = \vartheta'$ in $\varphi = \varphi' + \omega t'$. Dobimo (brez znaka $'$);

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2V}{c^2} - \left(\frac{\omega r \sin \vartheta}{c}\right)^2\right) (cdt)^2 - \frac{2\omega r^2 \sin^2 \vartheta}{c} d\varphi cdt - \left(1 - \frac{2V}{c^2}\right) (dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2))$$

Od tu vidimo, da je $g_{(ct)\varphi} = -\frac{\omega r^2 \sin^2 \vartheta}{c} \neq 0$ zato popolna sinhronizacija ur (v zgoraj opisanem smislu) ni mogoča. V posebnem tudi ni mogoče sinhronizirati ur na geoidu. Še vedno pa velja, da vse ure na geoidu tečejo enako hitro ($d\tau = (1 + \Phi_0/c^2) dt$). S transformacijo $t' = (1 + \Phi_0/c^2) t$ dobimo metriko v kateri je koordinatni čas t ravno lastni čas ur na geoidu

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2(\Phi - \Phi_0)}{c^2}\right) (cdt)^2 - \frac{2\omega r^2 \sin^2 \vartheta}{c} d\varphi cdt - \left(1 - \frac{2V}{c^2}\right) (dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)) \quad (4.35)$$

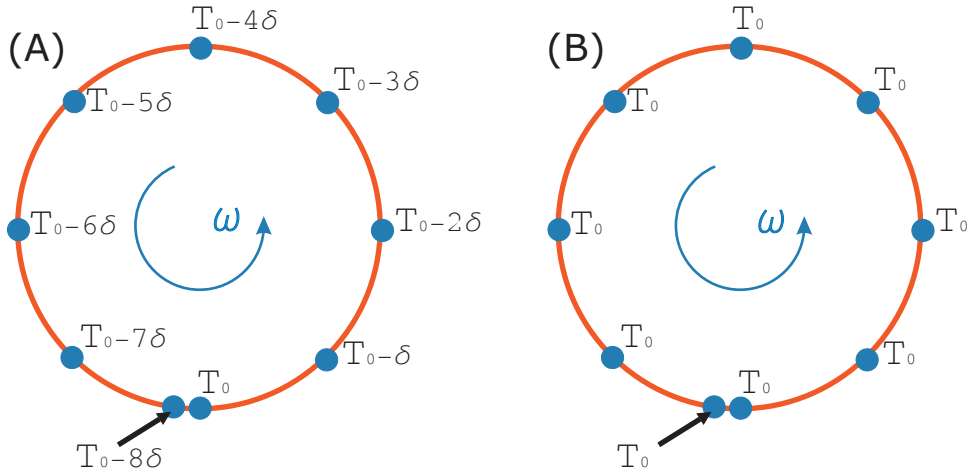
Ker ur na geoidu ne moremo sinhronizirati, je dogovor tak, da so ure sinhronizirane tako, da kažejo enak čas kadar je časovna koordinata konstantna, oziroma, da kažejo koordinatni čas. Torej nekako tako, kot da bi jih sinhronizirali v nerotirajočem sistemu. Postopek je torej približno tak; izbrano uro najprej sinhroniziramo glede na referenčno (po običajnem postopku). Uri zdaj kažeta enak odčitek časa ob različnih koordinatnih časih, zato tek ure popravimo za faktor, ki ga povzročajo od nič različne komponente $g_{0\alpha}$. V primeru, da sinhroniziramo uro B glede na A , obe se nahajata na geoidu (tudi pot sinhronizacije po kateri integriramo) je

$$g_{(ct)\varphi} = -\frac{\omega r^2 \sin^2 \vartheta}{c}$$

in zato

$$\Delta t = - \int_A^B \frac{g_{0\alpha}}{cg_{00}} dx^\alpha = \int_A^B \frac{\omega r^2 \sin^2 \vartheta}{c^2} d\varphi \quad (4.36)$$

Tek ure v B popravimo za $+\Delta t$ in s tem je sinhronizacija zaključena. Vsaka ura na geoidu kaže zdaj koordinatni čas (iz zadnje metrike).



Slika 4.12: Prikaz stanj ur na vrteči krožnici v nekem (fiksni) trenutku koordinatnega časa: (A) ure so sinhronizirane z Einsteinovo sinhronizacijo, (B) popravljeno stanje ur

Prenosne ure

V primeru počasne prenosne ure imamo

$$c^2 d\tau^2 = g_{00}c^2 dt^2 + 2g_{0\alpha}dx^\alpha c dt + g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$$

Delimo s $c^2 dt^2$ in zanemarimo zadnji člen (ura je počasna):

$$d\tau = \sqrt{g_{00} + \frac{2g_{0\alpha}dx^\alpha}{c dt}} dt \approx \left(\sqrt{g_{00}} + \frac{g_{0\alpha}dx^\alpha}{c dt \sqrt{g_{00}}} \right) dt$$

in nazadnje

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} dt + \frac{g_{0\alpha}dx^\alpha}{c\sqrt{g_{00}}} \quad (4.37)$$

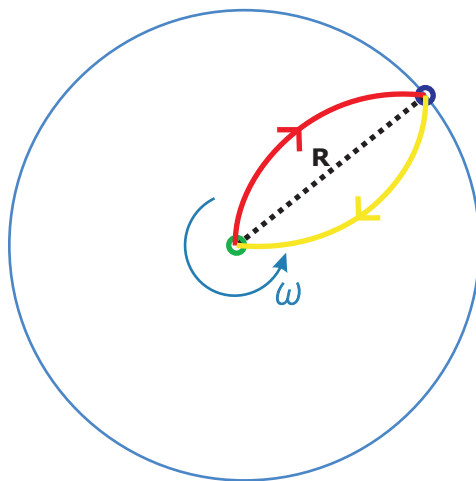
Sprememba koordinatnega časa je tako kot prej

$$\delta x^0 = -\frac{g_{0\alpha}dx^\alpha}{g_{00}}$$

V primeru, da je dogajanje omejeno na geoid, pri čemer uporabljamo zadnje zapisano metriko, iz zgornje formule dobimo

$$dt = d\tau + \frac{\omega r^2 \sin^2 \vartheta}{c^2}$$

Torej, ko počasno uro prenesemo po določeni poti, ji ob koncu poti moramo prišteti $-\frac{1}{c} \int_\gamma \frac{g_{0\alpha}dx^\alpha}{g_{00}}$.



Slika 4.13: Pot svetlobnega signala v rotirajočem koordinatnem sistemu

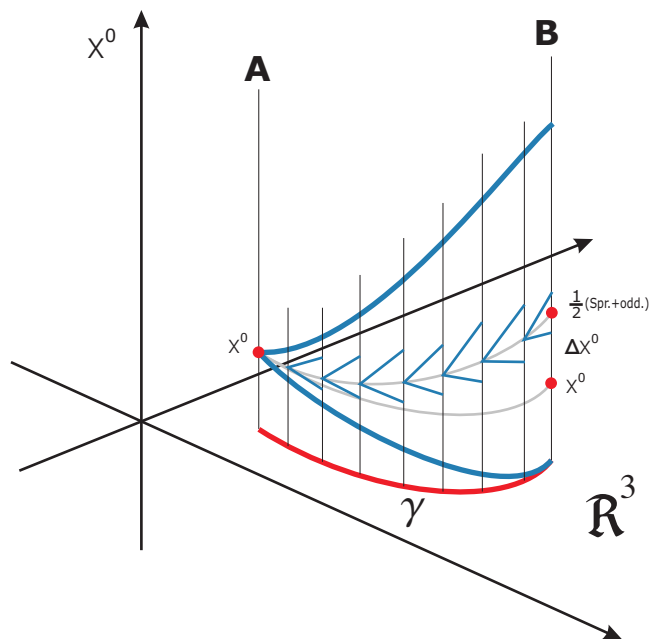
Zgoraj opisana sinhronizacija ur deluje v primeru ur, ki sta zelo blizu ali pa v primeru, da poznamo pot sinhronizacije. Malo bolj zapleteno je v primeru, da gre za bolj oddaljeni uri (A in B), ki ju poskušamo sinhronizirati z direktno izmenjavo svetlobnih signalov.

Točno pot potovanja signala od B do A dobimo kot rešitev $\ddot{x}^i + \Gamma_{kl}^i \dot{x}^k \dot{x}^l = 0$ z dodatnim pogojem $g_{kl} \dot{x}^k \dot{x}^l = 0$. Pot signala predstavlja krajevni del te krivulje. Problem pa je, ker se poti signala od B do A in tistega nazaj od A do B v splošnem razlikujeta, tudi če je metrika neodvisna od x^0 (npr. rotirajoči koordinatni sistem).

Primer: rotirajoči sistem V trenutku $t = 0$ pošljemo signal iz izhodišča proti točki B na koordinati $r = R$. V inercialnem koordinatnem sistemu je pot signala premica $\vec{r} = (c, \omega R)t$, $t \in [0, R/c]$. To pretvorimo v rotirajoči sistem in dobimo (približno):

$$\begin{aligned} x(t) &= ct + \omega^2 R t^2 \\ y(t) &= -\omega c t^2 + \omega R t \end{aligned}$$

y koordinata kaže odstopanje žarka od zveznice med točkama. Največje odstopanje znaša $y_{max} = \frac{\omega R^2}{4c}$. V primeru, da je R polmer Zemlje in ω kotna hitrost rotacije Zemlje znaša to odstopanje okoli $2.5m$. Torej razlika med signaloma tja in nazaj znaša okoli $5m$.



Slika 4.14: Skica dokaza zgornje trditve

Če je metrika neodvisna od x^0 in svetlobni signal med točkama prepotuje isto pot γ (krajevno gledano) v obe smeri, potem velja točna zveza za popravek sinhronizacije:

$$\Delta t = -\frac{1}{c} \int_{\gamma} \frac{g_{0\alpha} dx^{\alpha}}{g_{00}}$$

Dokaz tega prikazuje slika 4.14, bistvena pa je neodvisnost od koordinate x^0 , torej lahko dele krivulje, ki jo opiše svetlobni žarek vzporedno premikamo v smeri osi x^0 .

V primeru, da zgornje predpostavke ne držijo nam točen rezultat v splošnem lahko da le rešitev enačbe $\ddot{x}^i + \Gamma_{kl}^i \dot{x}^k \dot{x}^l = 0$. Ker je reševanje enačbe za geodetsko krivuljo dokaj težavno, bi namesto tega raje uporabili enačbo tipa $\Delta t = -\frac{1}{c} \int_{\gamma} \frac{g_{0\alpha} dx^{\alpha}}{g_{00}}$, kjer bi za γ vzeli neko pot med točkama (po možnosti kar ravno, oziroma neko srednjo pot).

Uporaba različnih poti pa daje različne rezultate. V primeru rotirajočega sistema imamo pri dani poti γ izraz $\Delta t \approx \frac{1}{c^2} \int_{\gamma} \omega r^2 d\varphi$. Če zdaj za sinhronizacijo izberemo dve različni poti γ_1 , γ_2 potem je razlika me obema sinhronizacijama ravno $\delta t = \frac{1}{c^2} \oint_{\Gamma} \omega r^2 d\varphi$, kjer je $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$.

Iz zadnje formule pa je razvidno tudi:

$$\delta t = \frac{1}{c^2} \oint \omega r^2 d\varphi = \pm \frac{2\omega}{c^2} S$$

kjer je S ravno ploščina območja, ki ga oklepa projekcija krivulje Γ na ravnino, ki je pravokotna na os rotacije. Zdaj lahko ocenimo napako sinhronizacije v zgornjem primeru:

Imamo $S \approx 2.5m \cdot R = 16km^2$ ter rezultat $\delta t = 2.5 \cdot 10^{-14}s$. To je torej maksimalna razlika, ki bi jo dobili, če bi integrirali enkrat po prvi poti svetlobnega signala, drugič pa po drugi poti. Ker so razlike tako majhne lahko vsakič za pot integracije med točkama vzamemo kar daljico.

Sinhronizacija gibajoče ure Ostane še primer še primer, ko se ura, ki jo hočemo sinhronizirati giblje glede na izbrani koordinatni sistem. Podobno kot v primeru Dopplerjevega pojava si tudi tu računanje olajšamo tako, da privzamemo raven prostor.

Dana naj bo neka ura, ki kaže koordinatni čas. Satelit, oziroma ura, ki se giblje pa naj bo takšna, da pozna svojo trenutno hitrost in položaj, tako da lahko prilagaja svoj tek tako, da tudi sama kaže koordinatni čas (oziroma odstopa od koordinatnega časa za nek konstanten faktor).

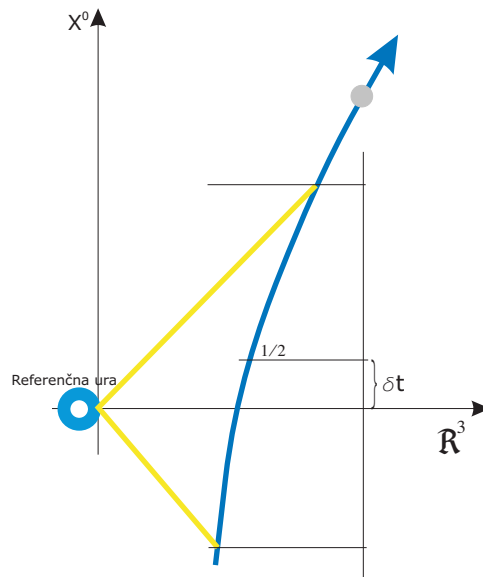
Najprej pogledimo enodimenzionalen primer. Satelit naj se giblje v smeri osi x s hitrostjo v . Izvršimo Einsteinovo sinhronizacijo in vidimo, da sočasna dogodka zopet nimata enake časovne koordinate. Satelitovo uro zato popravimo tako, da kaže koordinatni čas. Ta popravek znaša:

$$\delta t = \frac{d_0}{c} \frac{v}{c - v}$$

d_0 je razdalja med satelitom in uro v trenutku ko satelit odda signal.

Prehod na 3-dimenzionalen primer je enostaven, če privzamemo, da je hitrost satelita majhna v primerjavi s svetlobno hitrostjo. Potrebna je le zamenjava $v \mapsto \vec{N}\vec{v}$ in dobimo:

$$\delta t = \frac{d_0}{c} \frac{\vec{N}\vec{v}}{c - \vec{N}\vec{v}} \quad (4.38)$$



Slika 4.15: Sinhronizacija gibajoče ure

kjer je \vec{N} (enotski) krajevni del četverca, ki kaže od dogodka oddaje signala s satelita do dogodka odboja tega signala od referenčne ure.

Potek izpeljave je tudi neodvisen od gibanja referenčne ure, moramo vedeti le to kje se bo nahajala v trenutku, ko bo do nje prispel signal s satelita.

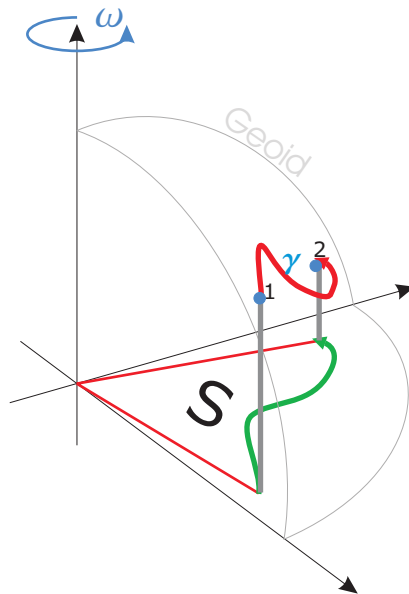
4.5 Povzetek

Kratek povzetek pomembnejših rezultatov.

4.5.1 Posebna relativnost

Metrika:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$



Slika 4.16: Popravek sinhronizacije je sorazmeren s ploščino S

Lastni čas:

$$d\tau = \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) dt$$

4.5.2 Splošna relativnost

Dve metriki, za nerotirajoči in rotirajoči sistem:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2(V - \Phi_0)}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2V}{c^2}\right) d\sigma^2 \quad (4.39)$$

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2(\Phi - \Phi_0)}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{2\omega r^2 \sin^2 \vartheta}{c} d\varphi c dt - \left(1 - \frac{2V}{c^2}\right) d\sigma^2 \quad (4.40)$$

kjer je V gravitacijski potencial (npr. $V = -GM/r$), $d\sigma^2 = dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$,
 $\Phi = V - \frac{\omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta}{2}$ in $\Phi_0 = \Phi|_{\text{geoid}}$.

V obeh primerih je časovna koordinata t ravno lastni čas ur, ki mirujejo na geoidu.

Lastni čas ure na satelitu:

$$d\tau = \left(1 - \frac{\Phi_0}{c^2} - \frac{3GM}{2ac^2} + \frac{2GM}{c^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) \right) dt$$

Dopplerjev pojav: ν_E —lastna frekvenca s katero oddaja satelit, ν_R —frekvenca katero izmeri sprejemnik

$$\nu_R = \nu_E \left(1 - \left(\frac{\Phi_0}{c^2} + \frac{3GM}{2ac^2} \right) + \frac{2GM}{c^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) \right) \frac{1 - \frac{\vec{N}\vec{v}_R}{c}}{1 - \frac{\vec{N}\vec{v}_E}{c}}$$

Sinhronizacija ur (Landau et al.,1985[6]):

$$\begin{aligned} \delta t &= -\frac{1}{c} \int_{\gamma} \frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{g_{00}} = \int_{\gamma} \frac{\omega r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi}{c^2 \left(1 + \frac{2(\Phi - \Phi_0)}{c^2} \right)} \xrightarrow{\text{geoid}} \\ \delta t &= \int_{\gamma} \frac{\omega r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi}{c^2} = \pm \frac{2\omega}{c^2} S \end{aligned} \quad (4.41)$$

S je ploščina območja, ki ga prikazuje slika 4.16, torej izsek, ki ga opiše projekcija poti sinhronizacije na ravnino pravokotno na os rotacije. Predznak je pozitiven, če pot napreduje v smeri rotacije, sicer pa je negativen.

Poglavje 5

Relativnostni vplivi na GPS opazovanja

V tem poglavju bodo na nekaj primerih opisane težave do katerih bi prišlo, če ne bi upoštevali relativističnih popravkov.

Osnovna enačba GPS meritev se glasi $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = c |t_i - t_j|$ (i –satelit, j –sprejemnik). Natančno gledano ta enačba velja le v inercialnem koordinatnem sistemu. Problem časa smo rešili z ustrežno sinhronizacijo ur, tako da ure, ki rotirajo na geoidu kot tudi vse ostale ure, npr. v satelitih, tečejo koordinatni čas sistema, ki je skoraj inercialen.

Ostaja še naslednji problem. Če pogledamo metriko

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2(V - \Phi_0)}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2V}{c^2}\right) d\sigma^2$$

na velikih oddaljenostih, dobimo naslednji rezultat

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\Phi_0}{c^2}\right) c^2 dt^2 - d\sigma^2$$

kar pa ni Minkowski metrika. Torej čas in razdalja nista točno sorazmerni, kjer bi bila svetlobna hitrost sorazmernostni faktor. Namesto tega je sorazmernostni faktor malo spremenjena svetlobna hitrost, ki jo umetno spremenimo (povečamo). Torej imamo $(1 - 2\Phi_0/c^2)c^2 dt^2 = d\sigma^2$ oziroma $(1 - \Phi_0 / c^2) c dt = d\sigma$.

Torej naj bo $\tilde{c} = c - \frac{\Phi_0}{c}$. Zdaj pridemo do željene zveze $\tilde{c}dt = d\sigma$. Količina Φ_0/c^2 znaša približno $-6.97 \cdot 10^{-10}$ zato popravek svetlobne hitrosti znaša približno $0.21 \frac{m}{s}$.

5.1 Kodna opazovanja

Kodna opazovanja so opazovanja časa potovanja signala od satelita do sprejemnika. Poznamo položaj satelita v trenutku oddaje signala ter tudi sam trenutek oddaje signala, sprejemnik pa izmeri čas potovanja signala, oziroma določi trenutek sprejema signala. Če bi bili uri satelita in sprejemnika sinhronizirani tako, da bi obe kazali koordinatni čas, potem bi lahko iz izmerjenega časa potovanja signala določili razdaljo. Ponavadi pa ta pogoj ni izpolnjen s strani sprejemnikove ali satelitove ure, zato izmerimo le t.i. psevdorazdaljo.

Glavni izvor napak v primeru kodnih opazovanj bodo povzročili relativistični vplivi, ki vplivajo na tek ur in porušijo sinhronizacijo.

5.1.1 Primer 1

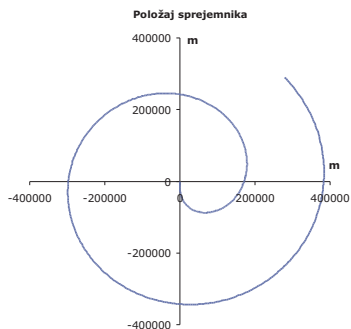
Najprej obravnavamo primer ravnega prostora. Naj sprejemnik miruje v izhodišču koordinatnega sistema, satelit pa naj kroži okrog izhodišča na razdalji $R = 30000km$ pod vplivom Zemljinega gravitacijskega polja. Hitrost satelita znaša $v^2 = \frac{R_0^2 g_0}{R}$, kjer je R_0 polmer Zemlje, g_0 pa gravitacijski pospešek $\approx 10 \frac{m}{s^2}$. Lastni čas ure na satelitu je povezan s koordinatnim časom preko:

$$d\tau = \left(1 - \frac{g_0 R_0^2}{2Rc^2}\right) dt$$

oziroma

$$\tau(t) = \left(1 - \frac{g_0 R_0^2}{2Rc^2}\right) t$$

Če torej sprejemnikova ura kaže koordinatni čas, potem satelitova ura s časom vedno bolj zaostaja za sprejemnikovo uro. Če sta bili uri ob $t = 0$ sinhronizirani, znaša razlika po času



Slika 5.1: Navidezno spreminjanje položaja sprejemnika

t ravno

$$\delta t = \frac{g_0 R_0^2}{2Rc^2} t$$

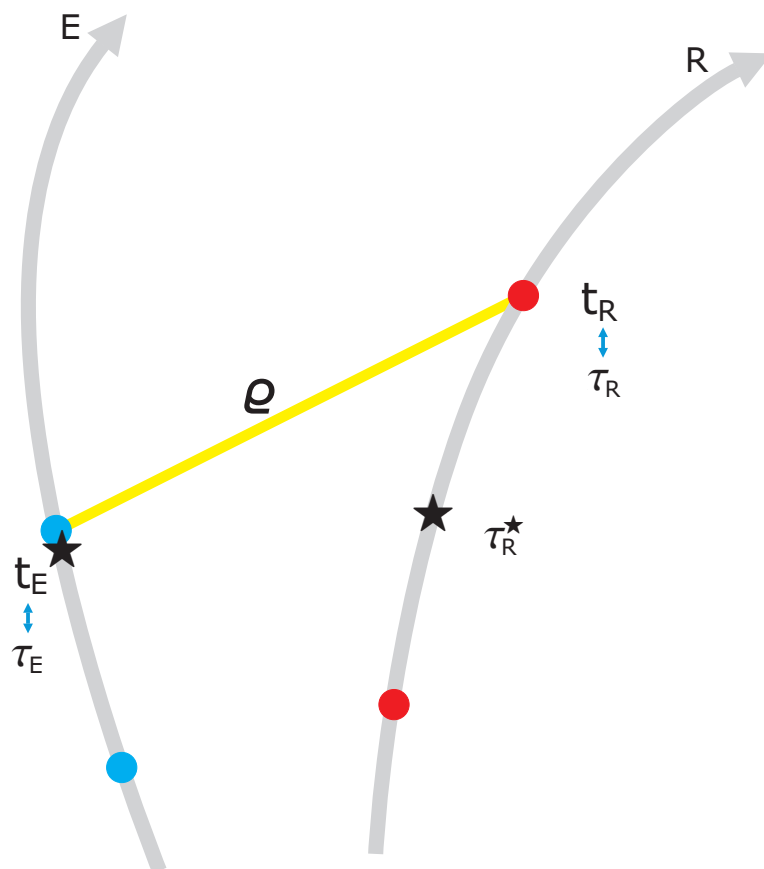
To privede do navideznega povečevanja razdalje med satelitom in sprejemnikom, in sicer

$$\mathcal{L}(t) = R + c\delta t = R + \frac{g_0 R_0^2}{2Rc} t \approx R + 0.023 \cdot t$$

Razdalja se torej povečuje z dokaj veliko hitrostjo, približno $1m/40s$. V najslabšem primeru, da sprejemnik prejema signal z dveh satelitov, ki se nahajata ravno na nasprotnih straneh neba, oddaljenost sprejemnika od izhodišča narašča približno $r(t) = \sqrt{\frac{g_0 R_0^2}{c} t}$. Sprejemnik se torej navidezno giblje po nekakšni spirali (slika 5.1), pri čemer povečevanje razdalje in neugodni položaji satelitov lahko že po enem dnevu povzročijo napako v položaju za skoraj $400km$.

5.1.2 Splošno

V malo posplošenem primeru naj ima prostor metriko $ds^2 = \alpha^2 c^2 dt^2 - d\sigma^2$ za nek $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Za svetlobni žarek velja $\alpha c dt = d\sigma$ oziroma $dt = \frac{d\sigma}{\alpha c}$. Torej če svetlobni žarek prepotuje neko pot γ , za to porabi $\Delta t = \frac{\rho}{\alpha c}$ koordinatnega časa.



Slika 5.2: Kodna opazovanja

Položaj satelita naj opiše vektorska preslikava $P^E(t)$, sprejemnika pa $P^R(t)$, kjer je t koordinatni čas. Poznamo tudi funkciji $t = F^E(\tau_E)$ in $t = F^R(\tau_R)$, ki povežeta zvezo med koordinatnim časom in časom, ki ga kažeta uri v satelitu in sprejemniku.

Pri kodnih opazovanjih sprejemnik izmeri časovni razmik med sprejetim signalom in enakim signalom, ki ga generira sprejemnik sam.

Ob času t_E ($\rightsquigarrow \tau_E$) je satelit oddal nek značilen signal (npr. \star). Ta signal je sprejemnik sprejel ob času t_R ($\rightsquigarrow \tau_R$), hkrati pa ga je tudi sam generiral nekoliko prej, ob τ_R^\star . Pri tem velja $\tau_R^\star = \tau_E$ (Glej sliko 5.2).

Velja tudi $c(t_R - t_E) = \frac{1}{\alpha}\varrho$, kjer je $t_R = F^R(\tau_R)$ in $t_E = F^E(\tau_E) = F^E(\tau_R^\star)$. Torej dobimo

$$c(F^R(\tau_R) - F^E(\tau_R^\star)) = \frac{1}{\alpha}\varrho$$

Sprejemnik naj se nahaja na geoidu in njegova ura naj kaže koordinatni čas. Zveza med lastnim časom ure na satelitu in koordinatnim časom je

$$d\tau = \left(1 - \frac{\Phi_0}{c^2} - \frac{3GM}{2ac^2} + \frac{2GM}{c^2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)\right) dt$$

Če to integriramo po poti satelita dobimo (Ashby,2003[7])

$$\tau(t) = \left(1 - \frac{\Phi_0}{c^2} - \frac{3GM}{2ac^2}\right) t + \frac{2GM}{c^2} \int_0^t \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r(t')}\right) dt'$$

Zadnji intregal znaša $\frac{2e\sqrt{aGM}}{c^2}(\sin E_0 - \sin E(t))$, kjer je E ekscentrična anomalija. To je t.i. vpliv ekscentricitete, ki je periodičen. Ura v GPS satelitu torej v povprečju bije hitreje od koordinatnega časa, doživlja pa še periodične motnje zaradi ekscentricitete. Zgornji izraz se poenostavi v primeru krožnih orbit, od koder vidimo, da se na radiju kroženja $R = -\frac{3GM}{2\Phi_0} \approx 9545km$ lastni in koordinatni čas ujemata. Na višjih orbitah teče lastni čas hitreje in obratno na nižjih.

Zgradbo ure v satelitu je mogoče prilagoditi tako, da bije za ustrezen faktor počasneje, za vpliv ekscentricitete težje.

Imamo torej $t_R = F^R(\tau_R) = \tau_R$ in $t_E = F^E(\tau_E) = \tau_E + \frac{2e\sqrt{aGM}}{c^2} \sin E(\tau_E)$, če predpostavimo, da je za $t = 0$ tudi $\tau_E = \tau_R = 0$ ter, da je $E_0 = 0$. Velja še $\alpha = 1 - \frac{\Phi_0}{c^2}$. Rezultat je enačba kodnih opazovanj

$$c(\tau_R - \tau_R^\star) = \left(1 + \frac{\Phi_0}{c^2}\right) \varrho - \frac{2e\sqrt{aGM}}{c} \sin E(\tau_R^\star)$$

Zadnjo enačbo lahko zapišemo tudi kot

$$c(\tau_R - \tau_R^\star) = \varrho + \frac{\Phi_0}{c^2}\varrho - \frac{2e\sqrt{aGM}}{c} \sin E(\tau_R^\star)$$

kjer zadnja dva člena pomenita relativistična popravka. Prvi člen znaša $-2cm$, maksimalna vrednost drugega člena pa je približno $6.9m$.

Neupoštevanje prvega člena bi pomenilo, da zavestno krajšamo dolžine za okoli 2cm , neupoštevanje drugega člena pa je prevladujoče in je odvisno od položaja satelita.

Pri tem je $\varrho = \|P^R(t_R) - P^E(t_E)\|$ oziroma

$$\varrho = \left\| P^R(\tau_R) - P^E \left(\tau_R^\star + \frac{2e\sqrt{aGM}}{c^2} \sin E(\tau_R^\star) \right) \right\|$$

Zadnjo enačbo lahko poenostavimo, če upoštevamo, da je maksimalna vrednost izraza $\frac{2e\sqrt{aGM}}{c^2} \dot{P}^E \approx 0.1\text{mm}$, kjer znaša hitrost satelita $\dot{P}^E \approx 4\frac{\text{km}}{\text{s}}$. Nazadnje dobimo

$$\varrho = \|P^R(\tau_R) - P^E(\tau_R^\star)\| = \|P^R(\tau_R) - P^E(\tau_E)\|$$

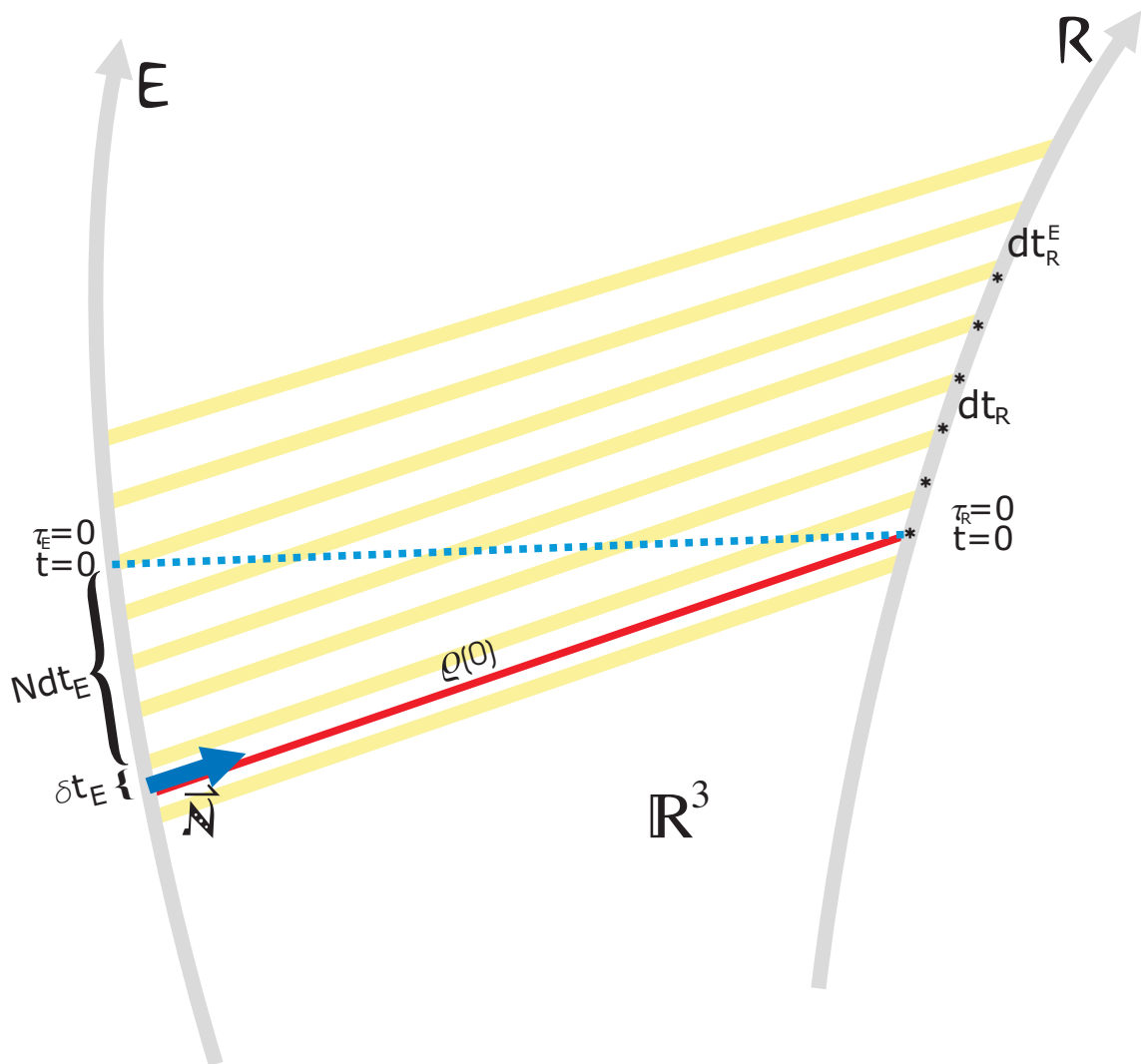
5.2 Fazna opazovanja

Pri faznih opazovanjih sprejemnik meri fazno razliko med sprejetim valovanjem in valovanjem vzpostavljenem v sprejemniku. Če je $\nu(t)$ frekvenca nekega valovanja (kot ga sprejemamo), potem je faza Φ tega valovanja za nek časovni interval enaka $\Phi(t) = \Phi(t_0) + \int_{t_0}^t \nu(t') dt'$.

Najprej ugotovimo enačbo faznih opazovanj za raven prostor. Položaja satelita in sprejemnika sta dana z $P^E(t)$ in $P^R(t)$. $dt_E(t)$ je koordinatni časovni razmik v katerem satelit oddaja valovanje, pripada mu frekvenca $\bar{\nu}_E$. Podobno za valovanje generirano v sprejemniku dt_R in $\bar{\nu}_R$, za valovanje, ki ga sprejemnik prejema s satelita pa dt_R^E in $\bar{\nu}_R^E$. (velja $\bar{\nu} = \frac{1}{dt}$)

Lahko si mislimo, da sta uri v satelitu in sprejemniku ob $t = 0$ sinhronizirani. Potem situacija ustreza tisti s slike 5.3. Razdalja ϱ med satelitom in sprejemnikom bo pomenila isto kot v primeru kodnih opazovanj, torej razdalja med krajem oddaje signala in krajem sprejema signala. S slike 5.3 je razvidno, da velja

$$\varrho(0) = c(Ndt_E + \delta t_E)$$



Slika 5.3: Fazna opazovanja

za nek $N \in \mathbb{N}$. Časovni interval δt_E je povezan z začetno izmerjeno fazno razliko. Za pripadajoč časovni interval δt pri sprejemniku velja (glej Dopplerjev pojav)

$$\delta t_E = \delta t \frac{c - \dot{P}^R \vec{N}}{c - \dot{P}^E \vec{N}}$$

Naj bo t kratek časovni interval. Faza valovanja v sprejemniku je dana z $\bar{\Phi}_R(t) = \bar{\nu}_R t$, faza sprejetega valovanja pa z $\bar{\Phi}_R^E(t) = \bar{\nu}_R^E t + k$. Konstanto k določimo tako, da bo veljalo $\bar{\Phi}_R^E(\delta t) = 1$. Če označimo $\bar{\Phi}_R^E(0) = \bar{\Phi}_0$ dobimo naslednje

$$\delta t = \frac{1 - \bar{\Phi}_0}{\bar{\nu}_R^E}$$

Z upoštevanjem formule

$$\frac{\bar{\nu}_E}{\bar{\nu}_R^E} = \frac{c - \dot{P}^E \vec{N}}{c - \dot{P}^R \vec{N}}$$

lahko posodobimo formulo za razdaljo

$$\varrho(0) = \frac{c}{\bar{\nu}_E} (N - \bar{\Phi}_0)$$

Potrebno je še ugotoviti kako se razdalja spreminja s časom. Po kratkem dt se sprejemnik premakne za $\dot{P}^R dt$, medtem ko se satelit ne premakne (oz. ni premaknil) za $\dot{P}^E dt$ temveč za $\dot{P}^E dt \frac{c - \dot{P}^R \vec{N}}{c - \dot{P}^E \vec{N}}$. Popravek je potreben, da se ohrani relacija - kraj oddaje \leftrightarrow kraj sprejema. Razdalja se torej poveča za $d\varrho = \dot{P}^E \vec{N} dt - \dot{P}^E \vec{N} \frac{c - \dot{P}^R \vec{N}}{c - \dot{P}^E \vec{N}} dt$. Nazadnje velja

$$\dot{\varrho} = \left(\dot{P}^R - \dot{P}^E \frac{c - \dot{P}^R \vec{N}}{c - \dot{P}^E \vec{N}} \right) \vec{N}$$

z začetnim pogojem $\varrho(0)$. Tudi merjeno fazno razliko $\bar{\Phi}(t) = \bar{\Phi}_R^E - \bar{\Phi}_R$ lahko zapišemo v podobni obliki, in sicer

$$\dot{\bar{\Phi}}(t) = \bar{\nu}_R^E - \bar{\nu}_R$$

z začetnim pogojem $\bar{\Phi}(0) = \bar{\Phi}_0$.

Zadnji dve enačbi delno integriramo in dobimo

$$\bar{\Phi}(t) = \bar{\Phi}_0 + \int_0^t (\bar{\nu}_R^E - \bar{\nu}_R) dt' \quad (5.1)$$

$$\varrho(t) = \varrho(0) + \int_0^t \dot{\varrho} dt' \quad (5.2)$$

Poznamo zvezo med $\bar{\Phi}_0$ in $\varrho(0)$. Upoštevamo to zvezo in zadnjo enačbo ter pridemo do točne oblike enačbe za fazna opazovanja

$$\bar{\Phi}(t) = N - \frac{\bar{\nu}_E(0)}{c} \varrho(t) + \int_0^t \left[\bar{\nu}_R^E - \bar{\nu}_R + \frac{\bar{\nu}_E(0)}{c} \left(\dot{P}^R - \dot{P}^E \frac{c - \dot{P}^R \vec{N}}{c - \dot{P}^E \vec{N}} \right) \vec{N} \right] dt'$$

Pri tem je $\bar{\nu}_E(0)$ vrednost frekvence $\bar{\nu}_E$ v okolici $t = 0$ in jo v enačbi obravnavamo kot konstanto.

Enačba je sicer dokaj zapletena, vendar ima tudi nekatere dobre lastnosti. Npr. razvidno je, da poleg položaja sprejemnika vsebuje tudi hitrost sprejemnika. V principu bi torej lahko pridobili položaj in hitrost sprejemnika hkrati.

Izkaže pa se, da je mogoča dokajšnja poenostavitev. Če znotraj integrala količine $\bar{\nu}_E(0)$ ne obravnavamo več kot konstante ampak kot spremenljivo vrednost $\bar{\nu}_E$, pridemo nazadnje do izraza

$$\bar{\Phi}(t) = N - \frac{\bar{\nu}_E(0)}{c} \varrho(t) + \int_0^t (\bar{\nu}_E - \bar{\nu}_R) dt'$$

Enačba je uporabna tudi v klasičnem okviru (zaenkrat ni bilo še nič relativnosti), kjer je koordinatni čas hkrati tudi lastni čas in lahko vzamemo $\bar{\nu}_E = \bar{\nu}_R = \nu_0$, ki je neka konstantna frekvenca. Dobimo $\bar{\Phi}(t) = N - \frac{\nu_0}{c} \varrho(t)$.

Za prostor z metriko $ds^2 = \alpha^2 c^2 dt^2 - d\sigma^2$ dobimo malo spremenjeno enačbo

$$\bar{\Phi}(t) = N - \frac{\bar{\nu}_E(0)}{\alpha c} \varrho(t) + \int_0^t (\bar{\nu}_E - \bar{\nu}_R) dt' \quad (5.3)$$

Podobno kot v primeru kodnih opazovanj poznamo zveze med koordinatnim časom in časom, ki ga kažeta uri satelita in sprejemnika. Naj bo $t = \tau_R$ in $t = \tau_E + \frac{2e\sqrt{aGM}}{c^2} \sin E(\tau_E)$. Torej imamo $d\tau_R = d\tau_E \Rightarrow \bar{\nu}_R = \nu_R$, za satelit pa

$$dt_E = d\tau_E + \frac{2e\sqrt{aGM}}{c^2} \dot{E}(\tau_E) \cos E(\tau_E) d\tau_E$$

od koder dobimo

$$\bar{\nu}_E = \nu_E - \nu_E \frac{2e\sqrt{aGM}}{c^2} \dot{E} \cos E$$

Ampak ν_E in ν_R sta številsko enaki vrednosti, saj je razlika odvisna le od bolj ali manj slučajnih odstopanj teka ur v satelitu in sprejemniku. Zato $\nu_E = \nu_R = \nu_0 = \text{konst.}$

Vrednost integrala v enačbi faznih opazovanj zdaj lahko ocenimo

$$\int_0^t (\bar{\nu}_E - \bar{\nu}_R) dt' = -\nu_0 \frac{2e\sqrt{aGM}}{c^2} \int_0^t \dot{E} \cos \dot{E}t' dt' \approx -\nu_0 \frac{2e\sqrt{aGM}}{c^2} \sin \dot{E}t$$

Maksimalna vrednost razlike v fazi, izražena v dolžini (vzamemo $\lambda = \frac{c}{\nu_0}$) znaša

$$\Delta\varrho = \frac{2e\sqrt{aGM}}{c} \approx 6.9m$$

torej enak rezultat kot pri kodnih opazovanjih.

Zdaj lahko ocenimo tudi razliko med uporabo točne enačbe in nekoliko poenostavljene enačbe. Le to smo dobili tako, da smo namesto količine $\bar{\nu}_E(0)$, ki je konstanta, pod integralom uporabili kar $\bar{\nu}_E$. Imamo torej $\bar{\nu}_E(0) = \bar{\nu}_E + \epsilon$, kjer vzamemo za $\epsilon = -\nu_0 \frac{2e\sqrt{aGM}}{c^2} \dot{E} \cos \dot{E}t$.

Ko to vstavimo v točno obliko enačbe za fazna opazovanja dobimo poenostavljeno rešitev, ki ima še dodaten člen oblike

$$\int_0^t \frac{\epsilon}{c} \vec{N} \left(\dot{P}^R - \frac{\dot{P}^E c - \dots}{c - \dots} \right) dt' \leq \frac{|\dot{P}^E|}{c} \int_0^t \epsilon dt' \leq \frac{|\dot{P}^E|}{c} \nu_0 \frac{2e\sqrt{aGM}}{c^2}$$

Zadnje izraženo v dolžini znaša $\frac{2e\dot{P}^E\sqrt{aGM}}{c^2}$. Za hitrost satelita vzamemo $4\frac{km}{s}$ in dobimo maksimalno iskano razliko **0.1mm**. Pravzaprav je ta razlika še dosti manjša, če upoštevamo, da je maksimalna hitrost spreminjanja razdalje od satelita do sprejemnika približno $850\frac{m}{s}$. V tem primeru je razlika komaj **0.02mm**. Očitno lahko uporabljamo približno enačbo brez večjih pomislekov.

Zdaj, ko imamo znan tek ur v satelitu in sprejemniku lahko enačbo 5.3 zapišemo tudi tako

$$\Phi(t) = N - \frac{\bar{\nu}_E(0)}{\alpha c} \varrho(t) - \nu_0 \frac{2e\sqrt{aGM}}{c^2} \int_0^t \dot{E} \cos E dt'$$

Težava pri zadnjem integralu je v tem, da ne moremo vzeti $E(t)$ ampak $E\left(t - \frac{\varrho}{c}\right)$, torej vrednost ekscentricitete v času, ko je bil signal izsevan. Vendar je zgornja enačba dokaj

neobčutljiva na manjše časovne premike. Recimo, da bi zgornji integral izračunali z $E(t - \frac{e+\Delta e}{c})$ namesto z $E(t - \frac{e}{c})$. Zanima nas razlika med pravo vrednostjo integrala in to približno vrednostjo, ko razdalje ne poznamo čisto natančno. Velja $E(t - \frac{e+\Delta e}{c}) \approx E - \frac{\Delta e}{c} \dot{E}$ iz česar dobimo $\cos E(t - \frac{e+\Delta e}{c}) \approx \cos E + \dot{E} \frac{\Delta e}{c} \sin E$. Če to vstavimo v integral dobimo približno vrednost ter ostanek oblike

$$\nu_0 \frac{2e\sqrt{aGM}}{c^2} \dot{E} \frac{\Delta e}{c} \int_0^t \dot{E} \sin E dt' = -\nu_0 \frac{2e\sqrt{aGM}}{c^2} \dot{E} \frac{\Delta e}{c} \cos E$$

Vrednost zgornjega izraza v dolžinskem smislu znaša $\frac{\Delta e}{c} \dot{E} \frac{2e\sqrt{aGM}}{c} = \mathbf{0.01mm}$ za $\Delta e \approx 3000km$. Torej zadostuje že zelo približno poznavanje razdalje med satelitom in sprejemnikom, da praktično ni napake.

Pri enačbi 5.3 si je potrebno ogledati le še koeficient $\frac{\bar{\nu}_E(0)}{ac}$ pri razdalji. Le ta je odvisen od časovnega trenutka v katerem smo začeli opazovanja. Zanima nas torej le še napaka, ki jo naredimo, če namesto $\bar{\nu}_E(0)$ vstavimo kar ν_0 . Velja

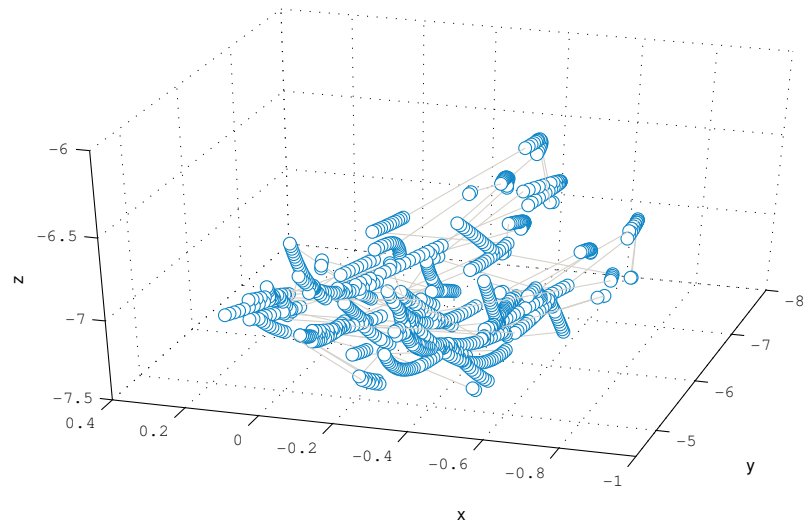
$$\bar{\nu}_E = \nu_0 - \nu_0 \frac{2e\sqrt{aGM}}{c^2} \dot{E} \cos E$$

To vstavimo v enačbo 5.3 in dobimo ostanek oblike $\frac{\nu_0 e}{ac} \frac{2e\sqrt{aGM}}{c^2} \dot{E} \cos E$. Maksimalna vrednost tega izraza v dolžinskem smislu znaša $\frac{e\dot{E}}{ac} \frac{2e\sqrt{aGM}}{c}$ katerega vrednost zopet znaša ravno **0.1mm**.

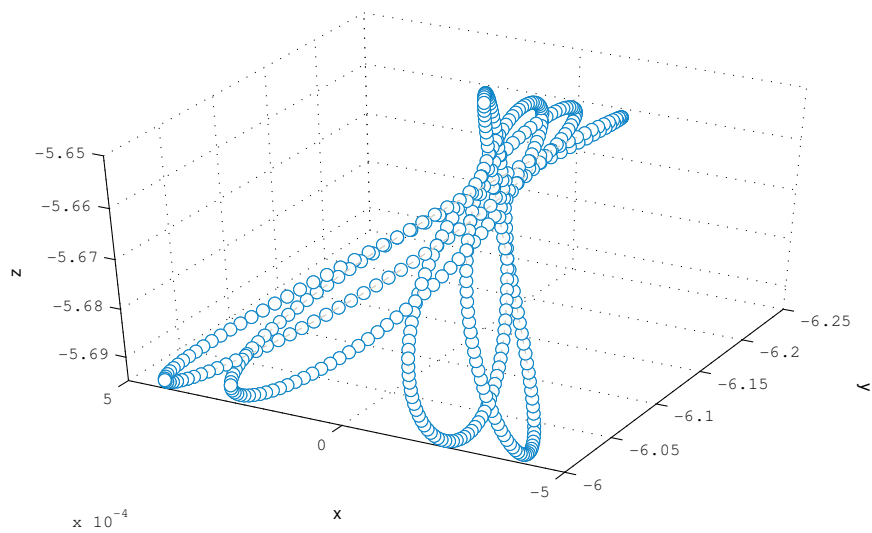
To pa je praktično edina napaka, ki nastane zaradi poenostavljanja enačbe faznih opazovanj (poleg $0.02mm$). Končna enačba se glasi (Φ_0 je težnostni potencial na geoidu)

$$\Phi(t) = N - \left(1 + \frac{\Phi_0}{c^2}\right) \frac{\nu_0}{c} \varrho(t) - \nu_0 \frac{2e\sqrt{aGM}}{c^2} \sin E \left(t - \frac{\varrho}{c}\right) \quad (5.4)$$

Relativistična vpliva na fazna opazovanja sta torej popolnoma enaka kot v primeru kodnih opazovanj, gre za konstanten člen $\frac{\Phi_0}{c^2} \varrho \approx -2cm$ in periodičen vpliv ekscentricitete katerega maksimalna vrednost znaša $\frac{2e\sqrt{aGM}}{c} \approx 6.9m$.



Slika 5.4: Navidezno dnevno gibanje sprejemnika, določeno z nadobzornimi sateliti



Slika 5.5: Navidezno dnevno gibanje sprejemnika, določeno z vsemi sateliti

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
%radij satelitov
```

```
R=26200000;
```

```
%polmer Zemlje
```

```
R0=6400000;
```

```
%kotna hitrost Zemlje
```

```
om=2*pi/86400;
```

```
%polozaj sprejemnika
```

```
fi=45*pi/180;
```

```
la=10*pi/180;
```

```
%inklinacija tirov satelitov
```

```
ii=55*pi/180;
```

```
%sateliti so razporejeni po 6 dviznih vozlih in 4 faznih zamikih
```

```
%24 satelitov vsega skupaj
```

```
for i=1:870
```

```
    t=100*i-100;
```

```
    for j=1:24
```

```
        Ome=pi/3*floor((j-1)/4);
```

```
        E0=pi/2*(mod((j-1),4));
```

```
        SAT1(j,1)=R*cos(2*om*t+E0)*cos(Ome)-R*sin(2*om*t+E0)*cos(ii)*sin(Ome);
```

```
        SAT1(j,2)=R*cos(2*om*t+E0)*sin(Ome)+R*sin(2*om*t+E0)*cos(ii)*cos(Ome);
```

```
        SAT1(j,3)=R*sin(2*om*t+E0)*sin(ii);
```

```
F=[-sin(la+om*t) cos(la+om*t) 0
```

```
    -sin(fi)*cos(la+om*t) -sin(fi)*sin(la+om*t) cos(fi)
```

```
    cos(fi)*cos(la+om*t) cos(fi)*sin(la+om*t) sin(fi)];
```

```
%polozaji satelitov v horizontskem koord. sistemu
SAT(j,:)=(F*(SAT1(j,:))'-[0 0 R0]')';
ro(j)=sqrt((SAT(j,1))^2+(SAT(j,2))^2+(SAT(j,3))^2);
dro(j)=7*sin(2*om*t+E0);
end
k=1;
for j=1:24
    if SAT(j,3)>0
        B(k,1)=SAT(j,1)/ro(j);
        B(k,2)=SAT(j,2)/ro(j);
        B(k,3)=SAT(j,3)/ro(j);

        f(k)=dro(j);

        k=k+1;
    end
end

N=B'*B;
d=-inv(N)*B'*f';

x(i)=d(1);
y(i)=d(2);
z(i)=d(3);
end

plot3(x,y,z);grid on;
```

Pravilno upoštevanje relativističnih popravkov je torej zelo pomembno pri določanju položaja ene točke. Stanje je ugodnejše v primeru, ko z več sprejemniki hkrati opazujemo satelite. V primeru, da imamo dva sprejemnika, lahko vpliv ekscentricitete eliminiramo tako, da tvorimo enojne razlike med sočasnimi opazovanji.

Pri opazovanju faznih razlik imamo sočasni meritvi do satelita $\Phi_1(t)$ in $\Phi_2(t)$. Pri tvorjenju enojne fazne razlike $\Phi_{12}(t)$ se vpliv ekscentricitete ne eliminira popolnoma ampak (enačba 5.4) dobimo ostanek

$$\delta\Phi = \nu_0 \frac{2e\sqrt{aGM}}{c^2} \dot{E} \frac{\rho_1 - \rho_2}{c} \cos E$$

katerega maksimalna vrednost v dolžinskem smislu znaša

$$\frac{2e\sqrt{aGM}}{c} \dot{E} \frac{\rho_1 - \rho_2}{c} \approx 3.5 \cdot 10^{-12} \cdot (\rho_1 - \rho_2)$$

Za Zemljo velja $|\rho_1 - \rho_2| \leq 12800km$, zato vrednost tega vpliva ne preseže $0.05mm$. Za Slovenijo je $|\rho_1 - \rho_2| \leq 300km$, vpliv pa ne preseže vrednosti tisočinke milimetra.

Poglavje 6

Zaključek

V začetnih poglavjih je bilo predstavljeno nekaj dokaj splošnih posledic teorij relativnosti. Zaključek tega dela je bil namenjen sinhronizaciji ur in vzpostavitvi koordinatnega časa. Na ta del lahko gledamo neodvisno od GPS (čeprav gre za t.i. GPS koordinatni čas), saj je sinhronizacija zanimiva sama po sebi in enoten časovni sistem je pomemben za mnogo vrsto dejavnosti npr. računalništvo, astronomija,... Izkazalo se je, da ur na Zemlji zaradi njene rotacije ni mogoče sinhronizirati po običajnem postopku (Einsteinova sinhronizacija), ampak dejansko uvedemo koordinatni čas.

V drugem delu so bili predstavljeni vplivi na kodna in fazna opazovanja. Prvi vpliv se je pokazal kot manjša nesorazmernost med svetlobno hitrostjo, koordinatnim časom in koordinatno razdaljo. To pa ni prehuda ovira, če vemo **koordinatna razdalja \neq prava razdalja**. Na relaciji satelit-sprejemnik ta vpliv znaša pribl. 2cm , oziroma če ne bi upoštevali tega vpliva bi imeli za 2cm krajše razdalje.

Izkazalo se je tudi, da ure v satelitih v povprečju tečejo nekoliko hitreje kot tiste na Zemlji (če na Zemlji oboje tečejo enako hitro) in sicer za $-\left(\frac{\Phi_0}{c^2} + \frac{3GM}{2ac^2}\right) \approx 4.46 \cdot 10^{-10} \text{s/s} (= 13\text{cm/s})$ izraženo v dolžini. Tek ur v satelitih se namenoma nekoliko upočasnijo. Če ure ne bi upočasnili bi s tem povečevali nesinhroniziranost satelitove in sprejemnikove ure.

Pri kodnih opazovanjih se ponavadi predpostavi, da je nesinhroniziranost ure v satelitu in sprejemniku konstantna tekom opazovanj in jo preko opazovanj tudi določimo. Če torej ur ne bi upočasnili in hkrati predpostavili, da je nesinhroniziranost konstantna bi bil rezultat navidezno spreminjanje razdalje med satelitom in sprejemnikom (ta bi se krajšala za 13.5cm/s). V primeru enega sprejemnika bi sicer lahko to težavo zaobšli s tem, da bi sočasno opazovali zadosti satelitov (najmanj 5, v enačbo opazovanj bi dodali člen, ki bi se večal linearno s časom) in bi nato preko enojnih razlik opazovanj ta člen eliminirali.

Še vedno pa bi ostal t.i. vpliv ekscentricitete, ki ga lahko eliminiramo le če imamo na voljo več sprejemnikov, sicer pa ga moramo modelirati. Ta pa je zelo pomemben saj znaša okoli 7m .

S tem, ko smo upočasnili tek satelitovih ur, smo zmanjšali tudi frekvenco s katero satelit oddaja signal, in sicer za frekvenco $10.23\text{MHz} \rightarrow 10.22999999543\text{MHz}$. S tako frekvenco bi satelitova ura oddajala na Zemlji, v orbiti relativistični vplivi poskrbijo, da se nastavi nazaj na 10.23MHz . Na ta način je poskrbljeno, da je sprejeti signal obremenjen le z Dopplerjevim efektom. Če frekvence torej ne bi zmanjšali bi prišlo do konstantnega povečevanja merjene faze s časom, tudi če se razdalja med satelitom in sprejemnikom ne bi povečevala, kar pa bi si lahko zmotno razlagali kot da se razdalja dejansko povečuje.

Dodaten argument za zmanjšanje frekvence lahko vidimo tudi v tem, da dejansko nekoliko zmanjšamo t.i. *beat* frekvenco in posledično povečamo natančnost (ali vsaj ločljivost) faznih opazovanj (čeprav po vsej verjetnosti zanemarljivo).

Nazadnje sledi še praktičen prikaz vpliva ekscentricitete, katerega vpliv se vidi kot navidezno gibanje sprejemnika.