

Univerza
v Ljubljani

Fakulteta
za gradbeništvo
in geodezijo



Jamova cesta 2
1000 Ljubljana, Slovenija
<http://www3.fgg.uni-lj.si/>

DRUGG – Digitalni repozitorij UL FGG
<http://drugg.fgg.uni-lj.si/>

To je izvirna različica zaključnega dela.

Prosimo, da se pri navajanju sklicujete na bibliografske podatke, kot je navedeno:

Raspet, E., 2015. Temperaturno-vlažnostna analiza masivnega betona z izpeljanim končnim elementom. Diplomaska naloga. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo. (mentor Schnabl, S., somentor Kryžanowski, A.): 77 str.

Datum arhiviranja: 07-09-2015

University
of Ljubljana

Faculty of
Civil and Geodetic
Engineering



Jamova cesta 2
SI – 1000 Ljubljana, Slovenia
<http://www3.fgg.uni-lj.si/en/>

DRUGG – The Digital Repository
<http://drugg.fgg.uni-lj.si/>

This is original version of final thesis.

When citing, please refer to the publisher's bibliographic information as follows:

Raspet, E., 2015. Temperaturno-vlažnostna analiza masivnega betona z izpeljanim končnim elementom 0. B.Sc. Thesis. Ljubljana, University of Ljubljani, Faculty of civil and geodetic engineering. (supervisor Schnabl, S., co-supervisor Kryžanowski, A.): 77 p.

Archiving Date: 07-09-2015

Univerza
v Ljubljani

Fakulteta za
*gradbeništvo in
geodezijo*



Jamova 2
1000 Ljubljana, Slovenija
telefon (01) 47 68 500
faks (01) 42 50 681
fgg@fgg.uni-lj.si

UNIVERZITETNI ŠTUDIJSKI
PROGRAM GRADBENIŠTVO
HIDROTEHNIČNA SMER

Kandidat:

ERIK RASPET

**TEMPERATURNNO-VLAŽNOSTNA ANALIZA
MASIVNEGA BETONA Z IZPELJANIM KONČNIM
ELEMENTOM**

Diplomska naloga št.: 3446/HS

**HYGROTHERMAL ANALYSIS OF MASS CONCRETE
BY DERIVED FINITE ELEMENT**

Graduation thesis No.: 3446/HS

Mentor:

izr. prof. dr. Simon Schnabl

Predsednik komisije:

izr. prof. dr. Janko Logar

Somentor:

doc. dr. Andrej Kryžanowski

Ljubljana, 03. 09. 2015

STRAN ZA POPRAVKE

Stran z napako

Vrstica z napako

Namesto

Naj bo

»Ta stran je namenoma prazna.«

IZJAVE

Podpisani Erik Raspet izjavljam, da sem avtor diplomske naloge z naslovom »Temperaturno-vlažnostna analiza masivnega betona z izpeljanim končnim elementom«.

Izjavljam, da je elektronska različica v vsem enaka tiskani različici.

Izjavljam, da dovoljujem objavo elektronske različice v digitalnem repozitoriju.

Ljubljana, 24. 8. 2015

Erik Raspet

»Ta stran je namenoma prazna.«

BIBLIOGRAFSKO – DOKUMENTACIJSKA STRAN IN IZVLEČEK

UDK:	519.63:691.3(043.2)
Avtor:	Erik Raspet
Mentor:	izr. prof. dr. Simon Schnabl
Somentor:	doc. dr. Andrej Kryžanowski
Naslov:	Temperaturno-vlažnostna analiza masivnega betona z izpeljanim končnim elementom
Tip dokumenta:	diplomska naloga – univerzitetni študij
Obseg in oprema:	77 str., 7 preg., 59 sl., 48 en.
Ključne besede:	temperatura, koncentracija vlage, masivni beton, metoda končnih elementov, diskretizacija, povezan problem, hidratacija cementa, MATLAB, metoda uteženih rezidualov

Izveček

V diplomski nalogi je predstavljena problematika masivnih betonov, tj. betonov, pri katerih je potrebna kontrola zaradi povišanja temperature v betonskem prerezu, ki je posledica sproščanja hidratacijske toplote ob vezanju cementa, in s tem povezanim nastankom razpok. Opisana je sestava cementa in vpliv sestave cementa na sproščanje hidratacijske toplote. Hidratacija je opisana po fazah, ki si sledijo med vezanjem cementa. Natančneje sta predstavljeni dve vrsti cementa, in sicer CEM I 42,5 R ter CEM III/B 32,5 N SR-LH, ki se med seboj bistveno razlikujeta glede na količino sproščene hidratacijske toplote. Podan je tudi izraz za opisovanje hitrosti sproščanja toplote med procesom hidratacije.

V nadaljevanju naloge je prikazana diskretizacija problema in izpeljava enačb končnega elementa za povezan problem temperature in vlage. Izpeljane enačbe so nato uporabljene za sestavo sistema linearnih algebrskih enačb, s pomočjo katerega izračunamo vrednosti temperature in koncentracije vlage v izbranih točkah. S pomočjo izpeljanih enačb je bil izdelan računalniški program v programskem okolju MATLAB, ki nam v nadaljevanju služi za numerično temperaturno vlažnostno analizo masivnega betona.

V zadnjem delu diplomske naloge so predstavljeni rezultati treh analiz. Najprej analiziramo stopnjo povezanosti problema, pri čemer dobimo pri nepovezanem in delno povezanem problemu pričakovane rezultate. Nasprotno so pri povezanem problemu rezultati nezanesljivi, zato v nadaljevanju slednjega ne obravnavamo. Z drugo analizo pokažemo, da za oceno temperature in koncentracije vlage v betonu upoštevanje delne povezanosti problema med fazo hidratacije ni potrebno, saj je razlika med povezanim in delno povezanim problemom zanemarljiva. S tretjo analizo pa pokažemo nujnost uporabe cementov z nizko stopnjo hidratacijske toplote pri izdelavi masivnih betonov.

»Ta stran je namenoma prazna.«

BIBLIOGRAPHIC – DOCUMENTALISTIC INFORMATION WITH ABSTRACT

UDC: 519.63:691.3(043.2)
Author: Erik Raspet
Supervisor: Assoc. Prof. Simon Schnabl, Ph.D.
Cosupervisor: Assist. Prof. Andrej Kryžanowski, Ph.D.
Title: Hygrothermal analysis of mass concrete by derived finite element
Document type: Graduation Thesis – University studies
Scope and tools: 77 p., 7 tab., 59 fig., 48 eq.
Keywords: temperature, moisture, mass concrete, Finite Element Method, discretisation, coupled problem, cement hydration, MATLAB, Weighted Residuals Method

Abstract

The present thesis deals with problems regarding mass concrete, in which the temperature rises due to the heat of cement hydration during the curing phase. A rise of temperature in concrete may result in cracking of young concrete. In the first part of the thesis cement composition and its influence on the released hydration heat is described. The hydration process is explained by its individual phases which occur during hardening of concrete. Two types of cement are presented, the CEM I 42,5 R and CEM III/B 32,5 N SR-LH. The hydration heat released by those two types of cement differs significantly. Also an analytical expression is given for evaluation of heat release of cement.

Next, the discretization of the problem and the derivation of the coupled equations is made for a single finite element. The derived equations are used to form a system of linear algebraic equations, which is needed for calculation of the temperature and moisture distribution. Also the derived equations are used to write a computer program in MATLAB environment. The program is used as a tool for numerical hygrothermal analysis of mass concrete.

The last part of the thesis presents the results of three different. The purpose of the first analysis is to investigate the influence of the coupling degree between heat and moisture transfer. While the results of non-coupled and semi-coupled models seem reliable, the results of a fully-coupled model are not realistic and therefore are not used in further analyses. The second analysis confirmed there is not much influence of semi-coupling on temperature fields, so the equations can be solved separately and still give useful results. The third analysis shows the necessity of low heat cement use in mass concrete structures.

»Ta stran je namenoma prazna.«

ZAHVALA

Najlepše se zahvaljujem mentorju izr. prof. dr. Simonu Schnablu in somentorju doc. dr. Andreju Kryžanowskemu za pomoč pri izbiri izredno zanimive tematike za diplomsko delo, za razumevanje, podporo in strokovno pomoč, za priganjanje k delu ter za glasno, zanimivo in konstruktivno reševanje nesoglasij.

Posebej se zahvaljujem vsem kolegicam in kolegom, s katerimi smo si uspešno pomagali skozi študij in se podpirali tudi pri izvajanju izvenštudijskih dejavnosti in si tako oblikovali nepozabna študentska leta. Hvala tudi vsem, s katerimi si bomo kljub končanemu šolanju še naprej pestrili trenutke.

Nepopisna zahvala gre staršem, ki so s polno mero potrpežljivosti verjeli v moj uspeh in me vsa ta leta podpirali in vzpodbujali, ter sestri, ki me je motivirala s svojimi uspehi.

Hvala Mihi in Marijanu, ki sta me speljala na gradbeniško pot, Niki za mnogokateri dober nasvet in lektoriranje diplomskega dela, Tari za strokovno pomoč in dobre ideje, ter moji dragi Nevi za vso podporo in zaupanje, tako na strokovnem področju kot tudi v zasebnih trenutkih.

»Ta stran je namenoma prazna.«

KAZALO VSEBINE

IZJAVE	III
BIBLIOGRAFSKO – DOKUMENTACIJSKA STRAN IN IZVLEČEK	V
BIBLIOGRAPHIC – DOCUMENTALISTIC INFORMATION WITH ABSTRACT	VII
ZAHVALA	VIII
1 UVOD	1
2 MASIVNI BETONI	3
2.1 Splošno o masivnih betonih	3
2.2 Hidratacija cementa	4
2.2.1 Sestava običajnih cementov	4
2.2.2 Potek hidratacije.....	6
2.2.3 Faktorji, ki vplivajo na hidratacijo cementa.....	8
2.2.4 Matematični opis razvoja hidratacijske toplote	10
3 MODELIRANJE BETONA MED STRJEVANJEM	13
3.1 Osnovne oblike transporta toplote in vlage	13
3.1.1 Prehod toplote	13
3.1.2 Prehod vlage	14
3.2 Zapis osnovnih enačb povezanega problema temperature in vlage	15
3.2.1 Robni pogoji	17
3.2.2 Začetni pogoji.....	18
3.3 Metoda reševanja	19
3.3.1 Metoda končnih elementov - MKE	19
3.4 Izpeljava končnega elementa za temperaturo in koncentracijo vlage	22
3.4.1 Diskretizacija območja (domene).....	22
3.4.2 Izbira interpolacijskih polinomov	24
3.4.3 Zapis in diskretizacija osnovnih enačb v šibki obliki	25

3.5	Zapis enačb za celotno konstrukcijo	29
3.6	Reševanje sistema enačb	31
4	IZDELAVA PROGRAMSKE KODE.....	34
4.1	Podajanje parametrov	34
4.2	Generiranje geometrije.....	35
4.3	Generiranje lokalnih matrik KE in globalnih matrik konstrukcije.....	37
4.4	Matrike robnih in začetnih pogojev	40
4.5	Izračun temperature in koncentracije vlage v posameznih časovnih korakih ...	42
4.5.1	Združevanje matrik	42
4.5.2	Kondenzacija matrik	42
4.5.3	Zanka za izračun neznanih količin v časovnih korakih	43
5	REZULTATI ANALIZE	46
5.1	Analiza stopnje povezanosti temperature in vlage	46
5.1.1	Nepovezan problem – Fourierjev in Fickov zakon.....	47
5.1.2	Delno povezan problem.....	50
5.1.3	Popolnoma povezan problem	53
5.1.4	Zaključki analize stopnje povezanosti temperature in vlage	57
5.2	Analiza vpliva vlage na temperaturo med procesom hidratacije	58
5.3	Analiza vpliva izbire cementa na potek temperatur po prerezu	69
6	ZAKLJUČEK.....	75
VIRI	76

KAZALO TABEL

Tabela 1: Deleži oksidov v cementu.....	6
Tabela 2: Finost mletja cementa.	9
Tabela 3: Hidratacijski parametri betonskih mešanic.....	12
Tabela 4: Parametri izračuna – analiza stopnje povezanosti.....	46
Tabela 5: Parametri izračuna – vpliv vlage na temperaturo.....	58
Tabela 6: Parametri izračuna – vpliv izbire cementa.	69

KAZALO SLIK

Slika 1: Faze hidratacije [6].	7
Slika 2: Reaktivnost mineralov cementa [6].	8
Slika 3: Struktura cementnega kamna ob različnem vodocementnem razmerju [7].	10
Slika 4: Količina sproščene hidratacijske toplote različnih vrst cementov [8].	11
Slika 5: Primerjava med računsko in eksperimentalno krivuljo hidratacije	12
Slika 6: Diskretizacija območja z označenimi prostostnimi stopnjami:	23
Slika 7: Pregled različnih tipov končnih elementov glede na obliko in število vozlišč [19].	24
Slika 8: Oblika funkcije N_i za trikotne končne elemente [17].	25
Slika 9: Pravokotni končni element.	25
Slika 10: Generiranje globalne togostne matrike.	30
Slika 11: Količine, ki pripadajo znanim vrednostim koncentracije vlage in temperature.	32
Slika 12: Kondenzacija matrik.	32
Slika 13: Primer izrisa točk (vozlišč) konstrukcije.	36
Slika 14: Konstrukcija razdeljena na končne elemente.	38
Slika 15: Geometrija ter začetni in robni pogoji – analiza stopnje povezanosti T in c .	47
Slika 16: T in c v vozlišču n_1 – nepovezan problem.	47
Slika 17: T in c v vozlišču n_2 – nepovezan problem.	48
Slika 18: T in c v vozlišču n_3 – nepovezan problem.	48
Slika 19: Temperatura po širini konstrukcije - nepovezan problem.	49
Slika 20: Koncentracija vlage po širini konstrukcije - nepovezan problem.	49
Slika 21: T in c v vozlišču n_1 – delno povezan problem.	50
Slika 22: T in c v vozlišču n_2 – delno povezan problem.	51
Slika 23: T in c v vozlišču n_3 – delno povezan problem.	51
Slika 24: Temperatura po širini konstrukcije - nepovezan problem.	52
Slika 25: Koncentracija vlage po širini konstrukcije - delno povezan problem.	52
Slika 26: T in c v vozlišču n_1 – povezan problem.	53
Slika 27: T in c v vozlišču n_2 – povezan problem.	54
Slika 28: T in c v vozlišču n_3 – povezan problem.	54
Slika 29: Temperatura po širini konstrukcije - povezan problem, nižja vrednost kcT .	55
Slika 30: Koncentracija vlage po širini konstrukcije - povezan problem, nižja vrednost kcT .	55
Slika 31: Temperatura po širini konstrukcije - povezan problem, višja vrednost kcT .	56
Slika 32: Koncentracija vlage po širini konstrukcije - povezan problem, višja vrednost kcT .	56
Slika 33: Geometrija ter robni in začetni pogoji – vpliv vlage na temperaturo.	58
Slika 34: T in c v vozlišču n_1 – vpliv vlage na temperaturo.	59
Slika 35: T in c v vozlišču n_4 – vpliv vlage na temperaturo.	60
Slika 37: T in c v vozlišču n_2 – vpliv vlage na temperaturo.	61
Slika 36: T in c v vozlišču n_3 – vpliv vlage na temperaturo.	61

Slika 38: Koncentracija vlage po širini konstrukcije – vpliv vlage na temperaturo.....	62
Slika 39: Temperatura po širini konstrukcije pri $t = 8$ h – vpliv vlage na temperaturo.....	63
Slika 40: Temperatura po širini konstrukcije pri $t = 36$ h – vpliv vlage na temperaturo.....	63
Slika 41: Temperatura po širini konstrukcije pri $t = 120$ h – vpliv vlage na temperaturo.....	64
Slika 42: Temperatura po širini konstrukcije pri $t = 240$ h – vpliv vlage na temperaturo.....	64
Slika 43: (a) Temperatura (v °C) in (b) koncentracija vlage (m^3/m^3) pri $t = 0$ ur.	65
Slika 44: (a) Temperatura (v °C) in (b) koncentracija vlage (m^3/m^3) pri $t = 12$ ur.....	65
Slika 45: (a) Temperatura (v °C) in (b) koncentracija vlage (m^3/m^3) pri $t = 24$ ur.....	66
Slika 46: (a) Temperatura (v °C) in (b) koncentracija vlage (m^3/m^3) pri $t = 36$ ur.....	66
Slika 47: (a) Temperatura (v °C) in (b) koncentracija vlage (m^3/m^3) pri $t = 48$ ur.....	66
Slika 48: (a) Temperatura (v °C) in (b) koncentracija vlage (m^3/m^3) pri $t = 60$ ur.....	67
Slika 49: (a) Temperatura (v °C) in (b) koncentracija vlage (m^3/m^3) pri $t = 90$ ur.....	67
Slika 50: (a) Temperatura (v °C) in (b) koncentracija vlage (m^3/m^3) pri $t = 120$ ur.....	67
Slika 51: (a) Temperatura (v °C) in (b) koncentracija vlage (m^3/m^3) pri $t = 180$ ur.....	68
Slika 52: (a) Temperatura (v °C) in (b) koncentracija vlage (m^3/m^3) pri $t = 240$ ur.....	68
Slika 53: Geometrija ter robini in začetni pogoji – vpliv izbire cementa.....	70
Slika 54: Hitrost in količina sproščene hidratacijske toplote pri različnih cementih.....	70
Slika 55: T in c v vozlišču $n1$ – primerjava cementov.	71
Slika 56: T in c v vozlišču $n2$ – primerjava cementov.	72
Slika 57: T in c v vozlišču $n3$ – primerjava cementov.	72
Slika 58: Temperatura po širini konstrukcije – vpliv izbire cementa.....	73
Slika 59: Razlika temperature med vozliščem $n2$ in vozliščem $n5$	74

KAZALO IZPISOV PROGRAMSKE KODE

Izpis 1: Primer podajanja parametrov.....	34
Izpis 2: Uvažanje parametrov iz Excela v MATLAB.....	35
Izpis 3: Število vozlišč n in dimenzije KE dx in dy	35
Izpis 4: Generiranje matrike z imeni in koordinatami vozlišč.....	36
Izpis 5: Generiranje matrike urejenih četveric točk.	37
Izpis 6: Oblikovne funkcije in matrika odvodov oblikovnih funkcij.	38
Izpis 7: Integracija in izdelava lokalne matrike KE.	39
Izpis 8: Funkcija za izdelavo globalne matrike konstrukcije.	39
Izpis 9: Generiranje vseh štirih globalnih matrik kondukcije.....	40
Izpis 10: Časovna komponenta togostne matrike.	40
Izpis 11: Matrike vozlišč na robovih.....	41
Izpis 12: NN matriki za levi in desni rob.	41
Izpis 13: Stolpca začetnih pogojev.	41
Izpis 14: Združevanje matrik.	42
Izpis 15: Celotna togostna matrika.	42
Izpis 16: Indeksi znanih in neznanih vrednosti.	43
Izpis 17: Kondenzacija matrike K	43
Izpis 18: For zanka za izračun neznanek v vsakem časovnem koraku.....	44
Izpis 19: Shranjevanje rezultatov v Excelovo datoteko.....	45

1 UVOD

Beton je zaradi svojih lastnosti v gradbeništvu zelo pogosto uporabljen material. Ima visoko tlačno trdnost, nizko ceno, dolgo življenjsko dobo in je odporen na zunanje vplive. Poleg tega lahko z betonom izdelujemo elemente različnih oblik, saj privzame obliko kalupa, v katerega vlijemo svežo betonsko mešanico, ki se nato strdi in ohrani obliko. Sprememba stanja od začetne židke betonske mešanice do trdnega betonskega elementa je rezultat zapletene reakcije med vodo in cementom, imenovane hidratacija. Reakcija je eksotermna, kar ima za posledico povišanje temperature v betonu. Visoke temperaturne razlike v betonu pomenijo neenakomerno raztezanje betona in s tem nastanek nateznih napetosti. Visoke natezne napetosti pa nadalje lahko pomenijo razpokanost betona.

V okviru diplomske naloge bomo obravnavali masivne betone, pri katerih je zaradi morebitne prekoračitve natezne nosilnosti betona potrebna kontrola temperature v betonu. Posebej bomo izpostavili hidratacijo, ki je pomemben faktor pri razvrščanju betonov v skupino masivnih betonov. Opisali bomo potek reakcije med vodo in cementom v fazi strjevanja betona in vpliv izbire cementskega cementa na hidratacijo. Ker sestava cementskega cementa pomembno vpliva na sproščanje toplote ob hidrataciji, bomo predstavili tudi vpliv posameznih kristalov cementnega klinkerja na hidratacijo ter podali sestavo dveh različnih tipov cementskega cementa, ki jih bomo kasneje vključili v numerični model za temperaturno-vlažnostno analizo svežega betona. V okviru obravnave hidratacije bomo zapisali izraz, s katerim se matematično opiše sproščanje hidratacijske toplote v betonu.

Po končanem poglavju o masivnih betonih in hidrataciji bo sledilo poglavje, v katerem bomo najprej opisali osnovne oblike prehoda temperature in vlage, nato pa bomo pozornost posvetili povezavi med temperaturo in koncentracijo vlage v svežem betonu. Temperatura in vlaga vplivata druga na drugo, poleg tega pa na stanje temperature in vlage v betonu vplivajo tudi drugi parametri, ki jih zaradi njihovega majhnega vpliva v diplomski nalogi ne bomo obravnavali. Povezanost med temperaturo in vlago bomo opisali s parcialnimi diferencialnimi enačbami, katerih reševanje bo osrednji predmet diplomske naloge. Z uporabo metode končnih elementov bomo enačbe prevedli na diskreten problem in zapisali sistem linearnih algebrskih enačb, s katerimi bomo opisali stanje temperature in koncentracije vlage na področju enega končnega elementa. Za konec teoretičnega dela bomo zapisali še sistem linearnih algebrskih enačb za celotno konstrukcijo.

Izpeljavo enačb bomo uporabili za izdelavo računalniškega programa v okolju MATLAB. Program bomo v določeni meri opisali v nalogi. V zadnjem delu naloge bomo program uporabili za analizo različnih modelov betona. Najprej bomo obravnavali povezanost temperature in koncentracije vlage, nato pa bomo temu dodali še vpliv hidratacije. Nazadnje bomo obravnavali še vpliv izbire cementa na stanje temperature in vlage v betonu.

V zaključku bomo povzeli in združili ugotovitve diplomske naloge.

2 MASIVNI BETONI

V tem poglavju si bomo pogledali definicijo masivnih betonov, parametre, ki so ključni pri uvrščanju elementov med masivne betone, ter hidratacijo in parametre, ki vplivajo nanjo.

2.1 Splošno o masivnih betonih

Kot se bo izkazalo v nadaljevanju, je betonske elemente, ki spadajo v skupino masivnih betonov, izjemno zahtevno določiti. Ameriški inštitut za beton (ACI) kot masivni beton klasificira **vsak betonski prerez, pri katerem so zaradi dimenzij potrebni posebni ukrepi za nadzorovanje sproščanja toplote, spremembe prostornine in nastajanja razpok**. Vse tri naštet količine, ki jih je treba nadzorovati, so posledica hidratacijske toplote, ki se sprošča med vezanjem cementa. Pri razvrščanju konstrukcij med masivne betone je treba posvetiti posebno pozornost parametrom, ki bistveno vplivajo na porazdelitev temperatur med procesom hidratacije. Ti parametri so [1]:

- Dimenzije elementa,
- izbira cementa,
- količina cementa,
- fizikalne lastnosti betonske mešanice.

Dimenzije elementa, ki zahtevajo ukrepe po nadzoru, so s klasifikacijo, ki jo podaja ACI, zelo ohlapno določene. V večini literature, kjer avtorji želijo podati inženirske ocene, so kot masivni betoni definirani vsi betonski elementi, katerih najmanjša dimenzija presega vrednosti med 0,5 m in 2,0 m (odvisno od avtorja). Pri manjših prerezih je razmerje med volumnom in površino betonskega bloka tako, da omogoča relativno hitro odvajanje proizvedene hidratacijske toplote v okoliški zrak. Pri večjih prerezih pa je odvajanje toplote daljše, kar se kaže v večjih temperaturnih gradientih ter posledično večjih nateznih napetostih v prerezu. Prekoračena nizka natezna trdnost betona lahko pomeni nastanek razpok, preko katerih v notranjost betonskega prereza postopoma prehajajo škodljivi vplivi zunanjega okolja in sčasoma privedejo do slabše kvalitete betona in njegovega propadanja.

Pomembna je tudi izbira cementa, saj je pri uporabi nekaterih cementov (cementi, s katerimi dosegamo visoke trdnosti v relativno kratkem času) količina sproščene toplote v začetnih fazah hidratacije velika, kar ima za posledico visoke temperaturne razlike. Ob uporabi takih cementov lahko označimo betonske prerese za masivne betone kljub manjšim dimenzijam, saj se temperatura tudi ob manjših dimenzijah ne odvaja dovolj hitro.

Naslednji parameter, ki vpliva na razvrščanje prerezov med masivne betone, je količina cementa, saj je količina sproščene energije ob procesu hidratacije linearno sorazmerna s količino cementa. Hitrost sproščene toplote je namreč merjena v W/g oz. J/(g×s). Enota nam pove, koliko energije sprosti en gram cementa v eni sekundi. Občasno nam pogoji narekujejo uporabo večjega deleža cementa v cementni mešanici. Tudi v teh primerih je potrebna pazljivost, saj imamo lahko opravka z masivnim betonom pri manjših dimenzijah zaradi večje količine sproščene toplote.

Tudi fizikalne lastnosti betonske mešanice narekujejo spremembo temperature v konstrukciji. Konstrukcije, ki so grajene iz težjih betonov, se ob prejemu količine hidratacijske toplote segrejejo manj, kot se segrejejo konstrukcije iz lažjih betonov ob prejemu enake količine hidratacijske toplote. Tako so konstrukcije iz lažjih betonov bolj neugodne za odvajanje hidratacijske toplote, kar pomeni, da je tudi gostota betona lahko faktor, zaradi katerega prerez lahko spada med masivne betone.

2.2 Hidratacija cementa

Hidratacija cementa je kemično-fizikalni proces, ki poteka ob združitvi cementa z vodo. Odvisna je predvsem od sestave in količine cementa ter vodocementnega razmerja.

2.2.1 Sestava običajnih cementov

Glavna sestavina cementa je klinker, ki je po sestavi poli-mineralni material. Klinker je sestavljen iz naslednjih spojin (oksidov) [2]:

- CaO (60 % do 67 %)
- SiO₂ (17 % do 25 %)
- Al₂O₃ (3 % do 8 %)
- Fe₂O₃ (0,5 % do 6 %)
- SO₃ (1 % do 3 %)
- Alkalijske (K₂O in Na₂O) (0,2 % do 1,3 %)
- Primesi (nevezan CaO do 2 % in MgO do 4 %)

Iz zgornjih oksidov so sestavljeni sledeči minerali oziroma kristali cementnega klinkerja:

- Trikalcijski silikat (3CaO·SiO₂, krajše zapisan C₃S),
- Dikalcijski silikat (2CaO·SiO₂, krajše zapisan C₂S),

- Trikalcijev aluminat ($3\text{CaO}\cdot\text{Al}_2\text{O}_3$, krajše zapisan C_3A),
- Tetrakalcijev aluminoforit ($4\text{CaO}\cdot\text{Al}_2\text{O}_3\cdot\text{Fe}_2\text{O}_3$, krajše zapisan C_4AF),

V diplomski nalogi sta obravnavani dve vrsti cementa, in sicer CEM I 42,5 R in CEM III/B 32,5 N SR-LH, ki so ju analizirali na Fakulteti za gradbeništvo v Zagrebu [3]. V nadaljevanju sledi kratek opis obeh omenjenih cementov.

2.2.1.1 CEM I 42,5 R

CEM I 42,5 R je čisti portlandski cement (oznaka CEM I), ki je v velikem deležu sestavljen iz klinkerja in sadre (med 95 % in 100 %), do 5 % cementa pa lahko zavzemajo dodatki. Ta cement v zgodnjih fazah (2 dni) razvije relativno visoko trdnost, tj. trdnost večjo od 20 MPa (oznaka R), ki je zahtevana v standardu SIST EN 197-1. Po 28 dneh pa dosega trdnosti, ki so večje od 42,5 MPa in manjše od 62,5 MPa (oznaka 42,5).

Ta cement se uporablja za konstrukcije, pri katerih so zahtevane zgodnje trdnosti. To je za prednapete betone, za montažne elemente, injektiranje ipd. Cement razvije znatno hidrationsko toploto [4].

2.2.1.2 CEM III/B 32,5 N SR-LH

CEM III/B 32,5 N SR-LH je žlindrin cement (oznaka CEM III), ki ima povišano sulfatno odpornost (oznaka SR) in ob reagiranju z vodo razvije nizko hidrationsko toploto (oznaka LH). Sestoji iz minimalno do 20 % portlandskega klinkerja, maksimalno 80 % granulirane plavžne žindre in do 5 % ostalih dodatkov. Oznaka N pomeni normalno hitrost vezanja, kar pomeni, da po 7 dneh doseže trdnosti večje od 16 MPa, ki je predpisana s standardom. Po 28 dneh trdnosti cementa segajo med 32,5 MPa in 52,5 MPa.

Zaradi njegove nizke hidrationske toplote (s standardom predpisana sproščena hidrationska toplota ne sme presegati 270 J/g) se pogosto uporablja za izdelavo masivnih betonskih elementov (pregrade, temelji, ipd.) in pri izvedbi ostalih inženirskih objektov, kjer je priporočljiva nizka stopnja sproščene hidrationske toplote. Uporablja se tudi pri izdelavi betonskih mešanic za betone, za katere je zahtevana visoka odpornost na sulfate [5].

2.2.1.3 Sestava obravnavanih cementov

V tabeli 1 so podani deleži posameznih oksidov, ki sestavljajo obravnavana cementa [3].

Tabela 1: Deleži oksidov v cementu.

Oksid	CEM I 42,5 R	CEM III/B 32,5 N SR-LH
	Delež (%)	Delež (%)
CaO	64,36	48,37
SiO ₂	20,32	29,36
Al ₂ O ₃	5,62	9,20
Fe ₂ O ₃	3,08	1,74
SO ₃	2,40	2,77
K ₂ O	1,03	0,57
Na ₂ O	0,42	0,29
MgO	2,90	6,11

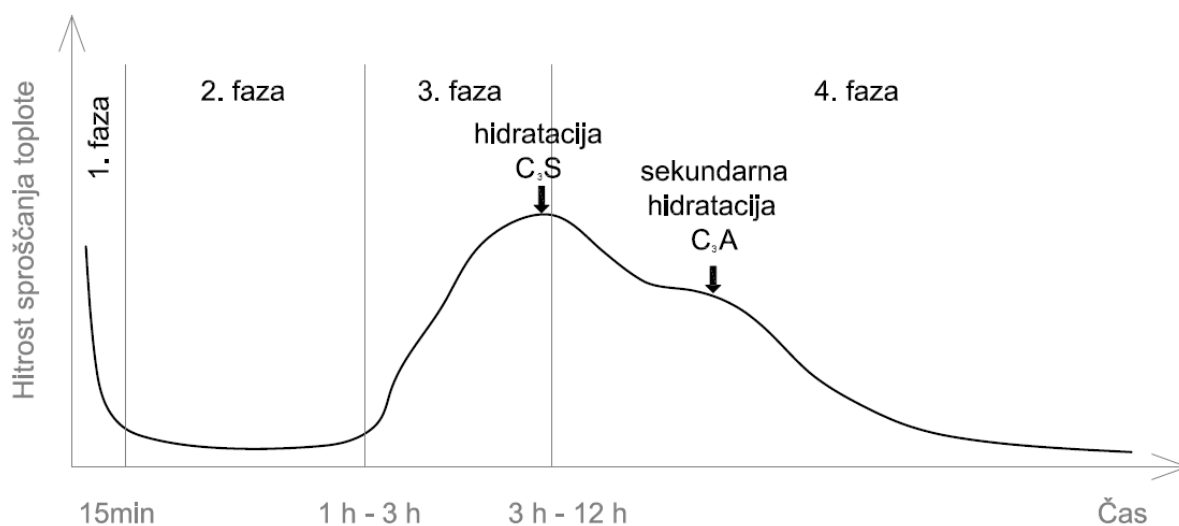
2.2.2 Potek hidratacije

Hidratacija cementa se začne ob združitvi kristalov klinkerja z vodo in poteka v več fazah [2, 6]:

- V prvi fazi se kristali klinkerja razkrajajo. Do reakcije pride takoj ob stiku z vodo, saj delci, raztopljeni v vodi, reagirajo s C₃A. Čeprav ta faza traja le nekaj minut, reagira do 10 % C₃S, raztopi se in reagira pa do 25 % C₃A in C₄AF. Ob tem nastaja etrignit. Nasprotno je delež C₂S, ki reagira v tej fazi, majhen. Gre za reakcijo, ki nima znatnega vpliva na trdnost betona.
- Druga faza je faza mirovanja. Količina ionov v raztopini se večja hkrati s količino nastalih kristalov. Zmanjšanje reakcije se razlaga po teoriji zaščitne plasti ali pa po teoriji kristalizacijskih jeder.
- V tretji fazi (faza pospešene hidratacije) začnejo z vodo reagirati silikatni minerali (C₃S in C₂S). Pri tem se sprošča večji del hidratacijske toplote. Ob reakcijah silikatov, kot produkt nastaja C-S-H gel, katerega vloga je vezanje cementne paste in ima vpliv na končno trdnost in obstojnost betona.

- V zadnji fazi (faza pojemajoče hidratacije) se hitrost reakcij zmanjšuje, kar gre pripisati količini hidratacijskih produktov, skozi katere je transport ionov vezan izključno na difuzijo. Nehidratizirana zrna C_3A in C_4AF reagirajo z nastalim etrignitom in ob tem nastaja monosulfat, kar se občasno pokaže kot dodatek C_3A k hidratacijski energiji. Iz gela nastaja cementni kamen. Gel se prepleta z novimi kristali, ki rastejo in tvorijo mrežo. Z nastajanjem novih hidratiziranih produktov v okolici nehidratiziranih delcev pa je hidratacija le-teh še dodatno ovirana, kar povzroči še dodatno zmanjšanje reakcij in poteka hidratacije.

Na sliki 1 je prikazan potek celotne hidratacije z označenim trajanjem posamezne faze.



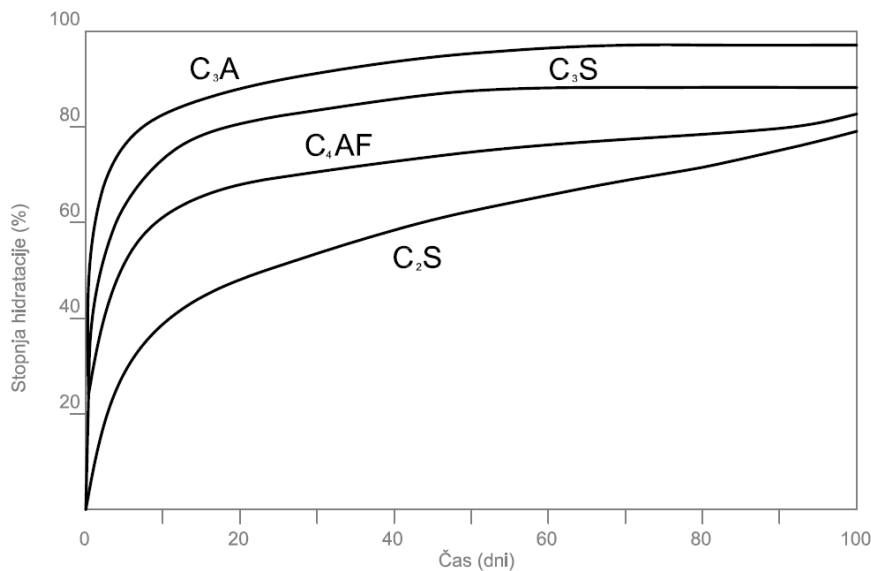
Slika 1: Faze hidratacije [6].

2.2.3 Faktorji, ki vplivajo na hidratacijo cementa

Hitrost in količina oddane toplote sta med procesom hidratacije močno odvisni od kemične sestave in fizikalnih lastnosti cementa (finosti mletja), vodocementnega razmerja, zunanjih pogojev in dodatkov.

2.2.3.1 Kemična sestava cementa

Klinker sestavljajo štiri kristali (C_3S , C_2S , C_3A in C_4AF). Vsak izmed njih ima drugačen doprinos k celotni količini sproščene energije. Če kristale obravnavamo posamezno, pridemo do ugotovitev, ki so prikazane na sliki 2.



Slika 2: Reaktivnost mineralov cementa [6].

Reakcija trikalcijevega aluminata (C_3A) je najhitrejša. Kristali namreč reagirajo takoj ob stiku z vodo. Ob reakciji omenjenih kristalov pa se sprosti tudi veliko več toplote, kot jo oddajo ostali elementi. Za upočasnitev reakcije C_3A in C_4AF z vodo se v cement v manjšem deležu (2–5 %) primeša še fino mleti mavčni kamen oz. sadra ($CaSO_4 \cdot 2H_2O$, krajše $C\bar{S}H_2$). Z različnimi razmerji osnovnih oksidov torej dobimo cemente, ki oddajo različno količino hidratacijske toplote in le-to sprostijo v različno dolgem časovnem obdobju [6].

2.2.3.2 Finost mletja

Finost mletja opazno vpliva na hidratacijske procese. Debelejša zrna namreč ne reagirajo tako hitro in v celoti kot drobna zrna. Bolj fino mleti cementi dosegajo višje trdnosti, med hidratacijo pa razvijajo več toplote in se bolj krčijo. Ker površina zrn definira stik med cementom in vodo, kjer se odvija hidratacija, definiramo finost mletja kot vsoto površin zrn na enoto mase (cm^2/g).

Za primerjavo so v tabeli 2 podani podatki o finosti mletja (specifični površini) obravnavanih cementov [3].

Tabela 2: Finost mletja cementa.

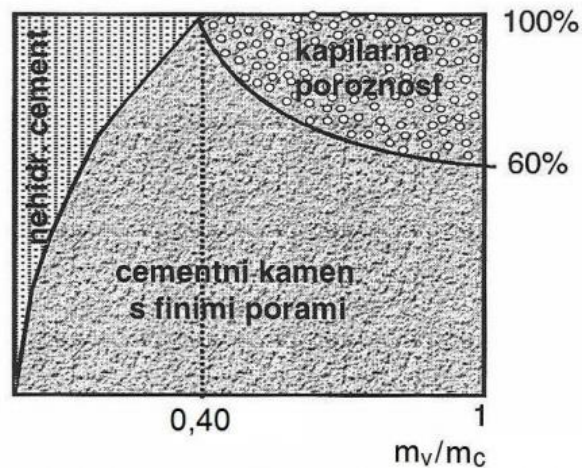
	CEM I 42,5 R	CEM III/B 32,5 N SR-LH
Specifična površina (cm ² /g)	3082,0	3900,0

Podatki, ki jih prikazuje tabela, ne potrjujejo zgoraj opisanega pričakovanega obnašanja cementa, saj ima CEM I 42,5 R manjšo specifično površino, hkrati pa doseže višjo trdnost in višjo hidratacijsko toploto, kot jo doseže CEM III/B N SR-LH. Razlog za to je razviden v poglavju (2.2.3.1), kjer smo govorili o sestavi cementa. Portlandski cement (CEM I) je namreč bolj reaktiven kot žlindrin (CEM III).

2.2.3.3 Vodocementno razmerje

V splošnem pomeni višje vodocementno razmerje več sproščene toplote, vendar pa je potrebno razumeti tudi vpliv vodocementnega razmerja na trdnost betona. Razmerje med cementom in vodo v teoriji ponuja tri različne scenarije, ki so prikazani s sliko 3:

- Količina vode in cementa v betonski mešanici je taka, da se med hidratacijo porabi vsa voda in vsa zrna cementa hidratizirajo. V tem primeru je trdnost betona največja, saj je vezivo med agregatom homogeni cementni kamen. Vodocementno razmerje naj bi bilo okrog 0,40 [2, 6]. Stanje, pri katerem vsa zrna hidratizirajo in se vsa voda porabi, je zgolj teoretično. V praksi je možno doseganje 80 % do 90 % hidratacije cementnih zrn, celoten potek hidratacije pa je odvisen tudi od zunanjih dejavnikov.
- Količina vode je premajhna, da bi vsa zrna hidratizirala. V tem primeru nekatera zrna ne hidratizirajo, posledica pa je manjša trdnost betona zaradi praškaste strukture nevezanega cementa.
- Količina vode je prevelika, da bi se le-ta porabila med procesom hidratacije. Manjša trdnost betona v tem primeru gre na račun kapilarnih por, v katerih ostane ujeta odvečna voda.



Slika 3: Struktura cementnega kamna ob različnem vodocementnem razmerju [7].

2.2.3.4 Temperatura okolja

Tudi temperatura okolja lahko znatno vpliva na razvoj hidratacije. Višja temperatura okolja namreč povzroči hitrejšo in bolj intenzivno hidratacijo v začetnih časih, kasneje pa je hidratacija počasnejša kot pri nižjih temperaturah. Ta fenomen s pridom uporabljamo pri parjenju betona, vendar pa je pri tem treba paziti na razvoj previsokih temperatur v notranjosti prereзов in s tem povezanih nateznih napetosti in razpok.

2.2.4 Matematični opis razvoja hidratacijske toplote

Hidratacijsko toploto določamo eksperimentalno, in sicer na več načinov:

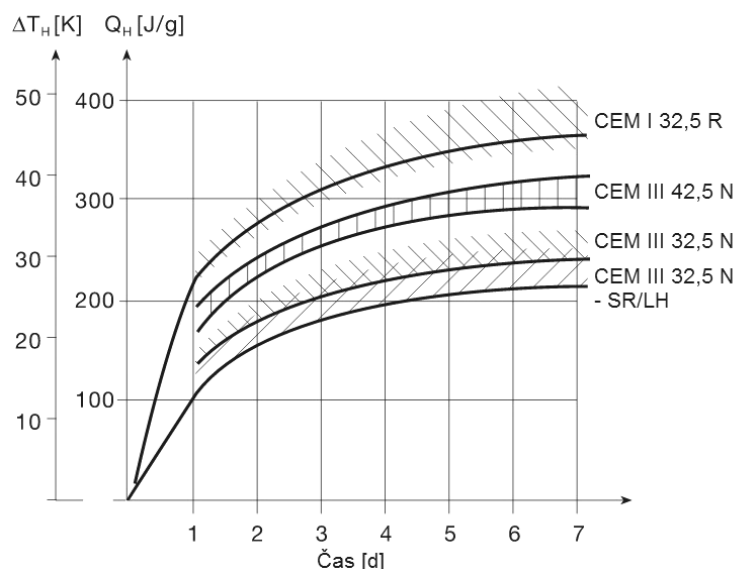
- z adiabatnim preizkusom,
- s poladiabatnim preizkusom in
- z izotermno kalorimetrijo.

Z adiabatnim preizkusom merimo spremembo temperature v preizkušancu, ki je popolnoma izoliran za prehod temperature in vlage. Čeprav takih pogojev ni mogoče zagotoviti, je za adiabatni preizkus označen vsak preizkus, pri katerem je temperaturna izguba zelo majhna (nekaj desetink °C na uro). Taki preizkusi so sicer zelo natančni, vendar pa so zaradi zagotavljanja popolne izolativnosti zelo dragi.

Poladiabatni preizkus je lažje izvedljiv, saj je le deloma izoliran za temperaturo in vlago, pri čemer pa toplotna izguba ne sme biti prevelika. Tudi rezultati, ki jih dobimo, niso tako zanesljivi kot z adiabatnim preizkusom, je pa poladiabatni preizkus veliko cenejši od adiabatnega.

Izotermno kalorimetrijo izvajamo v zato izdelanih posodah (celicah), ki zagotavljajo konstantno temperaturo v okolici preizkušancev. Za razliko od prvih dveh metod s to metodo merimo hitrost sproščanja toplote in ne spremembe temperature. Je odlična metoda za testiranje vzorcev cementne paste in drugih veziv [6].

Podatke o poteku sproščanja hidratacijske toplote torej dobimo eksperimentalno v obliki krivulje sproščene toplote ali pa v obliki krivulje hitrosti sproščanja toplote. Različni cementi imajo različno sestavo in s tem različno krivuljo sproščanja toplote, kar prikazuje slika 4. Za matematični opis sproščanja toplote so bili razviti izrazi, s katerimi lahko natančno opišemo potek sproščanja hidratacijske toplote. Večina teh izrazov temelji na Arrheniusovi zrelostni funkciji, ki pa je relativno zahtevna.



Slika 4: Količina sproščene hidratacijske toplote različnih vrst cementov [8].

Raziskovalci z Gradbene fakultete v Zagrebu so s svojim eksperimentalnim delom, ki so ga prikazali v članku [3], dokazali, da tri-parametrična eksponentna enačba zelo dobro opiše dejansko stanje hidratacije. Vsa nadaljnja vsebina tega podpoglavja je črpana iz omenjenega članka.

Približek adiabatne krivulje dobimo s pomočjo enačbe

$$Q(t) = Q_{\infty} \times e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)^{\beta}}, \quad (1)$$

kjer $Q(t)$ predstavlja celotno količino sproščene toplote do časa t , Q_{∞} celotno količino energije, ki se bo sprostil do končanega procesa hidratacije, τ je časovni parameter in β je koeficient zakrivljenosti.

Koeficienti Q_{∞} , τ in β so specifični za posamezno cementno mešanico in so podani v tabeli 3:

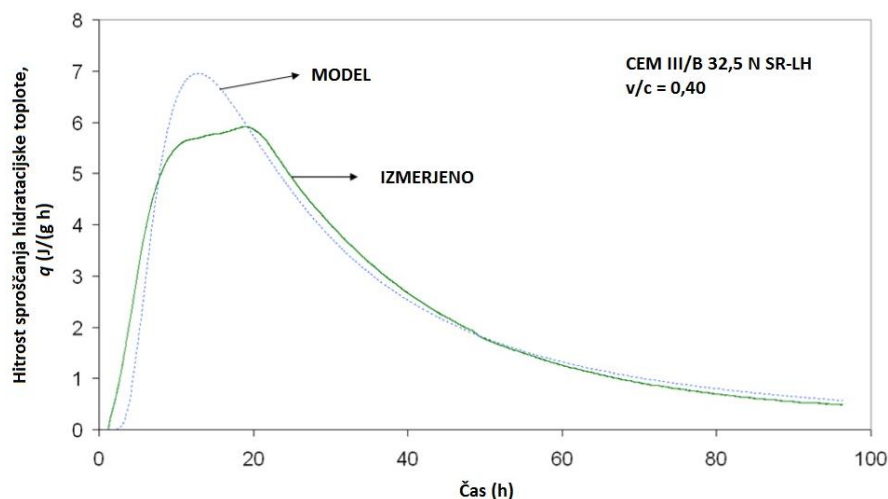
Tabela 3: Hidratacijski parametri betonskih mešanic.

Cement	v/c razmerje	Q_{∞} (J/g)	τ (h)	β
CEM I 42,5 R	0,40	331	13,0	1,34
	0,50	403	16,6	1,08
	0,65	470	19,2	0,97
CEM III/B 32,5 N SR-LH	0,40	292	23,4	1,09
	0,50	326	28,8	1,03
	0,65	393	32,7	0,91

Do hitrosti sproščanja toplote pridemo z odvodom enačbe (1). Hitrost sproščanja toplote je namreč rezultat, dobljen iz kalorimetrične preiskave.

$$q(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \quad (2)$$

Na sliki 5 prikazan je primer največjega odstopanja med eksperimentom in analitično enačbo. Ta enačba se veliko bolje prilega hitro vezočim cementom, vendar pa je tudi pri počasi vezočih dovolj dobra, da z zadovoljivo natančnostjo opiše dogajanje v betonski mešanici.



Slika 5: Primerjava med računsko in eksperimentalno krivuljo hidratacije

Iz slike 5 je razvidno, da z matematičnim modelom hidratacijske krivulje, ki ga opisuje enačba (2), nekoliko presežemo eksperimentalno izmerjeno hidratacijsko krivuljo v območju maksimalnih vrednosti hitrosti sproščanja toplote. Z upoštevanjem matematičnega modela torej naredimo napako, vendar pa smo zaradi dobljenih višjih temperatur v prerezu in posledično višjih napetosti na varni strani. Take temperature zahtevajo strožja pravila za določanje dimenzij konstrukcij in izbire cementa za izdelavo le-teh.

3 MODELIRANJE BETONA MED STRJEVANJEM

Hidratacija močno vpliva na temperaturno stanje v zgodnjih fazah betona, saj gre za eksotermno reakcijo, hkrati pa se ob tem porablja količina vode v betonski mešanici. Na temperaturno in vlažnostno stanje prereza vpliva več dejavnikov (mehanika, elektromagnetno delovanje, zunanji tlaki idr.), vendar pa je vpliv teh dejavnikov v primerjavi z vzajemnim vplivom temperature in vlage zanemarljiv. V tem poglavju bomo izpeljali matematični model za računanje koncentracije vlage in temperature v masivnem betonu z upoštevanjem hidratacije cementa in vzajemnega vpliva temperature in vlage.

3.1 Osnovne oblike transporta toplote in vlage

Za boljše razumevanje dogajanja v masivnem betonu v fazi strjevanja betona je poleg poznavanja hidratacije cementa nujno razumevanje osnovnih oblik transporta toplote in vlage.

3.1.1 Prehod toplote

Prehod toplote je močno povezan s spremembo temperature. Toplotni tok namreč teče z mesta z višjo temperaturo k mestu z nižjo temperaturo. Obstajajo trije načini prehajanja toplote:

- Kondukcija (prevajanje)

V mediju se s kondukcijo toplota prenaša z molekule z višjo temperaturo na molekulo z nižjo temperaturo, in sicer z vibriranjem molekul ali pa zaradi gibanja prostih elektronov, če so ti prisotni. Pojavlja se v trdninah in mirujočih tekočinah, vendar pa je pogoj zanjo razlika v temperaturi. Toplotni tok, ki se pri kondukciji pojavi, je močno pogojen z izbiro medija (materiala). Za kondukcijo velja Fourierjev zakon, ki toplotni tok opiše kot [9]

$$q = -\lambda * \nabla T, \quad (3)$$

kjer koeficient λ ponazarja toplotno prevodnost materiala.

- Konvekcija (prestop)

Prenašanje toplote s konvekcijo se pojavi, kadar se objekt greje ali hladi zaradi tekočine, ki ga obdaja. Sestavljata ga dve komponenti: prenos energije zaradi difuzije in prenos energije zaradi premikanja tekočine. Glede na premikanje fluida lahko konvekcijo razdelimo na vsiljeno, pri kateri umetno vplivamo na gibanje (ventilatorji, črpalke ipd.),

in na naravno, pri kateri se tekočina giblje zaradi razlik v gostoti, ki so posledica toplote [10]. Ne glede na vrsto konvekcije se toplotni tok, ki pri tem nastane, opiše kot

$$q = h(T - T_A), \quad (4)$$

kjer je h koeficient, ki je odvisen od toplotne prestopnosti materiala, T je temperatura na površini objekta in T_A temperatura ambienta (temperatura fluida, ki obdaja objekt).

- Radiacija (sevanje)

Prenos toplote s sevanjem je edini način prenosa toplote, ki ne potrebuje medija, po katerem se širi. Gre namreč za prenašanje energije med telesi z elektromagnetnim valovanjem. Ko to valovanje doseže površino drugega telesa, se nekaj te energije odbije, nekaj se je absorbira, nekaj energije pa telo prepušča.

Vsako telo, ki ima temperaturo nad absolutno ničlo (0 K), seva. Sevanje črnih in sivih teles je podano s Stefan-Boltzmannovim zakonom:

$$q = \sigma \varepsilon T^4. \quad (5)$$

V zgornji enačbi je q tok izsevane toplote, σ je Stefan-Boltzmannova konstanta, ε predstavlja emisivnost površine telesa (za črno telo je $\varepsilon = 1$), T pa pomeni temperaturo površine telesa.

Ker torej telesa poleg prejemanja sevalne energije iz okolja energijo tudi sevajo v okolje, lahko dejanski tok med telesom in okoljem, ki se pojavi na površini telesa pišemo kot [10]

$$q = \sigma \varepsilon (T^4 - T_A^4). \quad (6)$$

3.1.2 Prehod vlage

Koncentracija vlage se znotraj prereza spreminja na podoben način kot temperatura – gre za podobne mehanizme prehoda znotraj prereza in izmenjave z zunanjim okoljem.

- Difuzija

Znotraj prereza se koncentracija spreminja zaradi difuzije. Ta pojav opisuje prvi Fickov zakon, ki pravi, da se difuzijski pretok pojavi zaradi razlike v koncentraciji tekočine in se s težnjo po vzpostavitvi stacionarnega stanja vzpostavi tako, da teče z mesta, kjer je koncentracija večja, proti mestu z manjšo koncentracijo. Velikost pretoka vlage je

torej odvisna od spremembe koncentracije vlage na podoben način, kot se pojavi toplotni tok zaradi razlik v temperaturi. Fickov zakon v enačbi zapišemo kot

$$J = -D * \nabla\phi, \quad (7)$$

pri čemer je D difuzijska konstanta (ki je odvisna od izbire materiala), $\nabla\phi$ pa je gradient (razlika) koncentracije vlage [11].

- Konvekcija

V splošnem je prehod vlage na okolje veliko manj preprost kot prestop temperature, saj se na površje elementa izcedi tekoča voda, nato pa ta voda izpari. Za natančen matematični opis tega dogajanja so potrebne absorpcijske krivulje, ki povezujejo količino vode v materialu z njegovo relativno vlažnostjo, le-te pa so tesno povezane s temperaturo materiala. Kljub temu pa lahko opisane vplive zajamemo v koeficientu β in zapišemo enačbo, ki opisuje pretok vlage preko roba prereza kot

$$\eta = \beta(c - c_A), \quad (8)$$

kjer c predstavlja koncentracijo vlage na površini konstrukcije, c_A pa koncentracijo vlage okoliškega zraka.

3.2 Zapis osnovnih enačb povezanega problema temperature in vlage

Matematično modeliranje temperaturno-vlažnostnega problema v zgodnjih fazah betona je zelo zahtevno. Gre za kompleksen problem, saj je beton porozen material, sestavljen iz trdnega ogrodja, katerega pore so (delno) zapolnjene z vodo. Poleg tega je treba upoštevati, da ni vsa voda v betonu v enaki obliki – opravka imamo s prosto vodo, vodno paro, kemijsko in fizikalno vezano vodo. Delež in prehodnost le-teh se močno spreminja s hidratacijo cementa, ki povzroča spremembe fizikalnih in kemičnih lastnosti trdne matrice. Sprememba temperature v betonu je pogojena tudi s spremembami prehodnosti in deleža vode v betonu. Prehod vode v betonu namreč povzroči tudi transport toplote v betonu [1, 12]. Upoštevanje vseh teh lastnosti privede do spoznanja, da je natančno modeliranje tega problema zelo zahtevno. Na tem mestu je zato potreben razmislek, kako model poenostaviti do te meje, da bi kljub vsemu zagotavljal realne in tehnično uporabne rezultate.

V iskanju primerne modela so se v praksi pojavili različni modeli. Nekateri so relativno preprosti, ker zanemarijo vpliv vlage na temperaturo in posledično napetosti, drugi vlago in temperaturo obravnavajo ločeno, tretji pa se spopadejo s povezanim problemom vlage in temperature. Nekateri pa rešujejo tudi popolnoma povezan termo-hidro-mehanski problem [1].

Začetnik matematičnega modeliranja povezanega problema temperature in vlage je bil Luikov (1975), ki je na osnovi ireverzibilne termodinamike izpeljal sistem nelinearnih parcialnih diferencialnih enačb. V teh enačbah nastopajo koeficienti, ki so odvisni od temperature in/ali koncentracije vlage. Kasneje sta Luikov model razširila in dopolnila Bažant in Kaplan (1996). Njun model je predstavljal osnovo za vse nadaljnje računske modele za reševanje omenjenega problema [1].

Enačbe, ki jih obravnavamo v okviru diplomske naloge, povezujejo vpliv pretoka vlage in temperature brez upoštevanja kemičnega in faznega spreminjanja procesov, prav tako pa zanemarijo vpliv mehanike na prehod toplote oz. vlage. Toplotni tok je torej odvisen le od spremembe temperature in koncentracije vlage ter od sproščanja toplote v masivnem betonu med procesom hidratacije. Pretok vlage je prav tako odvisen od spremembe temperature in koncentracije vlage, proces hidratacije pa vlago v masivnem betonu porablja. V skladu s temi trditvami lahko zapišemo osnovni enačbi, ki opisujeta spremembo koncentracije vlage oz. temperature po analiziranem betonskem prerezu [12]:

$$\dot{T} = \text{div}(\alpha_{TT} \text{grad } T + \alpha_{Tc} \text{grad } c) + \frac{1}{c_b \rho} q_v, \quad (9)$$

$$\dot{c} = \text{div}(\alpha_{cc} \text{grad } c + \alpha_{cT} \text{grad } T) - K q_v, \quad (10)$$

kjer parametri v enačbah (9) in (10) pomenijo:

- T temperatura v [K]
- c koncentracija vlage [kg/kg]
- $\dot{T} = \frac{\partial T}{\partial t}$ časovni odvod temperature [t/s]
- $\dot{c} = \frac{\partial c}{\partial t}$ časovni odvod koncentracije vlage [kg/s kg]
- α_{TT} koeficient toplotne prehodnosti [m^2/s]
- α_{cc} koeficient difuzije vodne pare [m^2/s]
- α_{cT} toplotni koeficient difuzije vodne pare [$\text{m}^2/\text{s K}$]
- α_{Tc} koeficient, ki predstavlja vpliv koncentracije vlage na prehodnost toplote [$\text{m}^2 \text{K}/\text{s}$]
- c_b specifična toplota betona [kJ/kg K]
- ρ gostota betona [kg/m^3]
- K koeficient, ki opisuje količino vode, ki se veže s cementom med procesom hidratacije v odvisnosti od oddane toplote enotskega volumna betona [m^3/J]
- q_v toplota, ki se med procesom hidratacije sprosti na enoto volumna betona [W/m^3]

Za reševanje zgoraj izraženih parcialnih diferencialnih enačb (9) in (10) potrebujemo robne in začetne pogoje.

3.2.1 Robni pogoji

V našem modelu smo robne pogoje, tako za vlago kot za temperaturo, definirali na tri načine. Stanje na robu je mogoče podati s konvekcijskim robnim pogojem, s predpisano vrednostjo temperature in/ali koncentracije vlage na robovih ter z izolacijo roba glede na prehod temperature in/ali vlage.

3.2.1.1 Konvekcija temperature na robu

Konvekcijski robni pogoj definiramo z enačbo (4). Ker se v našem primeru enačba (9) po zapisu razlikuje od Fourierjeve enačbe, formuliramo h kot

$$h = \frac{\alpha_p}{c_b \rho}, \quad (11)$$

pri čemer smo z α_p označili koeficient toplotne prestopnosti v primeru stika betona z zrakom.

Kadar konstrukcije ne obdaja zrak neposredno, lahko koeficient α_p reduciramo in s tem zajamemo vpliv izolacije [12]:

$$\alpha_i = \frac{\lambda_i \alpha_p}{\lambda_i + d_i \alpha_p}. \quad (12)$$

3.2.1.2 Predpisana temperatura na robu

Kot robni pogoj lahko predpišemo temperaturo na robu. V tem primeru so temperature v točkah na robu znane, ne pa nujno tudi konstantne. Z znanimi temperaturami reduciramo sistem enačb, saj število neznank (temperatur) v enačbah ni več enako številu vozlišč.

3.2.1.3 Toplotno izoliran rob

V primeru, da na robu ne predpišemo nobenega izmed zgornjih robnih pogojev, predpišemo toplotni tok preko roba, ki je enak 0. V tem primeru se rob smatra kot popolno temperaturno izoliran.

3.2.1.4 Konvekcija vlage na robu

Pri opisu konvekcije vlage na robu uporabimo enačbo (8) Tudi pri izračunu vlage lahko vpliv izolacije zajamemo z redukcijo faktorja β . To naredimo po enačbi

$$\beta_i = \beta \frac{D_i}{D_i + d \beta_c}, \quad (13)$$

kjer D_i predstavlja difuzijo izolacijskega materiala, d njegovo debelino in β_c faktor, ki ga določimo po izrazu

$$1 < \frac{\beta_c}{\alpha_{cc}} < 10. \quad (14)$$

3.2.1.5 Predpisana vrednost koncentracije vlage na robu

Tako kot pri temperaturi lahko tudi za koncentracijo vlage predpišemo vrednosti v vozliščih, s čimer še dodatno zmanjšamo število neznank. Tak primer je smiseln v stiku s tlemi, saj vlažnost tal le minimalno variira zaradi konstrukcije.

3.2.1.6 Hidroizolacija na robu

Če predpišemo masni tok preko roba elementa, ki je enak 0, se rob smatra kot popolnoma izoliran s strani prehoda vlage.

3.2.2 Začetni pogoji

Začetno stanje v obravnavanem prerezu opišemo kot začetno temperaturo in začetno koncentracijo vlage v betonski mešanici:

$$\begin{aligned} T(x_i, y_j, t = 0) &= T_0 \\ c(x_i, y_j, t = 0) &= c_0, \end{aligned} \quad (15)$$

kjer x_i, y_j pomenita koordinate vseh točk v prerezu vključno z robom prereza.

3.3 Metoda reševanja enačb

Osnovni enačbi (9) in (10) sta parcialni diferencialni enačbi (PDE) drugega reda. Iskanje analitičnih rešitev za take diferencialne enačbe je v praksi zelo težavno (včasih celo nemogoče), zato so se pojavili številni numerični postopki, s pomočjo katerih lahko poiščemo približno, a uporabno rešitev. Med pomembnejše tovrstne metode štejemo:

- Metoda končnih razlik (Diferenčna metoda) [13]

Pri metodi končnih razlik se področje obravnave diskretizira, kar pomeni, da območje razdelimo na diskretne točke, v katerih nato računamo vrednosti. Po definiciji je odvod poljubne funkcije $u(x)$ definiran kot

$$u'(x) = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{u(x + dx) - u(x)}{dx}$$

in tako je smiselno, da odvod aproksimiramo kot

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cong \frac{u_{n+1} - u_n}{dx}. \quad (16)$$

- Metoda končnih volumnov

Pri tej metodi območje razdelimo na mrežo, pri čemer vsakemu vozlišču pripada (kontrolni) volumen. Meje kontrolnih volumnov sovpadajo s polovičnimi razdaljami med vozlišči mreže. Ključni korak te metode je integracija enačb znotraj kontrolnega volumna z upoštevanjem pretoka skozi stene volumna [14].

- Metoda končnih elementov

Tudi pri metodi končnih elementov razdelimo območje na mrežo. Pri tem končni element predstavlja območje med vozlišči, parcialna diferencialna enačba pa se aproksimira kot kombinacija baznih funkcij.

Predmet pričujoče diplomske naloge je predvsem metoda končnih elementov, ki bo zato v nadaljevanju opisana podrobneje. V poteku reševanja problema pa se bomo poslužili tudi diferenčne metode.

3.3.1 Metoda končnih elementov - MKE

Metoda končnih elementov (angleško Finite Element Method – FEM) je bila razvita predvsem za potrebe letalske industrije v 50-ih letih 19. stoletja. Gre za metodo, kjer območje reševanja problema razdelimo na podobmočja oz. končne elemente (KE), od njihovega števila pa je v splošnem odvisna natančnost rezultatov. Dokazano je namreč bilo, da v splošnem z večanjem

števila končnih elementov rešitev problema z uporabo MKE konvergira k eksaktni rešitvi [15]. Z večanjem števila končnih elementov se večja tudi sistem enačb, ki jih je treba rešiti, da dobimo vrednosti v diskretnih točkah. V današnjih časih zaradi zmogljivih računalnikov izračun preprostih konstrukcij ni več problematičen, zelo kompleksni problemi pa še vedno presegajo zmožnosti računalnikov. Razvoj računalnikov nam torej kljub aproksimaciji začetne funkcije omogoča izračun zelo natančnih rezultatov, vendar pa je izračun omejen s zahtevnostjo problema [16].

Metod za reševanje osnovne parcialne diferencialne enačbe je več. V nadaljevanju sta predstavljeni dve metodi, ki ju bomo kasneje uporabili pri izpeljavi končnega elementa.

3.3.1.1 Metoda direktnega ravnovesja

Metoda direktnega ravnovesja je začetna metoda, s katero se je MKE prvič uporabljala za reševanje mehanskih problemov (problemi linearne elastičnosti). Ta pristop je značilen za določanje deformacij in napetosti v konstrukcijah tako pri ravninskem napetostnem in deformacijskem stanju, osno simetričnih problemih, upogibu plošč in lupin kot tudi pri računu tridimenzionalnih objektov [17]. Pogoji za uporabo tega pristopa je poznavanje natančnega poteka neznanih količin v končnem elementu.

Reševanja problema s pomočjo metode direktnega ravnovesja se lotimo na sledeč način:

- Območje obravnave razdelimo na končno število podobmočij (končnih elementov). Z obliko teh podobmočij že delno definiramo funkcije, s katerimi opišemo pomike.
- Ti elementi morajo biti medsebojno povezani v diskretnih točkah na njihovih robovih (občasno tudi v točkah, ki se nahajajo znotraj samih elementov). Pomike teh diskretnih točk (vozlišč) obravnavamo kot osnovne neznane količine problema.
- Izberemo nabor funkcij (linearnih), s katerimi lahko opišemo pomike v vsaki točki znotraj obravnavanega končnega elementa in na njegovem robu zgolj s poznavanjem pomikov vozlišč tega končnega elementa.
- Z uporabo kinematičnih enačb izračunamo deformacije po končnem elementu. Te deformacije skupaj z začetnimi deformacijami in s temperaturo vstavimo v konstitucijske enačbe in izračunamo napetosti po elementu.
- S pomočjo togostne matrike izračunamo še neznane dele vektorja obtežbe, ki nam predstavljajo reakcijske (neznane) zunanje sile v podprtih vozliščih.

3.3.1.2 Metoda uteženih rezidualov (Weighted Residuals Method – WRM)

Metoda direktnega ravnovesja je sicer dokaj preprosta metoda, njena pomanjkljivost pa je, da za probleme, ki nimajo lastnosti linearne elastičnosti, ni uporabna. V takih primerih uporabimo metodo uteženih rezidualov.

Glede na enačbi (9) in (10) imamo sicer zvezen problem, v katerem iščemo funkciji T in c , ki sta odvisni od ravninskih koordinat in časa. Ker za inženirsko uporabo ne potrebujemo natančnih vrednosti v vsaki točki prereza, je dovolj dobro, če izračunamo vrednosti teh funkcij v nekaj diskretnih točkah, vmes pa vrednosti interpoliramo.

Naj bo D diferencialni operator, ki deluje na poljubno funkcijo u , in s tem rezultira v funkcijo p .

$$D(u(x)) = p(x)$$

Funkcijo u želimo aproksimirati s funkcijo \tilde{u} . Gre za linearno kombinacijo osnovnih interpolacijskih funkcij φ_i – ki so med seboj linearno neodvisne – in konstant a_i , ki predstavljajo neznane vrednosti v iskanih točkah

$$u \cong \tilde{u} = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i. \quad (17)$$

Če dano funkcijo vstavimo v operator D , le-ta v splošnem ne rezultira v $p(x)$, pač pa se pri tem pojavi odstopanje oz. rezidual od osnovne funkcije $p(x)$.

$$E(x) = R(x) = D(\tilde{u}(x)) - p(x) \neq 0$$

Namen metode uteženih rezidualov je prisiliti povprečje te napake po celotnem območju proti 0. To storimo s funkcijami uteži W_i , ki opisujejo vpliv vrednosti aproksimirane funkcije v i -tem vozlišču na ostala vozlišča, in z izbiro konstant a_i , ki predstavljajo vrednosti v i -tem vozlišču. Torej lahko zapišemo

$$\int_X R(x) W_i dx = 0 \quad i = 1, 2, 3 \dots n, \quad (18)$$

kjer je število funkcij uteži W_i enako številu neznanih konstant a_i v \tilde{u} . Rezultat je sistem n algebrskih enačb za n neznanih konstant a_i . Oblika funkcij uteži pa je različna glede na obliko WRM, ki jo uporabimo. Teh metod je več, med njimi so

- Kolokacijska metoda (Collocation Method)
- Metoda podobmočij (Sub-domain Method)
- Metoda najmanjših kvadratov (Least Squares Method)
- Galerkinova metoda (Galerkin Method)

- Metoda momentov (Method of Moments)

Za potrebe diplomske naloge bomo razložili in kasneje uporabili Galerkinovo metodo, ki pravi, da lahko za funkcije uteži uporabimo kar parcialne odvode aproksimirane funkcije \tilde{u} .

$$W_i = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial a_i}$$

Ovodi funkcije \tilde{u} nam vrnejo kar osnovne interpolacijske funkcije φ_i , ki smo jih uporabili pri aproksimiranju funkcije $u(x)$ [18].

3.4 Izpeljava končnega elementa za temperaturo in koncentracijo vlage

V tem razdelku bomo enačbe, ki smo jih omenili v prejšnjem razdelku, uporabili za izpeljavo matrik končnega elementa in celotne obravnavane konstrukcije.

Enačbi (9) in (10) zapišemo v obliki:

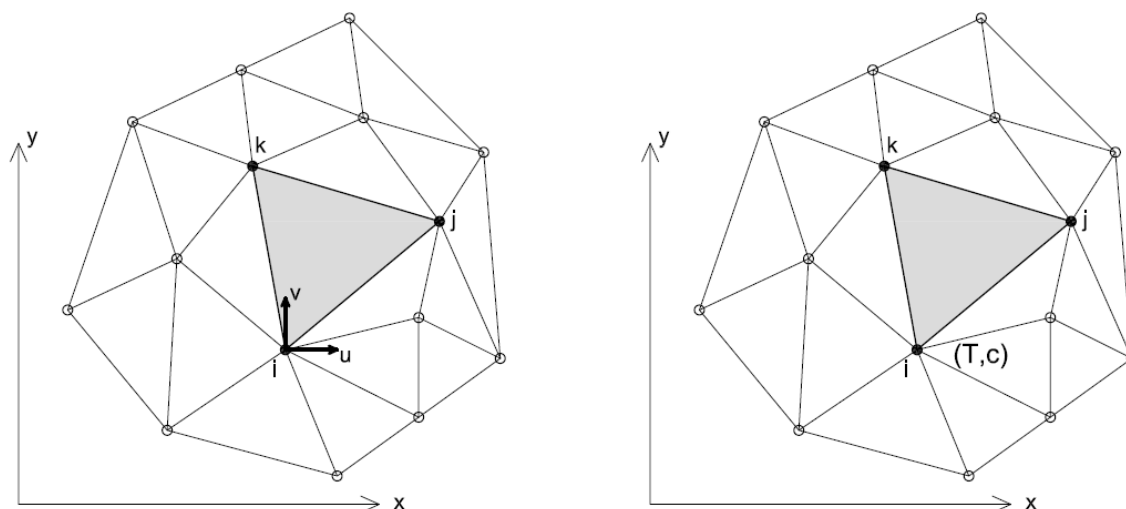
$$-\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_{TT} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_{TT} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_{Tc} \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_{Tc} \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{q_v}{c_b \rho} = 0, \quad (19)$$

$$-\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_{cc} \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_{cc} \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_{cT} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_{cT} \frac{\partial T}{\partial y} \right) - K q_v = 0, \quad (20)$$

pri čemer opazimo, da sta si enačbi (19) in (20) zelo podobni. Njuna podobnost bo nadalje narekovala tudi enako izpeljavo, zato bomo izpeljali le matrično obliko prve enačbe, za drugo enačbo pa jo bomo kasneje priredili.

3.4.1 Diskretizacija območja (domene)

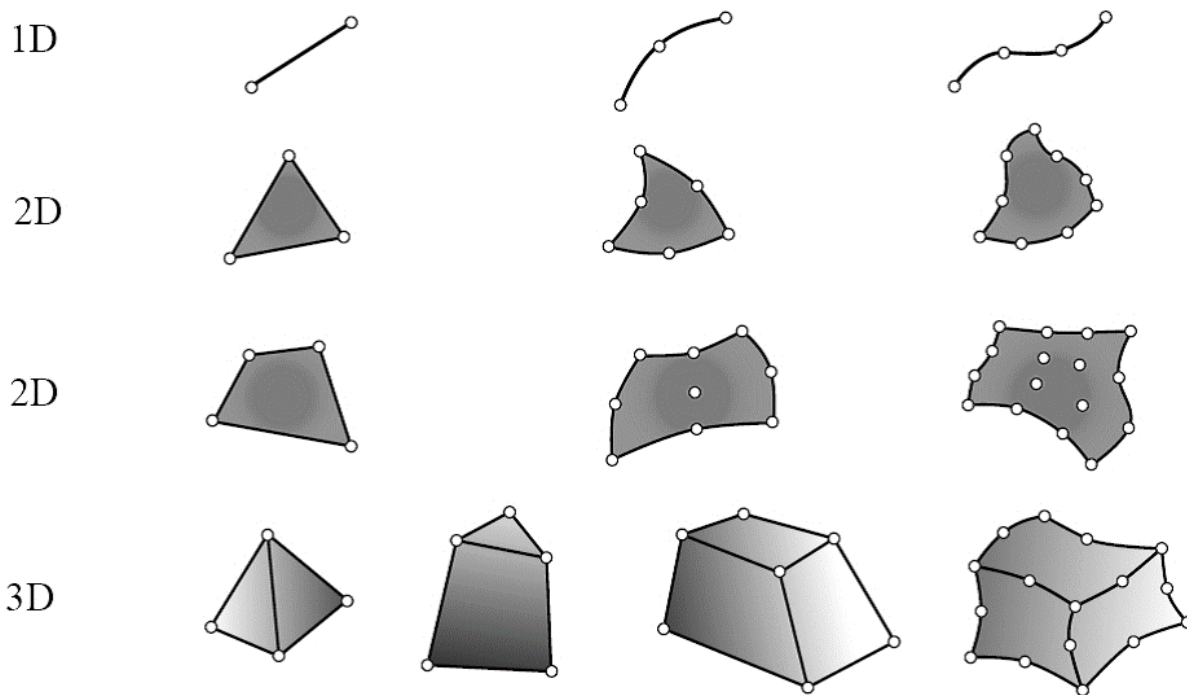
Ker bomo uporabili metodo končnih elementov, je prvi korak izbira oblike in tipa končnega elementa. Ker gre za blok v prečnem prerezu dolge pregrade, ki so mu onemogočene deformacije izven ravnine prereza, bi bilo z vidika mehanike smiselno tako konstrukcijo obravnavati kot ravninsko deformacijsko stanje (*plain strain*), kjer ima vsako vozlišče končnega elementa 2 prostostni stopnji (parametra, ki ju bomo določali) – pomik v smeri x (u) in pomik v smeri y (v). Tudi pri temperaturno-vlažnostnem problemu bomo imeli v vsakem vozlišču 2 prostostni stopnji, in sicer temperaturo ter koncentracijo vlage. Na sliki 6 sta prikazani prostostni stopnji RDS za račun pomikov ter prostostni stopnji za model, ki ga bomo obravnavali v sklopu diplomske naloge.



Slika 6: Diskretizacija območja z označenimi prostostnimi stopnjami:
pomiki (levo), temperatura in koncentracija vlage (desno).

Oblika končnih elementov je odvisna od oblike območja, za katerega rešujemo problem (torej od oblike konstrukcije). Trikotni končni elementi so zelo univerzalni, saj lahko z njimi oblikujemo tako rekoč vsako površino. S pravokotnimi elementi lahko razdelimo le območja ortogonalnih oblik. Za razdelitev poljubnega območja na štirikotne končne elemente pa se poslužimo izoparametričnih končnih elementov.

V naslednjem koraku izberemo število vozlišč v končnem elementu. Več vozlišč v končnih elementih nam sicer poveča natančnost in stabilnost izračuna, vendar pa se z večanjem števila vozlišč in števila interpoliranih neznanih količin večja zahtevnost izračuna. Temu problemu se lahko izognemo z linearno interpolacijo med vozlišči štiri-točkovnega pravokotnega končnega elementa, pri čemer dosežemo želeno stopnjo natančnosti z večanjem števila končnih elementov v konstrukciji. Na sliki 7 je prikazano nekaj vrst končnih elementov glede na dimenzije območja, v katerem rešujemo PDE, obliko KE in število vozlišč KE.



Slika 7: Pregled različnih tipov končnih elementov glede na obliko in število vozlišč [19].

3.4.2 Izbira interpolacijskih polinomov

Za uporabo metode uteženih rezidualov aproksimiramo funkcijo na način, kot je opisan v enačbi (17). Funkciji T in c torej aproksimiramo takole:

$$\hat{T} = \sum_i N_i * T_i = N_1 T_1 + N_2 * T_2 + \dots + N_n * T_n = [N_1, N_2, \dots, N_n] \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{pmatrix} = [N_i] \{T_i\}, \quad (21)$$

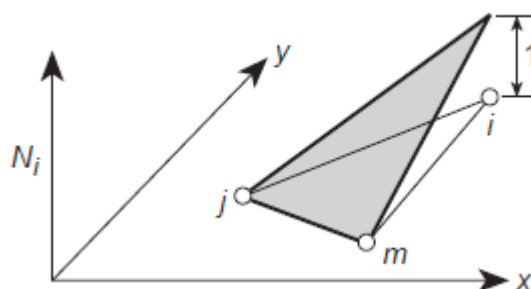
$$\hat{c} = \sum_i N_i * c_i = N_1 c_1 + N_2 * c_2 + \dots + N_n * c_n = [N_1, N_2, \dots, N_n] \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = [N_i] \{c_i\}.$$

Komponente vektorjev $\{T_i\}$ in $\{c_i\}$ predstavljajo vrednosti osnovni neznank problema v diskretnih točkah končnega elementa. V m -tem vozlišču je torej temperatura T_m in koncentracija vlage c_m . Za interpolacijske funkcije smo izbrali družino medsebojno neodvisnih funkcij $[N_i]$, za katere zahtevamo:

$$N_i = \begin{cases} 1 & \text{v vozlišču } i \\ 0 & \text{v ostalih vozliščih} \end{cases} \quad (22)$$

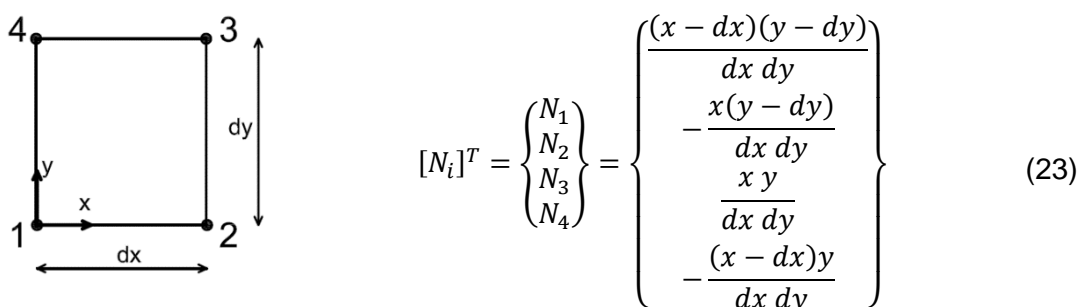
Tako lastnost imajo Lagrangevi interpolacijski polinomi. Stopnjo interpolacije lahko, enako kot število vozlišč končnega elementa, poljubno izberemo. Ker smo se odločili za princip, v katerem bomo natančnost izračuna pridobili z večanjem števila končnih elementov, je smiselno

uporabiti linearno interpolacijo vzdolž robov končnega elementa (zaradi dvorazsežnosti končnega elementa govorimo o bipolarni interpolaciji). Obliko funkcije N_i je prikazuje slika 8.



Slika 8: Oblika funkcije N_i za trikotne končne elemente [17].

Oblika interpolacijskih funkcij je močno povezana z obliko končnih elementov. Če bi imeli opravka s poljubnimi štiri-vozljišnimi štrikotnimi končnimi elementi, bi bila nujna uporaba izoparametričnih končnih elementov. Ker pa bomo obravnavali pravokotno konstrukcijo, so naši končni elementi pravilnih pravokotnih oblik. Zapišemo interpolacijske polinome, ki jih bomo uporabili pri nadaljnjem izračunu (izraz (23)).



Slika 9: Pravokotni končni element.

Iz slike 9, ki predstavlja končni element, je razvidno, da izbrane funkcije N_1 do N_4 iz izraza (23) zadoščajo pogoju (22). N_1 ima tako vrednost 1 v vozlišču 1, v ostalih vozliščih (ko je $x = dx$ in/ali $y = dy$) pa je vrednost te funkcije enaka 0.

3.4.3 Zapis in diskretizacija osnovnih enačb v šibki obliki

Za zapis osnovnih enačb (9) in (10) v šibki obliki je potrebna uporaba metode uteženih rezidualov in Greenovih izrekov. V razdelku 3.3.1.2 smo privzeli, da lahko za uteži W_i uporabimo kar enake funkcije, kot smo jih uporabili pri aproksimaciji funkcij T in c . Ob upoštevanju, da je rezidual $R(x, y)$ enak

$$R(x, y) = -\frac{\partial \hat{T}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_{TT} \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_{TT} \frac{\partial \hat{T}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha_{Tc} \frac{\partial \hat{c}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\alpha_{Tc} \frac{\partial \hat{c}}{\partial y} \right) + \frac{q_v}{c_b \rho}$$

in uteži $W_i = N_i$, ter da so koeficienti $\alpha_{TT}, \alpha_{TC}, \alpha_{cT}$ in α_{cc} konstantni, lahko zapišemo enačbo (18) kot

$$\int_{\Omega_e} [N_j] \left(\alpha_{TT} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial x^2} + \alpha_{TT} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial y^2} + \alpha_{TC} \frac{\partial^2 \hat{c}}{\partial x^2} + \alpha_{TC} \frac{\partial^2 \hat{c}}{\partial y^2} + \frac{q_v}{c_b \rho} - \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} \right) d\Omega = 0. \quad (24)$$

Integriramo torej po območju Ω_e , ki nam označuje površino našega končnega elementa. Matrika $[N_j]$, ki nastopa v enačbi, je enaka matriki $[N_i]^T$, ki smo jo za pravokotni končni element izpeljali v enačbi (23).

Z uporabo Greenovih izrekov (identitet) lahko enačbo (24) preoblikujemo tako, da reduciramo stopnjo odvodov z druge na prvo, kar je za numerično reševanje zelo ugodno. Greenov izrek, ki ga pri tem uporabimo, se glasi:

$$\int_{\Omega_e} N_j \alpha_{TT} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial x^2} d\Omega = \int_{\partial\Omega_e} N_j \alpha_{TT} \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} n_x dS - \int_{\Omega_e} \frac{\partial N_j}{\partial x} \alpha_{TT} \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} d\Omega. \quad (25)$$

S tem se znebimo dvojnih integralov, pridobimo pa integral funkcije po robu ($\partial\Omega_e$ označuje rob našega končnega elementa). Ta člen vsebuje člen n_x , ki označuje zunanjo normalo na rob ploskve, po katerem integriramo. Kasneje bomo del integranda (brez funkcij N_j) zamenjali s funkcijo robnih pogojev.

Enačbi (21) in (25) vstavimo v enačbo (24), konstantne koeficiente pa pišemo pred integrali:

$$\begin{aligned} & \alpha_{TT} \int_{\partial\Omega_e} [N_j] \frac{\partial T}{\partial x} n_x dS - \alpha_{TT} \int_{\Omega_e} \frac{\partial [N_j]}{\partial x} \frac{\partial [N_i]}{\partial x} \{T_i\} d\Omega \\ & + \alpha_{TT} \int_{\partial\Omega_e} [N_j] \frac{\partial T}{\partial y} n_y dS - \alpha_{TT} \int_{\Omega_e} \frac{\partial [N_j]}{\partial y} \frac{\partial [N_i]}{\partial y} \{T_i\} d\Omega \\ & + \alpha_{TC} \int_{\partial\Omega_e} [N_j] \frac{\partial c}{\partial x} n_x dS - \alpha_{TC} \int_{\Omega_e} \frac{\partial [N_j]}{\partial x} \frac{\partial [N_i]}{\partial x} \{c_i\} d\Omega \\ & + \alpha_{TC} \int_{\partial\Omega_e} [N_j] \frac{\partial c}{\partial y} n_y dS - \alpha_{TC} \int_{\Omega_e} \frac{\partial [N_j]}{\partial y} \frac{\partial [N_i]}{\partial y} \{c_i\} d\Omega \\ & + \int_{\Omega_e} [N_j] \frac{q_v}{c_b \rho} d\Omega - \int_{\Omega_e} [N_j] \frac{\partial [N_i] \{T_i\}}{\partial t} d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

S tem dobimo šibko obliko enačbe (9). V bolj pregledni obliki jo lahko zapišemo z združevanjem členov:

$$\begin{aligned}
 & \alpha_{TT} \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial[N_j]}{\partial x} \frac{\partial[N_i]}{\partial x} + \frac{\partial[N_j]}{\partial y} \frac{\partial[N_i]}{\partial y} \right) \{T_i\} d\Omega \\
 & + \alpha_{TC} \int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial[N_j]}{\partial x} \frac{\partial[N_i]}{\partial x} + \frac{\partial[N_j]}{\partial y} \frac{\partial[N_i]}{\partial y} \right) \{c_i\} d\Omega \\
 & + \int_{\Omega_e} [N_j][N_i] \frac{\partial\{T_i\}}{\partial t} d\Omega \\
 & = \int_{\partial\Omega_e} [N_j] \left(\alpha_{TT} \left(\frac{\partial T}{\partial x} n_x + \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) + \alpha_{TC} \left(\frac{\partial c}{\partial x} n_x + \frac{\partial c}{\partial y} n_y \right) \right) dS + \int_{\Omega_e} [N_j] \frac{q_v}{c_b \rho} d\Omega.
 \end{aligned} \tag{27}$$

Kot že omenjeno, nam integral po robu predstavlja robne pogoje, ki jih definiramo kot

$$\alpha_{TT} \left(\frac{\partial T}{\partial x} n_x + \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) + \alpha_{TC} \left(\frac{\partial c}{\partial x} n_x + \frac{\partial c}{\partial y} n_y \right) = h T_A - h [N_i] \{T_i\}, \tag{28}$$

ki predstavlja toplotni tok čez rob končnega elementa.

Na levi strani enačaja v enačbi (27) imamo tri integrale, med katerimi sta dva med seboj zelo podobna. Ker sta $\{T_i\}$ in $\{c_i\}$ vektorja konstant, ki jih iščemo, ju lahko pišemo za integral (zaradi matričnih operacij), s tem pa integrala postaneta identična. V matrični obliki ju lahko z operatorjem

$$\nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right] \tag{29}$$

zapišemo kot

$$\int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial[N_j]}{\partial x} \frac{\partial[N_i]}{\partial x} + \frac{\partial[N_j]}{\partial y} \frac{\partial[N_i]}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Omega_e} (\nabla^T * [N_i]) * ([N_i]^T * \nabla) d\Omega \tag{30}$$

oziroma kot

$$\int_{\Omega_e} \left(\frac{\partial[N_j]}{\partial x} \frac{\partial[N_i]}{\partial x} + \frac{\partial[N_j]}{\partial y} \frac{\partial[N_i]}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Omega_e} B^T * B d\Omega = [K_e]. \tag{31}$$

Pri izpeljavi matrike $[K_{KE}]$ smo uporabili oznako $B = [N_j] * \nabla$. V tretjem integralu na levi strani enačbe (27) je zapisan časovni odvod temperature. Temperatura je torej odvisna tudi od časa, časovno obdobje analize pa bomo prav tako diskretizirali. Izračunali bomo namreč le vrednosti ob določenih časih (časovnih korakih) v časovnem intervalu analize. Pri spreminjanju tretjega

integrala na levi strani enačbe (27) najprej uporabimo diferenčno metodo. Odvod temperature po času zapišemo kot:

$$\frac{\partial \{T_i\}}{\partial t} \cong \frac{\{T_i\} - \{T_i\}_{t-1}}{\Delta t}, \quad (32)$$

kjer Δt pomeni razliko med zaporednima časovnima korakoma. $\{T_i\}$ označuje iskani vektor vrednosti temperatur v diskretnih točkah, matrika $\{T_i\}_{t-1}$ pa matriko vrednosti temperatur, ki smo jih dobili v predhodnem časovnem koraku oz. začetno temperaturo (ki jo podamo kot začetni pogoj) v prvem časovnem koraku.

Ponovno imamo opravka s konstantnimi vrednostmi, zato lahko izraz (32) pišemo pred integral, preostali del integrala pa označimo kot:

$$\int_{\Omega_e} [N_j][N_i]d\Omega = [NN]_e. \quad (33)$$

Za dokončen matrični zapis celotnega problema zapišemo še ostale integrale iz enačbe (27) kot matrike:

$$\int_{\Omega_e} [N_j]d\Omega = [N]_e, \quad \int_{\partial\Omega_e} [N_j][N_i]dS = [NN]_{\partial e} \quad \text{in} \quad \int_{\partial\Omega_e} [N_j]dS = [N]_e. \quad (34)$$

Sedaj pa lahko enačbo (27) zapišemo z novimi oznakami (iz enačb (28), (31), (32), (33) in (34)):

$$\begin{aligned} \alpha_{TT} * [K]_e * \{T_i\} + \alpha_{TC} * [K]_e * \{c_i\} + \frac{1}{\Delta t} * [NN]_e * \{T_i\} + h * [NN]_{\partial e} * \{T_i\} \\ = [N]_{\partial e} * h * T_A + [N]_e * \frac{q_v}{c_b \rho} + \frac{1}{\Delta t} * [NN]_e * \{T_i\}_{t-1}. \end{aligned} \quad (35)$$

Enačbo (35) preuredimo in desno stran, na kateri so samo znane količine, označimo kot obtežni vektor $\{F_T\}_e$:

$$\left(\alpha_{TT} * [K]_e + \frac{1}{\Delta t} * [NN]_e + h * [NN]_{\partial e} \right) * \{T_i\} + \alpha_{TC} * [K]_e * \{c_i\} = \{F_T\}_e. \quad (36)$$

V matrični obliki smo izpeljali samo prvo izmed dveh osnovnih parcialnih diferencialnih enačb (9) in (10). Ker je druga zelo podobna, jo lahko na podoben način zapišemo kot

$$\left(\alpha_{cc} * [K]_e + \frac{1}{\Delta t} * [NN]_e + \beta * [NN]_{\partial e} \right) * \{c_i\} + \alpha_{cT} * [K]_e * \{T_i\} = \{F_C\}_e, \quad (37)$$

pri čemer je

$$\{F_C\}_e = [N]_{\partial e} * \beta * c_A - [N]_e * K q_v + \frac{1}{\Delta t} * [NN]_e * \{c_i\}_{t-1}. \quad (38)$$

Če vpeljemo še naslednje oznake:

$$\begin{aligned} \left(\alpha_{TT} * [K]_e + \frac{1}{\Delta t} * [NN]_e + h * [NN_{\partial e}] \right) &= [K_T]_e, \\ \left(\alpha_{cc} * [K]_e + \frac{1}{\Delta t} * [NN]_e + \beta * [NN_{\partial e}] \right) &= [K_c]_e, \\ \alpha_{Tc} * [K]_e &= [K_{Tc}]_e, \\ \alpha_{cT} * [K]_e &= [K_{cT}]_e, \end{aligned} \quad (39)$$

lahko enačbi (36) in (37) zapišemo v bolj pregledni končni obliki:

$$[K_T]_e * \{T_i\} + [K_{Tc}]_e * \{c_i\} = \{F_T\}_e, \quad (40)$$

$$[K_c]_e * \{c_i\} + [K_{cT}]_e * \{T_i\} = \{F_c\}_e. \quad (41)$$

Tako smo prišli do sistema diskretnih algebrajskih enačb povezanega problema.

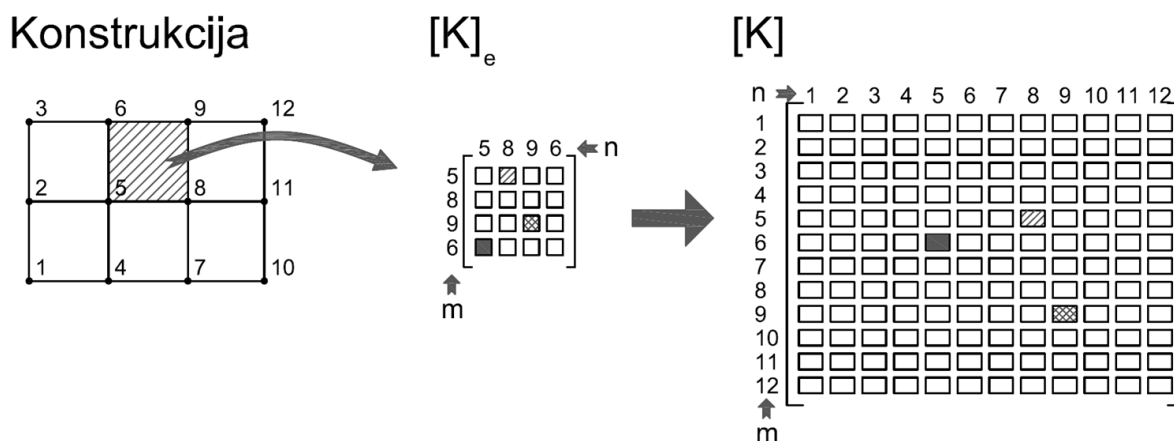
3.5 Zapis enačb za celotno konstrukcijo

Enačbi (40) in (41) sta izpeljani za področje končnega elementa, kar nakazujejo indeksi e v matrični obliki zapisa enačb. V našem primeru ima končni element 4 vozlišča, ki jih označimo s števkami od 1 do 4 v pozitivni smeri z začetkom v spodnjem levem vogalu. Glede na te oznake smo zapisali tudi interpolacijske funkcije (enačba (23)). Ker imamo togostne matrike v enačbah (40) in (41) zapisane posebej za temperaturo in koncentracijo vlage, so le-te velikosti 4×4 ; prva vrstica in prvi stolpec pripadata prvemu vozlišču KE, druga vrstica in drugi stolpec drugemu vozlišču KE itd. Vsak element te matrike ima torej številko stolpca in številko matrike, ki opisuje vpliv enega vozlišča na drugega. Ker vozlišče 1 vpliva na vozlišče 3 enako kot vozlišče 3 vpliva na vozlišče 1, sta elementa npr. v 1. vrstici in 3. stolpcu oz. 3. vrstici in 1. stolpcu enaka.

Vozlišča KE na lokalni ravni označimo s števkami od 1 do 4, medtem ko vsa vozlišča obravnavane konstrukcije na globalni ravni označimo s števkami od 1 do n , pri čemer je n število vseh vozlišč. Četudi je označevanje vozlišč lahko naključno, se zaradi preglednosti in uporabnosti rezultatov poslužujemo sistematičnih označevanj, ki pa se kljub vsemu lahko razlikujejo drug od drugega. Na globalni ravni tako vozlišča KE nimajo več zaporednih števil od 1 do 4, pač pa jih zamenjajo druga števila (za potrebe razlage jih označimo z i, j, k in l). V enakem vrstnem redu, kot bodo označena vozlišča konstrukcije, bomo dobili tudi rezultate za temperaturo oz. koncentracije vlage v vozliščih. Vozlišču z oznako m bo pripadala vrednost temperature T_m in vrednost koncentracije vlage c_m .

Iz lokalnih matrik reda 4×4 sestavimo globalno matriko reda $n \times n$ tako, da za vsak končni element izračunamo lokalno matriko, nato pa njene člene razporedimo v globalno togostno matriko tako, da člen, ki je v 1. vrstici in 3. stolpcu lokalne matrike KE z vozlišči i, j, k in l , prepisemo (oz. prištejemo) v i -to vrstico in k -ti stolpec globalne togostne matrike.

Za lažje razumevanje sestavljanja globalne togostne matrike si bomo celoten postopek pogledali na preprostem primeru, ki ga prikazuje slika 10:



Slika 10: Generiranje globalne togostne matrike.

V tem primeru gre za konstrukcijo, ki jo sestavlja šest štiri-vozliščnih končnih elementov. Izbrani končni element določajo vozlišča 5, 8, 9 in 6 (gledano v pozitivni smeri, začenši s spodnjim levim vozliščem). Vrednosti, ki so v lokalni matriki tega končnega elementa, torej pripadajo tem vozliščem. Na sliki so nad skico matrike izpisane številke vrstic (m) in stolpcev (n), s pomočjo katerih vemo, na katero mesto moramo v globalni matriki vpisati vrednost iz lokalne matrike. Tako vpišemo člen iz četrte vrstice in prvega stolpca lokalne matrike označenega KE v šesto vrstico in peti stolpec globalne matrike. Nadalje člen, ki je v lokalni matriki v tretji vrstici in tretjem stolpcu, vpišemo v deveto vrstico in deveti stolpec globalne matrike. Enako naredimo še z ostalimi štirinajstimi členi lokalne matrike. Po enakem vzorcu se lotimo še ostalih petih končnih elementov konstrukcije, prikazane na sliki 10, in dobimo globalno matriko konstrukcije reda 12×12 .

Na ta način dobimo iz lokalnih matrik $[K_T]_e$, $[K_{Tc}]_e$, $[K_{cT}]_e$ in $[K_c]_e$ globalne matrike $[K_T]$, $[K_{Tc}]$, $[K_{cT}]$ in $[K_{cc}]$. Pri pretvorbi lokalnih vektorjev $\{F_T\}_e$ oz. $\{F_c\}_e$ v globalna vektorja $\{F_T\}$ oz. $\{F_c\}$ postopamo po enakem principu, le da se preurejanje odvija le v eni dimenziji.

3.6 Reševanje sistema enačb

Z globalizacijo sistema smo tako prišli do naslednjih enačb:

$$[K_T] * \{T_i\} + [K_{Tc}] * \{c_i\} = \{F_T\}, \quad (42)$$

$$[K_c] * \{c_i\} + [K_{cT}] * \{T_i\} = \{F_c\}. \quad (43)$$

Ker sta v enačbah (42) in (43) edini neznani spremenljivki vektorja $\{T_i\}$ in $\{c_i\}$, je sistem preprosto rešljiv. Ravnamo namreč enako kot pri linearnem sistemu dveh enačb z dvema neznankama. Najprej enačbi združimo in ju zapišemo v skupni matrični enačbi:

$$\begin{bmatrix} K_T & K_{Tc} \\ K_{cT} & K_c \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} T_i \\ c_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_T \\ F_c \end{Bmatrix}. \quad (44)$$

V primeru, ko nimamo predpisanih temperatur in/ali koncentracije vlage v nobenem izmed vozlišč, imamo podano celotno desno stran enačbe (44), kar pomeni, da lahko vrednosti neposredno izračunamo kot

$$\begin{Bmatrix} T_i \\ c_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_T & K_{Tc} \\ K_{cT} & K_c \end{bmatrix} \setminus \begin{Bmatrix} F_T \\ F_c \end{Bmatrix}. \quad (45)$$

Nasprotno je v primeru, ko imamo predpisano temperaturo in/ali koncentracijo vlage v vsaj enem vozlišču, potrebna kondenzacija matrik iz enačbe (44). S kondenzacijo sistem reduciramo in izračunamo le tiste količine, ki nam v vektorjih $\{T_i\}$ in $\{c_i\}$ niso znane. Za lažje razumevanje je postopek razložen ob primeru.

Za konstrukcijo z n vozlišči je prva matrika v enačbi (44) reda $2n \times 2n$ (to matriko označimo s $[K]$). Zgornjih n elementov v vektorju neznanih količin (ki ga označimo s $\{Tc\}$) predstavlja temperaturo v vozliščih, spodnjih n elementov pa predstavlja koncentracijo vlage v vozliščih. V obtežnem vektorju $\{F\}$ predstavlja zgornjih n elementov obtežni vektor, ki smo ga pridobili iz enačbe za temperature, spodnjih n elementov pa vektor, ki je na desni strani enačaja v enačbi za koncentracijo vlage.

Privzemimo, da imamo predpisano temperaturo v vozliščih i in p ter predpisano koncentracijo vlage v vozliščih j in r . Omenjene znane količine so na sliki 11, ki predstavlja enačbo (44), pobarvane modro, zeleno so pobarvane količine v matriki $[K]$, rumeno pa količine v vektorju $\{F\}$, ki pripadajo tem vrednostim.

Če torej še enkrat zapišemo enačbo, dobimo naslednjo obliko:

$$\begin{bmatrix} K_{ZZ} & K_{ZN} \\ K_{NZ} & K_{NN} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} T_{cZ} \\ T_{cN} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_Z \\ F_N \end{Bmatrix}. \quad (46)$$

Iz spodnjih delov matrik iz enačbe (46) lahko sestavimo enačbo

$$[K_{NZ}] * \{T_{cZ}\} + [K_{NN}] * \{T_{cN}\} = \{F_N\}, \quad (47)$$

kjer je edina neznana količina vektor $\{T_{cN}\}$, ki predstavlja vse neznanke v enačbi. Enačbo (47) preuredimo s pomočjo pravil matričnega računa in dobimo izraz za neznani vektor:

$$\{T_{cN}\} = [K_{NN}] \setminus (\{F_N\} - [K_{NZ}] * \{T_{cZ}\}). \quad (48)$$

Zadnji korak, ki je še potreben za dokončanje računa, je vrnitev predpisanih temperatur na zaporedna mesta, ki jim pripadajo v vektorju $\{T_c\}$. Tako dobimo celoten vektor temperatur in koncentracije vlage v izbranih vozliščih obravnavanega prereza.

4 IZDELAVA PROGRAMSKE KODE

Z izpeljanimi enačbami končnega elementa lahko določimo temperaturo in koncentracijo vlage v izbranih točkah konstrukcije. Uporaba komercialnih programov v te namene je sicer dobrodošla, saj so programi napisani za splošno uporabo in optimizirani za kar najhitrejše delovanje. Kljub vsemu pa ima uporaba komercialnih programov veliko pomanjkljivost – ne vemo namreč, kako program računa, slepo zaupanje programu pa ni na mestu, kadar za izvedene izračune nosimo določeno odgovornost. V ta namen je bil v programskem okolju MATLAB (v povezavi s programom MS Excel) za potrebe diplomske naloge razvit preprost program za temperaturno-vlažnostno analizo pravokotnih prereзов. Ta program je predstavljen v nadaljevanju.

4.1 Podajanje parametrov

Podajanje parametrov neposredno v MATLAB je sicer mogoče, vendar pa lahko to zaradi veliko podatkov postane nepregledno. Zaradi tega parametre raje podamo v programu MS Excel, datoteko shranimo v obliki .xlsx in nato podatke iz .xlsx datoteke avtomatsko uvozimo v MATLAB pred začetkom izračuna. V izpisu 1 je prikazan način podajanja parametrov v vnaprej pripravljeno datoteko v programu MS Excel. Poleg parametrov, ki jih potrebujemo za izračun temperatur in koncentracije vlage, je možnost podajanja tudi parametrov za mehaniko, ki so namenjeni kasnejšemu razvijanju programa.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1							ROBNI POGOJI MEHANIKA					HIDRATACIJA			
2		NOSILEC					Podprti robovi (1 podprt, 0 prost)								
3		Dolžina		2 m			Levi rob		0			Hidratacija	0	Brez	
4		Višina		1 m			Desni rob		0						
5		Debelina		1 m			Spodnji rob		0			Vpliv hidratacije na vlago			
6							Zgornji rob		0			K_vlaga	3,00E-10	m3/l	
7		Število KE													
8		Smer x		3											
9		Smer y		2											
10															
11		FIZIKALNI PARAMETRI					ROBNI POGOJI TEMPERATURA					ROBNI POGOJI VLAGA			
12		Gostota		2340	kg/m3		Temperatura okolja - prestop 0, če je izolirano					Vlaga okolja - prestop 0, če je izolirano			
13		Top kapaciteta		1000	J/kgK		Temperatura okolja levo		303	K		Vlaga okolja levo		0,02071	m3/m3
14		k_TT		1,75E+00	W/mK		Koef temp. prestopa levo		6	W/m2K		Koef vlaž. prestopa levo		2,78E-08	m/s
15		k_Tc		219,375	W/mK		Temperatura okolja desno		303	K		Vlaga okolja desno		0,02071	m3/m3
16		k_cT		0,00E+00	m2/sK		Koef temp. prestopa desno		6	W/m2K		Koef vlaž. prestopa desno		2,78E-08	m/s
17		k_cc		2,50E-09	m2/s		Temperatura okolja zgoraj		303	K		Vlaga okolja zgoraj		0,02071	m3/m3
18		EI modul		3,00E+10	N/m2		Koef temp. prestopa zgoraj		6	W/m2K		Koef vlaž. prestopa zgoraj		2,78E-08	m/s
19		Poisson		0,2			Temperatura okolja spodaj		303	K		Vlaga okolja spodaj		0,02071	m3/m3
20							Koef temp. prestopa spodaj		0	W/m2K		Koef vlaž. prestopa spodaj		0	m/s
21		ZAČETNI POGOJI					Robovi in vogali s konstantno temperaturo					Robovi in vogali s konstantno vlago - 0, če c ni konst			
22		T začetne mešanice		293	K		- 0 če T ni konst					Vlaga levi rob		0	m3/m3
23		c začetne mešanice		0,0704	m3/m3		Temperatura levi rob		0	K		Vlaga desni rob		0	m3/m3
24							Temperatura desni rob		0	K		Vlaga zgornji rob		0	m3/m3
25							Temperatura zgornji rob		0	K		Vlaga spodnji rob		0	m3/m3
26							Temperatura spodnji rob		0	K		Vlaga zgornji levi vogal		0	m3/m3
27		ČAS					Temp zgornji levi vogal		0	K		Vlaga spodnji levi vogal		0	m3/m3
28		Korak		3600	s		Temp spodnji levi vogal		0	K		Vlaga zgornji desni vogal		0	m3/m3
29		Obdobje analize		10	dni		Temp zgornji desni vogal		0	K		Vlaga spodnji desni vogal		0	m3/m3
							Temp spodnji desni vogal		0	K					

Izpis 1: Primer podajanja parametrov.

Parametri v izpisu 1 definirajo konstrukcijo sestavljeno iz šestih končnih elementov, ki jo bomo uporabili za nazorno predstavitev delovanja programa.

Dane parametre shranimo v mapo, kjer je shranjen program, ki ga bomo napisali v MATLAB-u. Prvi del programa uvozi podatke, ki smo jih shranili v Excelovo datoteko v MATLAB. Primer uvažanja parametrov je podan v izpisu 2.

```
%% P1
%Dolžina nosilca Lx
Lx=xlsread('Parametri','List1','C3');
%Višina nosilca Hy
Hy=xlsread('Parametri','List1','C4');
%Debelina nosilca d
dz=xlsread('Parametri','List1','C5');
%Število KE v smeri x
KE_Lx=xlsread('Parametri','List1','C8');
%Število KE v smeri y
KE_Hy=xlsread('Parametri','List1','C9');
```

Izpis 2: Uvažanje parametrov iz Excela v MATLAB.

Prvi del programa torej spremenljivki Lx priredi vrednost, ki jo najde v Excelovi datoteki z imenom Parametri.xlsx na listu List1 v celici C3.

Vse uvožene parametre ta program shrani v tri ločene datoteke s parametri. Časovni korak in čas trajanja konstrukcije shranimo v datoteko P0_Cas.mat, podatke, ki zadevajo mehaniko (in jih v okviru te diplomske naloge ne bomo uporabili) shranimo v datoteko P0_Podpore.mat, vse ostale podatke pa shranimo v datoteko P0_Parametri.mat.

4.2 Generiranje geometrije

Naslednji del programa razdeli konstrukcijo na podobmočja (končne elemente) tako, da definira točke na vogalih KE in uredi četverice točk, tako da tvorijo pravokotne končne elemente.

Najprej je treba določiti število vozlišč konstrukcije in dimenzije končnih elementov, kot je to prikazano v izpisu 3.

```
n=(1+KE_Lx)*(1+KE_Hy); %Število vozlišč
dx=Lx/KE_Lx;           %Dimenzija x KE
dy=Hy/KE_Hy;           %Dimenzija y KE
```

Izpis 3: Število vozlišč n in dimenzije KE dx in dy

Ko imamo vse potrebne parametre, lahko nadaljujemo z generiranjem mreže točk v naši konstrukciji. Pri tem si pomagamo z ukazom »*meshgrid*«, ki nam določi vse koordinate točk, ki jih kasneje priredimo v bolj uporabno obliko in jih s »*for*« zanko uredimo v matriko parov. Tem parom dodamo še ime oz. globalno oznako točke. V izpisu 4 je prikazan celoten mehanizem izdelave matrike z oznakami (imeni) in koordinatami vozlišč.

```
[X,Y]=meshgrid(0:dx:Lx,0:dy:Hy);      %Matriki X in Y sta matriki x in y
                                       %koordinat vseh točk

xx=X'; %zaradi nepravilnega izpisa in izrisa točk matriki transponiramo
yy=Y'; %in tako dobimo pravilno obliko konstrukcije

%s for zanko oblikujemo matriko urejenih dvojic, ki predstavljajo
koordinat točk v konstrukciji

for i=1:(KE_Lx+1)
    for j=1:(KE_Hy+1)

        ij=(i-1)*(KE_Hy+1)+j;

        KoordVozlisc(ij,:)=[xx(i,j),yy(i,j)];

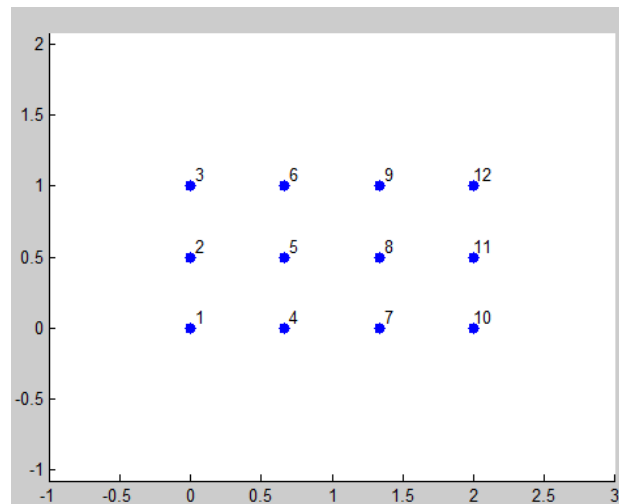
    end
end

ime_voz=1:n;      %Poimenujemo vozlišča

%Tvorimo matriko, ki ji dodamo še ime vozlišč
Vozliscs=[ime_voz',KoordVozlisc];
```

Izpis 4: Generiranje matrike z imeni in koordinatami vozlišč.

Matrika »*Vozliscs*« je ena izmed dveh matrik, ki ju generiramo s programom P1_izris_tock.m. Če točke, ki smo jih zapisali v to matriko, narišemo, dobimo stanje prikazano na sliki 13:



Slika 13: Primer izrisa točk (vozlišč) konstrukcije.

Naslednja pomembna matrika, ki jo bomo v tem delu programa generirali, je matrika urejenih četveric točk, ki definirajo končne elemente.

Končne elemente sestavljamo tako, da je prvi v spodnjem levem vogalu konstrukcije, naslednji nad njim, zadnji pa v zgornjem desnem vogalu konstrukcije. Iz slike 13 lahko vidimo, da je prvi element definiran z vozlišči (1, 4, 5, 2), drugega omejuje četverica točk (2, 5, 6, 3) itd. Vidimo, da si vozlišča v naslednjih KE sledijo po nekem vzorcu. Tu nastane problem že pri naslednjem elementu, saj ga ne definirajo točke (3, 6, 7, 4), ampak se ta urejena četverica preskoči in je naslednja, ki pripada tretjemu KE (4, 7, 8, 5). Kljub temu pa nam princip takega vzorca koristi. Zato najprej sestavimo napačno matriko, ki vsebuje tudi četverice, ki jih kasneje izbrišemo. Izvedemo dve »for« zanki – z eno sestavimo preveliko matriko, z drugo pa odstranimo napačne četverice, kot je to pokazano z izpisom 5.

```
nKE_nap=KE_Lx*(KE_Hy+1); %Določimo napačno število končnih elementov
%Tvorimo urejene četverice za vse KE (tudi napačne)
for o=1:nKE_nap

    NodesKE=[o;o+(KE_Hy+1);o+(KE_Hy+2);o+1];
    MatKE_nap(o,:)=NodesKE;
end

%Odstranimo napačne četverice(od zadaj naprej, da ne zmešamo zaporedja)
for p=KE_Lx:-1:1
    r=(KE_Hy+1)*p;
    MatKE_nap(r,:)=[];
end

%Zapišemo matriko MatKE kot pravilno matriko urejenih četveric
MatKE=MatKE_nap;
```

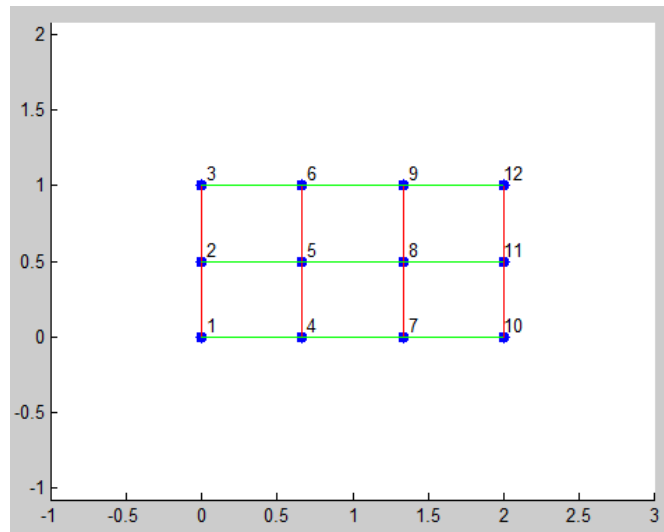
Izpis 5: Generiranje matrike urejenih četveric točk.

Matrika »*MatKE*« je torej druga matrika, ki smo jo izračunali s tem delom programa, in je ključna za nadaljnje izračune. Poleg matrik »*MatKE*« in »*Vozlisca*« je treba za nadaljnjo uporabo shraniti še parametre, ki opisujejo število vozlišč, dimenzije končnih elementov in števila končnih elementov v obeh dimenzijah.

4.3 Generiranje lokalnih matrik KE in globalnih matrik konstrukcije

Z izdelavo matrik v prejšnjem podpoglavju smo pripravili vse potrebno za izdelavo lokalnih matrik, ki smo jih izpeljali v razdelku 3.4.3. Produkt naslednjega dela programske kode so lokalne in globalne matrike problema.

Za izpeljavo matrik si najprej na sliki 14 pogledimo obliko končnih elementov, na katere smo konstrukcijo razdelili.



Slika 14: Konstrukcija razdeljena na končne elemente.

Čeprav bi bilo glede na naravo problema bolje, da bi bila mreža končnih elementov na robovih gostejša, v notranjosti pa redkejša (na robovih je spreminjanje temperature in koncentracije vlage bolj izrazito kot v notranjosti), smo zaradi lažje obvladljivosti izdelali enakomerno mrežo končnih elementov. Tako so vsi KE enakih dimenzij, kar pomeni, da so tudi lokalne matrike vseh KE enake. Tako izpeljemo le eno matriko in jo uporabimo za vse elemente.

Za izpeljavo ne potrebujemo osnovnih oblikovnih funkcij, podanih v enačbi (23), pač pa njihove odvode. Z izpisom 6 je podan prikaz generiranja matrike odvodov oblikovnih funkcij.

```

syms x y a b

N1=(x-dx) * (y-dy) / (dx*dy); %Oblikovne funkcije
N2=- (x) * (y-dy) / (dx*dy);
N3= (x) * (y) / (dx*dy);
N4=- (x-dx) * (y) / (dx*dy);

Ni=[N1,N2,N3,N4]; %Matrika oblikovnih funkcij
Nj=Ni.';

dNi_x=diff(Ni,x); %Odvodi matrike oblikovnih funkcij
dNi_y=diff(Ni,y);
dNj_x=diff(Nj,x);
dNj_y=diff(Nj,y);

```

Izpis 6: Oblikovne funkcije in matrika odvodov oblikovnih funkcij.

V numerični analizi je zaradi svoje hitrosti in neodvisnosti od pravih oblik integracijskega območja praviloma uporabljena numerična integracija. V našem primeru imamo opravka s pravokotno obliko končnih elementov. Ker so vsi KE konstrukcije enaki, je treba generirati le eno lokalno matriko KE. Zaradi pravokotne oblike končnih elementov in potrebe po eni sami integraciji lahko po območju končnega elementa integriramo tudi analitično.

Prvi integral enačbe (27) lahko z dobljenimi matrikami odvodov izračunamo na precej enostaven način z uporabo analitičnega integrala, kot je prikazano z izpisom 7.

```
%Zapišemo integrand
fun_K_T=dz*(dNj_x*dNi_x+dNj_y*dNi_y);

%Integriramo ga po območju končnega elementa
K_T_Lok=double(int(int(fun_K_T,x,0,dx),y,0,dy));
```

Izpis 7: Integracija in izdelava lokalne matrike KE.

Tako smo dobili lokalno matriko. Matrika še ni pomnožena s faktorji k_T, k_{TC}, k_{CT} oz. k_C , saj so to konstantni koeficienti, s katerimi lahko namesto lokalne matrike kasneje pomnožimo globalno matriko in si tako prihranimo delo.

Globalno matriko sestavimo s funkcijo, ki smo jo zapisali posebej za izdelavo globalne matrike konstrukcije. Kot parametre ta funkcija potrebuje lokalno matriko KE in matriko urejenih četveric točk, ki smo jo izdelali v drugem delu programa (opisanem v poglavju 4.2). Funkcija za izdelavo globalne matrike iz lokalnih matrik velikosti 4×4 je predstavljena v izpisu 8.

```
function [K_lps] = F_genK_lps(K_Lok_lps,MatKE)

nVoz=max(MatKE(:)); %Preberemo število vozlišč
nKE=size(MatKE,1); %Preberemo število končnih elementov
C=sparse(nVoz,nVoz); %Za zapis uporabimo sparse matrike, porabijo
%manj spomina za shranjevanje velikih matrik

for k=1:nKE
    Akt_KE=MatKE(k,:);
    A=zeros(16,3);

    for i=1:4 %Za vsak KE zapišemo komponente njegove lokalne
        for j=1:4 %matrike na pravilno mesto v globalni matriki
            n=(i-1)*4+j;
            A(n,:)=[Akt_KE(i),Akt_KE(j),K_Lok_lps(i,j)];
        end
    end
end

B=sparse(A(:,1),A(:,2),A(:,3),nVoz,nVoz);
C=C+B;
end
K_lps=C;
```

Izpis 8: Funkcija za izdelavo globalne matrike konstrukcije.

Z izdelano funkcijo je generiranje globalne matrike preprosto. Ko jo izdelamo, jo pomnožimo s faktorji k_T, k_{Tc}, k_{cT} oz. k_c . Tako dobimo vse štiri togostne matrike za difuzijo, ki so prikazane v izpisu 9. To sicer še niso celotne togostne matrike, ki so zapisane na levi strani enačbe (42), saj je matrikam, ki smo jih izračunali s tem delom programa, treba dodati še matriki, ki opisujeta konvekcijo, in matriki, ki zajemata časovno komponento.

```
%S pomočjo funkcije F_genK_lps generiramo globalno matriko
K_T=F_genK_lps(K_T_Lok,MatKE);

load('P0_Parametri','k_TT','k_Tc','k_cT','k_cc') poiščemo koeficiente

%Zapišemo vse štiri matrike, ki so posledica kondukcije
K_TT=K_T*k_TT;
K_Tc=K_T*k_Tc;
K_cT=K_T*k_cT;
K_cc=K_T*k_cc;
```

Izpis 9: Generiranje vseh štirih globalnih matrik kondukcije.

V tem delu programa lahko iz pripravljenih matrik oblikovnih funkcij izračunamo tudi matriko, ki zajema časovni vpliv na temperaturo oz. koncentracijo vlage. Člen $\frac{1}{\Delta t} * [NN_{KE}]$ dobimo kot integral zmnožka osnovne in transponirane matrike oblikovnih funkcij, ki ga delimo s časovnim korakom (prikazano v izpisu 10), podanim v prvem delu programa kot parameter za izračun.

```
%% P1
NN_Lok=double(int(int(Nj*Ni,x,0,dx),y,0,dy));
NN=F_genK_lps(NN_Lok,MatKE);

load('P0_Cas','dt')
NN_t=NN/dt;
```

Izpis 10: Časovna komponenta togostne matrike.

Ista matrika nastopa tudi na desni strani enačb (36) in (37), le da je tam pomnožena še z vektorjem temperature oz. koncentracije vlage, ki je rezultat prejšnjega izračuna.

4.4 Matrike robnih in začetnih pogojev

Matrike robnih pogojev ne podamo glede na končne elemente in jih nato sestavimo v globalno matriko, pač pa jih podajamo glede na celotno konstrukcijo oz. glede na celotne njene robove. Zato je potreben četrti del programa, ki izračuna matrike, ki opisujejo stanje na robovih in stanje na začetku analize. V ta namen je treba najprej napisati matrike, ki vsebujejo indekse točk, ki pripadajo določenemu robu (izpis 11).

```
%Levi rob - matrika vozlišč s pripadajočimi koordinatami
LR=Vozlisca (Vozlisca (:,2)==xmin, :);
%Desni rob
DR=Vozlisca (Vozlisca (:,2)==xmax, :);
%Spodnji rob
SR=Vozlisca (Vozlisca (:,3)==ymin, :);
%Zgornji rob
ZR=Vozlisca (Vozlisca (:,3)==ymax, :);
```

Izpis 11: Matrike vozlišč na robovih.

Za primer je prikazana izdelava matrike $[NN_{ROB}]$, ki smo jo definirali v enačbi (34). Najprej definiramo oblikovni funkciji za enega izmed robov (zgornji in spodnji rob ter levi in desni rob imata enaki oblikovni funkciji). Najprej sestavimo lokalno matriko za en del (linijski končni element) roba, nato pa podobno kot pri togostnih matrikah s pomočjo funkcije izdelamo globalno matriko istega roba. Celoten postopek je prikazan v izpisu 12.

```
%% NN MATRIKI LEVI IN DESNI ROB

syms y

N1_y=(dy-y)/dy;      %Oblikovni funkciji
N2_y=y/dy;

N_y=[N1_y,N2_y];     %Matrika oblikovnih funkcij

NN_y=N_y.'*N_y;      %Zmnožek matrik in integracija zmnožka

M_LR_DR=int(NN_y,y,0,dy);
Lok_M_LR_DR=double(M_LR_DR);

G_M_DR=F_glob_B(DR,Lok_M_LR_DR,n); %Izdelava globalne matrike s funkcijo
G_M_LR=F_glob_B(LR,Lok_M_LR_DR,n); %F_glob_B, ki deluje podobno kot
                                     %F_genK_lps pri togostnih matrikah
```

Izpis 12: NN matriki za levi in desni rob.

Na enak način generiramo še matriki za zgornji in spodnji rob, nato pa vse štiri matrike seštejemo, da dobimo globalno matriko na robu.

Začetne pogoje je treba definirati kot stolpca n elementov, ki so med seboj enaki. Njihova vrednost je enaka začetni vrednosti temperature oz. koncentracije vlage, ki smo ju v začetku podali v program. To naredimo tako, da stolpec, ki ga sestavlja n enic, pomnožimo z začetno vrednostjo temperature oziroma koncentracije vlage, kot je prikazano z izpisom 13.

```
T_predhodna=ones(n,1)*T_zac;
c_predhodna=ones(n,1)*c_zac;
```

Izpis 13: Stolpca začetnih pogojev.

4.5 Izračun temperature in koncentracije vlage v posameznih časovnih korakih

V zadnjemu delu programa smo uporabili vse podatke, ki smo jih izračunali z ostalimi deli (obravnavanimi v poglavjih 4.1 do 4.4) in se lotili izračuna temperature in koncentracije vlage po prerezu. Ta program je sestavljen iz treh delov:

- združevanja matrik,
- kondenzacije matrik ter
- zanke za izračun iskanih količin.

4.5.1 Združevanje matrik

V razdelku 4.3 smo definirali štiri globalne togostne matrike, vendar pa smo že opozorili, da dve izmed teh nista dokončni. Treba jima je je namreč prišteti še globalno matriko, ki zajema vpliv časa, ter matriko, ki zajema vpliv robnih pogojev. Seštevanje matrik izvedemo, kot je prikazano z izpisom 14.

```
%% Matriki K_T in K_c
K_T=K_TT+G_M_T_Rob+NN_t_T;
K_c=K_cc+G_M_c_Rob+NN_t_c;
```

Izpis 14: Združevanje matrik.

Tudi na desni strani je treba sešteti matrike, vendar je pri tem potrebna pazljivost, saj imamo v členih $\{F_T\}$ in $\{F_c\}$ člene, ki se v vsakem časovnem koraku spremenijo. V $\{F_T\}$ in $\{F_c\}$ sta člena, ki zajemata vpliv hidratacije in časa. Zaradi tega matriko združujemo znotraj zanke za izračun količin v posameznih korakih.

4.5.2 Kondenzacija matrik

Za kondenzacijo togostnih matrik moramo najprej združiti togostne matrike, pridobljene razdelku 4.3 in v razdelku 4.5.1. Celotno togostno matriko dobimo na sledeč način (izpis 14):

```
% CELOTNA MATRIKA K
K=[K_T,K_Tc;K_cT,K_c];
```

Izpis 15: Celotna togostna matrika.

Znane vrednosti temperatur in koncentracije vlage imamo shranjene v datotekah z robnimi pogoji. Iz teh vrednosti generiramo vektor, ki ima zapisane neničelne vrednosti na mestih

znanih temperatur in koncentracij vlage, na ostalih mestih pa so vrednosti enake nič. Indekse znanih in neznanih vrednosti dobimo s funkcijama »find« in »setdiff« (izpis 16).

```
i_z=find(Tc_0);           %indeksi znanih vrednosti  
i_n=setdiff(1:2*n,i_z);  %indeksi neznanih vrednosti
```

Izpis 16: Indeksi znanih in neznanih vrednosti.

Podmatrike iz enačbe (46) pa dobimo na način, prikazan z izpisom 17.

```
%kondenzacija matrike K  
K_ZZ=K(i_z,i_z);  
K_ZN=K(i_z,i_n);  
K_NZ=K(i_n,i_z);  
K_NN=K(i_n,i_n);  
  
Tc_Z=Tc_0(i_z);
```

Izpis 17: Kondenzacija matrike K

Neznanih temperatur in koncentracij vlage ne poznamo (te količine računamo), zato jih ne moremo izvedeti. Prav tako pa ne moremo izračunati vektorjev $\{F_Z\}$ in $\{F_N\}$, in sicer zaradi s časom spreminjajočih se členov v izračunu. Za izračun je potrebna kondenzacija matrik, ki jo izvedemo v naslednjem koraku, ko obravnavamo zanko po času.

4.5.3 Zanka za izračun neznanih količin v časovnih korakih

Kot že omenjeno, se nekateri deli matrik spreminjajo ob vsakem časovnem koraku. Zanko začnemo pri drugem koraku, saj so vrednosti v prvem koraku znane (gre za začetne vrednosti).

Prvi del, ki se s časom spreminja, je vpliv hidratacije. Tega uvozimo iz Excela, kjer smo s pomočjo enačb (1) in (2) modelirali krivulje hitrosti sproščanja hidratacijske toplote, nato pa nam program ob trenutnem času odčita vrednost hitrosti in jo uporabi pri sestavljanju vektorjev $\{F_T\}$ in $\{F_C\}$.

Drugi del matrik $\{F_T\}$ in $\{F_C\}$, ki se spremeni ob vsakem koraku, pa je časovna komponenta teh matrik, saj je ta povezana z rezultati iz prejšnjega koraka. Tudi to komponento program izračuna pri vsakem časovnem koraku in jo prišteje k ostalim komponentam vektorjev $\{F_T\}$ in $\{F_C\}$.

Naslednji korak, ki ga program izvede, je sestavljanje matrike $\{F\}$ po enakem principu, kot smo sestavljali matriko $[K]$. Nato matriko $\{F\}$ še kondenziramo in dobimo komponenti $\{F_Z\}$ in $\{F_N\}$, ki sta prikazani v enačbi (46).

Zadnje, kar je treba narediti v zanki, je izračunati $\{T_{c_N}\}$ (združen vektor temperatur in koncentracij vlage) po enačbi (48), zapisati rezultate v tabelo in pripraviti parametre za naslednji izračun. Celotna časovna zanka je prikazana z izpisom 18.

```

for i=2:nt

    %Odčitamo vrednost hidratacije pri času t

    Q_t=Q_gen_Klemczak_Barbaric(t_trenutni);

    %Sestavimo F

    F_T=Ta+NN_t_T*T_predhodna+Nj_Glob*Q_t;
    F_c=ca+NN_t_c*c_predhodna-K_vlaga*Nj_Glob*Q_t;

    F=[F_T;F_c];

    %Kondenziramo F

    F_Z=F(i_z);
    F_N=F(i_n);

    %Rešimo sistem enačb

    Tc_N=K_NN\ (F_N-K_NZ*Tc_Z);

    Tc_rez(i_z,i)=Tc_Z;
    Tc_rez(i_n,i)=Tc_N;

    t_trenutni=t_trenutni+dt;
    T_predhodna=Tc_rez(1:n,i);
    c_predhodna=Tc_rez((n+1):(2*n),i);
end

```

Izpis 18: For zanka za izračun neznank v vsakem časovnem koraku.

Na koncu rezultate zapišemo še v Excelovo datoteko, ker jih tam lažje analiziramo in pripravimo za predstavitev. Pri tem je pomembno, da datoteko z rezultati vedno izbrišemo, tako da nam ne ostanejo podatki iz prejšnjih izračunov. Postopek izbrisa stare datoteke in zapisa v novo datoteko je podan z izpisom 19.

```
if exist('Tc_rez.xlsx','file')==2      %Izbrišemo datoteko, če obstaja
    delete('Tc_rez.xlsx')
end

%Ob vsakem na novo odprtem, nas MATLAB opozori - izključimo opozorilo
warning('off','MATLAB:xlswrite:AddSheet');

%Zapišemo rezultate analize v Excelovo datoteko.
xlswrite('Tc_rez.xlsx',T_rez,'T_rez')
xlswrite('Tc_rez.xlsx',c_rez,'c_rez')
```

Izpis 19: Shranjevanje rezultatov v Excelovo datoteko.

5 REZULTATI ANALIZE

5.1 Analiza stopnje povezanosti temperature in vlage

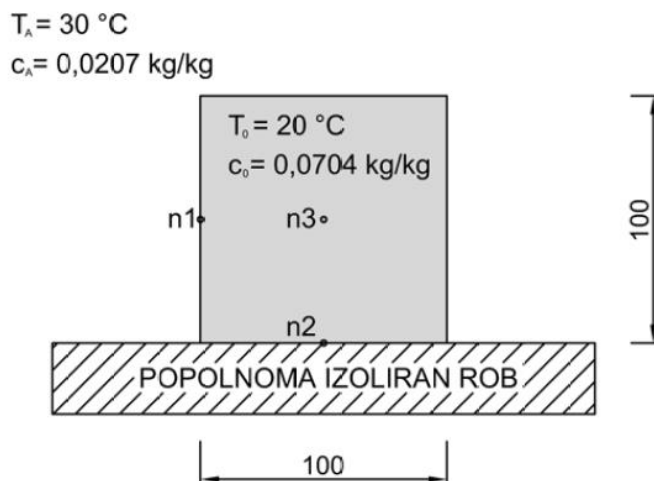
Temperaturo in koncentracijo vlage v osnovnih enačbah (9) in (10) povezujejo štirje koeficienti α_{TT} , α_{Tc} , α_{cT} in α_{cc} . V program podamo koeficiente, ki so z omenjenimi povezani na način:

$$\begin{aligned}k_{TT} &= \lambda = \alpha_{TT} \times \rho \times c_b, \\k_{Tc} &= \alpha_{Tc} \times \rho \times c_b, \\k_{cT} &= \alpha_{cT}, \\k_{cc} &= \alpha_{cc}.\end{aligned}$$

Izračuni so izvedeni za kocko strjenega betona z robom 1 m. To pomeni, da ne upoštevamo notranjega izvora toplote in ponora vlage, ki nastaneta med procesom hidratacije, saj je le-ta že zaključena. Vsi parametri, ki so v izračunih upoštevani, so podani v tabeli 4 in na sliki 15, kjer so prikazane tudi lokacije vozlišč, v katerih analiziramo časovne poteke T in c .

Tabela 4: Parametri izračuna – analiza stopnje povezanosti.

Koeficient toplotne prehodnosti	$k_{TT} = 1,75 \frac{W}{m K}$
Vpliv vlage na prehodnost temperature	$k_{Tc} = 219,375 \frac{W}{m}$ ali $k_{Tc} = 0 \frac{W}{m}$
Vpliv temperature na prehodnost vlage	$k_{cT} = 7 \times 10^{-11} \frac{m^2}{s K}$ ali $k_{cT} = 2 \times 10^{-11} \frac{m^2}{s K}$ ali $k_{cT} = 0 \frac{m^2}{s K}$
Koeficient difuzije vode	$k_{cc} = 2,5 \times 10^{-9} \frac{m^2}{s}$
Gostota betona	$\rho = 2340 \frac{kg}{m^3}$
Specifična toplota betona	$c_b = 1000 \frac{J}{kg K}$
Prestopni koeficient temperature	$\alpha_p = 6 \frac{W}{m^2 K}$
Prestopni koeficient vlage	$\beta_p = 2,78 \times 10^{-8} \frac{m}{s}$

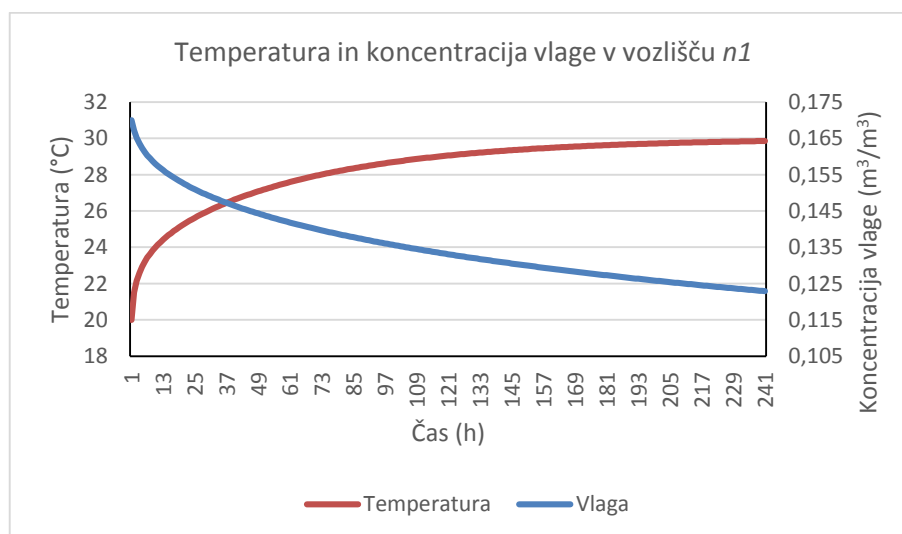


Slika 15: Geometrija ter začetni in robni pogoji – analiza stopnje povezanosti T in c .

5.1.1 Nepovezan problem – Fourierjev in Fickov zakon

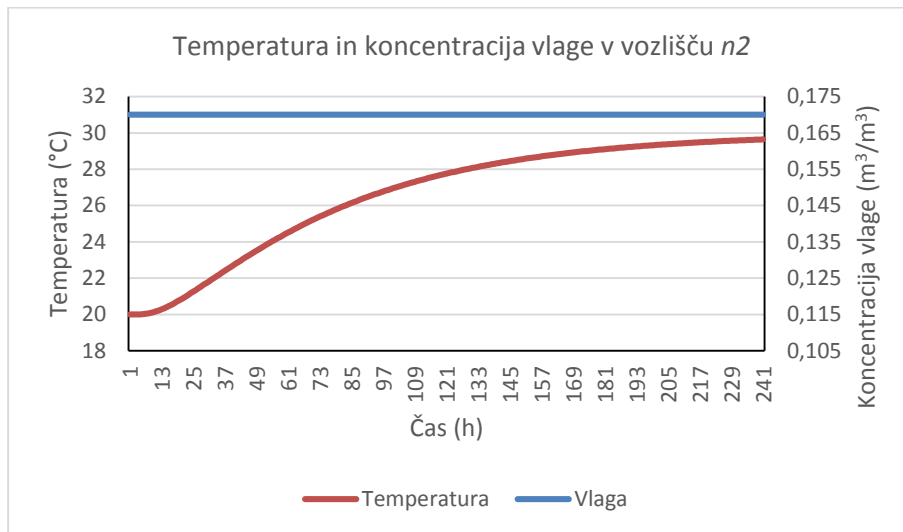
Nepovezan problem dobimo tako, da nastavimo vrednosti k_{Tc} in k_{cT} na 0. Tako pridemo do enačb, ki sta znani pod imenom Fourierjev zakon (temperaturno polje) [9] in Fickov zakon (polje vlažnosti) [11]. Rezultati izračuna v izbranih točkah so prikazani v nadaljevanju.

Na sliki 16 je prikazan časovni potek temperature in vlage v vozlišču $n1$. V tem vozlišču je prenos toplote oz. vlage najbolj izrazit na začetku analize. Sprva je hitrost pretoka toplote in vlage preko roba velika, nato pa se zaradi manjše razlike med ambientom in konstrukcijo počasi manjša.

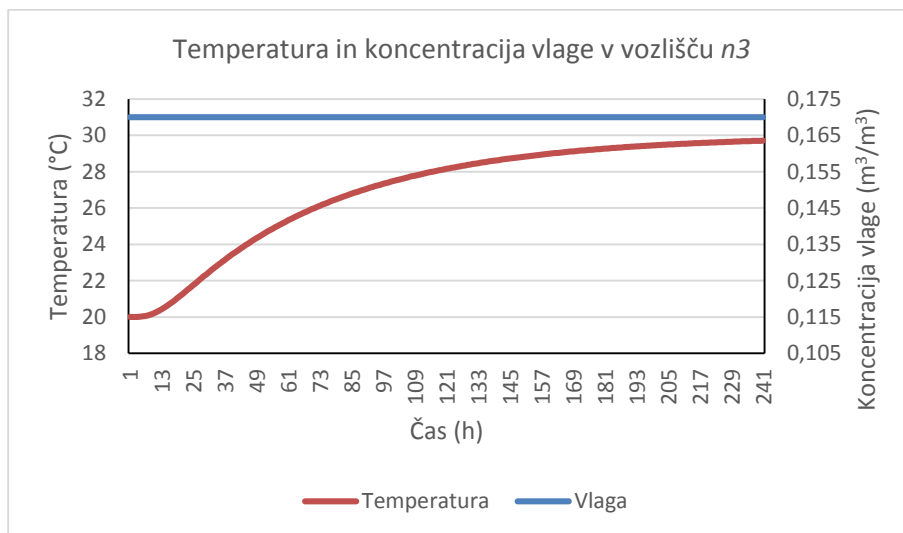


Slika 16: T in c v vozlišču $n1$ – nepovezan problem.

Sliki 17 in 18 prikazujeta rezultate v notranjih točkah konstrukcije. Koncentraciji vlage v vozliščih n_2 in n_3 sta enaki ves čas trajanja analize. Vpliv robnih pogojev namreč zaradi počasnega prehoda vlage ne seže v notranjost prereza. Tudi časovni potek temperature je v obeh vozliščih podoben, vendar pa se v prvih nekaj urah opazi večjo hitrost spreminjanja temperature v vozlišču n_3 . To je posledica bližje lege vozlišča n_3 zgornjemu robu (od stranskih robov sta obe vozlišči enako oddaljeni).

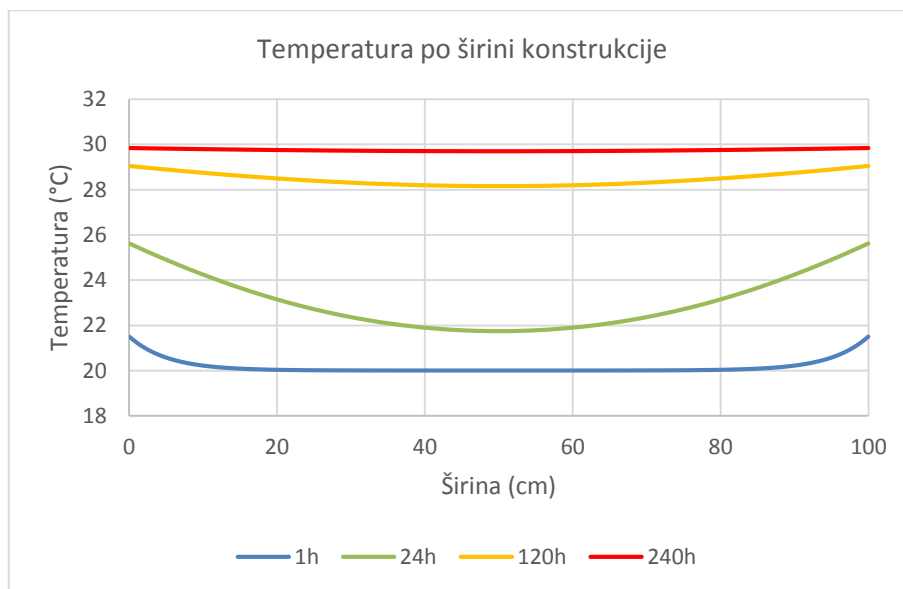


Slika 17: T in c v vozlišču n_2 – nepovezan problem.

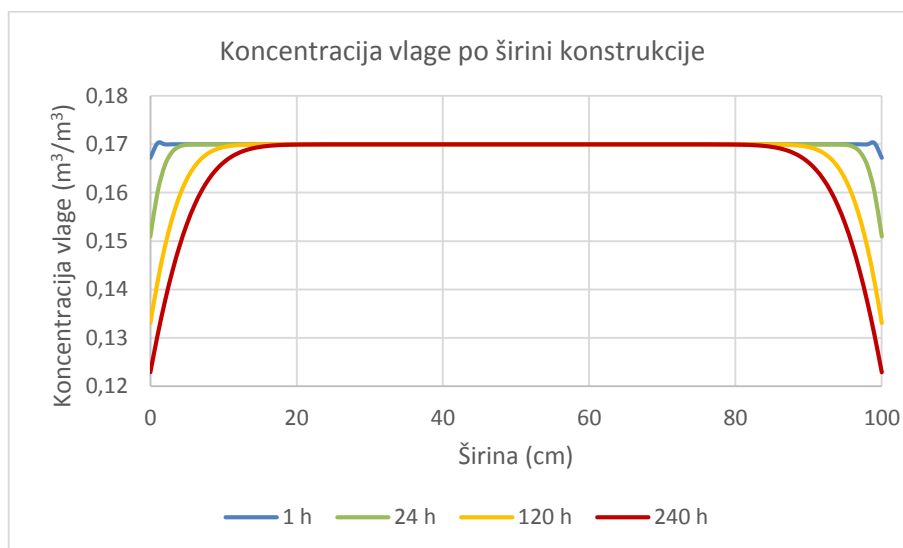


Slika 18: T in c v vozlišču n_3 – nepovezan problem.

Sliki 19 in 20 prikazujeta časovni in krajevni potek temperature in koncentracije vlage po konstrukciji na višini 0,5 m. Stacionarno stanje temperature je doseženo veliko hitreje kot v primeru koncentracije vlage. Za doseg stacionarnega stanja koncentracije vlage je potrebno veliko daljše obdobje.



Slika 19: Temperatura po širini konstrukcije - nepovezan problem.



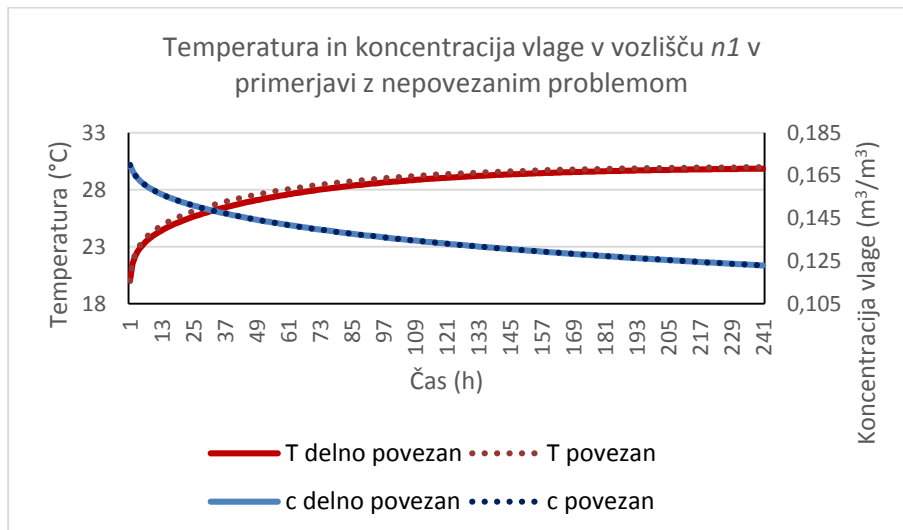
Slika 20: Koncentracija vlage po širini konstrukcije - nepovezan problem.

Izračunali smo temperature in koncentracije vlage s Fourierjevim in Fickovim zakonom. Izračune smo primerjali s programom Heatko [20], ki nam je vrnil zelo podobne rezultate, tako da lahko sklepamo o pravilnosti izračuna temperature in koncentracije vlage v primeru nepovezanega problema.

5.1.2 Delno povezan problem

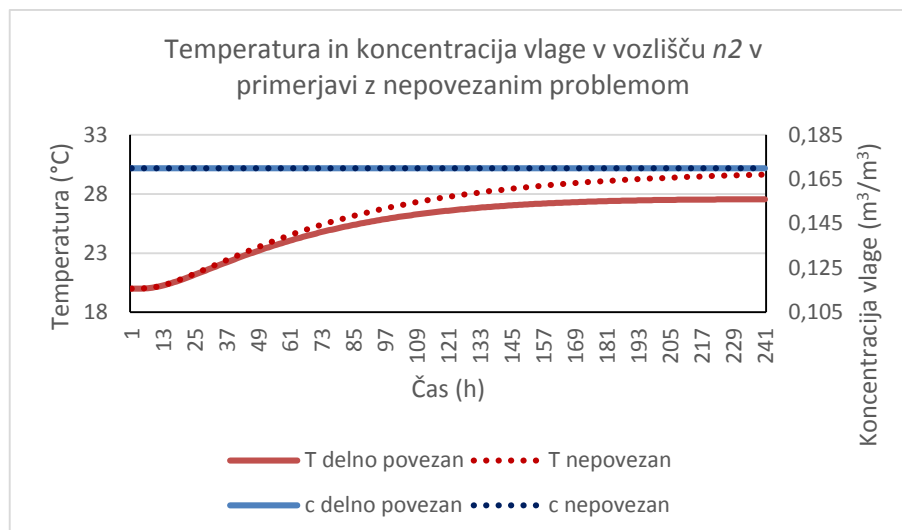
Z naslednjimi izračuni analiziramo delno povezanost problema. Upoštevamo vpliv koncentracije vlage na temperaturo, ki ga zajema koeficient k_{Tc} . Ker uporaba tega koeficienta ne vpliva na stanje vlage v prerezu (koeficient nastopa le v enačbi (9)), imamo v primeru druge enačbe še vedno Fickov zakon. To pomeni, da pričakujemo spremembo le pri poteku temperature, potek vlage pa pričakujemo nespremenjen glede na nepovezan problem.

Stanje na neizoliranem robu, ki ga prikazuje slika 21, je zelo podobno tistemu, ki smo ga videli pri nepovezanem primeru. Spreminjanje vlage je enako kot v primeru nepovezanega problema in zaradi hitrega padca vlaga nima bistvenega vpliva na spremembo temperatur. Tako lahko sklepamo, da je vpliv robnih pogojev na temperature v tej točki veliko večji od vpliva vlage.

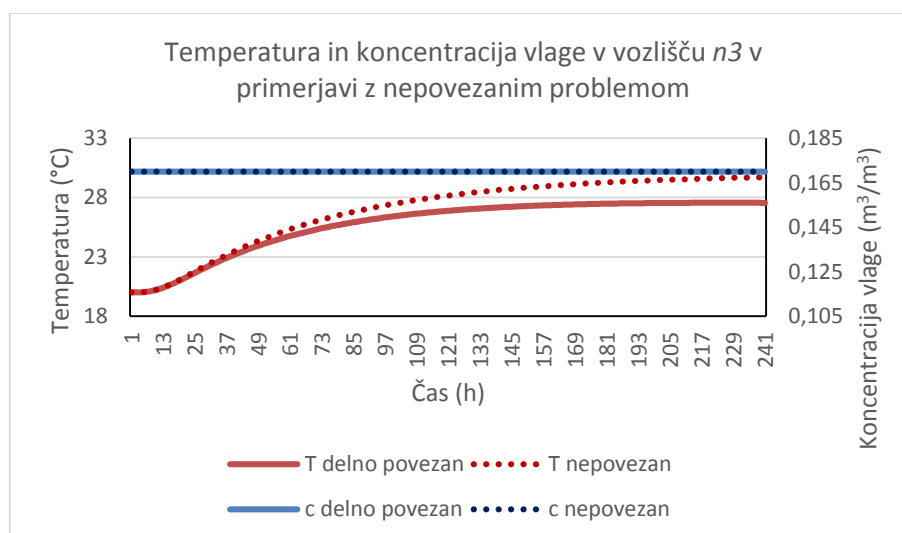


Slika 21: T in c v vozlišču $n1$ – delno povezan problem.

Naslednji sta na vrsti vozlišči $n2$ in $n3$, kjer robni pogoji v času analize tako rekoč nimajo vpliva na vlago, imajo pa vpliv na temperaturo. Koncentracija vlage torej ostaja tekom celotne analize visoka, kar pomeni, da vpliv vlage na temperaturo ne bo zanemarljiv. V vozliščih $n2$ (slika 22) in $n3$ (slika 23) ostaja vlaga celoten čas trajanja analize konstantna. V primerjavi s popolnoma nepovezanim problemom temperatura v omenjenih vozliščih sicer odstopa, vendar pa so temperature v delno povezanem problemu le do približno 2 °C nižje od vrednosti pri nepovezanem problemu.

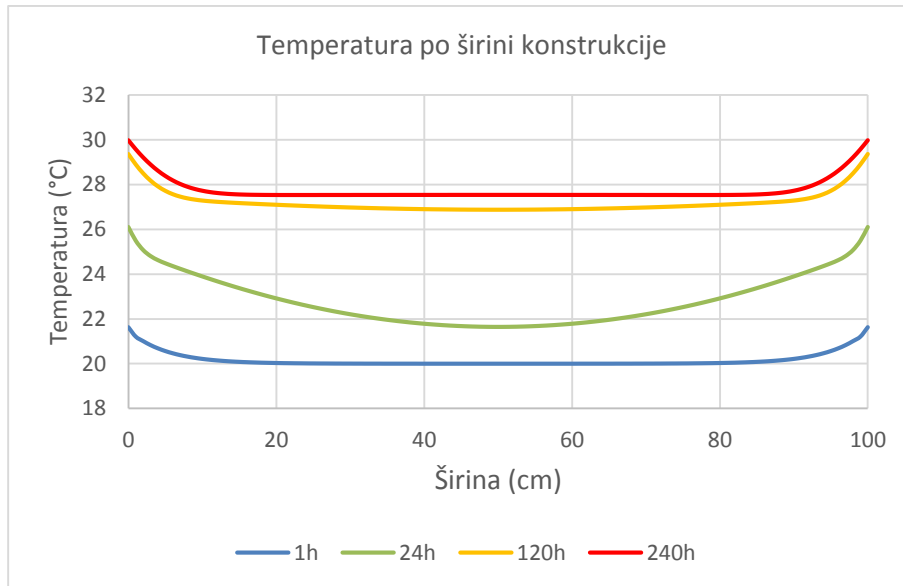


Slika 22: T in c v vozlišču n_2 – delno povezan problem.

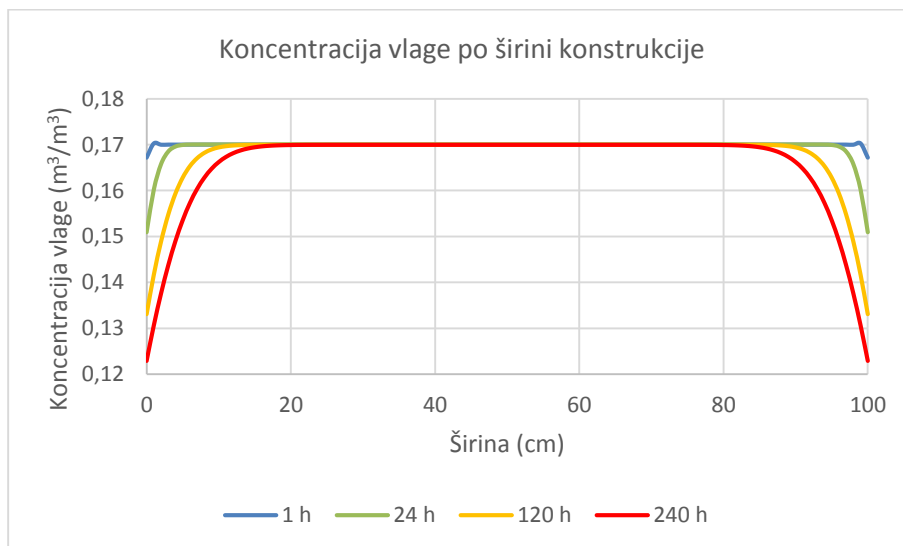


Slika 23: T in c v vozlišču n_3 – delno povezan problem.

Za dodatno primerjavo si oglejmo še potek temperature na prerezu konstrukcije 0,5 m nad tlemi. Slika 24 prikazuje drugačno stanje, kot smo ga obravnavali pri nepovezanem problemu. Za razliko od nepovezanega problema, kjer se je pri temperaturah v času analize jasno izrazilo stacionarno stanje, v primeru delno povezanega problema temu ni tako. Zaradi vpliva vlage namreč na celotnem območju višje vlažnosti vrednosti temperatur niso blizu temperaturi ambienta. Stacionarno stanje temperaturnega polja torej lahko pričakujemo šele ob vzpostavitvi stacionarnega stanja na področju koncentracije vlage, kar pa je zelo dolgotrajen proces, kar je razvidno s slike 25.



Slika 24: Temperatura po širini konstrukcije - nepovezan problem.



Slika 25: Koncentracija vlage po širini konstrukcije - delno povezan problem.

Kot smo predvidevali, koeficient k_{TC} ne vpliva na stanje vlage v prerezu, saj so bile vrednosti koncentracije vlage v izbranih vozliščih enake kot v nepovezanem problemu. Tudi temperaturno obnašanje v delno povezanem problemu se je glede na nepovezan problem spremenilo po naših pričakovanjih. Iz pričakovanih smiselnih rezultatov lahko zaključimo, da nam delna povezava temperature in vlage nudi zanesljive rezultate. Delno povezanost problema bomo torej obravnavali tudi v naslednjih analizah.

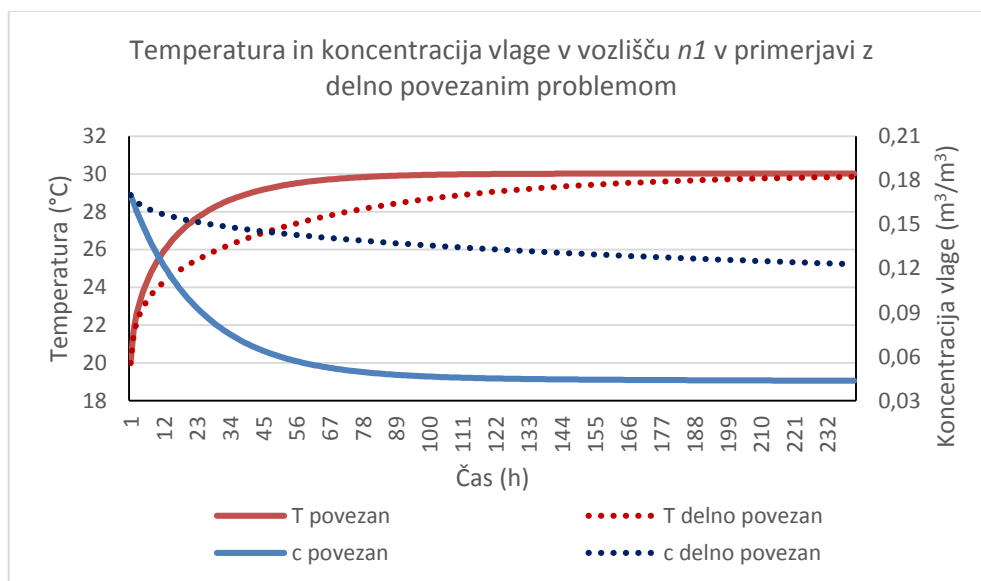
5.1.3 Popolnoma povezan problem

Izmed vseh štirih koeficientov nam je torej ostal samo še koeficient k_{cT} , ki zajema vpliv temperature na prehodnost vlage. Ker so vsi trije ostali parametri zanesljivi, v naslednjih računskih primerih uporabimo vse štiri parametre različne od nič in tako obravnavamo popolnoma povezan problem. V literaturi [12] sta podani dve vrednosti koeficienta k_{cT} . Nižja vrednost koeficienta znaša $2 \times 10^{-11} \frac{m^2}{sK}$, višja pa $7 \times 10^{-11} \frac{m^2}{sK}$. V nadaljevanju obravnavamo obe.

5.1.3.1 Nižja vrednost koeficienta k_{cT}

Kot prvi primer popolnoma povezanega problema smo izbrali nižji faktor k_{cT} . Izračunana temperatura in koncentracija vlage povezanega problema je v primerjavi z delno povezanim problemom prikazana na slikah 26 do 28.

V vozlišču $n1$ je v primeru povezanega problema, v primerjavi z delno povezanim problemom, opazen hitrejši porast temperature in hkrati hitrejši padec koncentracije vlage.

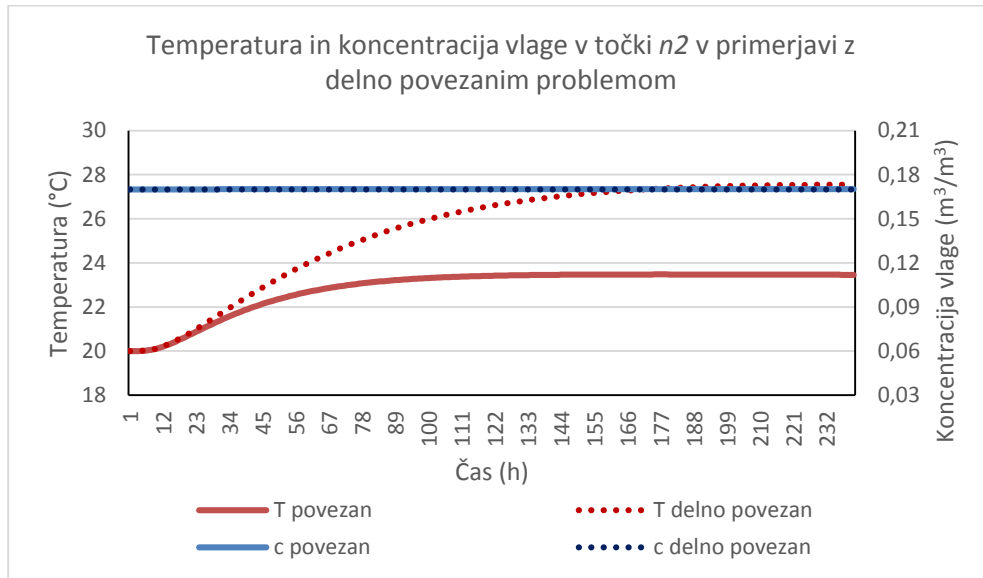


Slika 26: T in c v vozlišču $n1$ – povezan problem.

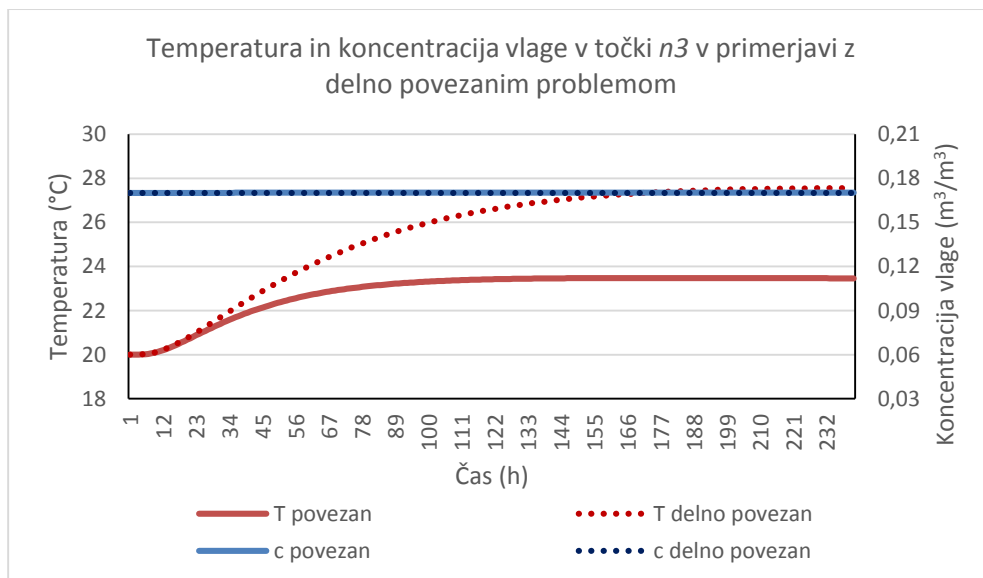
Na prvi pogled torej vpliva temperatura na vlago tako, da povišanje temperature pomeni dodatno znižanje vlage. Rezultati so sicer na prvi pogled smiselni, vendar pa je potrebno opozoriti na dejstvo, da je robni pogoj vlage približno $0,05 \frac{m^3}{m^3}$, rezultati pa kažejo padec vlage na robu pod to vrednost.

V vozliščih $n2$ in $n3$ so koncentracije vlage enake kot v primeru nepovezanega in delno povezanega problema. Ob primerjavi povezanega in delno povezanega problema je opazno,

da so vrednosti temperature pri povezanem problemu veliko nižje od vrednosti, ki smo jih dobili pri obravnavi delno povezanega problema. Glede na to, da so tako robni pogoji, kot tudi koncentracije vlage v izbranih vozliščih enaki v vseh primerih, je znižanje temperature zaradi vpliva temperatur na vlago vprašljivo. Poleg tega je opaziti rahel padec temperature v zadnjih treh dneh analize, za katerega ne poznamo vzroka.



Slika 27: T in c v vozlišču $n2$ – povezan problem.

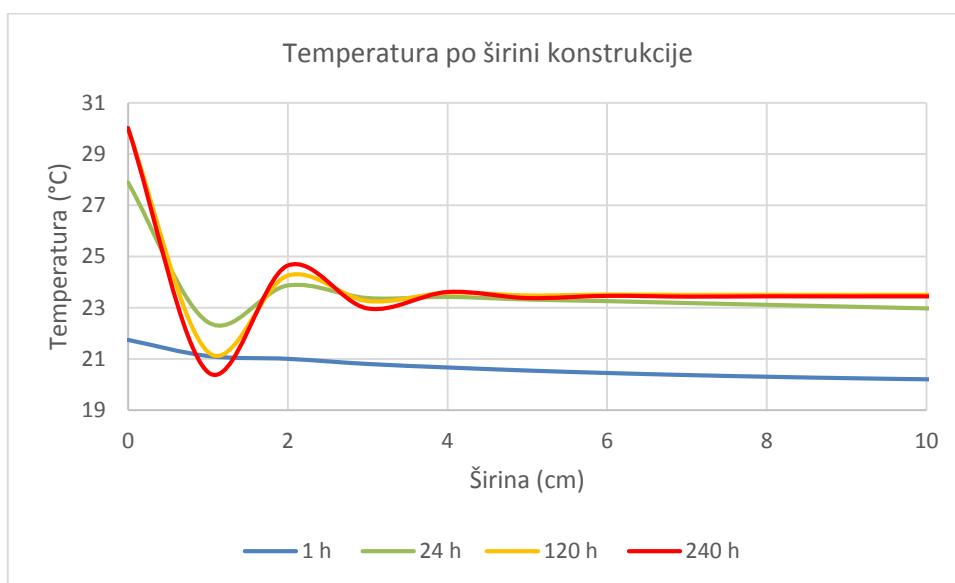


Slika 28: T in c v vozlišču $n3$ – povezan problem.

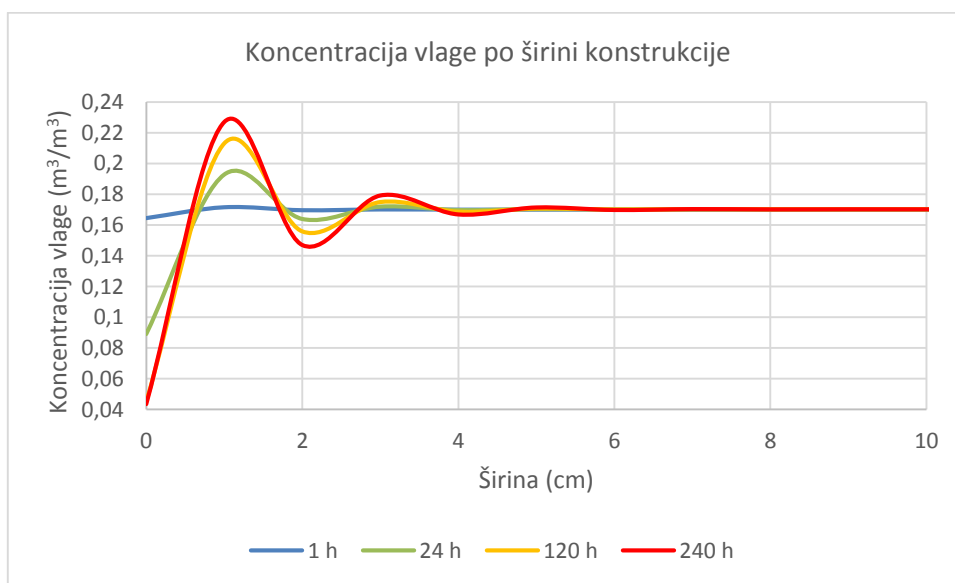
Potek temperature in vlage v treh izbranih vozliščih je sicer smiselne oblike, vendar pa se zaradi nekaterih nepojasnjenih odstopanj glede na prejšnje izračune, pojavi vprašljivost zanesljivosti izračunov ob uporabi tega parametra. Za dodaten vpogled v dogajanje na področju temperaturnih in vlažnostnih polj v konstrukciji si v nadaljevanju ogledamo še časovni potek T in c po širini konstrukcije na polovični višini. Zaradi večje preglednosti sta grafa stanja

temperature in koncentracije vlage po širini prereza prikazana samo za 10 cm širok pas ob levem robu konstrukcije (na desni strani je situacija zrcalna zaradi simetrije konstrukcije).

Na slikah 29 in 30, ki prikazujeta potek temperature oz. koncentracije vlage, je opazno nepričakovano stanje. Opazimo nihanje opazovanih količin. Nihanje je sicer do neke mere zaradi numeričnega pristopa pričakovano bodisi zaradi slabe izbire preprostih končnih elementov bodisi zaradi prevelikih dimenzij le-teh. Vendar pa je nujno, da nihanje s časom zamre in da rezultati s časom konvergirajo k pravi rešitvi. V našem primeru pride do vedno večjega nihanja, kar nakazuje na verjetnost, da tudi ob daljšem času analize ne bi dobili stacionarnega stanja v konstrukciji.



Slika 29: Temperatura po širini konstrukcije - povezan problem, nižja vrednost k_{CT} .

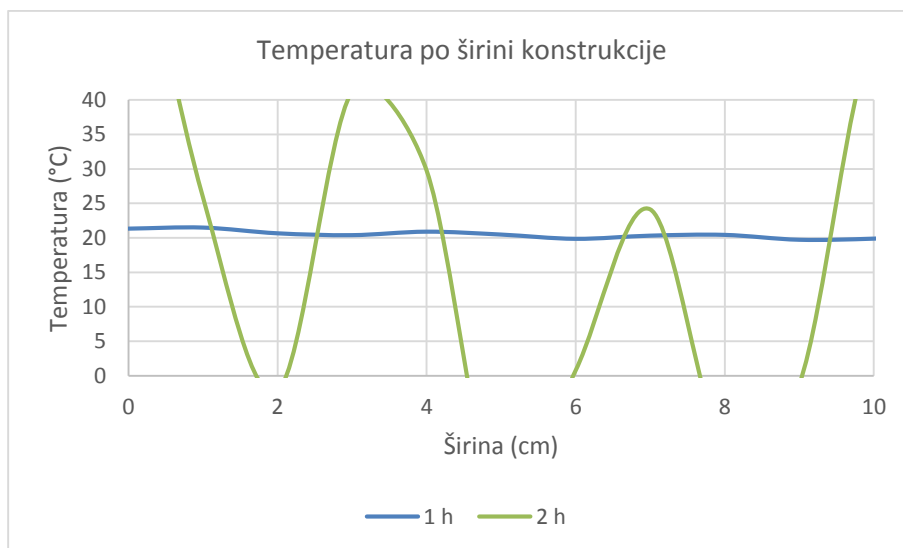


Slika 30: Koncentracija vlage po širini konstrukcije - povezan problem, nižja vrednost k_{CT} .

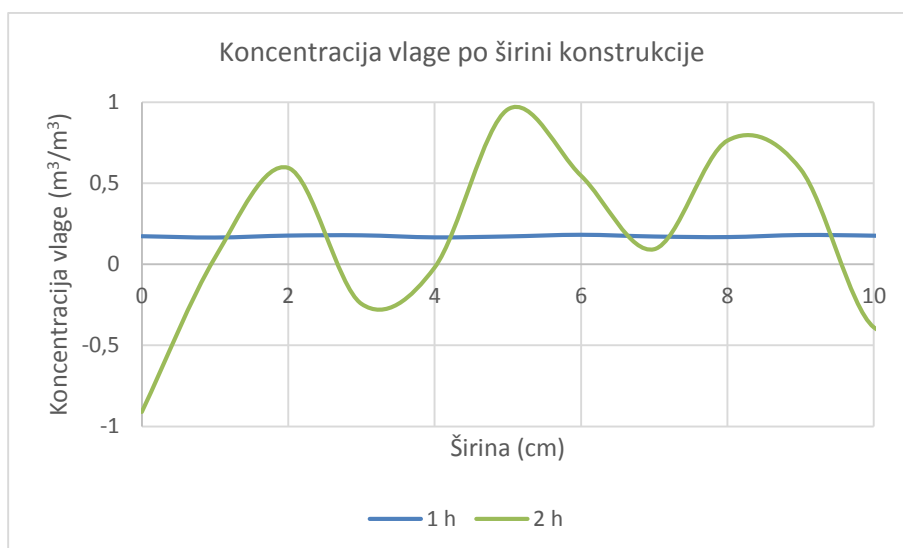
Čeprav lahko predvidevamo, da višja vrednost koeficienta k_{cT} še poveča vpliv temperature na koncentracijo vlage, je v nadaljevanju vseeno izveden izračun z višjo vrednostjo tega koeficienta, pri tem pa so pričakovani še bolj ekstremni rezultati.

5.1.3.2 Višja vrednost koeficienta k_{cT}

Pri obravnavi rezultatov, kjer smo upoštevali nižjo vrednost koeficienta k_{cT} , smo opazili, da iz grafov časovnega poteka temperature oz. koncentracije vlage v treh vozliščih prereza ne dobimo zanesljive slike o dogajanju v prerezu, zato je stanje ob upoštevanju višje vrednosti tega koeficienta prikazano izključno na slikah 31 in 32, ki prikazujeta potek temperature oz. koncentracije vlage po širini prereza (na prvih 10 cm od roba prereza).



Slika 31: Temperatura po širini konstrukcije - povezan problem, višja vrednost k_{cT} .



Slika 32: Koncentracija vlage po širini konstrukcije - povezan problem, višja vrednost k_{cT} .

V obeh primerih opazimo nihanje rezultatov na obravnavanem območju pri času $t = 2 h$. Razlog za prikaz le rezultatov, ki prikazujejo stanje v prvih dveh urah je preprost – rezultati za koncentracije vlage v tretji uri že presegajo $\pm 300 \frac{m^3}{m^3}$, pri enem dnevu so že reda velikosti $\pm 10^{68} \frac{m^3}{m^3}$, v primeru temperatur pa je nihanje še bolj izrazito. Program zaključí z beleženjem rezultatov pri 88 uri, saj v tem času rezultati presežejo največjo podprto število v programu MS Excel. Ta program podpira namreč le števila, katerih absolutna vrednost je manjša od 10^{308} [21].

Nihanje se torej s časom ekstremno stopnjuje, kar pomeni veliko nezanesljivost rezultatov.

5.1.4 Zaključki analize stopnje povezanosti temperature in vlage

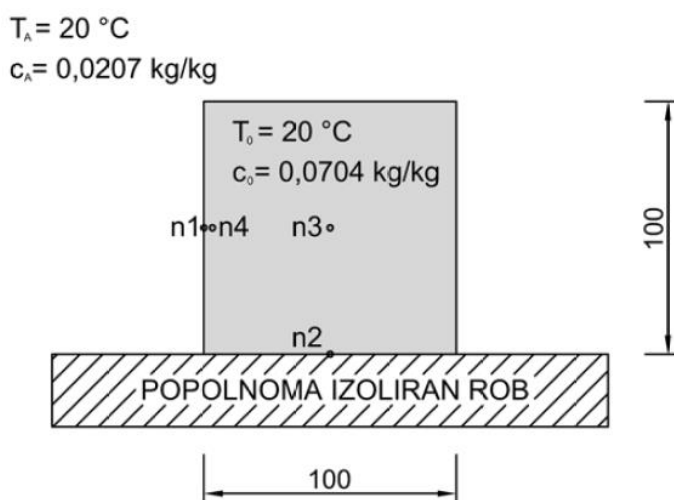
Z analizo delno povezanega in nepovezanega problema ter s primerjavo med njima smo prišli do ugotovitev, da je upoštevanje delne povezanosti temperature in vlage priporočljivo, saj so temperature v jedru ob upoštevanju delne povezanosti nekoliko nižje. Vendar pa so v našem primeru razlike majhne. Zadovoljivo oceno vrednosti temperature in koncentracije vlage po prerezu dobimo torej tudi z nepovezanim problemom.

Ob upoštevanju popolne povezanosti temperature in vlage pa pridemo do nepričakovanih rezultatov. Razlogov, zakaj pride do takih rezultatov, je lahko več. Med njimi ne smemo izključiti niti možnosti napačne izbire koeficienta k_{cT} , niti možnosti napake v programu. Iskanje dejanskega vzroka za odstopanje pa presega okvire te diplomske naloge in je lahko predmet nadaljnjih študij.

V nadaljevanju torej koeficienta, ki zajema vpliv temperature na stanje koncentracije vlage v konstrukciji, ne upoštevamo. V vseh nadaljnjih izračunih je upoštevana le delna povezava med T in c .

5.2 Analiza vpliva vlage na temperaturo med procesom hidratacije

Za določitev vpliva koncentracije vlage na temperaturo medsebojno primerjamo model z delno povezanostjo temperature in vlage (kot v razdelku 5.1.2) ter model, v katerem temperatura in koncentracija vlage nista povezana. Za primer uporabimo kvadraten prerez, ki je po dimenzijah enak prerezu iz razdelka 5.1. Da ocenimo vpliv vlage med hidratacijo, pa za vsak model izvedemo izračun ob upoštevanju in neupoštevanju hidratacije. Na sliki 33 so skupaj s parametri, ki definirajo geometrijo ter opisujejo robne in začetne pogoje, podane tudi lege vozlišč $n1$, $n2$, $n3$ in $n4$. V teh vozliščih analiziramo časovni potek temperature v betonu. Vsi ostali parametri, ki smo jih uporabili v izračunu, so podani v tabeli 5.









Slika 33: Geometrija ter robni in začetni pogoji – vpliv vlage na temperaturo.

Tabela 5: Parametri izračuna – vpliv vlage na temperaturo.

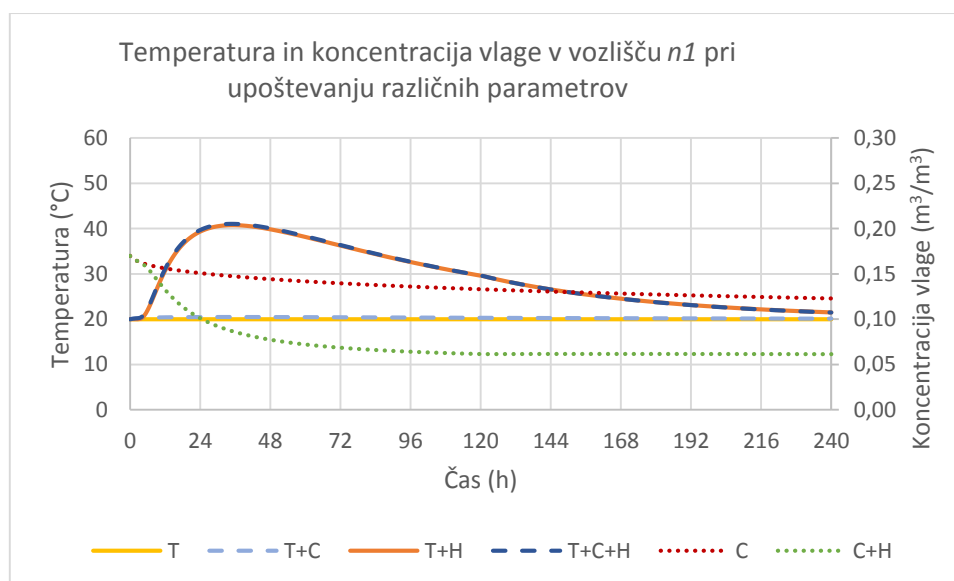
Koeficient toplotne prehodnosti	$k_{TT} = 1,75 \frac{W}{m K}$
Vpliv vlage na prehodnost temperature	$k_{Tc} = 219,375 \frac{W}{m}$
Koeficient difuzije vode	$k_{cc} = 2,5 \times 10^{-9} \frac{m^2}{s}$
Gostota betona	$\rho = 2340 \frac{kg}{m^3}$
Specifična toplota betona	$c_b = 1000 \frac{J}{kg K}$
Prestopni koeficient temperature	$\alpha_p = 6 \frac{W}{m^2 K}$
Prestopni koeficient vlage	$\beta_p = 2,78 \times 10^{-8} \frac{m}{s}$
Tip cementa	CEM I 42,5 R

Na slikah 34 do 37 so predstavljeni časovni poteki temperature in koncentracije vlage v izbranih vozliščih. Uporabljene oznake in njihovi pomeni so prikazani v tabeli 6.

Tabela 6: Pomen oznak grafov na slikah 34 do 37.

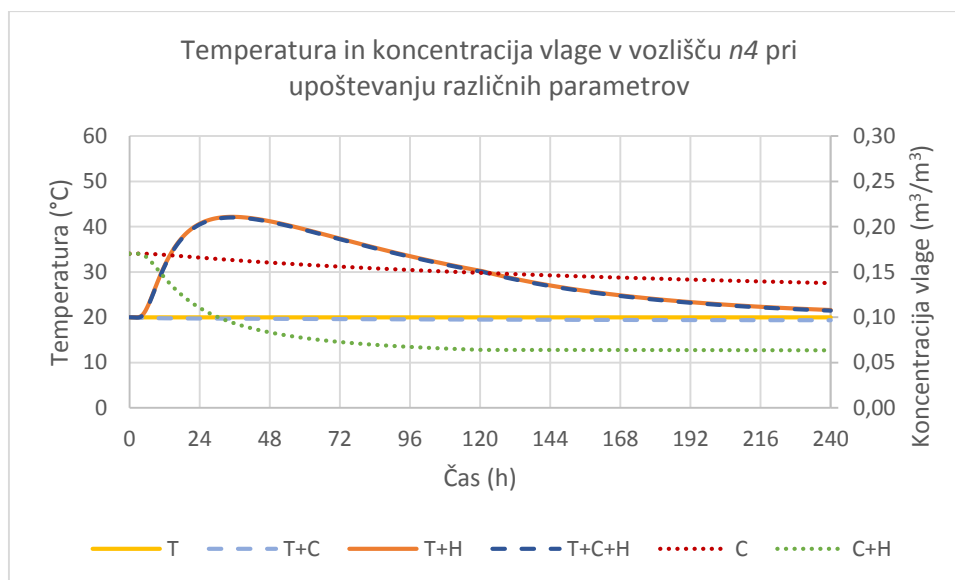
 T	Temperatura	Delna povezanost T in c Hidratacija	<input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
 T+C	Temperatura	Delna povezanost T in c Hidratacija	<input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
 T+H	Temperatura	Delna povezanost T in c Hidratacija	<input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
 T+C+H	Temperatura	Delna povezanost T in c Hidratacija	<input checked="" type="checkbox"/> <input checked="" type="checkbox"/>
 C	Koncentracija vlage	Hidratacija	<input checked="" type="checkbox"/>
 C+H	Koncentracija vlage	Hidratacija	<input checked="" type="checkbox"/>

Na sliki 34 je prikazan časovni potek temperature in koncentracije vlage v vozlišču $n1$, ki predstavlja robno točko prereza. Koncentracija vlage na robu je v začetku analize le malo odvisna od hidratacije, saj je hitrost sproščanja toplote v prvih urah majhna. Vpliv robnih pogojev je v tem času večji od vpliva hidratacije. Kasneje se dobršen del vlage porabi za razvoj hidratacije, kar se odraža v odklonu krivulje z oznako C od krivulje z oznako C+H. Temperature ob upoštevanju hidrataciji cementa so v primeru upoštevanja delne povezanosti T in c (krivulja T+C+H) višje od primera, kjer delne povezanosti T in c ne upoštevamo (krivulja T+H), vendar so razlike zanemarljive.



Slika 34: T in c v vozlišču $n1$ – vpliv vlage na temperaturo.

Na sliki 35 je prikazan časovni potek temperature in koncentracije vlage v vozlišču n_4 , ki je glede na vozlišče n_1 oddaljeno 2 cm proti središču prereza. Za razliko od stanja v vozlišču n_1 je krivulja T+C+H na celotnem obravnavanem časovnem intervalu pod krivuljo T+C, vendar pa so razlike še vedno zanemarljive. Druga razlika, ki je opazna v primerjavi s časovnim potekom temperature v vozlišču n_1 , je zmanjšanje naklona krivulje C. To kaže na močno zmanjšanje vpliva robnih pogojev kljub majhni razdalji od roba konstrukcije.

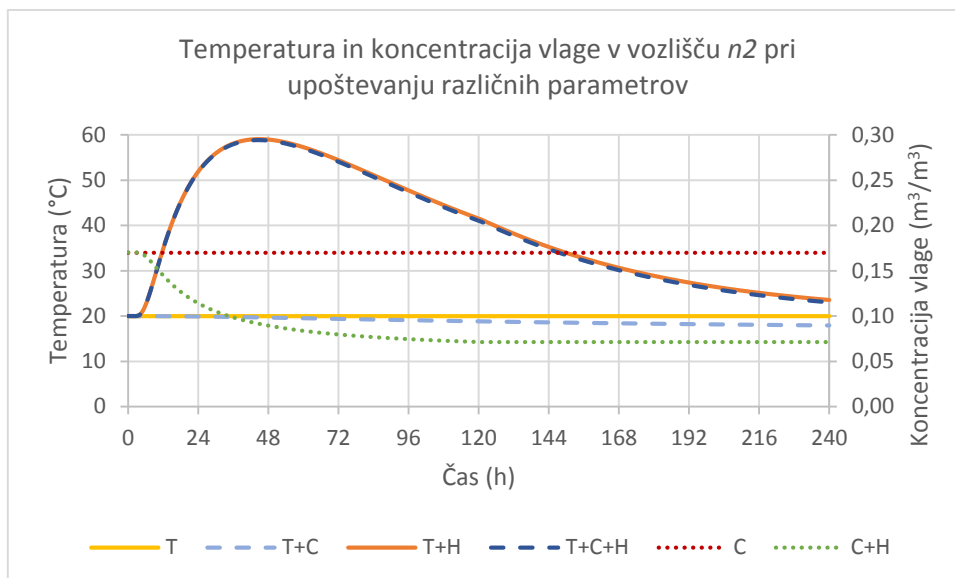


Slika 35: T in c v vozlišču n_4 – vpliv vlage na temperaturo.

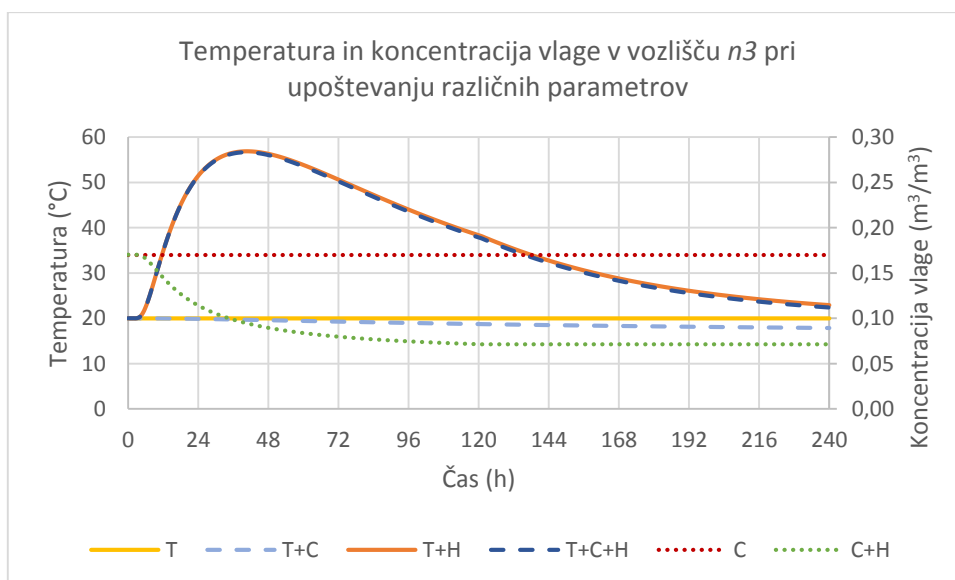
Sledi prikaz časovnega poteka temperature in koncentracije vlage v vozliščih n_2 in n_3 . Časovna poteka vseh obravnavanih količin sta v vozliščih n_2 (prikazano na sliki 36) in n_3 (prikazano na sliki 37) zelo podobna. Največja razlika je v časovnem poteku temperature ob upoštevanju vpliva hidratacije, kar je posledica večje oddaljenosti vozlišča n_2 od roba.

Glede na vozlišče n_1 se v točkah v notranjosti konstrukcije (vozlišči n_2 in n_3) opazi bistvene razlike zaradi manjšega vpliva robnih pogojev. Koncentracija vlage okolja nima vpliva na vozlišča v notranjosti, kar je razvidno iz poteka krivulje C, ki kaže konstantno vrednost koncentracije vlage skozi celoten čas analize. V notranjih točkah se razvijejo bistveno višje temperature, kar lahko pripišemo počasnejšemu vplivu robnih pogojev na temperature.

Vpliv koncentracije vlage na potek temperature med procesom hidratacije je tudi v notranjih točkah zanemarljiv, ob neupoštevanju hidratacije pa je vpliv koncentracije vlage na temperaturo opazen. Temperatura modela z delno povezanostjo T in c je namreč za nekaj več kot 2 °C nižja od modela, kjer povezanosti ne upoštevamo.



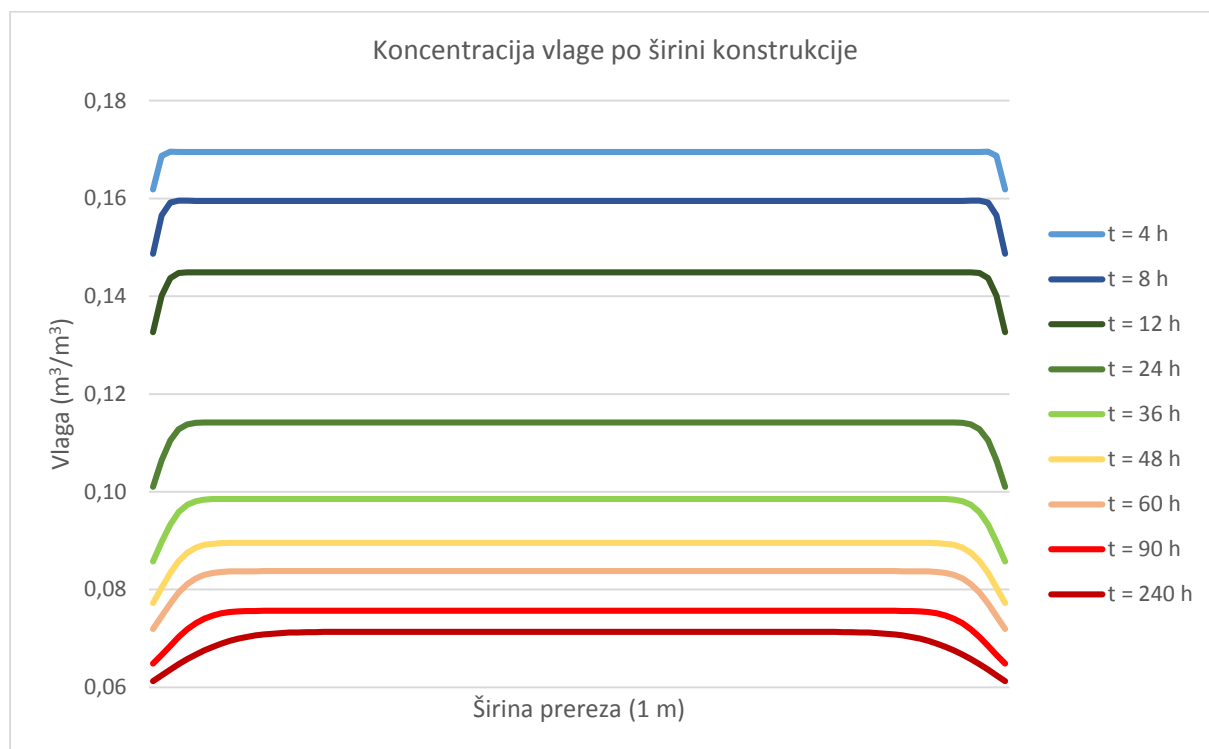
Slika 36: T in c v vozlišču $n2$ – vpliv vlage na temperaturo.



Slika 37: T in c v vozlišču $n3$ – vpliv vlage na temperaturo.

Z analizo časovnega poteka T in c v izbranih točkah konstrukcije smo ugotovili, da je vpliv koncentracije vlage največji v točkah, ki so najbolj oddaljene od robov, a je tudi v teh točkah njen vpliv ob upoštevanju hidratacije zanemarljiv. Smiselno bi bilo torej vpliv koncentracije vlage upoštevati le v primeru, ko hidratacije ne upoštevamo. A tudi neupoštevanje tako vlage kot hidratacije daje zadovoljive rezultate za uporabo v gradbeništvu.

Za boljše razumevanje vpliva koncentracije vlage na potek temperature je treba analizirati še rezultate poteka temperatur in vlage po celotnem prerezu. Za oceno vpliva vlage na temperature je smiselno najprej analizirati časovni potek koncentracije vlage, nato pa s primerjavo modelov z različnimi stopnjami povezanosti T in c določiti vpliv vlage na razpored temperatur po konstrukciji. Časovna poteka izrišemo za prerez konstrukcije na višini 50 cm nad tlemi (slika 38).

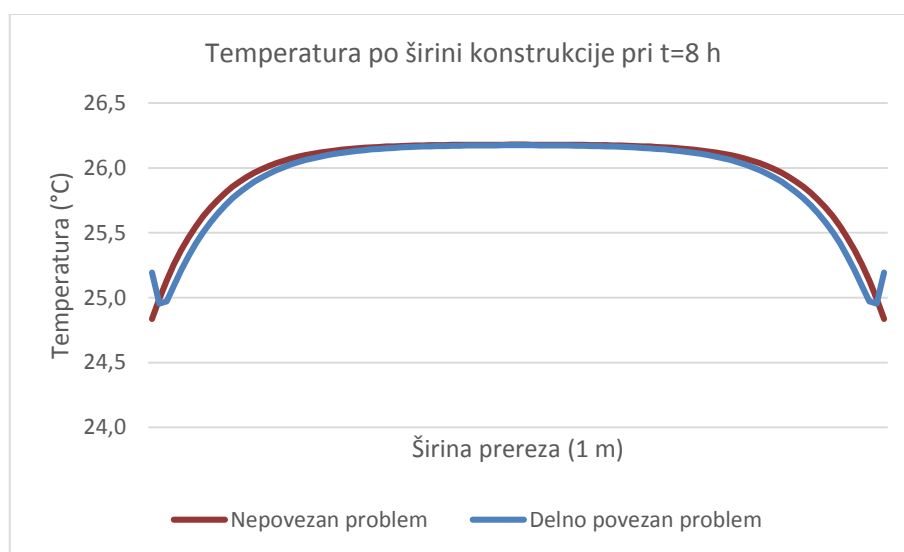


Slika 38: Koncentracija vlage po širini konstrukcije – vpliv vlage na temperaturo.

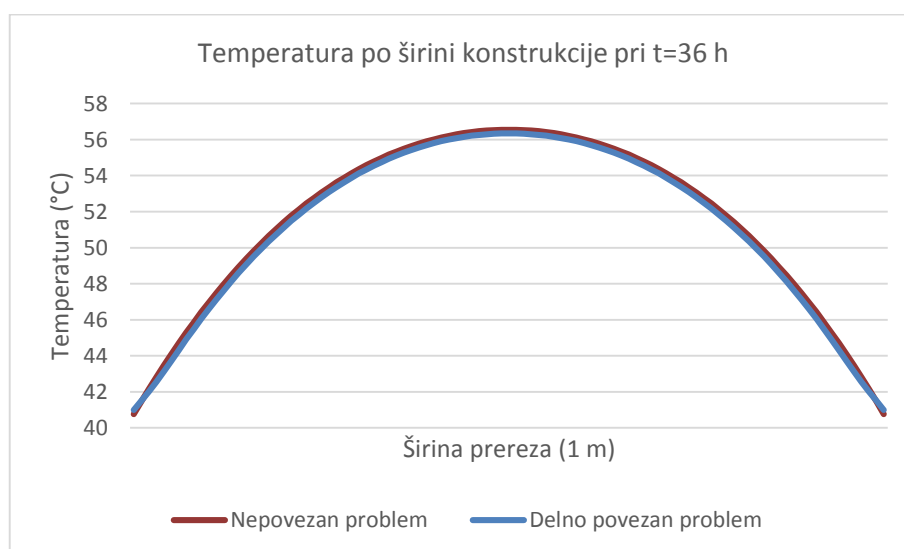
Iz slike 38 sta opazna dva mehanizma nižanja vlage v konstrukciji. Prvi mehanizem je posledica hidratacije, ki se na sliki odraža kot vzporedni pomiki krivulj navzdol. Vzporedni premik krivulje pomeni, da se koncentracija vlage v vseh točkah konstrukcije enako znižuje. V začetnih fazah strjevanja betona je težnja po zmanjševanju vlage veliko hitrejša kot v kasnejših fazah¹. Drugi mehanizem sušenja je posledica konvekcije vlage ob robu konstrukcije, kar se v grafu odraža kot zakrivljenost krivulje ob robovih. Največji vpliv konvekcije je v začetnih fazah strjevanja betona, vendar pa je ta vpliv zelo lokaliziran (vpliva le na točke, ki so zelo blizu roba). V kasnejših fazah strjevanja betona se vpliv konvekcije pomakne tudi v notranjost, vendar pa je veliko manjši.

¹ Zaradi večje preglednosti na grafu niso vrisane vrednosti poteka vlage za čas med 90. in 240. uro, saj so le-te v veliki meri prekrite s krivuljo pri času $t = 240$ ur, kar kaže na to, da je faza hidratacije cementa v tem času relativno zaključena.

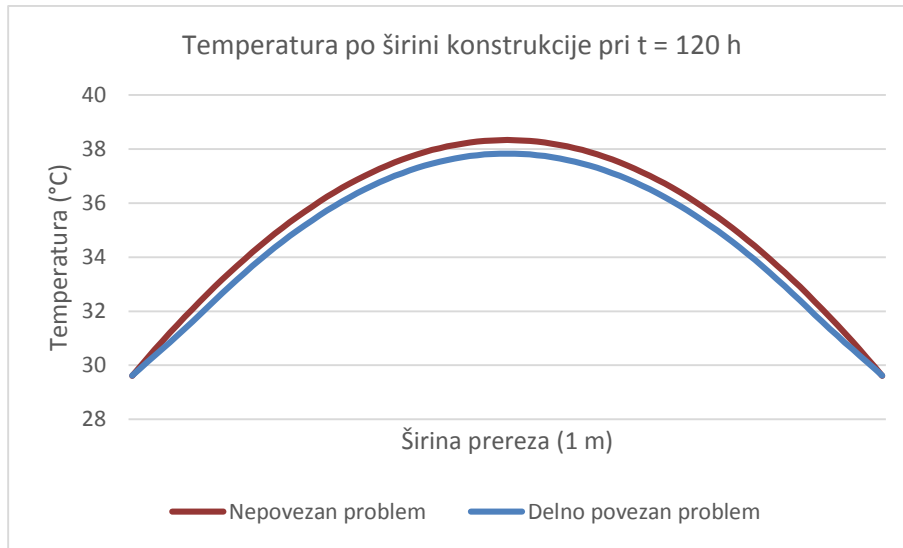
V nadaljevanju so predstavljeni časovni poteki temperatur po širini konstrukcije za nepovezan in delno povezan problem (slike 39 do 42). Na delu konstrukcije, kjer se koncentracija vlage niža samo zaradi vpliva hidratacije (ravni deli krivulj na sliki 38), sta krivulji poteka temperatur pri različnih stopnjah povezanosti T in c (slike 39 do 42) vzporedni. To pomeni, da ne glede na koncentracijo vlage w ne vpliva na temperaturo. Ob robovih, kjer se koncentracija vlage spreminja tudi zaradi robnih pogojev, pa se zaradi sprememb v koncentraciji vlage pojavijo tudi spremembe temperature. Te spremembe (krajevni gradienti) temperatur so vzrok za odstopanja temperatur v notranjosti prereza.



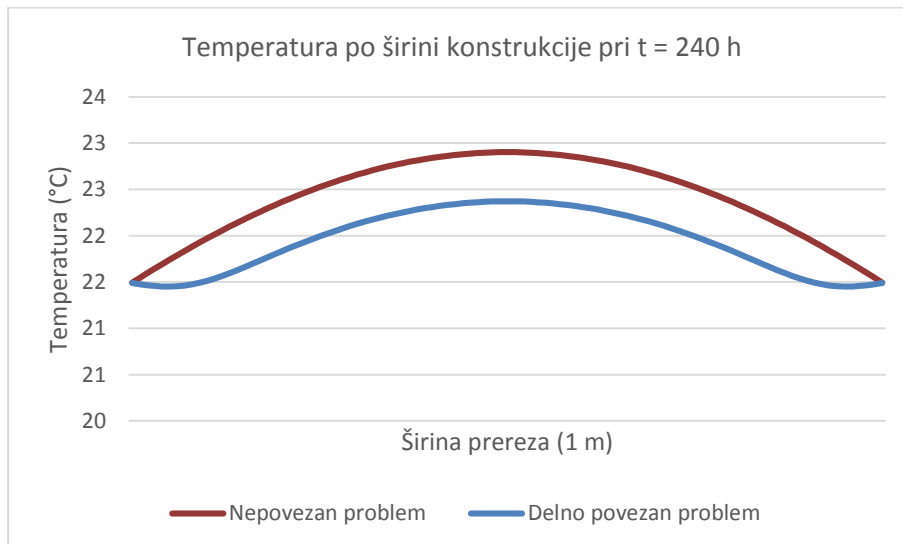
Slika 39: Temperatura po širini konstrukcije pri $t = 8$ h – vpliv vlage na temperaturo.



Slika 40: Temperatura po širini konstrukcije pri $t = 36$ h – vpliv vlage na temperaturo.

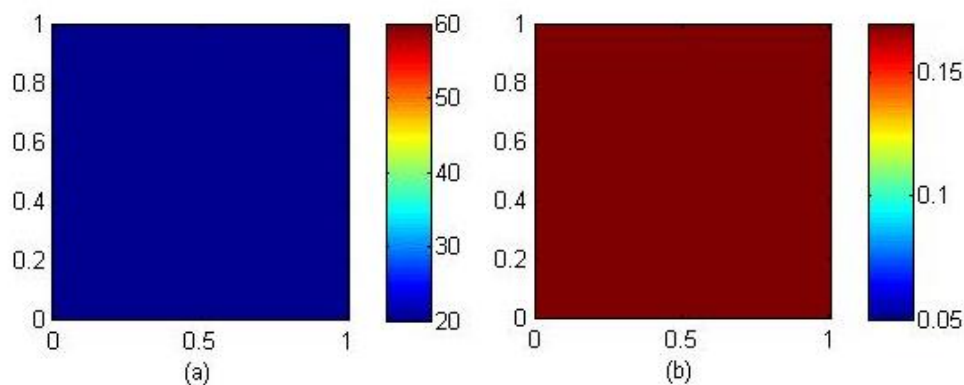


Slika 41: Temperatura po širini konstrukcije pri t = 120 h – vpliv vlage na temperaturo.

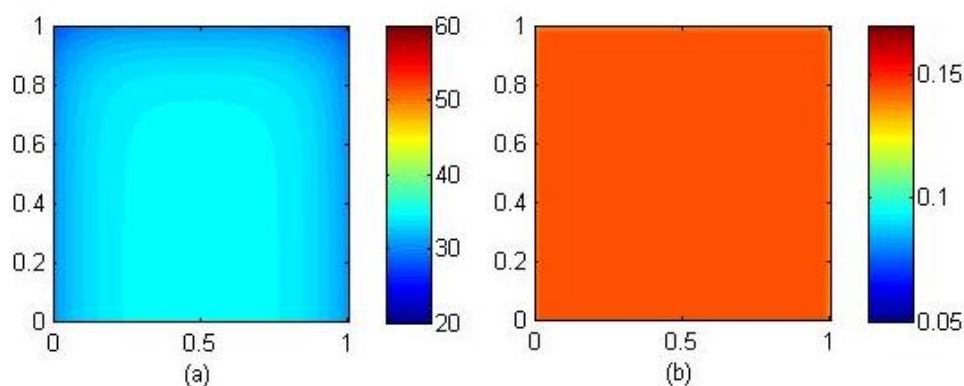


Slika 42: Temperatura po širini konstrukcije pri t = 240 h – vpliv vlage na temperaturo.

V nadaljevanju je predstavljen še potek temperature in koncentracije vlage po celotni konstrukciji (slike 43 do 52) med procesom vezanja cementa (hidratacija). Ker se temperature pri upoštevanju hidratacije zanemarljivo malo razlikujejo ne glede na stopnjo povezanosti T in c v modelu, so predstavljeni le rezultati ob delni povezanosti vpliva T in c .

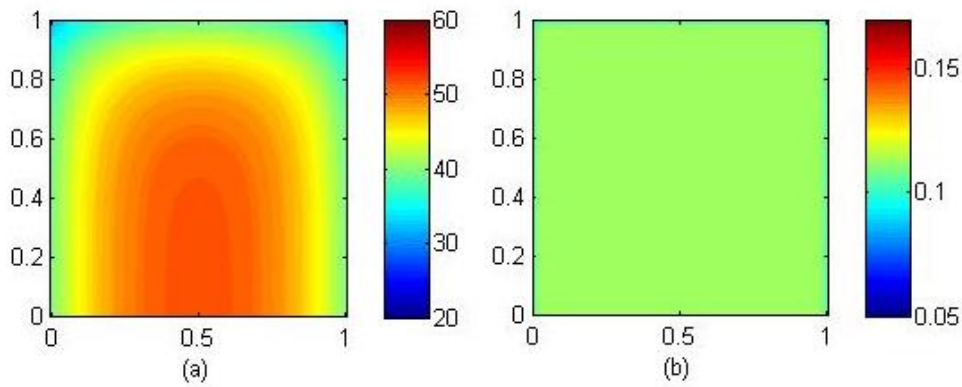
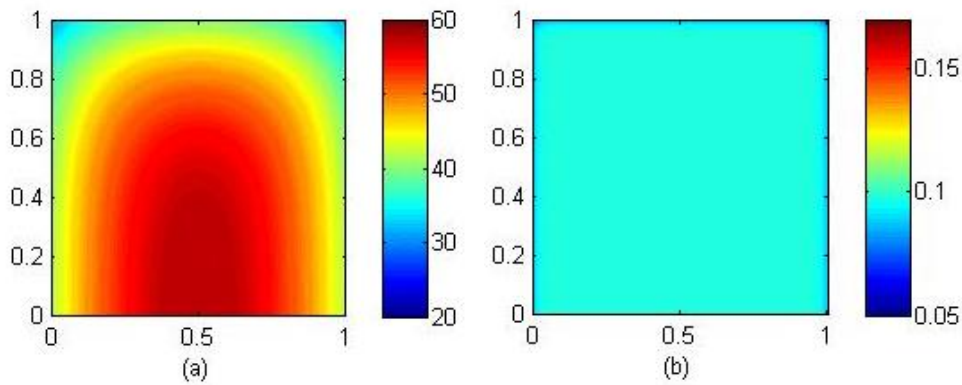
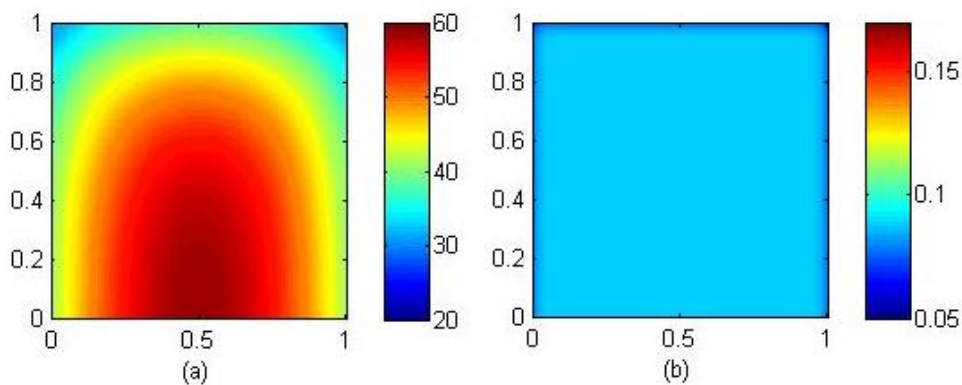


Slika 43: (a) Temperatura (v °C) in (b) koncentracija vlage (m³/m³) pri t = 0 ur.



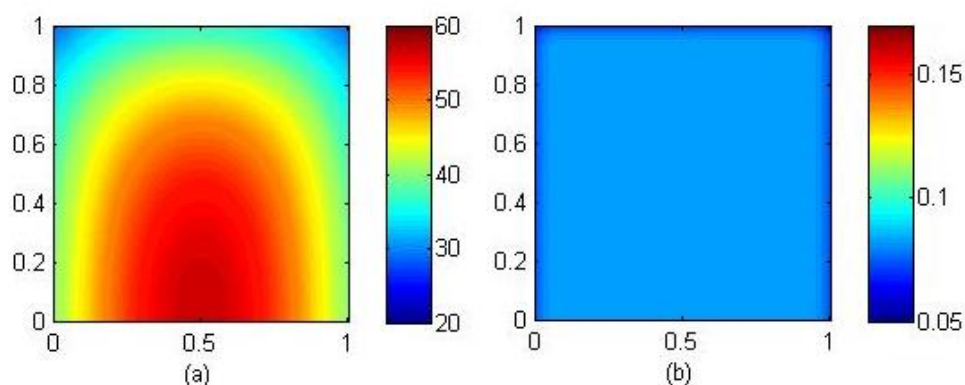
Slika 44: (a) Temperatura (v °C) in (b) koncentracija vlage (m³/m³) pri t = 12 ur.

Iz razporeditve temperatur in koncentracije vlage v prvih 12 urah je opazen velik vpliv hidratacije. Hkrati je lepo viden močan vpliv robnih pogojev na temperaturno polje v nosilcu. Koncentracija vlage se opazno zniža po celotnem nosilcu zaradi hidratacije, medtem ko je znižanje koncentracije na robovih zaradi sušenja komaj opazno. Temperature v notranjosti konstrukcije se na račun hidratacije dvigujejo. Enako obnašanje pričakujemo tudi ob naslednjih časih, saj je vpliv hidratacije na temperaturo opazen do cca. 48. ure, do koder je le-ta večji od vpliva robnih pogojev (konvekcije). Ker je vpliv konvekcije na koncentracijo vlage zelo majhen, je vpliv hidratacije na koncentracijo vlage opazen veliko delj kot vpliv hidratacije na temperaturo v konstrukciji.

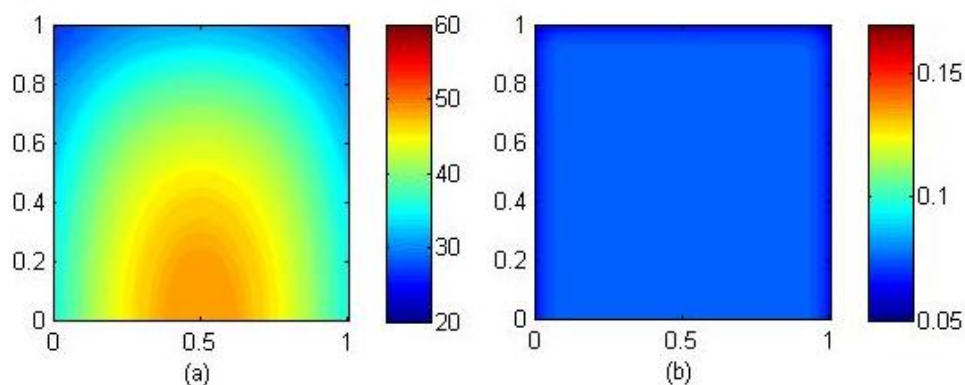
Slika 45: (a) Temperatura (v °C) in (b) koncentracija vlage (m³/m³) pri t = 24 ur.Slika 46: (a) Temperatura (v °C) in (b) koncentracija vlage (m³/m³) pri t = 36 ur.Slika 47: (a) Temperatura (v °C) in (b) koncentracija vlage (m³/m³) pri t = 48 ur.

Med 12. in 48. uro se temperature v konstrukciji zaradi vpliva hidratacije močno povečajo. Hidratacija ima največji vpliv na točko na sredini izoliranega roba (vozlišče n_2), kjer je vpliv robnih pogojev najmanjši. Pri času $t = 48$ ur je temperatura v primerjavi s situacijo pri $t = 36$ ur višja le v točkah v bližini vozlišča n_2 , v točkah bližje robovom, ki so v stiku z zunanjim zrakom,

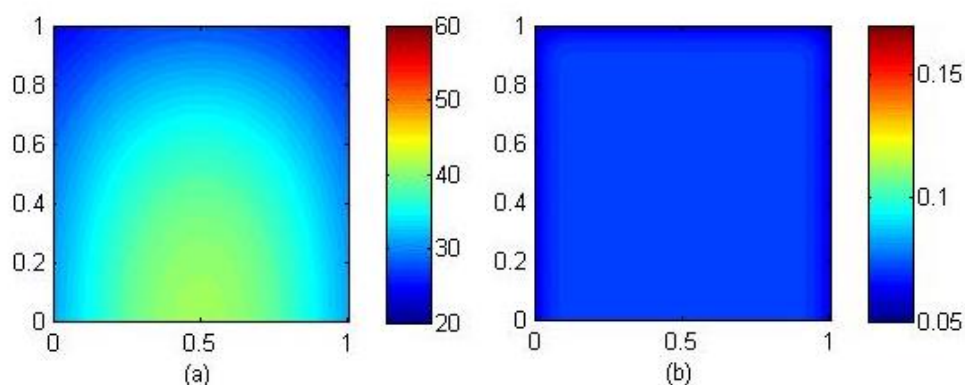
pa že prevladuje vpliv konvekcije. Koncentracija vlage se še vedno pretežno zmanjšuje zaradi hidratacije. Ob neizoliranih robovih je predvsem pri času $t = 48$ ur že opaziti vplive sušenja.



Slika 48: (a) Temperatura (v °C) in (b) koncentracija vlage (m^3/m^3) pri $t = 60$ ur.

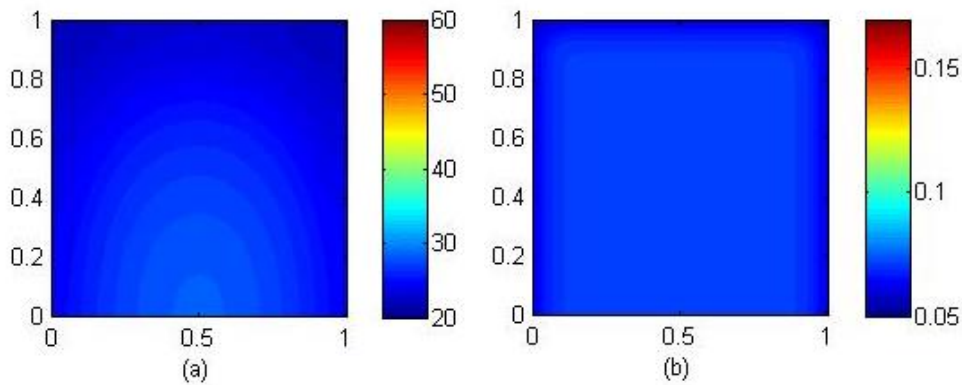
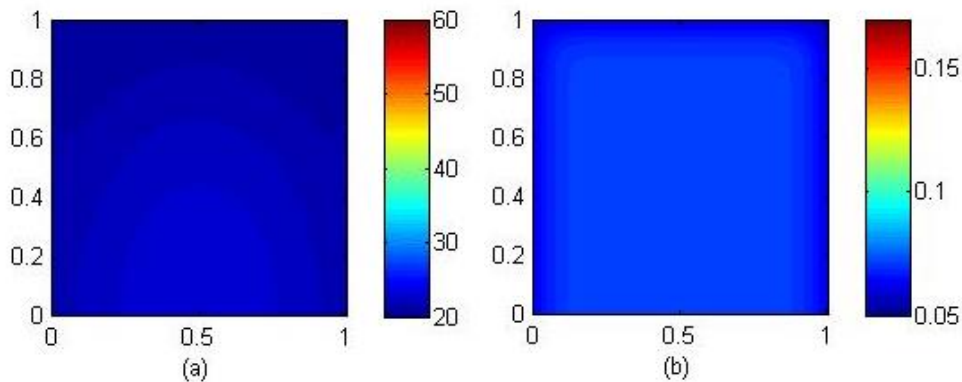


Slika 49: (a) Temperatura (v °C) in (b) koncentracija vlage (m^3/m^3) pri $t = 90$ ur.



Slika 50: (a) Temperatura (v °C) in (b) koncentracija vlage (m^3/m^3) pri $t = 120$ ur.

Med 60. in 120. uro se vpliv hidratacije močno zmanjša. Ker je vpliv robnih pogojev na stanje T in c v konstrukciji veliko večji od vpliva hidratacije, je opazen vpliv sušenja in hlajenja zaradi razlik T in c med konstrukcijo in okoliškim zrakom.

Slika 51: (a) Temperatura (v °C) in (b) koncentracija vlage (m^3/m^3) pri $t = 180$ ur.Slika 52: (a) Temperatura (v °C) in (b) koncentracija vlage (m^3/m^3) pri $t = 240$ ur.

Po desetih dneh analize je razporeditev temperatur že zelo blizu stacionarnega stanja, v primeru koncentracije vlage pa se je vpliv robnih pogojev razširil le za cca. 15 cm v notranjost prereza, kar pomeni, da transport vlage po prerezu po desetih dneh še ni zaključen.

Iz vseh opazovanih rezultatov lahko zaključimo, da ima vlaga na temperaturo sicer vpliv, vendar pa je le-ta zelo majhen. Največja razlika v temperaturah med upoštevanjem in neupoštevanjem vpliva koncentracije vlage na temperaturo je manjša od 1 °C v primeru, kjer smo upoštevali hidratacijo, in manjša od $2,5\text{ °C}$ v primeru, ko hidratacije nismo upoštevali. Tako je računski model, ki ne povezuje teh dveh parametrov, v primeru obdobja vezanja betona zadovoljivo natančen za izračun temperatur po prerezu in s tem povezanim izračunom napetosti v prerezu. V primeru neupoštevanja hidratacije (torej ob obravnavanju že strjenega bloka betona) je sicer uporaba modela s povezanim vplivom temperature in vlage bolj smotrna, vendar razlika ne glede na velikost preizkušanca in robne pogoje navadno ni večja od nekaj stopinj Celzija.

5.3 Analiza vpliva izbire cementa na potek temperatur po prerezu

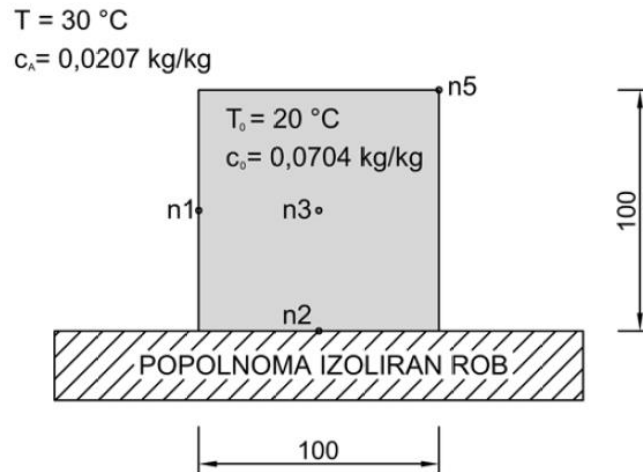
Iz grafov prejšnjega odseka (5.2) je razvidna pomembnost vpliva hidratacije na temperaturo v betonu. Ker pa potek hidratacije zavisi od sestave cementa kot tudi od vodocementnega razmerja in drugih parametrov, v tem razdelku primerjamo vpliv različnih cementov na potek temperatur po prerezu.

Za primerjavo izberemo dve mešanici z vsebovanim cementom CEM I 42,5 R oz. CEM III 32,5 N SR-LH, kateri sta bili obravnavani tudi v [3] in imamo vse podatke za izračun hidratacijske toplote. Ker obravnavamo le vpliv izbire cementa na temperaturno stanje v prerezu, sta obravnavani betonski mešanici z vodocementnim razmerjem 0,5. Enako kot pri analizi vpliva vlage na stanje temperatur med hidratacijo tudi na tem mestu upoštevamo delno povezan problem z vplivom hidratacije.

V tabeli 7 in na sliki 53 so prikazani parametri, ki jih upoštevamo v izračunih temperature in koncentracije vlage ob upoštevanju hidratacije različnih cementov. Na sliki 53 so prikazana tudi izbrana vozlišča, v katerih so bile izračunane vrednosti temperature in koncentracije vlage v izbrani konstrukciji. Poleg že znanih vozlišč n_1 , n_2 in n_3 je v nadaljevanju pomembno vozlišče n_5 , ki predstavlja točko prereza, na katero imajo zunanji pogoji največji vpliv in se posledično med procesom hidratacije najmanj segreje.

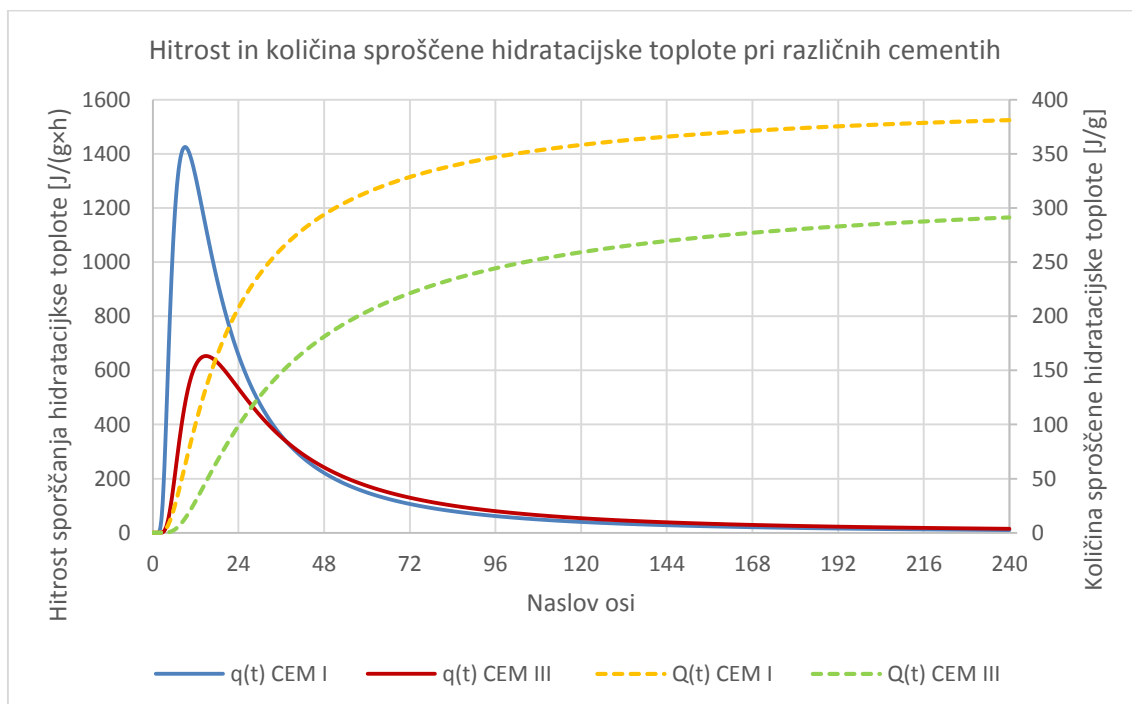
Tabela 7: Parametri izračuna – vpliv izbire cementa.

Koeficient toplotne prehodnosti	$k_{TT} = 1,75 \frac{W}{m K}$
Vpliv vlage na prehodnost temperature	$k_{Tc} = 219,375 \frac{W}{m}$
Koeficient difuzije vode	$k_{cc} = 2,5 \times 10^{-9} \frac{m^2}{s}$
Gostota betona	$\rho = 2340 \frac{kg}{m^3}$
Specifična toplota betona	$c_b = 1000 \frac{J}{kg K}$
Prestopni koeficient temperature	$\alpha_p = 6 \frac{W}{m^2 K}$
Prestopni koeficient vlage	$\beta_p = 2,78 \times 10^{-8} \frac{m}{s}$
Tip cementa	CEM I 42,5 R ali CEM III/B 32,5 N SR-LH



Slika 53: Geometrija ter robni in začetni pogoji – vpliv izbire cementa.

Slika 54 nam prikazuje hitrost sproščanja hidrationske toplote $q(t)$ ter celotno količino sproščene toplote $Q(t)$ za oba cementa. Pri cementu CEM I 42,5 R hitrost sproščanja toplote bliskovito naraste v prvih urah procesa vezanja cementa. CEM III/B 32,5 N SR-LH pričakovano doseže nižje hitrosti. Maksimalna hitrost sproščanja hidrationske toplote je pri cementu CEM III/B 32,5 N SR-LH več kot polovico nižja, dosežena pa je nekaj ur kasneje kot pri CEM I 42,5 R. Pri času okrog 36. ure sta hitrosti sproščanja enaki, nato pa je celoten potek hidrationske hitrost sproščanja hidrationske toplote cementa CEM III/B 32,5 N SR-LH malenkost višja od hitrosti sproščanja toplote cementa CEM I 42,5 R. Celotna količina toplote, ki jo razvije cement CEM III/B 32,5 N SR-LH, doseže približno 80 % toplote, ki jo sprosti CEM I 42,5 R.



Slika 54: Hitrost in količina sproščene hidrationske toplote pri različnih cementih.

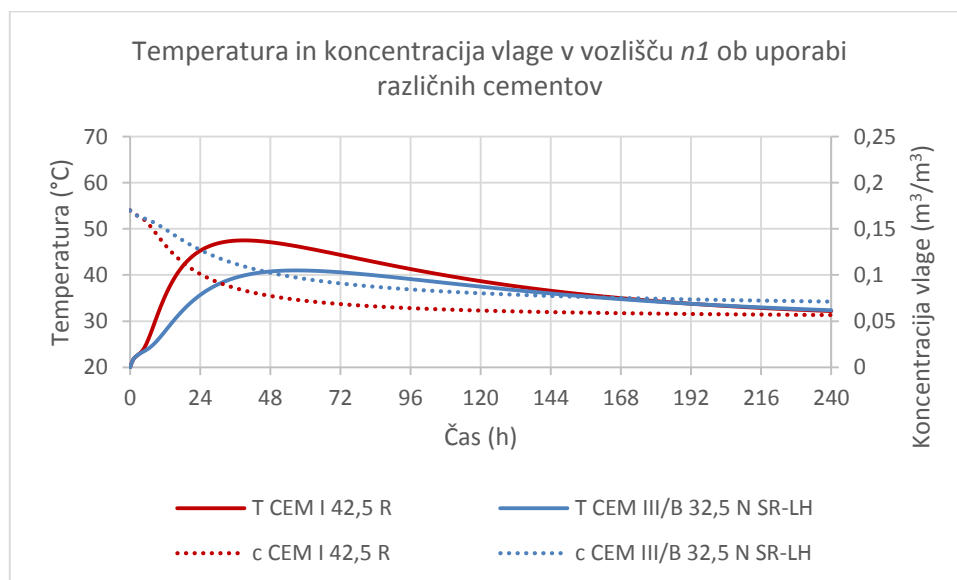
Za oceno primernosti uporabe cementa za uporabo v masivnih betonih bomo uporabili dva pogoja [12]:

- najvišja temperatura v betonskem prerezu ne sme presegati 60 °C in
- temperaturna razlika v betonskem prerezu ne sme presegati 20 °C.

S tema pogojev namreč zmanjšamo možnost za nastanek razpok v betonu.

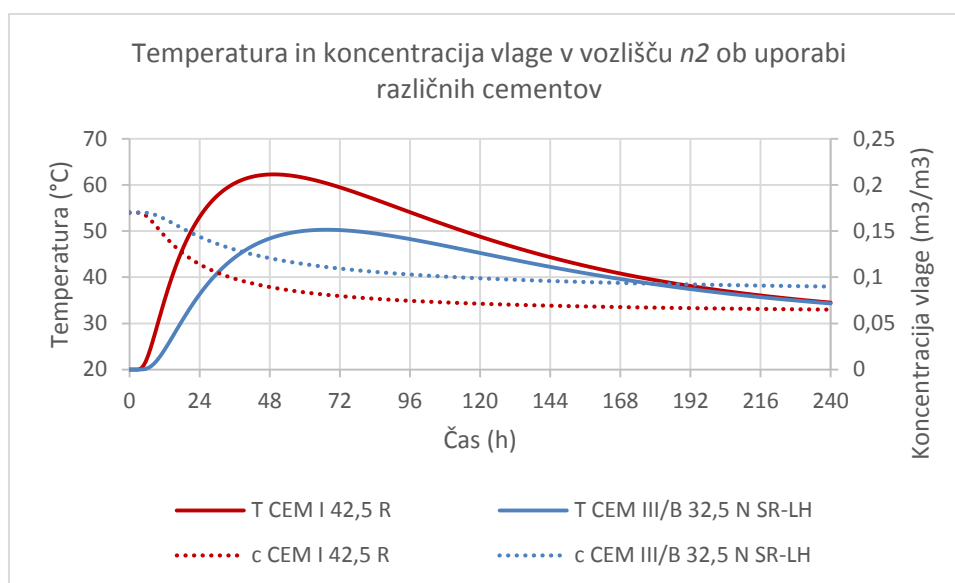
Najprej si oglejmo stanje v izbranih vozliščih betonskega prereza.

Na sliki 55 je prikazan časovni potek temperature v vozlišču $n1$. Opazno je zviševanje temperature v prvih urah, ko je sproščanje hidratacijske toplote še zelo majhno. V tem časovnem obdobju se krivulji tako temperature kot vlage medsebojno minimalno razlikujeta. Razlog višanja temperature in nižanja vlage v začetnih urah sta temperatura in vlaga zunanjega okolja, ki sta podana kot robna pogoja. Temperature v vozlišču $n1$ ne presegajo 50 °C v nobenem primeru, kar je posledica robnih pogojev, saj zunanje okolje s temperaturo 30 °C v tem primeru hladi konstrukcijo. Temperaturni maksimum prve mešanice betona (CEM I) je dosežen približno 12 ur prej in doseže približno 8 °C višjo temperaturo kot maksimum druge mešanice betona (CEM III). Zaradi manj burne reakcije je v drugem primeru tudi znižanje vlage po prerezu manjše.

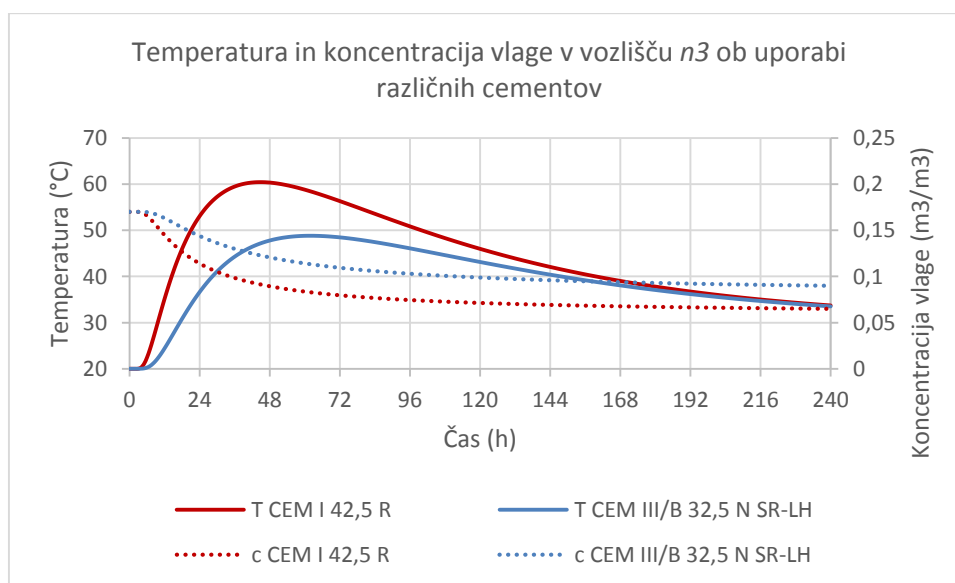


Slika 55: T in c v vozlišču $n1$ – primerjava cementov.

Na slikah 56 in 57 je prikazan časovni potek obravnavanih količin v vozliščih n_2 in n_3 . Najvišje temperature v primeru različnih cementov se v obeh vozliščih razlikujejo za nekaj več kot $10\text{ }^{\circ}\text{C}$, količina vlage pa je (tako kot v vozlišču n_1) ob uporabi cementa CEM III/B 32,5 N SR-LH višja kot v primeru hitro vezočega cementa. Rezultati časovnega poteka temperature v betonu v primeru cementa CEM I 42,5 R kažejo neprimernost uporabe le-tega v masivnih betonih. Temperatura v vozlišču n_2 namreč preseže mejo $60\text{ }^{\circ}\text{C}$ in tako cement ne izpolnjuje enega od pogojev. Obratno betonska mešanica s cementom CEM III/B 32,5 N SR-LH dosega temperature nižje od $50\text{ }^{\circ}\text{C}$ in je zato sprejemljiva za izdelavo masivnih betonov.

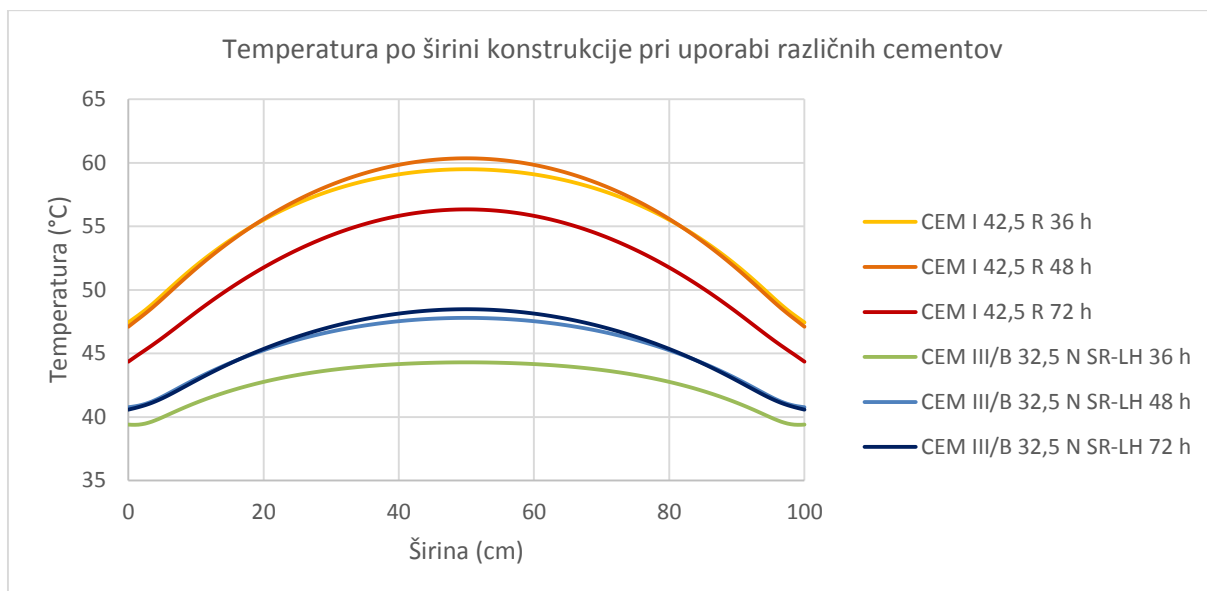


Slika 56: T in c v vozlišču n_2 – primerjava cementov.



Slika 57: T in c v vozlišču n_3 – primerjava cementov.

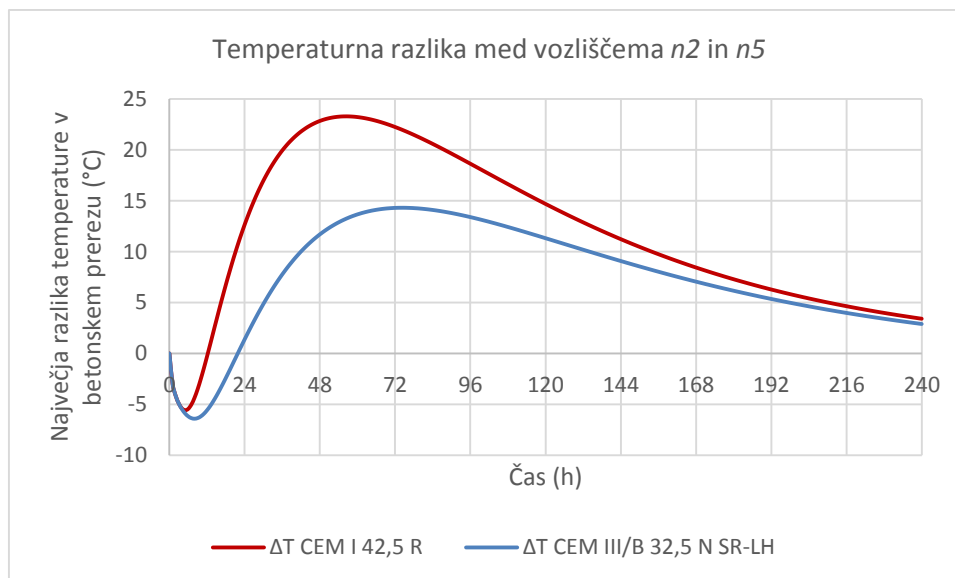
Slika 58 prikazuje časovni potek temperature vzdolž prereza na polovici višine konstrukcije. Iz grafa je lepo razviden podoben trend naraščanja, vendar opazimo zakasnitev, nižje temperature in večji vpliv robnih pogojev pri cementu z nižjo količino sproščene hidratacijske toplote.



Slika 58: Temperatura po širini konstrukcije – vpliv izbire cementa.

Treba je preveriti še skladnost betonskih mešanic z drugim pogojem, ki pravi, da razlika med najnižjo in najvišjo temperaturo v prerezu ne sme presegati 20 °C. V ta namen primerjamo vrednosti temperature v vozliščih n_5 in n_2 , ki predstavljata najbolj oz. najmanj izpostavljeni točki v betonskem prerezu.

Na sliki 59 je prikazana razlika v temperaturi vozlišč n_2 in n_5 . V začetnih urah je razlika negativna, ker se temperatura v vozlišču n_5 dviga zaradi vpliva robnih pogojev. Tudi ta primerjava kaže ustreznost uporabe cementa CEM III/B 32,5 N SR-LH v konstrukcijah iz masivnega betona, saj temperaturna razlika med omenjenima vozliščema ne presega meje 20 °C, medtem ko ob uporabi cementa CEM I 42,5 R doseže 23,3 °C. Hitro vezoči cement ne ustreza nobenemu izmed obeh pogojev in zato ni priporočljiv za uporabo v konstrukcijah iz masivnega betona. V primeru uporabe takega cementa se namreč pojavi možnost, da se zaradi visokih doseženih temperatur in temperaturnih razlik v betonu pojavijo razpoke, ki zmanjšajo njegovo trajnost in odpornost.



Slika 59: Razlika temperature med vozliščem *n2* in vozliščem *n5*.

Z zbranimi rezultati smo pokazali ustreznost cementov, ki razvijejo nizko hidratacijsko toploto, za izdelavo konstrukcij iz masivnega betona. Tudi podatki o višji vsebnosti vlage po končani hidrataciji v betonu CEM III/B 32,5 N SR-LH niso zanemarljivi, saj lahko glede na ostalo vodo znižamo vodocementno razmerje, kar pa doprinese še k dodatnemu znižanju temperatur in k dodatni trdnosti betona, saj se voda ne nabira v porah v notranjosti betona, kar se odraža v manjši poroznosti betona.

6 ZAKLJUČEK

Masivni betoni so med strjevanjem podvrženi nastanku razpok in s tem poslabšanju mehanskih lastnosti betona. Razpoke nastanejo zaradi visokih temperatur in velikih temperaturnih razlik med točkami na površini elementa in točkami v njegovi notranjosti, visoke temperature in temperaturne razlike pa so posledica procesa hidratacije cementa. Zato je pomembno, da znamo oceniti vrednosti temperature v prerezu masivnega betona. Ker pa na vrednosti temperature vpliva tudi vlaga, je enako pomembna tudi ocena koncentracije vlage v masivnem betonu.

Za analiziranje stanja temperature in koncentracije vlage v masivnem betonu smo pripravili računalniški program. Ta z metodo končnih elementov izračuna približne vrednosti temperature in koncentracije vlage v diskretnih točkah. Vrednosti, ki ležijo med diskretnimi točkami, v katerih dobimo rezultate, pa program določi z linearno interpolacijo. Program preko podanih parametrov upošteva stopnjo povezanosti med temperaturo in koncentracijo vlage, hidratacijo pa mu podamo preko Excelove tabele.

V diplomski nalogi je bilo prikazano numerično modeliranje temperature in koncentracije vlage v sveži betonski mešanici ob delni povezanosti vplivov temperature in vlage. Polna povezanost je bila izključena na podlagi ugotovitev analize vpliva stopnje povezanosti. Izračun ob polni povezanosti temperature in koncentracije vlage je namreč pokazal očitno nezanesljive rezultate. Iskanje vzrokov za take rezultate presega okvirje te diplomske naloge, nudi pa podlago za nadaljnje študije.

Kot je bilo ugotovljeno v doktorski disertaciji [1], smo tudi v diplomski nalogi pokazali, da je med fazo strjevanja betona vpliv vlage na temperaturno stanje v betonu zanemarljiv. Nekoliko večji vpliv ima koncentracija vlage na temperaturo v betonskem prerezu po končani hidrataciji, vendar pa se v takem primeru le redko pojavi potreba po oceni stanja temperature v betonu.

Z izdelanim programom smo analizirali tudi pomembnost izbire cementa za uporabo v masivnih betonih. Tanjši elementi toploto hitro oddajo v okolje preko svoje površine, pri masivnih betonih pa je ta proces dolgotrajnejši, kar ima za posledico višjo temperaturo v jedru prereza. V okviru analize smo prišli do zaključka, da je pri masivnih betonih nujna uporaba cementov z nizko vrednostjo sproščene hidratacijske toplote. S tovrstnimi cementi namreč dosežemo nižje temperature v prerezu in tudi nižje razlike med temperaturo na površini betonskega prereza in temperaturo v notranjosti betonskega prereza. To pa ima za posledico manjšo razpokanost, večjo trajnost in večjo mehansko odpornost.

VIRI

- [1] Ilc, A. 2013. Nelinearna analiza masivnega betona pri postopni gradnji. Doktorska disertacija. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo. 104 str.
- [2] Žarnić, R. 2005. Lastnosti gradiv. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Katedra za preskušanje materialov in konstrukcij: 350 str.
- [3] Gabrijel, I., Barbalić, J. 2011. Određivanje tijeka oslobađanja topline hidratacije u betonu. Elektronički časopis Građevinskog Fakulteta Osijek, 2: 101–109.
- [4] Tehnični podatki za CEM I 42,5 R. 2014.
[Http://www.cemex.hr/Userfiles/pdf/Tehnicke%20upute/CEM%20I%2042,5%20R-SvJuraj.pdf](http://www.cemex.hr/Userfiles/pdf/Tehnicke%20upute/CEM%20I%2042,5%20R-SvJuraj.pdf) (Pridobljeno 2. 7. 2015.)
- [5] Tehnični podatki za CEM III 32,5 N SR-LH. 2015.
[Http://www.salonit.si/proizvodi_in_storitve/cementi/2012030611324224/](http://www.salonit.si/proizvodi_in_storitve/cementi/2012030611324224/) (Pridobljeno 2. 7. 2015.)
- [6] Kim, S. G. 2010. Effect of heat generation from cement hydration on mass concrete placement. Diplomaska naloga. Iowa, Iowa State University, Civil Engineering (Geotechnical Engineering): 114 str.
- [7] Jelušič, M. 2009. Tlačna trdnost vlaknastih betonov. Diplomaska naloga. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo (samozaložba M. Jelušič): 73 str.
- [8] Hidratacija različnih vrst cementov. 2006.
[Http://www.beton.org/fileadmin/beton-org/media/Dokumente/PDF/Service/Zementmerkb1%C3%A4tter/B11.pdf](http://www.beton.org/fileadmin/beton-org/media/Dokumente/PDF/Service/Zementmerkb1%C3%A4tter/B11.pdf) (Pridobljeno 2. 7. 2015.)
- [9] Zakon o prevajanju toplote. 2013.
[Https://sl.wikipedia.org/wiki/Zakon_o_prevajanju_toplote](https://sl.wikipedia.org/wiki/Zakon_o_prevajanju_toplote) (Pridobljeno 15. 6. 2015.)
- [10] Toplotna prehodnost, kondukcija in konvekcija. 2008.
[Http://alvelasquezdport.com/transientheattransferexperiment.pdf](http://alvelasquezdport.com/transientheattransferexperiment.pdf) (Pridobljeno 16. 4. 2015.)

-
- [11] Fickovi zakoni difuzije. 2015.
https://en.wikipedia.org/wiki/Fick%27s_laws_of_diffusion (Pridobljeno 15. 6. 2015.)
- [12] Klemczak, B. 2011. Prediction of coupled heat and moisture transfer in early-age massive concrete structures. Numerical Heat Transfer, Part A: Applications: An International Journal of Computation and Methodology, 60, 3: 212–233.
- [13] Thomas, J. W. 1995. Numerical partial differential equations: finite difference methods. New York: Springer Science+Business Media, LLC: 437 str.
- [14] Versteeg, H. K., Malalasekera, W. 2007. An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method. Harlow: Pearson Education: 503 str.
- [15] Analiza z metodo končnih elementov. 2014.
http://www.engr.uvic.ca/~mech410/lectures/FEA_Theory.pdf (Pridobljeno 11. 5. 2015.)
- [16] Žunkovič, U. 2013. Seminarska naloga pri predmetu Seminar. Metoda končnih elementov. Reševanje inženirskega problema. Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko. 14 str.
- [17] Zienkiewicz, O. C., Taylor R. L. 2000⁵ (1991). The finite element method. Vol. 1, The basis. Oxford: Butterworth-Heinemann: 689 str.
- [18] Metoda uteženih rezidualov. 2002.
<http://www.me.ua.edu/me611/f02/pdf/mwr.pdf> (Pridobljeno 28. 4. 2015.)
- [19] Oblike končnih elementov. 2015.
http://cadcam.spts.si/?page_id=51 (Pridobljeno 4. 7. 2015.)
- [20] Hozjan, T. 2009. 2D analiza prevajanje toplote po mediju: program HEATKO. Ljubljana, UL FGG.
- [21] Omejitve v programu MS Excel. 2015.
<https://support.office.com/en-za/article/Excel-specifications-and-limits-ca36e2dc-1f09-4620-b726-67c00b05040f> (Pridobljeno 23. 7. 2015.)