

Univerza
v Ljubljani

Fakulteta
*za gradbeništvo
in geodezijo*



Jamova cesta 2
1000 Ljubljana, Slovenija
<http://www3.fgg.uni-lj.si/>

DRUGG – Digitalni repozitorij UL FGG
<http://drugg.fgg.uni-lj.si/>

To je izvirna različica zaključnega dela.

Prosimo, da se pri navajanju sklicujete na bibliografske podatke, kot je navedeno:

Rizvič, M., 2015. Dimenzioniranje lesenih stebrov izpostavljenih splošni osno-upogibni obremenitvi. Magistrsko delo. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo. (mentor Lopatič, J.): 194 str.

Datum arhiviranja: 24-07-2015

University
of Ljubljana

Faculty of
*Civil and Geodetic
Engineering*



Jamova cesta 2
SI – 1000 Ljubljana, Slovenia
<http://www3.fgg.uni-lj.si/en/>

DRUGG – The Digital Repository
<http://drugg.fgg.uni-lj.si/>

This is original version of final thesis.

When citing, please refer to the publisher's bibliographic information as follows:

Rizvič, M., 2015. Dimenzioniranje lesenih stebrov izpostavljenih splošni osno-upogibni obremenitvi. Master Thesis. Ljubljana, University of Ljubljani, Faculty of civil and geodetic engineering. (supervisor Lopatič, J.): 194 p.

Archiving Date: 24-07-2015

Univerza
v Ljubljani

Fakulteta za
*gradbeništvo in
geodezijo*



Jamova 2
1000 Ljubljana, Slovenija
telefon (01) 47 68 500
faks (01) 42 50 681
fgg@fgg.uni-lj.si

**MAGISTRSKI ŠTUDIJSKI
PROGRAM DRUGE STOPNJE
GRADBENIŠTVO
GRADBENE KONSTRUKCIJE**

Kandidat:

MIRSAD RIZVIĆ

**DIMENZIONIRANJE LESENIH STEBROV
IZPOSTAVLJENIH SPLOŠNI OSNO-UPOGIBNI
OBREMENITVI**

Magistrsko delo št.: 5/II. GR

**DESIGN OF TIMBER COLUMNS SUBJECTED TO
COMBINED BENDING AND COMPRESSION**

Graduation – Master Thesis No.: 5/II. GR

Mentor:

izr. prof. dr. Jože Lopatič

Predsednik komisije:

izr. prof. dr. Janko Logar

Ljubljana, 12. 06. 2015

STRAN ZA POPRAVKE, ERRATA

Stran z napako

Vrstica z napako

Namesto

Naj bo

II

Rizvić, M. 2015. Dimenzioniranje lesenih stebrov izpostavljenih splošni osno-upogibni obremenitvi
Mag. d. – B Ljubljana. UL. FGG. Odd. za gradbeništvo. Konstrukcijska smer.

IZJAVE

Podpisani **Mirsad Rizvić** izjavljam, da sem avtor magistrskega dela z naslovom
»Dimenzioniranje lesenih stebrov izpostavljenih splošni osno-upogibni obremenitvi«.

Izjavljam, da je elektronska različica v vsem enaka tiskani različici.

Izjavljam, da dovoljujem objavo elektronske različice v repozitoriju UL FGG.

Ljubljana, 8. 6. 2015

Mirsad Rizvić

BIBLIOGRAFSKO-DOKUMENTACIJSKA STRAN Z IZVLEČKOM

UDK:	624.011.1:624.07(043.2)
Avtor:	Mirsad Rizvić
Mentor:	izr. prof. dr. Jože Lopatič
Naslov:	Dimenzioniranje lesenih stebrov izpostavljenih osno-upogibni obremenitvi
Tip dokumenta:	Magistrsko delo-B
Obseg in oprema:	194 str., 2 pregl., 85 sl., 152 en.
Ključne besede:	Leseni stebri, EC5-1-1 6.3.2 Tlačno ali tlačno-upogibno obremenjeni stebri

Izvleček

Magistrsko delo obravnava analizo in dimenzioniranje lesenih stebrov pod vplivom kombinirane osne tlačne in upogibne obremenitve. Drugo poglavje obravnava elastični uklon po teoriji linearno-elastične stabilnosti. Obsega diferencialne enačbe upogibnice elementa glede na osnovno upogibno teorijo, diferencialne enačbe za določitev Eulerjeve kritične uklonske sile idealnega stebra oziroma nosilca, kakor tudi vpliv začetne nepopolnosti geometrije in ekscentričnosti osne tlačne obtežbe na določitev kritičnih napetosti. Tretje poglavje obravnava dimenzioniranje lesenih stebrov pod vplivom kombinirane osne tlačne in upogibne obremenitve po Evrokodu 5. Obsega dimenzioniranje lesenih elementov pod vplivom upogibne obremenitve, osne tlačne obremenitve oziroma kombinirane osne tlačne in upogibne obremenitve z upoštevanjem problemov stabilnosti oziroma uklona ter bočne zvrnitve. Četrto poglavje predstavlja uklonsko analizo in statično geometrijsko nelinearno analizo P-delta v računalniškem programu SAP2000. V petem poglavju so predstavljeni računski primeri dimenzioniranja lesenih stebrov po Evrokodu 5. Prvi, četrti, peti in šesti primer prikazujejo dimenzioniranje lesenih stebrov pod vplivom centrične osne tlačne obtežbe. Drugi in tretji primer pa prikazujeta dimenzioniranje lesenih stebrov pod vplivom ekscentrične osne tlačne obtežbe ob primerjavi z analizo iz računalniškega programa.

BIBLIOGRAPHIC-DOCUMENTALISTIC INFORMATION AND ABSTRACT

UDC:	624.011.1:624.07(043.2)
Author:	Mirsad Rizvić
Supervisor:	Assoc. Prof. Ph. D Jože Lopatič
Title:	Design of timber columns subjected to combined bending and compression
Document type:	Master thesis-B
Notes:	194 p., 2 tab., 85 fig., 152 eq.
Key-words:	Timber columns, EC5-1-1 6.3.2 Timber columns subjected to axial compression or combined bending and axial compression

Abstract

The graduation work treats analysis and design of timber columns subjected to combined bending and axial compression load. Second chapter treats elastic buckling according to theory of linear-elastic stability. It contains differential equations of deflection curve for column or beam according to elementary theory of bending, differential equations for determining Euler's critical buckling load for an ideal beam or column and also the effect of initial imperfections of geometry and eccentricity of axial compression load on the allowable stresses. Third chapter treats design of timber columns subjected to combined bending and axial compression load according to Eurocode 5. It handles design of timber elements subjected to bending, axial compression or combined bending and axial compression where buckling and lateral torsional instability can occur. Fourth chapter presents buckling analysis and nonlinear static analysis considering geometric nonlinearity effect P-delta using computer programme SAP2000. Fifth chapter presents calculated examples of design of columns according to Eurocode 5. First, fourth, fifth and sixth example present design of timber columns under centrally applied axial compression load. Second and third examples present design of timber columns under eccentrically applied axial compression load, next to comparison with analysis from the computer programme.

KAZALO VSEBINE

1	UVOD	1
2	ELASTIČNI UKLON STEBRA-NOSILCA	3
2.1	Diferencialna enačba upogibnice stebra-nosilca	3
2.2	Elastični uklon začetno idealno ravnega stebra-nosilca	20
2.3	Elastični uklon začetno nepopolnega stebra-nosilca in ekscentrično obremenjenega stebra-nosilca	37
3	DIMENZIONIRANJE LESENIH STEBROV-NOSILCEV POD VPLIVOM KOMBINIRANE OSNE TLAČNE IN UPOGIBNE OBREMENITVE PO STANDARDU SIST EN 1995-1-1	57
3.1	Namen	57
3.2	Dimenzioniranje lesenih elementov pod vplivom upogibne obremenitve	60
3.3	Dimenzioniranje lesenih elementov pod vplivom osne tlačne obtežbe	76
3.4	Dimenzioniranje lesenih elementov pod vplivom kombinirane osne tlačne in upogibne obremenitve	90
4	LINEARNA ELASTIČNA STABILNOSTNA ANALIZA IN STATIČNA GEOMETRIJSKO-NELINEARNA ANALIZA P-DELTA V RAČUNALNIŠKEM PROGRAMU SAP2000	107
5	PRIMERI	115
5.1	Primer A: Dimenzioniranje lesenega stebra pod vplivom centrične osne tlačne sile po standardu SIST EN 1995-1-1	116
5.2	Primeri B in C: Dimenzioniranje lesenega stebra pod vplivom ekscentrične osne tlačne sile po standardu SIST EN 1995-1-1	125
5.3	Primeri D-F: Dimenzioniranje lesenega stebra pod vplivom centrične osne tlačne sile po standardu SIST EN 1995-1-1	148

VI

Rizvić, M. 2015. Dimenzioniranje lesenih stebrov izpostavljenih splošni osno-upogibni obremenitvi
Mag. d. – B Ljubljana. UL. FGG. Odd. za gradbeništvo. Konstrukcijska smer.

6	ZAKLJUČKI	173
VIRI		176

KAZALO PREGLEDNIC

Preglednica 3-1: Razmerje efektivne dolžine l_{ef} in razpona nosilca l (prirejeno po Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 110)

Preglednica 3-2: Vrednosti koeficienta bočne nestabilnosti k_{crit} (standard SIST EN 1995-1-1, podpoglavje 6.3.3, odstavek 4; str. 48)

KAZALO SLIK

- Slika 2-1: Element členkasto podprt na obeh koncih pod vplivom prečne koncentrirane obtežbe (a) in pod vplivom kombinirane osne tlačne ter prečne koncentrirane obtežbe (b) (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 2)
- Slika 2-2: Element členkasto podprt na obeh koncih pod vplivom kombinirane osne tlačne in prečne razporejene obtežbe (a), del elementa dx z vertikalnima stranicama pravokotnima glede na začetno nedeformirano x os (b), del elementa dx kjer normala stranskih ploskev predstavlja tangento na deformirano x os elementa (c) (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 3)
- Slika 2-3: Element členkasto podprt na obeh koncih dolžine l s kombinirano tlačno vzdolžno obtežbo P in prečno koncentrirano obtežbo Q na razdalji c od desne podpore (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 4)
- Slika 2-4: Vrednost u v odvisnosti od vrednosti razmerja osne tlačne sile proti kritični uklonski sili P / P_{cr}
- Slika 2-5: Vrednost χ v odvisnosti od vrednosti u
- Slika 2-6: Vrednost λ v odvisnosti od vrednosti u
- Slika 2-7: Element členkasto podprt na obeh koncih dolžine l , s kombinirano osno tlačno in koncentrirano momentno obtežbo M_b na desnem koncu (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 12)
- Slika 2-8: Vrednost ϕ v odvisnosti od vrednosti u
- Slika 2-9: Vrednost ψ v odvisnosti od vrednosti u
- Slika 2-10: Element členkasto podprt na obeh koncih s kombinirano osno tlačno obtežbo in koncentriranimi momentnoma M_a ter M_b na obeh koncih elementa (a), element členkasto podprt na obeh koncih z ekscentrično osno tlačno obtežbo (b) (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 13)

- Slika 2-11: Vrednost amplifikacijskega faktorja v odvisnosti od razmerja osne tlačne obtežbe proti Euler-jevi kritični uklonski sili P / P_{cr} (prirejeno po Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 15)
- Slika 2-12: Idealno raven spodaj vpeti element pod vplivom osne tlačne obtežbe (*a*), rahlo ukrivljena oblika elementa (*b*), deformacijska oblika elementa pri $n = 2$ (*c*), deformacijska oblika elementa pri $n = 3$ (*d*) (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 47)
- Slika 2-13: Element členkasto podprt na obeh konceh pod vplivom osne tlačne obtežbe (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 49)
- Slika 2-14: Deformacijska oblika elementa vpetega na obeh konceh pod vplivom osne tlačne obtežbe pri $n = 1$ (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 49)
- Slika 2-15: Element na dnu vpet z omogočenim prečnim pomikom na vrhu, pod vplivom osne tlačne obtežbe (*a*) in deformacijska oblika (*b*) (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 49)
- Slika 2-16: Grafični prikaz odvisnosti kritične napetosti σ_{cr} od vitkosti l / r (1 psi = 1 pound per square inch = $6.8948 \cdot 10^{-4}$ kN/cm²), (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 51)
- Slika 2-17: Deformacijska oblika elementa členkasto podprtega na obeh konceh pod vplivom osne tlačne obtežbe pri $n = 1$ (*a*), deformacijska oblika pri $n = 2$ (*b*), deformacijska oblika pri $n = 3$ (*b*) (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 52)
- Slika 2-18: Deformacijska oblika elementa z enim vpetim koncem in drugim členkasto podprtim koncem pod vplivom osne tlačne obtežbe (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 53)
- Slika 2-19: Vrednosti funkcije $tg(k \cdot l)$ v odvisnosti od $k \cdot l$ (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 54)
- Slika 2-20: Element vpet na obeh konceh pod vplivom osne tlačne obtežbe (*a*), simetrična deformacijska oblika (*b*), antisimetrična deformacijska oblika (*c*) (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 54)

- Slika 2-21: Element členkasto podprt na obeh koncih z začetno ukrivljeno sinusno obliko osi pod vplivom osne tlačne obtežbe (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 31)
- Slika 2-22: Element členkasto podprt na obeh koncih z začetno ukrivljeno sinusno obliko osi in z ekscentrično osno tlačno obtežbo (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 36)
- Slika 2-23: Konstrukcija z elementom AB obremenjenim z osno tlačno in prečno obtežbo ter z nateznim elementom AC (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 38)
- Slika 2-24: Vrednosti maksimalne napetosti vlakna σ_{\max} v odvisnosti povprečne vrednosti napetosti P/A pomnoženih s kvadratno vrednostjo vitkosti $(l/r)^2$, pri modulu elastičnosti $E = 30\,000\,000\text{ psi} = 20\,684.4\text{ kN/cm}^2$ ($1\text{ psi} = 1\text{ pound per square inch} = 6.8948 \cdot 10^{-4}\text{ kN/cm}^2$) in različnih razmerjih ekscentričnosti proti radiju jedra e/s (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 39)
- Slika 2-25: Vrednosti povprečne tlačne napetosti $(\sigma_c)_{YP}$ v odvisnosti od vitkosti l/r pri vrednosti modula elastičnosti $E = 30\,000\,000\text{ psi} = 20\,684.4\text{ kN/cm}^2$ ($1\text{ psi} = 1\text{ pound per square inch} = 6.8948 \cdot 10^{-4}\text{ kN/cm}^2$), pri napetosti v robnem vlaknu na meji elastičnosti $\sigma_{YP} = 36\,000\text{ psi} = 24.821\text{ kN/cm}^2$ in različnih razmerjih ekscentričnosti proti radiju jedra e/s , za primer členkasto podprtega elementa na obeh koncih z ekscentrično osno tlačno obtežbo z dvema enakima ekscentričnostima pri $\beta = 1$ (prirejeno po Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 41)
- Slika 2-26: Element členkasto podprt na obeh koncih z ekscentrično osno tlačno obtežbo z dvema različnima ekscentričnostima e_a in e_b (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 42)

Slika 2-27: Vrednosti povprečne tlačne napetsti (σ_c)_{YP} v odvisnosti od vitkosti l/r pri vrednosti modula elastičnosti $E = 30\,000\,000$ psi = 20 684.4 kN/cm² (1 psi = 1 pound per square inch = 6.894 8 · 10⁻⁴ kN/cm²), pri napetosti v robnem vlaknu na meji elastičnosti $\sigma_{YP} = 36\,000$ psi = 24.821 kN/cm² in različnih razmerjih ekscentričnosti proti radiju jedra e/s , za primer členkasto podprtega elementa na obeh koncih z ekscentrično osno tlačno obtežbo z dvema različnima ekscentričnostima pri $\beta = 0.5$ (prirejeno po Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 43)

Slika 2-28: Vrednosti povprečne tlačne napetsti (σ_c)_{YP} v odvisnosti od vitkosti l/r pri vrednosti modula elastičnosti $E = 30\,000\,000$ psi = 20 684.4 kN/cm² (1 psi = 1 pound per square inch = 6.894 8 · 10⁻⁴ kN/cm²), pri napetosti v robnem vlaknu na meji elastičnosti $\sigma_{YP} = 36\,000$ psi = 24.821 kN/cm² in različnih razmerjih ekscentričnosti proti radiju jedra e/s , za primer členkasto podprtega elementa na obeh koncih z ekscentrično osno tlačno obtežbo z dvema različnima ekscentričnostima pri $\beta = 0$ (prirejeno po Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 43)

Slika 2-29: Vrednosti povprečne tlačne napetsti (σ_c)_{YP} v odvisnosti od vitkosti l/r pri vrednosti modula elastičnosti $E = 30\,000\,000$ psi = 20 684.4 kN/cm² (1 psi = 1 pound per square inch = 6.894 8 · 10⁻⁴ kN/cm²), pri napetosti v robnem vlaknu na meji elastičnosti $\sigma_{YP} = 36\,000$ psi = 24.821 kN/cm² in različnih razmerjih ekscentričnosti proti radiju jedra e/s , za primer členkasto podprtega elementa na obeh koncih z ekscentrično osno tlačno obtežbo z dvema različnima ekscentričnostima pri $\beta = -0.5$ (prirejeno po Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 43)

Slika 2-30: Vrednosti povprečne tlačne napetosti (σ_c)_{YP} v odvisnosti od vitkosti l/r pri vrednosti modula elastičnosti $E = 30\,000\,000$ psi = $20\,684.4$ kN/cm² (1 psi = 1 pound per square inch = $6.8948 \cdot 10^{-4}$ kN/cm²), pri napetosti v robnem vlaknu na meji elastičnosti $\sigma_{YP} = 36\,000$ psi = 24.821 kN/cm² in različnih razmerjih ekscentričnosti proti radiju jedra e/s , za primer členkasto podprtega elementa na obeh koncih z ekscentrično osno tlačno obtežbo z dvema različnima ekscentričnostima pri $\beta = -1$ (prirejeno po Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 44)

Slika 2-31: Vrednosti povprečne tlačne napetosti (σ_c)_{YP} v odvisnosti od vitkosti l/r pri vrednosti modula elastičnosti $E = 30\,000\,000$ psi = $20\,684.4$ kN/cm² (1 psi = 1 pound per square inch = $6.8948 \cdot 10^{-4}$ kN/cm²), pri napetosti v robnem vlaknu na meji elastičnosti $\sigma_{YP} = 36\,000$ psi = 24.821 kN/cm² in različnih razmerjih nepopolnosti na sredini začetno ukrivljenega tlačno obremenjenega elementa proti radiju jedra a/s (prirejeno po Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 45)

Slika 3-1: Linearno elastična analiza po teoriji prvega reda (a), linearno elastično obnašanje (b) (prirejeno po Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 61)

Slika 3-2: Linearno elastična analiza po teoriji drugega reda (a), linearno elastično obnašanje (b) (prirejeno po Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 61)

Slika 3-3: Ostali primeri zveze med napetostmi in specifičnimi deformacijami pri nelinearni analizi: elastično-idealno plastično obnašanje (a), elasto-plastično obnašanje z utrjevanjem glede na specifične deformacije (b), poljubna nelinearna zveza med napetostmi in specifičnimi deformacijami (c) (prirejeno po Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 61)

Slika 3-4: Togo plastično obnašanje (prirejeno po Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 62)

- Slika 3-5: Element s pravokotnim prečnim prerezom in lokalnim koordinatnim sistemom, kjer os z poteka v močni smeri, upogibni moment M_y pa deluje okoli močne osi $y-y$ (prirejeno po Timber Engineering: Edited by Thelandersson S. and Larsen H. J.; 2003, str. 202)
- Slika 3-6: Pravokotni prečni prerez elementa (Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 105)
- Slika 3-7: Bočna zvrnitev elementa s projektno dolžino l , s preprečenimi torzijskimi zasuki na obeh konceh in omogočenimi prečnimi pomiki vzdolž elementa, ki je pod vplivom čistega upogibnega momenta M okoli močne $y-y$ osi (Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 107)
- Slika 3-8: Procent precenitve kritičnega momenta iz Evrokoda 5 v odvisnosti od razmerja širine in višine pravokotnega prečnega prereza, ko ne upoštevamo faktorja a (prirejeno po Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 108)
- Slika 3-9: Vrednosti koeficienta bočne nestabilnosti k_{crit} v odvisnosti od relativne vitkosti glede na upogib $\lambda_{rel,m}$ (prirejeno po Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 112)
- Slika 3-10: Leseni element pod vplivom osne tlačne obtežbe vzporedne z vlakni vzporednimi središčni osi elementa $x-x$, (Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 150)
- Slika 3-11: Leseni element členkasto podprt na obeh konceh, pod vplivom osne tlačne obtežbe vzporedne z vlakni vzdolž središčne osi elementa $x-x$, (Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 151)
- Slika 3-12: Uklonske dolžine elementov pri različnih načinih podpiranja (Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 152)
- Slika 3-13: Vrednosti napetosti v odvisnosti od vrednosti specifičnih deformacij pri obremenjevanju lesenega elementa z osno tlačno in natezno obtežbo v smeri vlaken (prirejeno po Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 153)
- Slika 3-14: Vrednosti uklonskega koeficienta v odvisnosti od vitkosti elementa (prirejeno po Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 154)

- Slika 3-15: Element z začetno ukrivljeno osjo v obliki sinusne krivulje z amplitudo e na sredini, pod vplivom centrične osne tlačne obtežbe (Timber Engineering: Edited by Thelandersson S. and Larsen H. J.; 2003, str. 215)
- Slika 3-16: Zveza med specifičnimi deformacijami in napetostmi po višini pravokotnega prečnega prereza širine b pod vplivom kombinirane obremenitve z osno silo N in z upogibnim momentom M (prirejeno po Timber Engineering: Edited by Thelandersson S. and Larsen H. J.; 2003, str. 203)
- Slika 3-17: Mejne vrednosti razmerja upogibne napetosti proti asimptotični tlačni trdnosti $\sigma_m / f_{c,0,a}$, v odvisnosti od razmerja osne napetosti proti asimptotični tlačni trdnosti $\sigma_N / f_{c,0,a}$, pri izbranih razmerjih nateznih trdnosti proti asimptotičnim tlačnim trdnostim $f_{t,0,k} / f_{c,0,a}$ (prirejeno po Timber Engineering: Edited by Thelandersson S. and Larsen H. J.; 2003, str. 204)
- Slika 3-18: Razpored upogibnih napetosti σ_m in strižnih napetosti τ po višini pravokotnega prečnega prereza pod vplivom obremenitve z upogibnim momentom M ter prečne sile V , v primeru elastičnega oziroma elasto-plastičnega obnašanja (Timber Engineering: Edited by Thelandersson S. and Larsen H. J.; 2003, str. 205)
- Slika 3-19: Pravokotni prečni prerez pod vplivom ekscentrične osne tlačne obtežbe N z ekscentričnostjo e_z v smeri šibke osi $z-z$ (a), z ekscentričnostjo e_y v smeri močne osi $y-y$ (b), z dvojno ekscentričnostjo e_z in e_y (c) (Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 164)
- Slika 3-20: Element členkasto podprt na obeh konceh, pod vplivom osne tlačne obtežbe in porazdeljene prečne obtežbe (Timber Engineering: Edited by Thelandersson S. and Larsen H. J.; 2003, str. 216)
- Slika 3-21: Porušni kriterij za element pod vplivom kombinirane obremenitve z osno tlačno silo in upogibnim momentom, z vrednostmi razmerja osne obtežbe proti osni porušni obtežbi ter upogibne obtežbe proti upogibni porušni obtežbi ob upoštevanju elastične (a) oziroma plastične teorije (b) (prirejeno po Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 165)

- Slika 3-22: Interakcijski diagram za element pod vplivom kombinirane obremenitve z osno tlačno silo in dvoosnim upogibom, z vrednostmi razmerja osne obtežbe proti osni mejni obtežbi ter upogibne obtežbe proti upogibni mejni obtežbi okoli osi $y-y$ oziroma $z-z$ (pri kateri je upoštevan redukcijski faktor k_m), v primeru ko sta vrednosti obeh relativnih vitkosti $\lambda_{rel,y} \leq 0.3$ in $\lambda_{rel,z} \leq 0.3$ (prirejeno po Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 165)
- Slika 3-23: Interakcijski diagram za element pod vplivom kombinirane obremenitve z osno tlačno silo in dvoosnim upogibnim momentom, z vrednostmi razmerja osne obtežbe proti osni porušni obtežbi (v odvisnosti od k_c) ter upogibne obtežbe proti upogibni porušni obtežbi okoli osi $y-y$ oziroma $z-z$ (pri kateri je upoštevan redukcijski faktor k_m), v primeru ko je vrednost relativne vitkosti $\lambda_{rel,y} > 0.3$ in/ali $\lambda_{rel,z} > 0.3$ (prirejeno po Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 166)
- Slika 3-24: Interakcijski diagram za element pod vplivom kombinirane obremenitve z osno tlačno silo in enoosnim upogibnim momentom, z vrednostmi razmerja osne tlačne napetosti proti osni tlačni trdnosti v smeri vlaken (reducirane z uklonskim koeficientom $k_{c,z}$) ter upogibne napetosti proti upogibni trdnosti okoli močne osi $y-y$ (Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 167)
- Slika 3-25: Interakcijski diagram za element pod vplivom kombinirane obremenitve z osno tlačno silo in enoosnim upogibnim momentom, z vrednostmi razmerja osne tlačne napetosti proti osni tlačni trdnosti v smeri vlaken (reducirane z uklonskim koeficientom $k_{c,z}$) ter upogibne napetosti proti upogibni trdnosti okoli močne osi $y-y$, glede na enačbo (3-65) oziroma (3-66) (velja za vrednost faktorja redukcije upogibne trdnosti zaradi bočne zvrnitve $k_{crit} = 1$) (Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 168)
- Slika 4-1: Začetna nedeformirana oblika konzolnega elementa (CSI Analysis Reference Manual For SAP2000, ETABS, and SAFE; 2008, str. 346)
- Slika 4-2: Deformirana oblika konzolnega elementa (CSI Analysis Reference Manual For SAP2000, ETABS, and SAFE; 2008, str. 346)
- Slika 4-3: Diagram upogibnega momenta pri določitvi ravnotežja na začetni nedeformirani obliki konzolnega elementa (CSI Analysis Reference Manual For SAP2000, ETABS, and SAFE; 2008, str. 348)

- Slika 4-4: Diagram upogibnega momenta pri določitvi ravnotežja na deformirani obliki konzolnega elementa pri osni natezni obremenitvi (ob upoštevanju P-delta vpliva) (CSI Analysis Reference Manual For SAP2000, ETABS, and SAFE; 2008, str. 348)
- Slika 4-5: Diagram upogibnega momenta pri določitvi ravnotežja na deformirani obliki konzolnega elementa pri osni tlačni obremenitvi (ob upoštevanju P-delta vpliva) (CSI Analysis Reference Manual For SAP2000, ETABS, and SAFE; 2008, str. 348)
- Slika 5-1: Primer A: Leseni steber pod vplivom centrične osne tlačne obremenitve
- Slika 5-2: Primer A: Leseni steber pod vplivom centrične osne tlačne obremenitve in ekvivalentne prečne obtežbe q_0 (odstopanje od ravne osi $e_0 = L / 300$, uklonska analiza in statična geometrijsko nelinearna analiza P-delta z uporabo računalniškega programa SAP2000)
- Slika 5-3: Vrednosti prečnega pomika osi na sredini višine stebra, v odvisnosti od vrednosti tlačne obtežbe v smeri osi stebra, iz statične geometrijsko nelinearne analize P-delta, z računalniškim programom SAP2000, pri 49. koraku od 50 izbranih korakov analize
- Slika 5-4: Vrednosti prečnega pomika osi na sredini višine stebra, v odvisnosti od vrednosti tlačne obtežbe v smeri osi stebra, iz statične geometrijsko nelinearne analize P-delta, z računalniškim programom SAP2000, pri 50. koraku od 50 izbranih korakov analize
- Slika 5-5: Primer B: Leseni steber pod vplivom ekscentrične osne tlačne obremenitve
- Slika 5-6: Primer B: Leseni steber pod vplivom ekscentrične osne tlačne obremenitve in ekvivalentne prečne obtežbe q_0 (odstopanje od ravne osi $e_0 = L / 300$, uklonska analiza in statična geometrijsko nelinearna analiza P-delta z uporabo računalniškega programa SAP2000)
- Slika 5-7: Vrednosti prečnega pomika osi na sredini višine stebra, v odvisnosti od vrednosti tlačne obtežbe v smeri osi stebra, iz statične geometrijsko nelinearne analize P-delta, z računalniškim programom SAP2000, pri 49. koraku od 50 izbranih korakov analize
- Slika 5-8: Vrednosti prečnega pomika osi na sredini višine stebra, v odvisnosti od vrednosti tlačne obtežbe v smeri osi stebra, iz statične geometrijsko nelinearne analize P-delta, z računalniškim programom SAP2000, pri 50. koraku analize od 50 izbranih korakov analize

Slika 5-9: Primer C: Leseni steber pod vplivom ekscentrične osne tlačne obremenitve

Slika 5-10: Primer C: Leseni steber pod vplivom ekscentrične osne tlačne obremenitve in ekvivalentne prečne obtežbe q_0 (odstopanje od ravne osi $e_0 = L / 300$, uklonska analiza in statična geometrijsko nelinearna analiza P-delta z uporabo računalniškega programa SAP2000)

Slika 5-11: Vrednosti prečnega pomika osi na nepodprtem koncu stebra, v odvisnosti od vrednosti tlačne obtežbe v smeri osi stebra, iz statične geometrijsko nelinearne analize P-delta, z računalniškim programom SAP2000, pri 49. koraku od 50 izbranih korakov analize

Slika 5-12: Vrednosti prečnega pomika osi na nepodprtem koncu stebra, v odvisnosti od vrednosti tlačne obtežbe v smeri osi stebra, iz statične geometrijsko nelinearne analize P-delta, z računalniškim programom SAP2000, pri 50. koraku od 50 izbranih korakov analize

Slika 5-13: Primer D: Leseni steber pod vplivom centrične osne tlačne obremenitve

Slika 5-14: Primer D: Leseni steber pod vplivom centrične osne tlačne obremenitve in ekvivalentne prečne obtežbe q_0 (odstopanje od ravne osi $e_0 = L / 300$, uklonska analiza in statična geometrijsko nelinearna analiza P-delta z uporabo računalniškega programa SAP2000)

Slika 5-15: Vrednosti prečnega pomika osi na 0.65-krat višina stebra (od spodaj navzgor), v odvisnosti od vrednosti tlačne obtežbe v smeri osi stebra, iz statične geometrijsko nelinearne analize P-delta, z računalniškim programom SAP2000, pri 49. koraku od 50 izbranih korakov analize

Slika 5-16: Vrednosti prečnega pomika osi na 0.65-krat višine stebra (od spodaj navzgor), v odvisnosti od vrednosti tlačne obtežbe v smeri osi stebra, iz statične geometrijsko nelinearne analize P-delta, z računalniškim programom SAP2000, pri 50. koraku od 50 izbranih korakov analize

Slika 5-17: Primer E: Leseni steber pod vplivom centrične osne tlačne obremenitve

Slika 5-18: Primer E: Leseni steber pod vplivom centrične osne tlačne obremenitve in ekvivalentne prečne obtežbe q_0 (odstopanje od ravne osi $e_0 = L / 300$, uklonska analiza in statična geometrijsko nelinearna analiza P-delta z uporabo računalniškega programa SAP2000)

Slika 5-19: Vrednosti prečnega pomika osi na sredini višine stebra, v odvisnosti od vrednosti tlačne obtežbe v smeri osi stebra, iz statične geometrijsko nelinearne analize P-delta, z računalniškim programom SAP2000, pri 49. koraku od 50 izbranih korakov analize

Slika 5-20: Vrednosti prečnega pomika osi na sredini višine stebra, v odvisnosti od vrednosti tlačne obtežbe v smeri osi stebra, iz statične geometrijsko nelinearne analize P-delta, z računalniškim programom SAP2000, pri 50. koraku od 50 izbranih korakov analize

Slika 5-21: Primer F: Leseni steber pod vplivom centrične osne tlačne obremenitve

Slika 5-22: Primer F: Leseni steber pod vplivom centrične osne tlačne obremenitve in ekvivalentne prečne obtežbe q_0 (odstopanje od ravne osi $e_0 = L / 300$, uklonska analiza in statična geometrijsko nelinearna analiza P-delta z uporabo računalniškega programa SAP2000)

Slika 5-23: Vrednosti prečnega pomika osi na zgornjem koncu stebra, v odvisnosti od vrednosti tlačne obtežbe v smeri osi stebra, iz statične geometrijsko nelinearne analize P-delta, z računalniškim programom SAP2000, pri 49. koraku od 50 izbranih korakov analize

Slika 5-24: Vrednosti prečnega pomika osi na zgornjem koncu stebra, v odvisnosti od vrednosti tlačne obtežbe v smeri osi stebra, iz statične geometrijsko nelinearne analize P-delta, z računalniškim programom SAP2000, pri 50. koraku od 50 izbranih korakov analize

1 UVOD

Magistrsko delo obravnava dimenzioniranje lesenih stebrov pod vplivom kombinirane osne tlačne in upogibne obremenitve po Evrokodu 5 oziroma po pravilih iz standarda SIST EN 1995-1-1.

Drugo poglavje obravnava elastični uklon po teoriji elastične stabilnosti. Predstavljene so diferencialne enačbe upogibnice stebra oziroma nosilca pod vplivom kombinirane osne tlačne in prečne obtežbe glede na osnovno upogibno teorijo. S temi enačbami pridemo pri teoriji elastične stabilnosti do enačbe upogibnice za steber oziroma nosilec pod vplivom kombinirane osne tlačne in prečne obtežbe ali momentne obtežbe, pri različnih pogojih podpiranja. Predstavljene so tudi diferencialne enačbe za določitev Euler-jeve kritične uklonske sile, do katerih pa pridemo pri linearni oziroma elastični stabilnostni analizi iz osnovnih diferencialnih enačb za upogib, ob upoštevanju začetno idealno ravnega stebra oziroma nosilca, ki je obremenjen s centrično tlačno obtežbo, pri različnih pogojih podpiranja. Obravnavan je tudi vpliv začetne nepopolnosti geometrije in ekscentričnosti osne tlačne obtežbe na določitev kritičnih napetosti.

Tretje poglavje obravnava dimenzioniranje lesenih stebrov pod vplivom kombinirane osne tlačne in upogibne obremenitve po Evrokodu 5. Predstavljena so pravila za dimenzioniranje lesenih elementov pod vplivom upogibne obremenitve z upoštevanjem bočne zvrnitve. Predstavljena so pravila za dimenzioniranje lesenih elementov pod vplivom osne tlačne obremenitve z upoštevanjem uklona. Predstavljena so tudi pravila za dimenzioniranje lesenih elementov pod vplivom kombinirane osne tlačne in upogibne obremenitve z upoštevanjem problemov stabilnosti oziroma uklona ter bočne zvrnitve.

Četrto poglavje predstavlja linearno-elastično stabilnostno analizo in statično geometrijsko nelinearno analizo P-delta v računalniškem programu SAP2000.

V petem poglavju so predstavljeni računski primeri dimenzioniranja lesenih stebrov pod vplivom kombinirane osne tlačne in upogibne obremenitve po Evrokodu 5, ki se nanaša le na

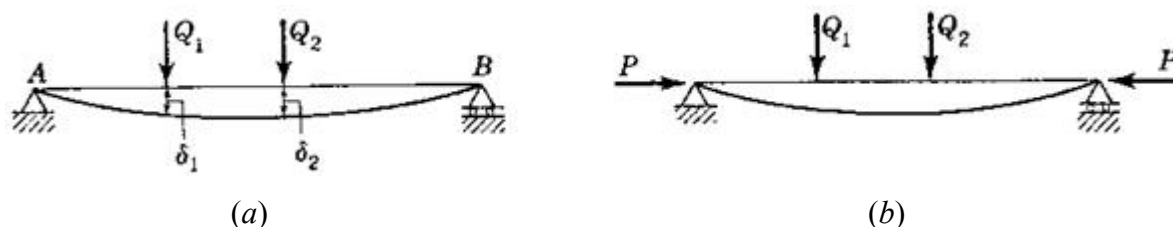
stabilnostno analizo. Prvi primer prikazuje dimenzioniranje lesenega stebra pod vplivom centrične osne tlačne obtežbe, kjer je izvedena še primerjava z analizo iz računalniškega programa SAP2000. Z uporabo tega programa dobimo pri linearni stabilnostni analizi, kritični uklonski koeficient, pri statični geometrijsko nelinearni analizi P-delta pa opazujemo nelinearno naraščanje vrednosti pomikov v odvisnosti od naraščanja obtežbe proti kritični uklonski vrednosti. Ostali primeri prikazujejo dimenzioniranje različno podprtih lesenih stebrov pod vplivom ekscentrične in centrične osne tlačne obtežbe ob primerjavi z analizo iz računalniškega programa.

2 ELASTIČNI UKLON STEBRA-NOSILCA

2.1 Diferencialna enačba upogibnice stebra-nosilca

Naslednje besedilo v poglavju 2 (od str. 3 do str. 56) je v celoti povzeto iz literature Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961.

Pri osnovni upogibni teoriji so napetosti in upogibki oziroma specifične deformacije stebra-nosilca sorazmerne z nanešeno obtežbo. Ta pogoj zahteva, da sprememba oblike stebra-nosilca pri upogibu ne vpliva na učinek nanešene obtežbe. Na primer, če je element s slike 2-1 (a) pod vplivom samo prečne obtežbe kot sta npr. sili Q_1 , Q_2 , potem majhna upogibka δ_1 , δ_2 in majhne spremembe vertikalne lege obtežbe zanemarljivo vplivajo na upogibne momente ter prečne sile. Zato lahko izračunamo upogibke, napetosti, upogibne momente itd. na začetni nedeformirani legi elementa. Pod temi pogoji in če pri materialu velja Hooke-ov zakon, so upogibki sorazmerni z delujočimi silami. Zato tu velja pravilo superpozicije, kjer lahko končne učinke dobimo z vsoto učinkov, ki jih povzročijo posamesne sile.



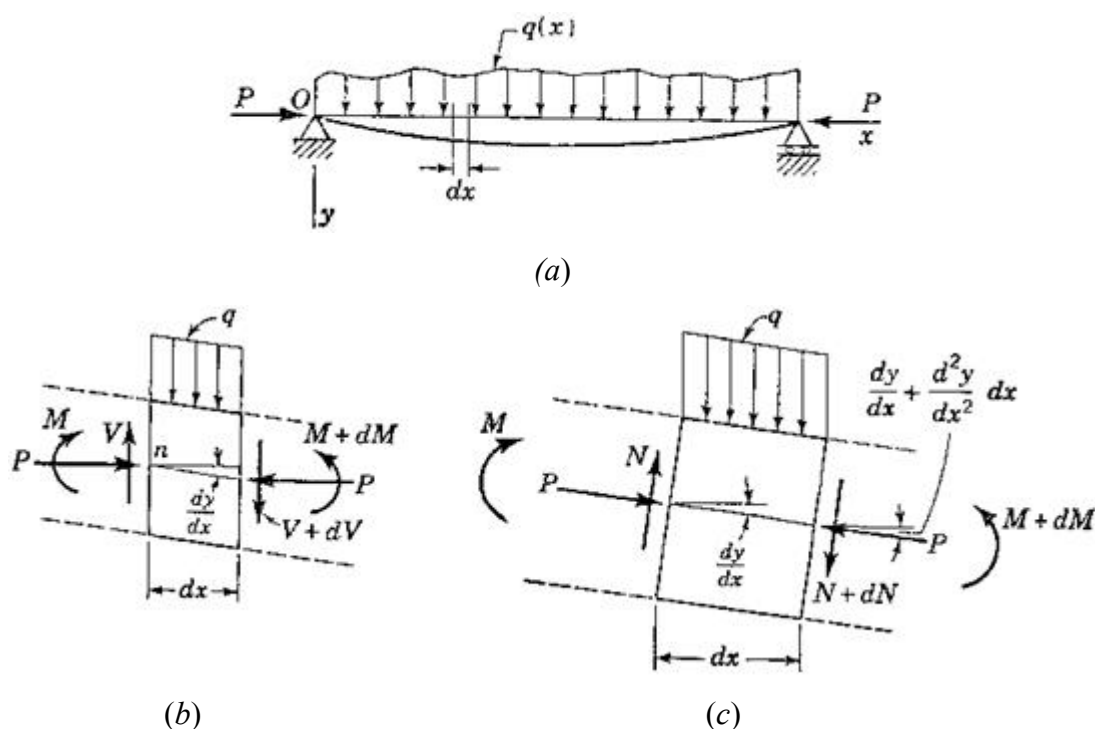
Slika 2-1: Element členkasto podprt na obeh koncih pod vplivom prečne koncentrirane obtežbe (a) in pod vplivom kombinirane osne tlačne ter prečne koncentrirane obtežbe (b) (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 2)

Razmere so popolnoma drugačne, ko na elementu hkrati deluje obtežba v vzdolžni in prečni smeri, kot na sliki 2-1 (b). Upogibni momenti, prečne sile, napetosti in upogibki oziroma deformacije takrat niso sorazmerni z velikostjo osne obtežbe. Vrednosti teh količin so odvisne od velikosti nastalih upogibkov in so občutljive tudi na majhne vrednosti ekscentričnosti pri katerih je nanešena osna obtežba. Element pri istočasnem kombiniranem vplivu osne tlačne

obtežbe in prečne obtežbe se imenuje steber-nosilec (column-beam).

2.1.1 Osnovne diferencialne enačbe

Osnovne enačbe za analizo stebra-nosilca je možno izpeljati ob upoštevanju tlačnega elementa s prečno obtežbo s slike 2-2 (a). Element je obremenjen s tlačno silo P in z razporejeno prečno obtežbo s spremenljivo vrednostjo q vzdolž elementa. Slika 2-2 (b) prikazuje obravnavani del elementa dolžine dx med dvema prečnima prerezoma z normalo, ki je vzporedna začetni nedeformirani osi elementa. Pri prečni obtežbi lahko upoštevamo konstantno vrednost q na razdalji dx , kjer pozitivna vrednost kaže v smeri y osi, v tem primeru pa je to navzdol. Prečna sila V in upogibni moment M , ki delujeta ob straneh dela elementa (dx) sta pozitivna, če delujeta v smereh kot je prikazano na sliki 2-2 (b).



Slika 2-2: Element členkasto podprt na obeh koncih pod vplivom kombinirane osne tlačne in prečne razporejene obtežbe (a), del elementa dx z vertikalnima stranicama pravokotnima glede na začetno nedeformirano x os (b), del elementa dx kjer normala stranskih ploskev predstavlja tangento na deformirano x os elementa (c) (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 3)

Zvezo med obtežbo in prečno silo V ter upogibnim momentom M dobimo iz ravnotežja na delu elementa dx s slike 2-2 (b). Z vsoto sil v y smeri dobimo:

$$-V + q \cdot dx + (V + dV) = 0$$

oziroma:

$$q = -\frac{dV}{dx}. \quad (2-1)$$

Če izračunamo vsoto momentov glede na točko n , kjer upoštevamo da je kot med deformirano osjo elementa in horizontalno osjo majhen, dobimo:

$$M + q \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} + (V + dV) \cdot dx - (M + dM) + P \cdot \frac{dy}{dx} \cdot dx = 0.$$

Če člen drugega reda $(-q \cdot dx^2 / 2)$ zanemarimo, lahko to enačbo spremenimo v obliko:

$$V = \frac{dM}{dx} - P \cdot \frac{dy}{dx}. \quad (2-2)$$

Če učinek strižnih deformacij in vzdolžnih deformacij osi elementa zanemarimo, lahko upoštevamo izraz za ukrivljenost osi elementa:

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = -M. \quad (2-3)$$

Produkt $E \cdot I$ predstavlja upogibno togost elementa v ravnini upogiba, to je v ravnini xy , ki je predpostavljena kot ravnina simetrije. S povezavo enačbe (2-3) z enačbami (2-1) in (2-2) lahko diferencialno enačbo osi elementa izrazimo v drugih dveh oblikah:

$$E \cdot I \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + P \cdot \frac{dy}{dx} = -V \quad (2-4)$$

in

$$E \cdot I \cdot \frac{d^4 y}{dx^4} + P \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = q. \quad (2-5)$$

Enačbe od (2-1) do (2-2) so osnovne diferencialne enačbe za upogib stebra-nosilca. Če za osno silo P vzamemo vrednost nič, se te enačbe spremenijo v običajne enačbe za upogib elementa s samo prečno obtežbo.

Namesto dela elementa dx z vertikalnima stranicama pravokotnima glede na začetno nedeformirano x os, s slike 2-2 (b), lahko obravnavamo del elementa dx , kjer normala stranskih ploskev predstavlja tangento na deformirano x os elementa, kot na sliki 2-2 (c). Ker je nagib tangente majhen, lahko osne sile ob straneh dela elementa dx enačimo z vzdolžno obtežbo P . Prečna sila N v tem primeru oziroma prečna sila s slike 2-2 (c), je s prečno silo V s slike 2-2 (b) povezana z izrazom:

$$N = V + P \cdot \frac{dy}{dx} \quad (2-6)$$

in tako namesto enačb (2-1) in (2-2) v tem primeru dobimo enačbi:

$$q = -\frac{dN}{dx} + P \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (2-7)$$

in

$$N = \frac{dM}{dx}. \quad (2-8)$$

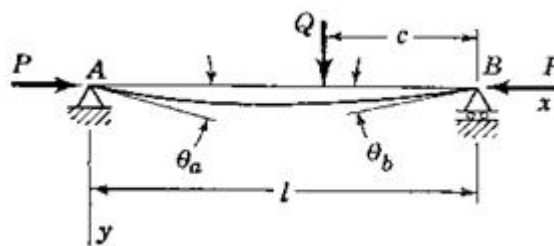
Enačbi (2-7) in (2-8) lahko izpeljemo z upoštevanjem ravnotežja na delu elementa dx s slike 2-2 (c). Z vstavljanjem enačbe (2-8) v enačbo (2-3) dobimo enačbo:

$$E \cdot I \cdot \frac{d^3 y}{dx^3} = -N. \quad (2-9)$$

Enačba (2-5) velja tudi v primeru dela elementa dx s slike 2-2 (c). Tako dobimo dve vrsti diferencialnih enačb za steber-nosilec, glede na to ali prečna sila deluje pravokotno na normalo pri deformirani ali nedeformirani osi elementa.

2.1.2 Steber-nosilec s koncentrirano prečno obtežbo

V primeru elementa s slike 2-3, z dolžino l in s prečno obtežbo v obliki ene koncentrirane sile Q na razdalji c od desne podpore, lahko vrednost upogibnega momenta izračunamo na podlagi ravnotežja na nedeformirani konstrukciji. Osa obtežba P povzroča upogibni moment, katerega ne moremo določiti brez izračunanih upogibkov. Element je v tem primeru statično nedoločen in zato je potrebno najprej rešiti diferencialno enačbo za upogibnico elementa.



Slika 2-3: Element členkasto podprt na obeh koncih dolžine l s kombinirano tlačno vzdolžno obtežbo P in prečno koncentrirano obtežbo Q na razdalji c od desne podpore (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 4)

Upogibna momenta elementa z leve in desne strani od mesta obtežbe sta:

$$M = \frac{Q \cdot c}{l} \cdot x + P \cdot y \quad \text{in} \quad M = \frac{Q \cdot (l - c)}{l} \cdot (l - x) + P \cdot y,$$

kjer z uporabo enačbe (2-3) dobimo:

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Q \cdot c}{l} \cdot x - P \cdot y \quad (2-10)$$

ter

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{Q \cdot (l - c) \cdot (l - x)}{l} - P \cdot y. \quad (2-11)$$

Z upoštevanjem naslednje oznake:

$$k^2 = \frac{P}{E \cdot I} \quad (2-12)$$

v enačbi (2-10), pa dobimo:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 \cdot y = - \frac{Q \cdot c}{E \cdot I \cdot l} \cdot x.$$

Osnovna rešitev te diferencialne enačbe je:

$$y = A \cdot \cos(k \cdot x) + B \cdot \sin(k \cdot x) - \frac{Q \cdot c}{P \cdot l} \cdot x. \quad (2-13)$$

Na enak način dobimo osnovno rešitev diferencialne enačbe (2-11):

$$y = C \cdot \cos(k \cdot x) + D \cdot \sin(k \cdot x) - \frac{Q \cdot (l - c) \cdot (l - x)}{P \cdot l}. \quad (2-14)$$

Integracijske konstante A , B , C in D določimo iz robnih pogojev na koncih nosilca ter v točki, kjer je nanešena obtežba Q . Ker sta upogibka na koncih nosilca enaka nič dobimo:

$$A = 0 \quad \text{in} \quad C = -D \cdot \operatorname{tg}(k \cdot l). \quad (2-15)$$

V točki kjer je nanešena obtežba Q moramo dobiti z upoštevanjem upogibnice iz dveh delov oziroma z uporabo katerekoli izmed enačb (2-13) in (2-14), enak upogibek ter enak naklon tangente na upogibnico. Iz teh pogojev sledi:

$$\begin{aligned}
 & B \cdot \sin(k \cdot (l - c)) - \frac{Q \cdot c}{P \cdot l} \cdot (l - c) = \\
 & = D \cdot [\sin(k \cdot (l - c)) - \operatorname{tg}(k \cdot l) \cdot \cos(k \cdot (l - c))] - \frac{Q \cdot c}{P \cdot l} \cdot (l - c), \\
 & B \cdot k \cdot \cos(k \cdot (l - c)) - \frac{Q \cdot c}{P \cdot l} = \\
 & = D \cdot k \cdot [\cos(k \cdot (l - c)) + \operatorname{tg}(k \cdot l) \cdot \sin(k \cdot (l - c))] + \frac{Q \cdot (l - c)}{P \cdot l},
 \end{aligned}$$

od tod dobimo:

$$B = \frac{Q \cdot \sin(k \cdot c)}{P \cdot k \cdot \sin(k \cdot l)} \quad \text{in} \quad D = -\frac{Q \cdot \sin(k \cdot (l - c))}{P \cdot k \cdot \operatorname{tg}(k \cdot l)}. \quad (2-16)$$

Z vstavljanjem konstant iz enačb (2-15) in (2-16) v enačbi (2-13) ter (2-14) dobimo naslednji enačbi za upogibnico iz dveh delov:

$$y = \frac{Q \cdot \sin(k \cdot c)}{P \cdot k \cdot \sin(k \cdot l)} \cdot \sin(k \cdot x) - \frac{Q \cdot c}{P \cdot l} \cdot x, \quad (2-17)$$

$$\text{za } 0 \leq x \leq (l - c),$$

$$y = \frac{Q \cdot \sin(k \cdot (l - c))}{P \cdot k \cdot \sin(k \cdot l)} \cdot \sin(k \cdot (l - x)) - \frac{Q \cdot (l - c) \cdot (l - x)}{P \cdot l}, \quad (2-18)$$

$$\text{za } (l - c) \leq x \leq l.$$

Enačbo (2-18) lahko dobimo iz enačbe (2-17), če vanjo namesto c vstavimo $(l - c)$ in namesto x vstavimo $(l - x)$.

Z odvajanjem enačb (2-17) in (2-18) dobimo naslednje enačbe:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q \cdot \sin(k \cdot c)}{P \cdot \sin(k \cdot l)} \cdot \cos(k \cdot x) - \frac{Q \cdot c}{P \cdot l}, \quad (2-19)$$

$$\text{za } 0 \leq x \leq (l - c),$$

in tudi:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{Q \cdot \sin(k \cdot (l - c))}{P \cdot \sin(k \cdot l)} \cdot \cos(k \cdot (l - x)) + \frac{Q \cdot (l - c)}{P \cdot l}, \quad (2-20)$$

$$\text{za } (l - c) \leq x \leq l,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{Q \cdot k \cdot \sin(k \cdot c)}{P \cdot \sin(k \cdot l)} \cdot \sin(k \cdot x), \quad (2-21)$$

$$\text{za } 0 \leq x \leq (l - c),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{Q \cdot k \cdot \sin(k \cdot (l - c))}{P \cdot \sin(k \cdot l)} \cdot \sin(k \cdot (l - x)), \quad (2-22)$$

$$\text{za } (l - c) \leq x \leq l,$$

V primeru prečne obtežbe nanešene na sredini elementa, je upogibnica simetrična, zato lahko obravnavamo samo del, ki je levo od obtežbe. Maksimalni upogibek dobimo, če v enačbi (2-17) upoštevamo vrednost $x = c = l / 2$, kar nam da:

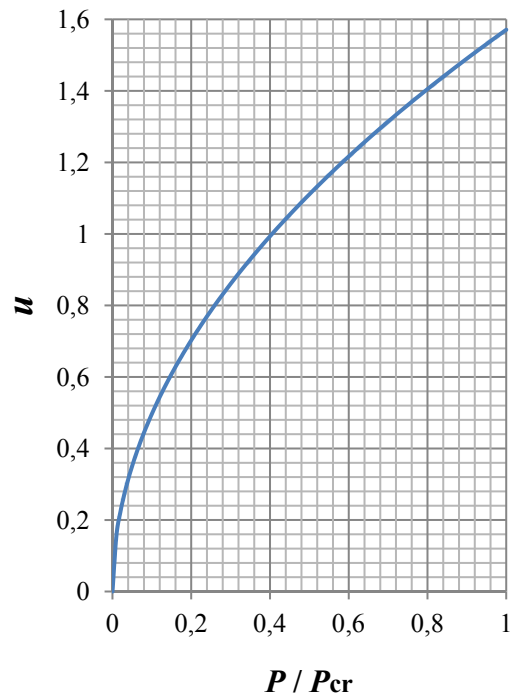
$$\delta = (y)_{x=l/2} = \frac{Q}{2 \cdot P \cdot k} \cdot \left(\operatorname{tg} \left(\frac{k \cdot l}{2} \right) - \frac{k \cdot l}{2} \right). \quad (2-23)$$

Za poenostavitev te enačbe uporabimo oznako:

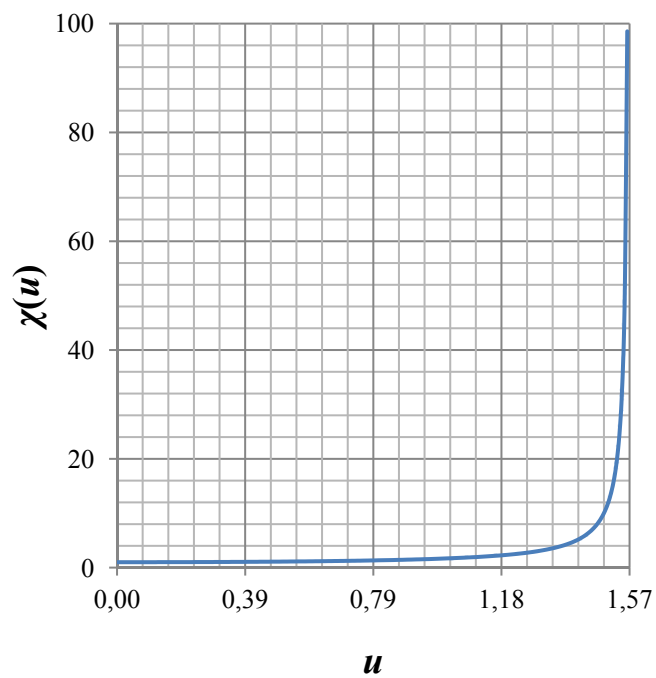
$$u = \frac{k \cdot l}{2} = \frac{l}{2} \cdot \sqrt{\frac{P}{E \cdot I}}. \quad (2-24)$$

Tako iz enačbe (2-23) lahko dobimo:

$$\delta = \frac{Q \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{3 \cdot (\operatorname{tg}(u) - u)}{u^3} = \delta(Q) \cdot \chi(u). \quad (2-25)$$



Slika 2-4: Vrednost u v odvisnosti od vrednosti razmerja osne tlačne sile proti kritični uklonski sili P / P_{cr}



Slika 2-5: Vrednost χ v odvisnosti od vrednosti u

Prvi faktor oziroma prvi del desne strani enačbe (2-25) predstavlja upogibek zaradi delovanja le prečne obtežbe Q . Drugi faktor $\chi(u)$ v enačbi (2-25) pa predstavlja vpliv obtežbe P na upogibek δ .

Ko je vrednost obtežbe P majhna je vrednost u iz enačbe (2-24) prav tako majhna in faktor $\chi(u)$ je zato blizu vrednosti ena. To lahko prikažemo z zaporedjem:

$$\operatorname{tg}(u) = u + \frac{u^3}{3} + \frac{2 \cdot u^5}{15} + \dots,$$

kjer upoštevamo samo prva dva člena zaporedja. Faktor $\chi(u)$ se približuje neskončni vrednosti, ko se u približuje vrednosti $\pi / 2$. Ko ima u vrednost $u = \pi / 2$, dobimo iz enačbe (2-24):

$$P(u = \pi/2) = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2} = P_{\text{cr}}. \quad (2-26)$$

Ugotovimo lahko, da pri mejni vrednosti obtežbe iz enačbe (2-26), že majhna vrednost prečne obtežbe povzroči neskončen upogibek. Ta mejna vrednost osne tlačne obtežbe se imenuje kritična obtežba in se označuje s P_{cr} . Ob upoštevanju enačbe (2-26) za določitev kritične vrednosti osne obtežbe, lahko vrednost u iz enačbe (2-24) izrazimo v naslednji obliki:

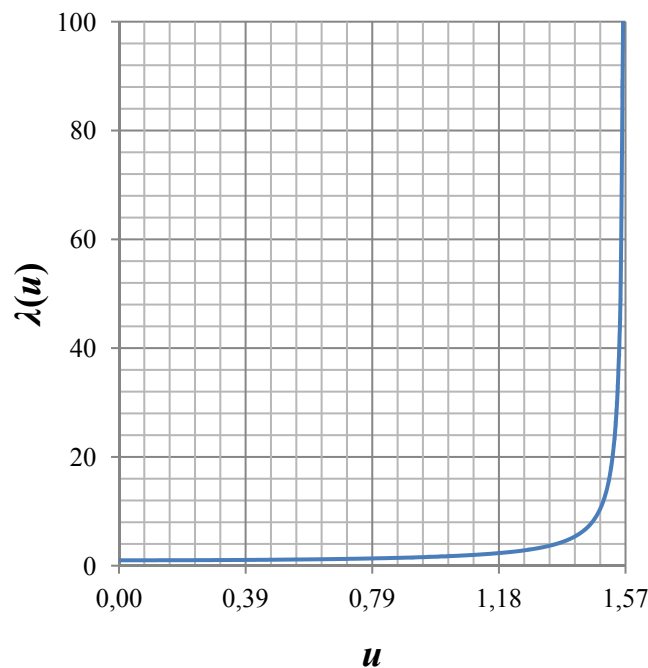
$$\begin{aligned} E \cdot I &= \frac{P_{\text{cr}} \cdot l^2}{\pi^2}, \\ u &= \frac{l}{2} \cdot \sqrt{\frac{P}{E \cdot I}} = \frac{l}{2} \cdot \sqrt{\frac{P \cdot \pi^2}{P_{\text{cr}} \cdot l^2}}, \\ u &= \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{P}{P_{\text{cr}}}}. \end{aligned} \quad (2-27)$$

Tako je vrednost u odvisna samo od maksimalne vrednosti razmerja P / P_{cr} .

Za določitev naklona tangente na upogibnico, na levem koncu elementa, vstavimo vrednosti $c = l / 2$ in $x = 0$ v enačbo (2-19), in dobimo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} &= \frac{Q}{2 \cdot P} \cdot \left(\frac{1}{\cos(k \cdot l / 2)} - 1\right) = \\ &= \frac{Q \cdot l^2}{16 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{2 \cdot (1 - \cos(u))}{u^2 \cdot \cos(u)} = \frac{Q \cdot l^2}{16 \cdot E \cdot I} \cdot \lambda(u). \end{aligned} \quad (2-28)$$

Prvi faktor oziroma prvi del desne strani enačbe (2-28) predstavlja naklon tangente na upogibnico na koncu elementa, zaradi delovanja le prečne obtežbe Q nanešene na sredini elementa. Drugi faktor $\lambda(u)$, v enačbi (2-28) pa predstavlja vpliv osne obtežbe P na velikost naklona tangente na upogibnico na koncu elementa.



Slika 2-6: Vrednost λ v odvisnosti od vrednosti u

Z upoštevanjem enačbe (2-21) v enačbi (2-3) in vstavljanjem $c = l/2$ in $x = l/2$, dobimo naslednji izraz za maksimalni upogibni moment elementa na sredini razpona:

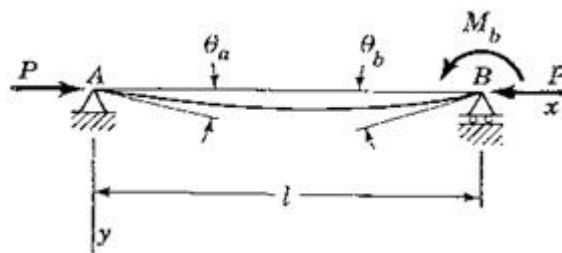
$$M_{\max} = -E \cdot I \cdot \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=l/2} = \frac{Q \cdot k \cdot E \cdot I}{2 \cdot P} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{k \cdot l}{2}\right) = \frac{Q \cdot l}{4} \cdot \frac{\operatorname{tg}(u)}{u}. \quad (2-29)$$

Maksimalni upogibni moment elementa dobimo v tem primeru z množenjem vrednosti upogibnega momenta zaradi prečne obtežbe s faktorjem $tg(u) / u$. Vrednost tega faktorja, kakor tudi prej omenjenih trigonometričnih faktorjev $\lambda(u)$, $\chi(u)$ se približuje vrednosti ena, pri zmanjševanju osne tlačne obtežbe proti vrednosti nič in se približuje neskončni vrednosti, ko se vrednost u približuje $\pi / 2$ oziroma, ko se vrednost osne tlačne obtežbe približuje kritični vrednosti sile P_{cr} iz enačbe (2-26).

2.1.3 Steber-nosilec s koncentrirano momentno obtežbo

Na osnovi rešitev iz primera elementa obremenjenega z osno in prečno obtežbo, s slike 2-3, lahko pridemo do enačbe upogibnice za primer osno obremenjenega elementa, ki je na enem koncu obremenjen še z obtežbo v obliki koncentriranega momenta. V tem primeru predpostavimo, da se razdalja c s slike 2-3 približuje vrednosti nič, istočasno pa obtežba Q narašča, tako da ima produkt $Q \cdot c$ končno vrednost, ki je enaka M_b . Tako lahko dobimo končno vrednost upogibnega momenta, elementa obremenjenega s koncentrirano momentno obtežbo M_b na desnem koncu, kot prikazuje slika 2-7. Upogibnico (za primer, ko osna obtežba P ni enaka nič) lahko dobimo iz enačbe (2-17) z upoštevanjem vrednosti $\sin(k \cdot c) = k \cdot c$ in $Q \cdot c = M_b$:

$$y = \frac{M_b}{P} \cdot \left(\frac{\sin(k \cdot x)}{\sin(k \cdot l)} - \frac{x}{l} \right). \quad (2-30)$$



Slika 2-7: Element členkasto podprt na obeh koncih dolžine l , s kombinirano osno tlačno in koncentrirano momentno obtežbo M_b na desnem koncu (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 12)

Pri zasukih oziroma majhnih kotih zasukov θ_a in θ_b na koncih elementa se upošteva pozitivno

vrednost, če so le ti v smeri pozitivnih upogibnih momentov, kot je prikazano na sliki 2-7. Z odvajanjem enačbe (2-30) dobimo:

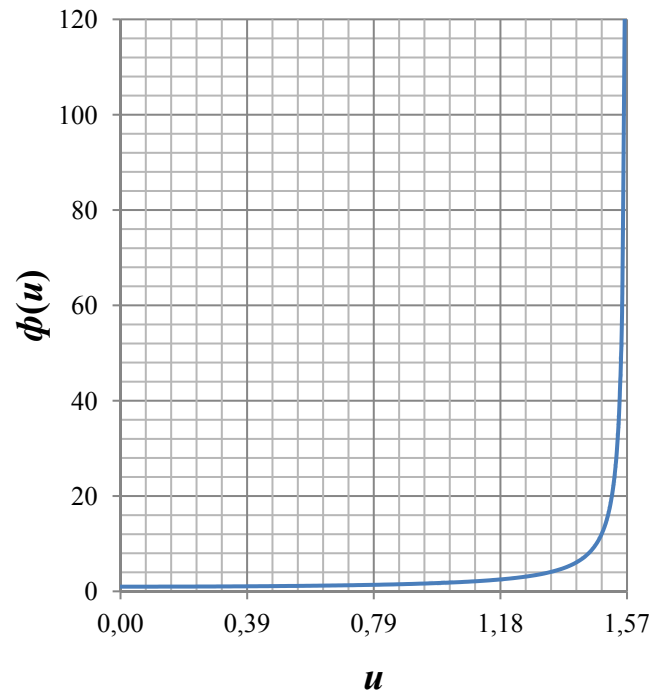
$$\begin{aligned}\theta_a &= \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \frac{M_b}{P} \cdot \left(\frac{k}{\sin(k \cdot l)} - \frac{1}{l}\right) = \\ &= \frac{M_b \cdot l}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{3}{u} \cdot \left(\frac{1}{\sin(2 \cdot u)} - \frac{1}{2 \cdot u}\right),\end{aligned}\quad (2-31)$$

$$\begin{aligned}\theta_b &= -\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = -\frac{M_b}{P} \cdot \left(\frac{k \cdot \cos(k \cdot l)}{\sin(k \cdot l)} - \frac{1}{l}\right) = \\ &= \frac{M_b \cdot l}{3 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{3}{2 \cdot u} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot u} - \frac{1}{\operatorname{tg}(2 \cdot u)}\right).\end{aligned}\quad (2-32)$$

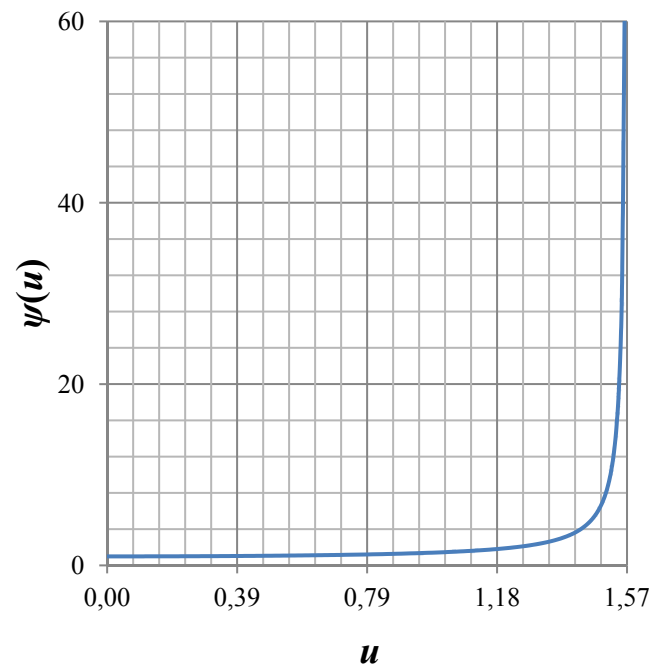
Izraza $M_b \cdot l / (6 \cdot E \cdot I)$ in $M_b \cdot l / (3 \cdot E \cdot I)$, ki predstavljata zasuka θ_a ter θ_b na koncih elementa, zaradi delovanja izključno obtežbe s koncentrirano momentno obtežbo M_b na desnem koncu, sta pomnožena s trigonometričnima faktorjema, ki predstavljata vpliv osne obtežbe P na ta dva zasuka. Ta faktorja zavzameta vrednost ena, ko u zavzame vrednost nič in gresta proti neskončni vrednosti, ko gre u proti vrednosti $\pi / 2$. Za poenostavitev uporabimo naslednja izraza:

$$\phi(u) = \frac{3}{u} \cdot \left(\frac{1}{\sin(2 \cdot u)} - \frac{1}{2 \cdot u}\right), \quad (2-33)$$

$$\psi(u) = \frac{3}{2 \cdot u} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot u} - \frac{1}{\operatorname{tg}(2 \cdot u)}\right). \quad (2-34)$$



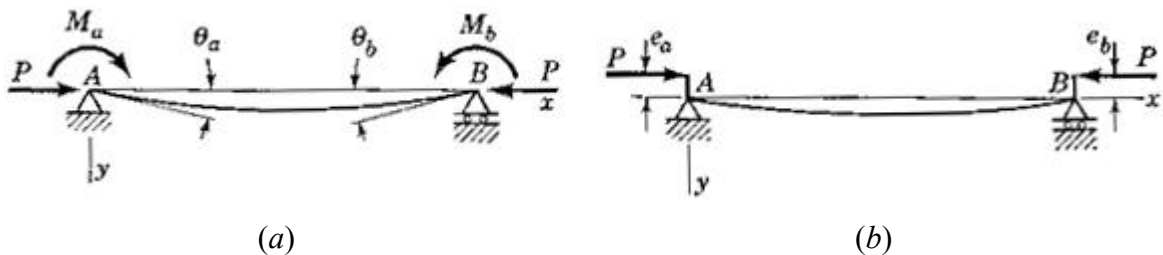
Slika 2-8: Vrednost ϕ v odvisnosti od vrednosti u



Slika 2-9: Vrednost ψ v odvisnosti od vrednosti u

Če sta nanešeni dve koncentrirani momentni obtežbi M_a in M_b na koncih elementa A ter B , kot prikazuje slika 2-10 (a), lahko tudi v primeru osne obtežbe P dobimo upogibnico s superpozicijo. Iz enačbe (2-30) dobimo upogibke zaradi momenta M_b . Nato z vstavljanjem M_a namesto M_b in $(l-x)$ namesto x v enačbo (2-30), dobimo upogibke zaradi momenta M_a . Z vsoto teh rezultatov dobimo upogibnico za primer elementa z dvema koncentriranima momentnima obtežbama s slike 2-10 (a):

$$y = \frac{M_b}{P} \cdot \left(\frac{\sin(k \cdot x)}{\sin(k \cdot l)} - \frac{x}{l} \right) + \frac{M_a}{P} \cdot \left[\frac{\sin(k \cdot (l-x))}{\sin(k \cdot l)} - \frac{l-x}{l} \right]. \quad (2-35)$$



Slika 2-10: Element členkasto podprt na obeh koncih s kombinirano osno tlačno obtežbo in koncentriranima momentnoma M_a ter M_b na obeh koncih elementa (a), element členkasto podprt na obeh koncih z ekscentrično osno tlačno obtežbo (b) (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 13)

Taka vrsta koncentrirane momentne obtežbe na koncih elementa se lahko pojavi pri ekscentrično nanešenih tlačnih silah P v podporah, kot je prikazano na sliki 2-10 (b). Z upoštevanjem $M_a = P \cdot e_a$ in $M_b = P \cdot e_b$ v enačbi (2-35) dobimo:

$$y = e_b \cdot \left(\frac{\sin(k \cdot x)}{\sin(k \cdot l)} - \frac{x}{l} \right) + e_a \cdot \left[\frac{\sin(k \cdot (l-x))}{\sin(k \cdot l)} - \frac{l-x}{l} \right]. \quad (2-36)$$

Zasuka θ_a in θ_b na koncih elementa s slike 2-10 (a) dobimo s superpozicijo rezultatov iz enačb (2-31), (2-32) ob upoštevanju izrazov (2-33), (2-34):

$$\theta_a = \frac{M_a \cdot l}{3 \cdot E \cdot I} \cdot \psi(u) + \frac{M_b \cdot l}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \phi(u), \quad (2-37)$$

$$\theta_b = \frac{M_b \cdot l}{3 \cdot E \cdot I} \cdot \psi(u) + \frac{M_a \cdot l}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \phi(u).$$

V primeru dveh enakih koncentriranih momentov $M_a = M_b = M_0$ na koncih elementa dobimo iz enačbe (2-35):

$$\begin{aligned} y &= \frac{M_0}{P \cdot \cos(k \cdot l / 2)} \cdot \left[\cos\left(\frac{k \cdot l}{2} - k \cdot x\right) - \cos\left(\frac{k \cdot l}{2}\right) \right] = \\ &= \frac{M_0 \cdot l^2}{8 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{2}{u^2 \cdot \cos(u)} \cdot \left[\cos\left(u - \frac{2 \cdot u \cdot x}{l}\right) - \cos(u) \right]. \end{aligned} \quad (2-38)$$

Upogibek na sredini elementa dobimo z vstavljanjem $x = l / 2$ v enačbo (2-38):

$$\delta = (y)_{x=l/2} = \frac{M_0 \cdot l^2}{8 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{2 \cdot (1 - \cos(u))}{u^2 \cdot \cos(u)} = \frac{M_0 \cdot l^2}{8 \cdot E \cdot I} \cdot \lambda(u). \quad (2-39)$$

Zasuka θ_a in θ_b na koncih elementa dobimo z vstavljanjem $x = 0$ v odvod enačbe (2-38):

$$\theta_a = \theta_b = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \frac{M_0 \cdot l}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{tg(u)}{u}. \quad (2-40)$$

Maksimalni upogibni moment na sredini elementa dobimo z drugim odvodom enačbe (2-38):

$$M_{\max} = -E \cdot I \cdot \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=l/2} = M_0 \cdot \sec(u). \quad (2-41)$$

Enačbo (2-41) lahko uporabimo za izračun maksimalnega upogibnega momenta v primeru elementa z ekscentrično nanešenima osnima tlačnima silama na koncih elementa pri enakih ekscentričnostih, s slike 2-10 (b). Ko je osna tlačna obtežba P majhna v primerjavi s kritično obtežbo P_{cr} iz enačbe (2-26), je vrednost u majhna, vrednost $\sec(u)$ je blizu vrednosti ena in v tem primeru lahko predpostavimo konstanten upogibni moment vzdolž elementa. Ko gre u

proti vrednosti $\pi / 2$ in P zavzame kritično vrednost P_{cr} , potem gre $\sec(u)$ proti neskončni vrednosti. Kritična vrednost obtežbe P_{cr} pri že zelo majhni ekscentričnosti povzroči neskončno vrednost upogibnega momenta na sredini elementa.

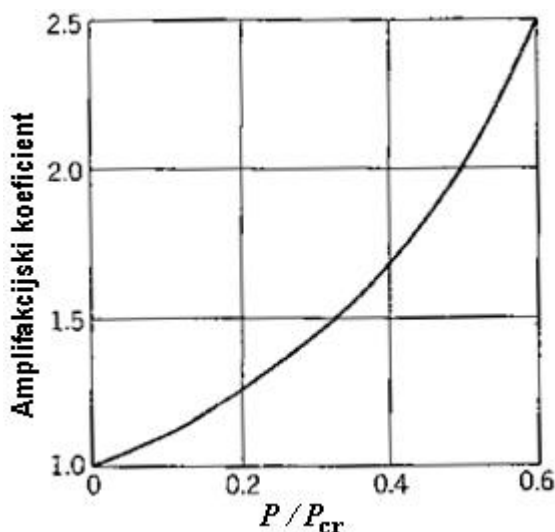
2.1.4 Približna določitev upogibkov

V začetnih fazah dimenzioniranja je ugodno poznati oceno upogibka na sredini členkasto podprtega elementa na obeh koncih. V različnih primerih s simetrično obtežbo, kot so primer s koncentrirano prečno obtežbo na sredini elementa, primer s porazdeljeno obtežbo in primer z obtežbo z enakima koncentriranima momentoma na koncih elementa, je enačba za izračun upogibka sestavljena iz dveh izrazov. Prvi izraz predstavlja upogibek za predpostavljeno obtežbo (brez osne obtežbe), drugi izraz pa predstavlja amplifikacijski faktor odvisen od parametra u , ki ga določa od razmerje dejanske osne in kritične obtežbe P / P_{cr} , kot je podano z enačbo (2-27). Amplifikacijski faktor v primeru s koncentrirano prečno obtežbo na sredini elementa je opisan z izrazom $\chi(u)$, v primeru z obtežbo s koncentriranima momentoma na koncih nosilca pa je opisan z izrazom $\lambda(u)$.

Približna vrednost amplifikacijskega faktorja je:

$$\delta = \frac{1}{1 - P / P_{cr}} \quad (2-42)$$

Ta poenostavljeni izraz se lahko z zadovoljivo natančnostjo uporabi namesto točnih izrazov s faktorji $\chi(u)$ in $\lambda(u)$, če razmerje P / P_{cr} ni veliko. Slika 2-11 prikazuje vrednost amplifikacijskega faktorja iz enačbe (2-42) v odvisnosti od razmerja P / P_{cr} . Pri vrednostih razmerja P / P_{cr} , manjših od 0.6 je napaka zaradi uporabe približnega izraza manjša od 2%.



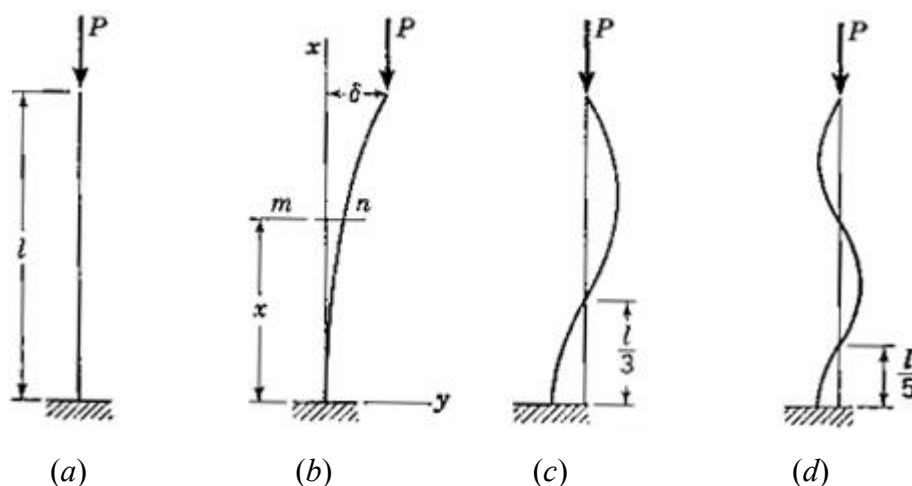
Slika 2-11: Vrednost amplifikacijskega faktorja v odvisnosti od razmerja osne tlačne obtežbe proti Euler-jevi kritični uklonski sili P/P_{cr} (prirejeno po Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 15)

2.2 Elastični uklon začetno idealno ravnega stebra-nosilca

2.2.1 Diferencialna enačba za določitev Euler-jeve kritične uklonske sile

Kritično obtežbo tlačnega elementa lahko izpeljemo z upoštevanjem idealnega elementa, za katerega je predpostavljeno, da je idealno raven in obremenjen s centrično osno tlačno obtežbo. V primeru vitkega, idealno ravnega elementa, ki je na dnu vpet, na vrhu nepodprt in je pod vplivom osne sile P , kot prikazuje slika 2-12 (a), je predpostavljeno popolnoma elastično obnašanje, kjer napetosti ne presegajo mejo elastičnosti. Če je vrednost obtežbe P manjša od kritične vrednosti, element ostane raven in je le pod vplivom osne tlačne sile. To elastično ravnotežje elementa z začetno ravno obliko je stabilno, kar pomeni, da če naneseimo prečno obtežbo pride do majhne deformacije zaradi upogiba, katera izgine potem ko prečno obtežbo odstranimo in element se vrne v svojo začetno ravno obliko. Če obtežbo P postopoma povečujemo postane ravnotežje elementa z začetno ravno obliko nestabilno in že samo majhna vrednost prečne obtežbe povzroči deformacijo zaradi upogiba, ki ne izgine potem, ko prečno obtežbo odstranimo. Kritična obtežba oziroma Euler-jeva obtežba je potem definirana kot osna

sila, ravno toliko velika, da drži element v rahlo ukrivljeni obliki, kot prikazuje slika 2-12 (b).



Slika 2-12: Idealno raven spodaj vpeti element pod vplivom osne tlačne obtežbe (a), rahlo ukrivljena oblika elementa (b), deformacijska oblika elementa pri $n = 2$ (c), deformacijska oblika elementa pri $n = 3$ (d) (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 47)

Kritično obtežbo lahko izračunamo z diferencialno enačbo upogibnice. Ob upoštevanju koordinatnih osi kot jih prikazuje slika 2-12 (b) in ob predpostavki, da je element v rahlo deformirani obliki, ima upogibni moment v poljubnem prerezu $m-n$ vrednost:

$$M = -P \cdot (\delta - y)$$

in diferencialna enačba (2-3) dobi obliko:

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = P \cdot (\delta - y). \quad (2-43)$$

Ker je zgornji konec elementa nepodprt, pride do uklona elementa v ravnini z minimalno upogibno togostjo, ki je predpostavljena kot ravnina simetrije. Z uporabo oznake:

$$k^2 = \frac{P}{E \cdot I}$$

lahko enačbo (2-43) zapišemo v obliki:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 \cdot y = k^2 \cdot \delta. \quad (2-44)$$

Splošna rešitev take diferencialne enačbe je:

$$y = A \cdot \cos(k \cdot x) + B \cdot \sin(k \cdot x) + \delta, \quad (2-45)$$

kjer sta A in B integracijski konstanti. Ti dve konstanti lahko določimo iz naslednjih robnih pogojev na vpetem koncu elementa:

$$y = \frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{pri } x = 0.$$

Ta dva robna pogoja sta izpolnjena, če sta:

$$A = -\delta, \quad B = 0$$

in potem velja:

$$y = \delta \cdot (1 - \cos(k \cdot x)). \quad (2-46)$$

Na zgornjem koncu elementa mora biti izpolnjen robni pogoj:

$$y = \delta, \quad \text{pri } x = l,$$

ki je izpolnjen, če je:

$$\delta \cdot \cos(k \cdot l) = 0 \quad (2-47)$$

Enačba (2-47) zahteva, da je ali $\delta = 0$ ali $\cos(k \cdot l) = 0$. Če je $\delta = 0$, potem ni upogibne

deformacije in zato ne pride do uklona, kot prikazuje slika 2-12 (a). Da pa velja $\cos(k \cdot l) = 0$, potem moramo imeti zvezo:

$$k \cdot l = (2 \cdot n - 1) \cdot \pi / 2, \quad (2-48)$$

kjer je $n = 1, 2, 3, \dots$. Ta enačba določa vrednosti k pri katerih uklonska oblika lahko obstaja. Pomik δ nima določene vrednosti in ima pri idealnem primeru lahko katerokoli vrednost v obsegu teorije majhnih pomikov. Diferencialna enačba (2-43) je izpeljana iz približnega izraza za upogibnico in velja le v primeru majhnih pomikov.

Najmanjšo vrednost $k \cdot l$, ki zadovoljuje enačbi (2-48) dobimo, če vzamemo $n = 1$. Vrednost, ki jo zavzame P , je minimalna kritična obtežba, kjer je:

$$k \cdot l = l \cdot \sqrt{\frac{P}{E \cdot I}} = \pi / 2$$

in tako je:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{4 \cdot l^2}. \quad (2-49)$$

To je najmanjša kritična obtežba za element s slike 2-12 (a) in je najmanjša osna sila, ki drži element v rahlo ukrivljeni obliki. Vrednost $k \cdot x$ v enačbi (2-46) v tem primeru variira od 0 do $\pi / 2$, deformacijska oblika pa je taka kot jo prikazuje slika 2-12 (b).

Z vstavljanjem $n = 2, 3, \dots$ v enačbo (2-48) dobimo pripadajoče vrednosti tlačne sile:

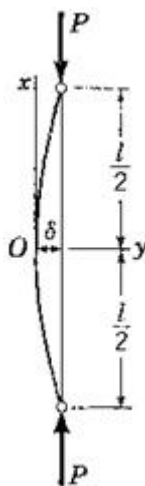
$$\begin{aligned} n = 2: \quad P_{cr} &= \frac{9 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I}{4 \cdot l^2}, \\ n = 3: \quad P_{cr} &= \frac{25 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I}{4 \cdot l^2} \dots \end{aligned}$$

Vrednost $k \cdot x$ v enačbi (2-46) variira v teh primerih od 0 do $3 \cdot \pi / 2$, od 0 do $5 \cdot \pi / 2, \dots$,

pripadajoči deformacijski obliki pa sta kot jih prikazujejta sliki 2-12 (c) in 2-12 (d). V primeru oblike prikazane na sliki 2-12 (c) je sila devetkrat večja od najmanjše potrebne kritične sile in v primeru oblike prikazane na sliki 2-12 (d) je sila petindvajsetkrat večja od najmanjše potrebne kritične sile. Do takih oblik lahko pride v primeru zelo vitkega elementa in pri nameščanju zunanjih dodatnih podpor v prevojnih točkah (deformacijske oblike), za preprečevanje prečnih pomikov. Drugače so te uklonske oblike nestabilne in imajo majhen praktični pomen, ker pride pri konstrukciji do velikih pomikov, ko obtežba preseže vrednost podano v enačbi (2-49).

Kritične obtežbe za elemente z drugačnimi robnimi pogoji lahko dobimo na osnovi rešitve prejšnjega primera, na dnu vpetega elementa. V primeru členkasto podprtega elementa na obeh koncih s slike 2-13, je iz simetrije razvidno, da imata vsaka izmed obeh polovic elementa robne pogoje enakovredne robnim pogojem celotnega vpetega elementa iz prejšnjega primera s slike 2-12. Zato kritično obtežbo členkasto podprtega elementa dobimo tako, da v enačbo (2-49) vstavimo $l / 2$ namesto l in dobimo:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2}. \quad (2-50)$$



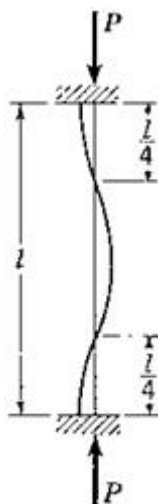
Slika 2-13: Element členkasto podprt na obeh koncih pod vplivom osne tlačne obtežbe
(Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961,
str. 49)

Primer členkasto podprtega elementa na obeh koncih je v praksi verjetno bolj pogosto

uporabljan kot katerikoli drugi primer, zato se imenuje osnovni primer uklona prizmatičnega elementa.

Če je element (s slike 2-14) na obeh koncih vpet, pride do reakcij v obliki momenta, ki preprečujeta zasuk elementa med uklonom. Ta krajna momenta skupaj z osno tlačno silo sta enaka ekscentrično nanešenima silama P kot prikazuje slika 2-14. Prevojni točki (deformacijske oblike) se nahajata tam, kjer vplivna os sile P seka upogibnico, zato ker je na teh mestih upogibni moment enak nič. Prevojni točki in točka na sredini razpona delijo element na štiri enake dele z robnimi pogoji kot jih ima element s slike 2-12 (b). Zato kritično obtežbo elementa vpetega na obeh koncih, dobimo tako, da vstavimo $l/4$ namesto l v enačbo (2-49) in dobimo:

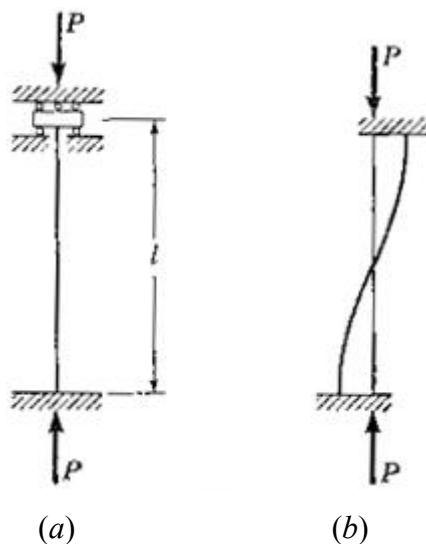
$$P_{cr} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2}. \quad (2-51)$$



Slika 2-14: Deformacijska oblika elementa vpetega na obeh koncih pod vplivom osne tlačne obtežbe pri $n = 1$ (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 49)

V primeru elementa s slike 2-15 (a), ki je na dnu vpet in ima na vrhu omogočen samo prečni pomik je tangenta na upogibnico na obeh koncih elementa vzporedna z osjo vzdolž elementa.

Ker je prevojnica točka elementa s slike 2-15 (b) na sredini, dobimo kritično obtežbo v tem primeru tako, da vstavimo $l/2$ namesto l v enačbo (2-49) in dobimo rezultat enak kot v osnovnem primeru oziroma enačbi (2-50).



Slika 2-15: Element na dnu vpet z omogočenim prečnim pomikom na vrhu, pod vplivom osne tlačne obtežbe (a) in deformacijska oblika (b) (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 49)

V vsakem od prejšnjih primerov je predpostavljeno, da se element lahko ukloni v katerikoli smeri in zato $E \cdot I$ predstavlja minimalno upogibno togost. Če je element tako podprt, da je uklon možen samo v eni ravnini, potem $E \cdot I$ predstavlja upogibno togost v tej ravnini.

V prejšnjih primerih je bilo predpostavljeno, da je element vitek in da so maksimalne tlačne napetosti, ki se pojavijo pri uklonu, znotraj meje elastičnosti materiala. Prejšnje enačbe za kritične uklonske sile veljajo samo pri teh pogojih.

Da določimo mejo znotraj katere so prejšnje enačbe uporabne, najprej kritično silo iz enačbe (2-50), pri osnovnem primeru (s slike 2-13), delimo s prečnim presežkom elementa A , dodatno pa upoštevamo izraz:

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

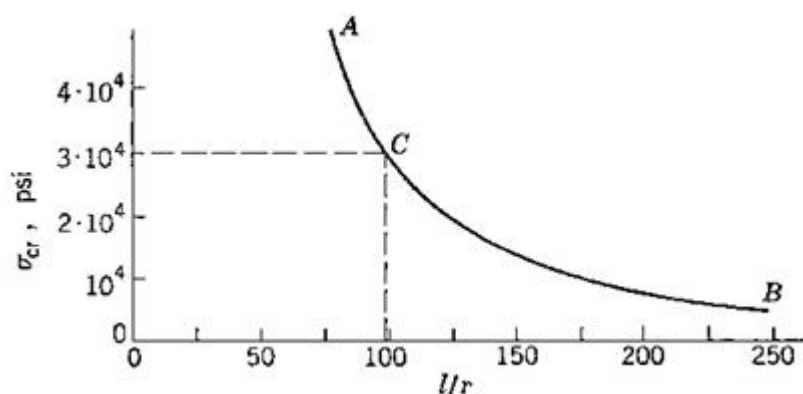
pri čemer r predstavlja vztrajnostni radij prereza elementa, kritična vrednost tlačne napetosti pa je:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E}{(l/r)^2} \quad (2-52)$$

Ta napetost je odvisna samo od modula elastičnosti materiala E in razmerja l/r , ki predstavlja vitkost. Prejšnji izraz velja samo dokler je napetost σ_{cr} znotraj meje elastičnosti. Ko poznamo mejo elastičnosti in modul elastičnosti določenega materiala, lahko mejno vrednost vitkosti l/r dobimo iz enačbe (2-52).

V primeru konstrukcijskega jekla z mejo elastičnosti $30\,000\text{ psi} = 20.684\text{ kN/cm}^2$ ($1\text{ psi} = 1\text{ pound per square inch} = 6.8948 \cdot 10^{-4}\text{ kN/cm}^2$) in modulom elastičnosti $E = 30\,000\,000\text{ psi} = 20\,684.4\text{ kN/cm}^2$ dobimo minimalno vitkost l/r iz enačbe (2-52), ki je približno 100. Zato lahko v primeru členkasto podprtega elementa iz tega materiala, kritično obtežbo izračunamo po enačbi (2-50), če je vitkost l/r večja od 100. Če je vitkost l/r v tem primeru manjša od 100, tlačna napetost preseže mejo elastičnosti preden pride do uklona in enačbe (2-50) ne moremo uporabiti.

Odvisnost kritične napetosti σ_{cr} od vitkosti l/r po enačbi (2-52) iz prejšnjega primera je prikazana grafično s krivuljo ACB na sliki 2-16. Krivulja se asimptotično približuje abscisni osi, kjer se kritična napetost približuje vrednosti nič, ko vitkost narašča. Krivulja se prav tako približuje ordinatni osi, toda uporabna je le v območju kjer je kritična napetost σ_{cr} manjša od meje elastičnosti materiala. Krivulja s slike 2-16 je prikazana za prej omenjeno konstrukcijsko jeklo, kjer se točka C nanaša na mejo elastičnosti $30\,000\text{ psi} = 20.684\text{ kN/cm}^2$. Zato se lahko uporabi le del krivulje BC .



Slika 2-16: Grafični prikaz odvisnosti kritične napetosti σ_{cr} od vitkosti l/r (1 psi = 1 pound per square inch = $6.8948 \cdot 10^{-4}$ kN/cm²), (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 51)

Za primer na dnu vpetega elementa (slika 2-12) in elementa vpetega na obeh koncih (slika 2-14), dobimo izraza za kritično napetost po enakem postopku kot v primeru členkasto podprtega elementa:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{(2 \cdot l / r)^2} \quad \text{in} \quad \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{(l / (2 \cdot r))^2}.$$

Razvidno je, da sta ti dve enačbi analogni enačbi (2-52) za osnovni primer in se lahko uporabita za izračun kritične napetosti. Ti dve enačbi dobimo iz enačbe (2-52), če dejansko dolžino elementa l zamenjamo z reducirano dolžino oziroma uklonsko dolžino L . Zato lahko zapišemo osnovno enačbo:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{(L / r)^2}. \quad (2-53)$$

V primeru prizmatičnega elementa, ki je na enem koncu vpet in na drugem koncu nepodprt, je uklonska dolžina dvakratna dejanska dolžina elementa ($L = 2 \cdot l$). V primeru elementa vpetega na obeh koncih, pa je uklonska dolžina elementa enaka polovici dejanske dolžine elementa ($L = l / 2$). Tako lahko rezultate pridobljene iz osnovnega primera uporabimo v ostalih uklonskih primerih elementov z uporabo uklonske dolžine namesto dejanske dolžine elementa.

2.2.2 Druga oblika diferencialne enačbe za določitev kritične obtežbe

V prejšnjem podpoglavju 2.2.1 je bilo prikazano, da lahko v primeru idealnega elementa kritično uklonsko obtežbo dobimo tako, da izhajamo iz diferencialne enačbe (2-3), ki predstavlja upogibnico v odvisnosti od upogibnega momenta. Druga možnost je, da izhajamo iz diferencialne enačbe (2-5). Pri določevanju kritične uklonske obtežbe elementov prečne obtežbe ne upoštevamo in diferencialna enačba za element je:

$$E \cdot I \cdot \frac{d^4 y}{dx^4} + P \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

oziroma z uporabo izraza $k^2 = P / (E \cdot I)$:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + k^2 \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = 0. \quad (2-54)$$

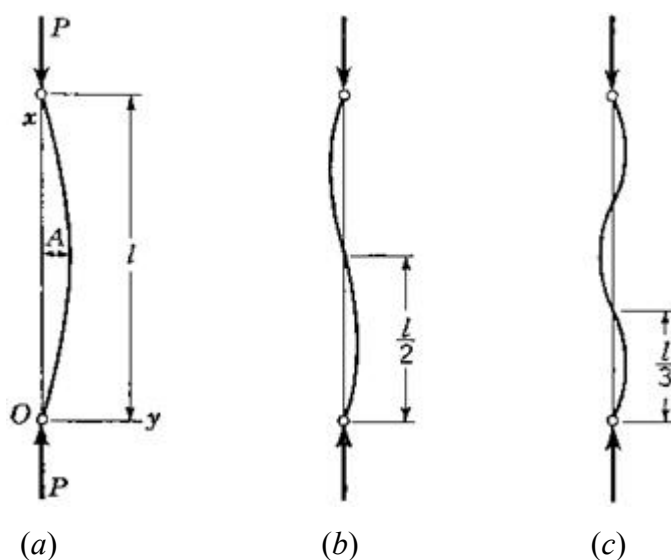
Osnovna rešitev take diferencialne enačbe je:

$$y = A \cdot \sin(k \cdot x) + B \cdot \cos(k \cdot x) + C \cdot x + D. \quad (2-55)$$

Konstante v tej diferencialni enačbi in vrednost kritične uklonske obtežbe lahko dobimo iz robnih pogojev elementa.

V primeru členkasto podprtega elementa s slike 2-17 (a), sta upogibek in upogibni moment na koncih elementa enaka nič in zato so robni pogoji:

$$y = \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad \text{pri} \quad x = 0 \quad \text{in} \quad x = l.$$



Slika 2-17: Deformacijska oblika elementa členkasto podprtega na obeh koncih pod vplivom osne tlačne obtežbe pri $n = 1$ (a), deformacijska oblika pri $n = 2$ (b), deformacijska oblika pri $n = 3$ (c) (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 52)

Z vstavljanjem teh pogojev v osnovno rešitev diferencialne enačbe (2-55) dobimo:

$$B = C = D = 0 \quad \text{in} \quad \sin(k \cdot l) = 0,$$

kjer velja:

$$k \cdot l = n \cdot \pi. \tag{2-56}$$

Ta enačba določa vrednosti kritične obtežbe, kjer za $n = 1$ dobimo rezultat, kot pri uporabi prejšnje metode v prejšnjem podpoglavju 2.2.1, v enačbi (2-50). Upogibnica je določena z enačbo:

$$y = A \cdot \sin(k \cdot x) = A \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{l}\right), \tag{2-57}$$

kjer A predstavlja nedoločeno amplitudo deformirane osi elementa. Za primer najmanjše kritične obtežbe ($n = 1$) je deformirana oblika elementa pri uklonu prikazana na sliki 2-17 (a).

Rizvić, M. 2015. Dimenzioniranje lesenih stebrov izpostavljenih splošni osno-upogibni obremenitvi
Mag. d. – B Ljubljana. UL. FGG. Odd. za gradbeništvo. Konstrukcijska smer.

Za $n = 2, 3, \dots$ dobimo ob upoštevanju enačbe (2-56) višje vrednosti kritične obtežbe.

Pripadajoči obliki pri nastopu uklona sta prikazani na slikah 2-17 (b) ter 2-17 (c).

V primeru na enem koncu vpetega in na drugem koncu nepodprtega elementa, prikazanega na sliki 2-12 (a), so robni pogoji na vpetem koncu:

$$y = \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{pri} \quad x = 0.$$

Na nepodprtem koncu ($x = l$) morata biti upogibni moment in prečna sila enaka nič. Glede na diferencialni enačbi (2-3) in (2-4) to pomeni:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad \text{pri} \quad x = l,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + k^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{pri} \quad x = l.$$

Iz teh pogojev na vpetem koncu elementa dobimo:

$$B = -D, \quad C = -A \cdot k$$

in iz zadnjih dveh pogojev dobimo:

$$A \cdot \sin(k \cdot l) + B \cdot \cos(k \cdot l) = 0 \quad \text{ter} \quad C = 0.$$

Tako na koncu dobimo, da je $C = A = 0$ in

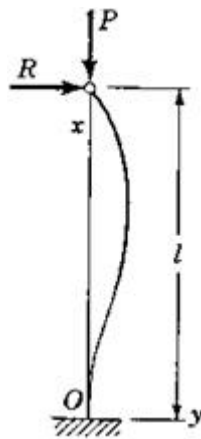
$$\cos(k \cdot l) = 0, \quad k \cdot l = \frac{(2 \cdot n - 1) \cdot \pi}{2},$$

kar je v skladu z enačbo (2-48) iz prejšnjega podpoglavja 2.2.1.

V primeru elementa z enim vpetim koncem in drugim členkasto podprtim koncem, prikazanem na sliki 2-18, pride pri uklonu do horizontalne reakcije R na členkasto podprtrem koncu. Smer reakcije R je določena z ravnotežjem z reakcijskim momentom na vpetem koncu. Robni pogoji tega elementa so:

$$y = \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{pri} \quad x = 0 \quad \text{in}$$

$$y = \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad \text{pri} \quad x = l.$$



Slika 2-18: Deformacijska oblika elementa z enim vpetim koncem in drugim členkasto podprtim koncem pod vplivom osne tlačne obtežbe (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 53)

Z uporabo teh pogojev v osnovni rešitvi diferencialne enačbe (2-55) dobimo naslednje enačbe za določitev konstant:

$$B + D = 0,$$

$$A \cdot k + C = 0,$$

$$C \cdot l + D = 0,$$

$$A \cdot \sin(k \cdot l) + B \cdot \cos(k \cdot l) = 0.$$

Vsem tem enačbam zadovoljimo, če vzamemo $A = B = C = D = 0$, kjer glede na enačbo (2-55)

ne pride do upogibne deformacije oziroma kjer dobimo ravnotežje na nedeformiranem elementu. Glede na to, da iščemo ravnotežje na ukrivljenem elementu, potrebujemo netrivialno rešitev enačb. Če konstanto A izrazimo s konstanto B s pomočjo prvih treh enačb in jo vstavimo v zadnjo oziroma četrto enačbo, dobimo:

$$-B \cdot \frac{\sin(k \cdot l)}{k \cdot l} + B \cdot \cos(k \cdot l) = 0,$$

in s preureditvijo še:

$$\operatorname{tg}(k \cdot l) = k \cdot l. \quad (2-58)$$

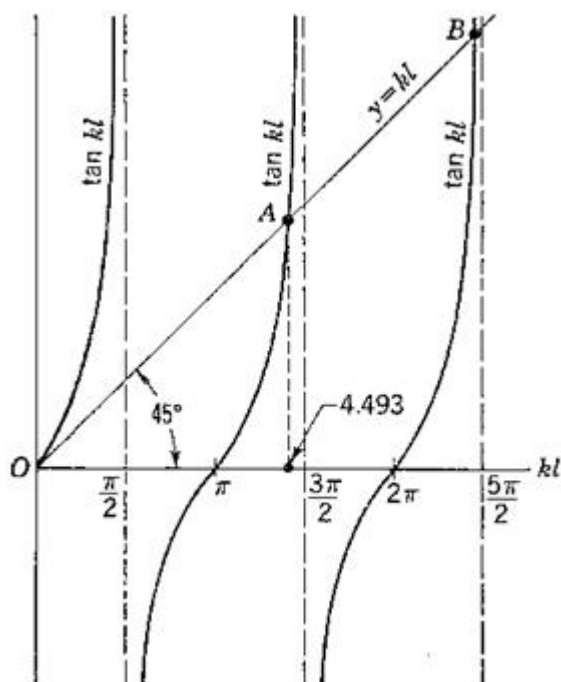
Enačbi (2-58) je potrebno zadostiti, da lahko dobimo ravnotežje na ukrivljenem elementu in da zadostimo robnim pogojem.

Enačbo (2-58) lahko rešimo tudi z grafično metodo. Krivulje na sliki 2-19 prikazujejo vrednosti funkcije $\operatorname{tg}(k \cdot l)$, kjer se vrednosti $k \cdot l$ nahajajo na abscisni osi in vrednosti $\operatorname{tg}(k \cdot l)$ na ordinatni osi. Krivulje se asimptotično približujejo vertikalnim osem, ki se nahajajo na vrednostih $k \cdot l = \pi / 2, 3 \cdot \pi / 2, \dots$, kjer je vrednost $\operatorname{tg}(k \cdot l)$ neskončna. Rešitve enačbe (2-58) se nahajajo na presečišču teh krivulj s premico $y = k \cdot l$. Najmanjša vrednost rešitve, glede na točko A s slike 2-19 je:

$$k \cdot l = 4.493,$$

pri čemer je pripadajoča vrednost kritične obtežbe:

$$P_{\text{cr}} = \frac{20.19 \cdot E \cdot I}{l^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{(0.699 \cdot l)^2}. \quad (2-59)$$



Slika 2-19: Vrednosti funkcije $\text{tg}(k \cdot l)$ v odvisnosti od $k \cdot l$ (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 54)

V primeru elementa z obema vpetima koncema, kot na sliki 2-20 (a), so robni pogoji:

$$y = \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{pri} \quad x = 0 \quad \text{in} \quad x = l.$$

Z uporabo teh pogojev v osnovni rešitvi diferencialne enačbe oziroma v enačbi (2-55) dobimo naslednje enačbe za določitev konstant:

$$\begin{aligned} B + D &= 0, \\ A \cdot k + C &= 0, \\ A \cdot \sin(k \cdot l) + B \cdot \cos(k \cdot l) + C \cdot l + D &= 0, \\ A \cdot k \cdot \cos(k \cdot l) - B \cdot k \cdot \sin(k \cdot l) + C &= 0. \end{aligned} \tag{2-60}$$

Da dobimo ravnotežje na upogibno deformiranih elementih moramo imeti netrivialno rešitev teh enačb, kar pomeni, da mora biti determinanta vseh koeficientov zapisanih v matrični obliki enaka nič. Ta determinanta je enaka:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ \sin(k \cdot l) & \cos(k \cdot l) & l & 1 \\ k \cdot \cos(k \cdot l) & -k \cdot \sin(k \cdot l) & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

ko jo izenačimo z nič dobimo enačbo:

$$2 \cdot (\cos(k \cdot l) - 1) + k \cdot l \cdot \sin(k \cdot l) = 0.$$

Z upoštevanjem, da je $\sin(k \cdot l) = 2 \cdot \sin(k \cdot l / 2) \cdot \cos(k \cdot l / 2)$ in $\cos(k \cdot l) = 1 - 2 \cdot \sin^2(k \cdot l / 2)$, lahko to determinanto zapišemo v obliki:

$$\sin\left(\frac{k \cdot l}{2}\right) \cdot \left(\frac{k \cdot l}{2} \cdot \cos\left(\frac{k \cdot l}{2}\right) - \sin\left(\frac{k \cdot l}{2}\right)\right) = 0. \quad (2-61)$$

Ena izmed rešitev te enačbe je:

$$\sin\left(\frac{k \cdot l}{2}\right) = 0,$$

zato je $k \cdot l = 2 \cdot n \cdot \pi$, kritična obtežba pa je:

$$P_{cr} = \frac{4 \cdot n^2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2}. \quad (2-62)$$

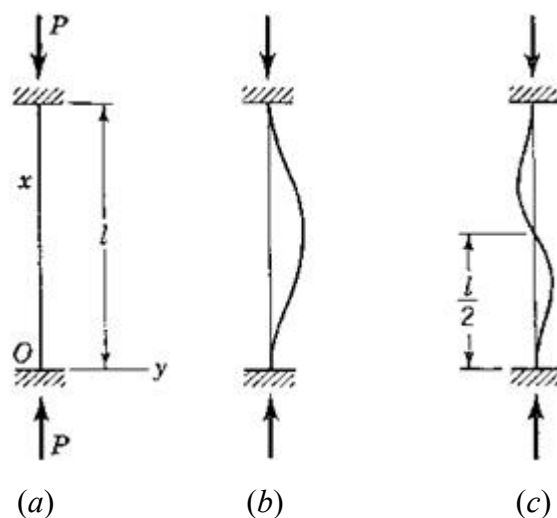
Z upoštevanjem, da je $\sin(k \cdot l) = 0$ in $\cos(k \cdot l) = 1$, vedno ko je $\sin(k \cdot l / 2) = 0$, dobimo iz enačb (2-60) naslednje vrednosti konstant:

$$A = C = 0, B = -D,$$

enačba upogibnice pa je naslednja:

$$y = B \cdot \left(\cos\left(\frac{2 \cdot n \cdot \pi \cdot x}{l}\right) - 1\right). \quad (2-63)$$

Če je $n = 1$ dobimo najmanjšo kritično obtežbo kot v enačbi (2-51) in element ima pri uklonu simetrično deformacijsko obliko kot je prikazana na sliki 2-20 (b).



Slika 2-20: Element vpet na obeh koncih pod vplivom osne tlačne obtežbe (a), simetrična deformacijska oblika (b), antisimetrična deformacijska oblika (c) (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 54)

Drugo rešitev enačbe (2-61) dobimo, če izraz v oklepaju enačimo z nič - od tod dobimo izraz:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{k \cdot l}{2}\right) = \frac{k \cdot l}{2}.$$

Najmanjša vrednost rešitve, glede na točko A s slike 2-19 z vrednostmi funkcije $\operatorname{tg}(k \cdot l)$ v odvisnosti od $k \cdot l$ je:

$$k \cdot l / 2 = 4.493,$$

$$k \cdot l = 8.986,$$

kar da pripadajočo vrednost kritične obtežbe:

$$P_{\text{cr}} = \frac{8.18 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2}. \quad (2-64)$$

Pri tem dobimo po uklonu antisimetrično deformacijsko obliko, kot je prikazana na sliki 2-20 (c). Ker je kritična vrednost obtežbe pri tej antisimetrični uklonski obliki večja kot pri prejšnji simetrični uklonski obliki, je vrednost pri antisimetrični obliki uporabna le v primeru, če je tak element še dodatno podprt na sredini.

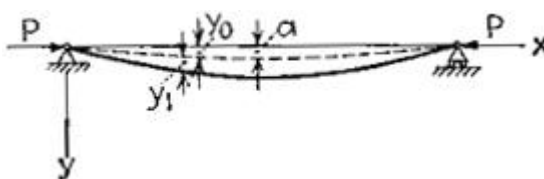
2.3 Elastični uklon začetno nepopolnega stebra-nosilca in ekscentrično obremenjenega stebra-nosilca

2.3.1 Vpliv začetne nepopolnosti geometrije elementa na upogibnico

Ko je element pod vplivom samo prečne obtežbe, majhna začetna nepopolnost geometrije (ukrivljenost) elementa ne vpliva na upogib in končno upogibnico dobimo s superpozicijo začetne upogibnice in upogibnice izračunane na nedeformiranem elementu. Če na element deluje še osna obtežba, potem pa ima začetna nepopolnost velik vpliv na upogibke zaradi te obtežbe.

V primeru elementa s slike 2-21 je začetna ukrivljena oblika osi elementa opisana z enačbo:

$$y_0 = a \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right). \quad (2-65)$$



Slika 2-21: Element členkasto podprt na obeh koncih z začetno ukrivljeno sinusno obliko osi pod vplivom osne tlačne obtežbe (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 31)

Tako je začetna oblika osi elementa opisana s sinusno krivuljo z amplitudo a na sredini. Če je ta element pod vplivom osne obtežbe P , pride do dodatnih upogibkov y_1 , tako da so končne vrednosti upogibkov za določitev upogibnice:

$$y = y_0 + y_1, \quad (2-66)$$

upogibni moment pri poljubnem prečnem prerezu pa je:

$$M = P \cdot (y_0 + y_1).$$

Upogibke y_1 pri deformaciji elementa se določi z diferencialno enačbo:

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2 y_1}{dx^2} = -P \cdot (y_0 + y_1), \quad (2-67)$$

kjer z vstavljanjem enačbe (2-65) v y_0 in z uporabo izraza $k^2 = P / (E \cdot I)$ dobimo:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + k^2 \cdot y_1 = -k^2 \cdot a \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right).$$

Osnovna rešitev te diferencialne enačbe je:

$$y_1 = A \cdot \sin(k \cdot x) + B \cdot \cos(k \cdot x) + \frac{1}{(\pi^2 / (k^2 \cdot l^2)) - 1} \cdot a \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right). \quad (2-68)$$

Da izpolnimo robne pogoje $y_1 = 0$ pri $x = 0$ in $x = l$ pri katerikoli vrednosti k , moramo upoštevati $A = B = 0$. Nato z upoštevanjem razmerja med osno obtežbo in kritično obtežbo dobimo:

$$\alpha = \frac{P}{P_{cr}} = \frac{P}{\pi^2 \cdot E \cdot I / l^2} = \frac{k^2 \cdot l^2}{\pi^2} \quad (2-69)$$

in

$$y_1 = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \cdot a \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right). \quad (2-70)$$

Končni izraz za upogibnico je:

$$y = y_0 + y_1 = a \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) + \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot a \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) = \frac{a}{1-\alpha} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right). \quad (2-71)$$

Iz te enačbe ugotovimo, da se začetni upogibek a na sredini elementa poveča z razmerjem $1 / (1 - \alpha)$ zaradi vpliva osne tlačne sile P . Ko se tlačna sila P približuje kritični vrednosti gre α proti vrednosti ena in upogibki y proti neskončnosti.

Če je začetna oblika elementa opisana z zaporedjem:

$$y_0 = a_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) + a_2 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{l}\right) + \dots$$

lahko ta izraz y_0 vstavimo v enačbo (2-67) in podobno kot v prejšnjem primeru dobimo:

$$y_1 = \alpha \cdot \left(\frac{a_1}{1-\alpha} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right) + \frac{a_2}{2^2-\alpha} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{l}\right) + \dots \right). \quad (2-72)$$

Ker je vrednost α vedno manjša od ena oziroma se približuje vrednosti ena, ko se P približuje kritični vrednosti P_{cr} , je prvi člen zaporedja v enačbi (2-72) ponavadi veliko večji od ostalih, ki jih lahko zanemarimo in tako dobimo enačbo enako kot (2-70).

Problemu upogiba elementa z začetno nepopolnostjo geometrije lahko pristopimo na drugačen način, če vpliv začetne nepopolnosti geometrije na upogibke nadomestimo z vplivom ekvivalentne prečne obtežbe. Ekvivalentna prečna obtežba mora povzročiti enak diagram upogibnih momentov pri ravnem nedeformiranem elementu, kot jih osna obtežba povzroči na elementu z začetno nepopolnostjo geometrije pri upoštevanju samo začetnih upogibkov pri izračunu upogibnih momentov.

V primeru, ko je začetna ukrivljena oblika osi elementa z začetno nepopolnostjo geometrije opisana z enačbo (2-65), je vpliv te ukrivljenosti na upogibke tlačnega elementa enak vplivu prečne obtežbe, ki v elementu povzroča upogibne momente $M = P \cdot a \cdot \sin(\pi \cdot x / l)$, kjer sta

diferencialni enačbi elastične upogibnice iz enačbe (2-67) enaki v obeh primerih. Zato lahko izraz za vrednost ekvivalentne porazdeljene prečne obtežbe q dobimo iz zveze med q in M , kjer dobimo:

$$q = -\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{\pi^2 \cdot a \cdot P}{l^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right).$$

V primeru elementa z vpetima koncema in z osno tlačno obtežbo pride na teh vpetih mestih do upogibnih momentov. Vrednost teh upogibnih momentov dobimo iz pogojev za vpeti konca elementa.

V primeru elementa z vpetima koncema, je lahko začetna ukrivljena oblika osi elementa (z začetno nepopolnostjo geometrije) opisana z enačbo:

$$y_0 = a \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right).$$

Če bi bila konca nedeformiranega elementa z osno tlačno obtežbo členkasto podprta, bi upogibnico zaradi te obtežbe dobili iz enačbe (2-70) in vrednost zasukov bi bila:

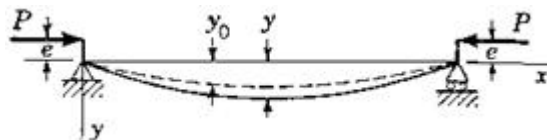
$$\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_{x=0} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \left(\frac{\pi \cdot a}{l}\right).$$

Da bi preprečili te zasuke, morata na vpetih koncih elementa delovati upogibna momenta M_0 katerih vrednost dobimo iz enačbe (2-40), kjer je vrednost M_0 pozitivna, če deluje v smeri kot prikazuje slika 2-10 (a), elementa s kombinirano osno tlačno in koncentrirano momentno obtežbo M_a ter M_b na obeh koncih elementa ($M_0 = M_a = M_b$) oziroma kot prikazuje slika 2-22:

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{\pi \cdot a}{l} + \frac{M_0 \cdot l}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{tg(u)}{u} = 0,$$

kar da:

$$M_0 = -\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot a \cdot E \cdot I}{l^2} \cdot \frac{u}{\operatorname{tg}(u)}. \quad (2-73)$$



Slika 2-22: Element členkasto podprt na obeh koncih z začetno ukrivljeno sinusno obliko osi in z ekscentrično osno tlačno obtežbo (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 36)

Končni upogibek tega elementa dobimo s superpozicijo upogibka elementa s členkasto podprtima koncema zaradi delovanja upogibnih momentov M_0 iz enačbe (2-38) in upogibka zaradi delovanja osne tlačne obtežbe iz enačbe (2-71):

$$\delta = \frac{a}{1-\alpha} + \frac{M_0 \cdot l^2}{8 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{2 \cdot (1 - \cos(u))}{u^2 \cdot \cos(u)},$$

kjer z upoštevanjem enačbe (2-73) dobimo:

$$\delta = \frac{a}{1-\alpha} \cdot \left(1 - \frac{\pi \cdot \alpha}{2} \cdot \frac{1 - \cos(u)}{u \cdot \sin(u)} \right). \quad (2-74)$$

Upogibni moment na sredini elementa z začetno nepopolnostjo geometrije z vpetima koncema pri osni tlačni obtežbi dobimo iz enačbe:

$$M = P \cdot \delta + M_0,$$

kjer M_0 dobimo iz enačbe (2-73). Rezultati elementa z začetno nepopolnostjo geometrije z vpetima koncema s centrično osno tlačno obtežbo so enaki rezultatom elementa z začetno nepopolnostjo geometrije s členkasto podprtima koncema pri ekscentrični osni tlačni obtežbi z enakima ekscentričnostima, kot prikazuje slika 2-22.

2.3.2 Vpliv ekscentričnosti obtežbe in začetne nepopolnosti geometrije elementa pri mejnih napetostih

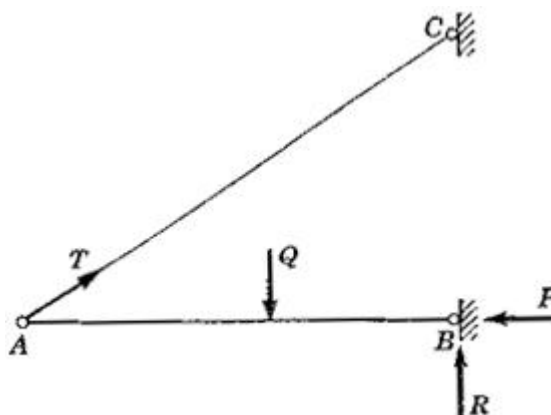
Pri dimenzioniranju elementov pod vplivom samo prečne obtežbe so dopustne delovne napetosti (working stress) določene kot delež napetosti na meji elastičnosti. Tako dobimo zvezo:

$$\sigma_W = \frac{\sigma_{YP}}{n}, \quad (2-75)$$

kjer je n varnostni faktor. Dimenzije prečnega prereza elementa se izbere tako, da maksimalna napetost ne preseže dopustne napetosti iz enačbe (2-75).

Enak postopek se lahko uporablja v primeru istočasnega vpliva prečnih obtežb in osne tlačne obtežbe, kjer je osna sila konstantna in zato kontroliramo možno povečanje prečne obtežbe. Iz pravila superpozicije sledi, da če izračunamo dopustno napetost iz enačbe (2-75), dobimo element s takim razmerjem napetosti in obtežbe, kjer so maksimalne napetosti enake napetostim na meji elastičnosti, ko prečno obtežbo množimo z varnostnim faktorjem n . Iz tega sledi, da Hooke-ov zakon velja do točke na meji elastičnosti materiala, kar je v skladu z obnašanjem konstrukcijskega jekla in tudi lesa.

Obstajajo primeri kjer osne sile naraščajo istočasno z naraščanjem prečnih obtežb. Konstrukcija prikazana na sliki 2-23 je tak primer. Osna natezna sila T v nateznem elementu AC in osna tlačna sila P oziroma reakcija v podpori elementa AB se povečata v enakem razmerju pri delovanju prečne obtežbe na element AB . V takih primerih upogibki in maksimalne napetosti naraščajo z višjo stopnjo kot prečne obtežbe, kar je treba upoštevati pri izbiri dopustne napetosti zaradi zagotavljanja primerne varnostnega faktorja. Pri zagotavljanju varnostnega faktorja z vrednostjo n , je potrebno določiti dimenzije prečnega prereza elementa na tak način, da bo maksimalna napetost vlakna (robne vlakna) enaka napetosti na meji elastičnosti, kjer upoštevamo, da so vse obtežbe na elementu vključno z osno obtežbo P , n -krat večje. To zahteva uporabo manjših vrednosti dopustnih napetosti kot v izrazu (2-75).



Slika 2-23: Konstrukcija z elementom AB obremenjenim z osno tlačno in prečno obtežbo ter z nateznim elementom AC (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 38)

Za prikaz postopka določevanja dimenzij prečnega prereza takih elementov, lahko obravnavamo primer elementa obremenjenega z ekscentrično nanešenimi silami P s slike 2-10 (b), pri enakih vrednostih ekscentričnosti e in kjer upogibni moment deluje v ravnini simetrije elementa. Maksimalni upogibni moment iz enačbe (2-41) je enak:

$$M_{\max} = P \cdot e \cdot \sec\left(\frac{l}{2} \cdot \sqrt{\frac{P}{E \cdot I}}\right). \quad (2-76)$$

Z vpeljavo izraza za vztrajnostni radij prečnega prereza r in razdaljo od nevtralne osi do najbolj obremenjenega vlakna c , dobimo enačbo za maksimalno napetost za prečni prerez na sredini elementa:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M \cdot c}{I} = \frac{P}{A} \cdot \left(1 + \frac{e \cdot c}{r^2} \cdot \sec\left(\frac{l}{2 \cdot r} \sqrt{\frac{P}{A \cdot E}}\right)\right), \quad (2-77)$$

ki se imenuje sekantna enačba za izračun maksimalnih napetosti.

Za vrednost r^2 / c se vpelje oznaka s , ki se imenuje radij jedra in ki določa območje prečnega prereza znotraj katerega tlačna sila v primeru kratkih elementov ne povzroča nateznih napetosti

v nobenem vlaknu. Radij jedra je enak razmerju elastičnega odpornostnega momenta prečnega prereza Z in površine prečnega prereza A :

$$s = \frac{Z}{A} = \frac{I}{A \cdot c} = \frac{r^2}{c}. \quad (2-78)$$

V primeru pravokotnega prereza s širino b in višino h , je radij jedra enak:

$$s = \frac{b \cdot h^2 / 6}{b \cdot h} = \frac{h}{6}. \quad (2-79)$$

Z uporabo izraza za radij jedra, lahko sekantno formulo zapišemo v obliki:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \cdot \left(1 + \frac{e}{s} \cdot \sec \left(\frac{l}{2 \cdot r} \cdot \sqrt{\frac{P}{A \cdot E}} \right) \right). \quad (2-80)$$

Pri izbranih dimenzijah elementa in znani ekscentričnosti obtežbe e , lahko določimo razmerje l/r oziroma vitkosti elementa, razmerje ekscentričnosti proti radiju jedra e/s , nato pa uporabimo enačbo (2-80), ki predstavlja relacijo med napetostjo v maksimalno tlačno obremenjenem vlaknu ter povprečno tlačno napetostjo:

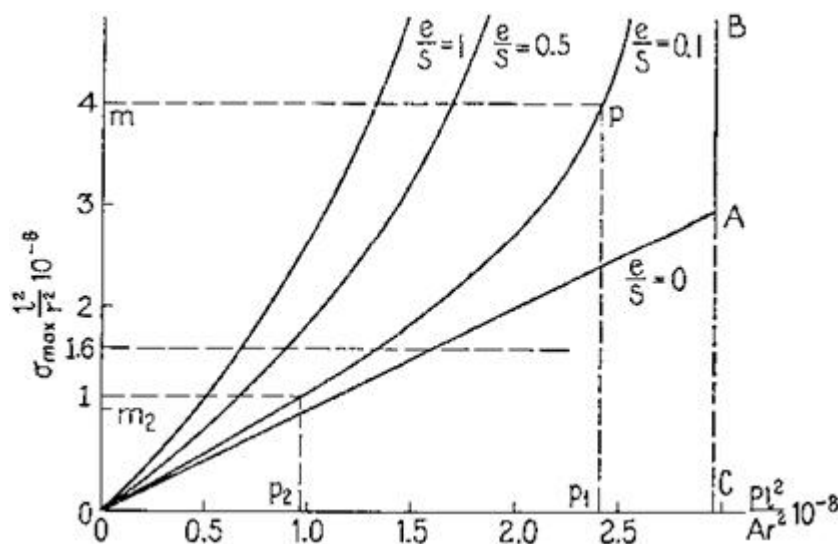
$$\sigma_c = \frac{P}{A}.$$

Pri izbrani vrednosti modula elastičnosti E , lahko to relacijo predstavimo grafično z vrednostmi $(P \cdot l^2) / (A \cdot r^2)$ na abscisni osi in vrednostmi $(\sigma_{\max} \cdot l^2) / r^2$ na ordinatni osi. Slika 2-24 prikazuje tri take krivulje pri treh različnih razmerjih ekscentričnosti proti radiju jedra $e/s = 0.1, 0.5, 1.0$, kjer je modul elastičnosti $E = 30\,000\,000 \text{ psi} = 20\,684.4 \text{ kN/cm}^2$ ($1 \text{ psi} = 1 \text{ pound per square inch} = 6.894\,8 \cdot 10^{-4} \text{ kN/cm}^2$). Ravna črta OA na sliki 2-24 prikazuje maksimalno napetost vlakna v primeru centrično nanešene obtežbe $e/s = 0$. Ta črta določa maksimalne napetosti vlakna vse do kritične vrednosti povprečne tlačne napetosti, ki je prikazana z vertikalno črto CAB . Ta vertikalna črta je asimptota vsem trem in podobnim

krivuljam, kjer vrednost:

$$\sec\left(\frac{l}{2 \cdot r} \cdot \sqrt{\frac{P}{A \cdot E}}\right)$$

iz enačbe (2-80) postane neskončna pri kritični vrednosti obtežbe $P = P_{cr}$. Z zmanjševanjem ekscentričnosti e , se krivulje približujejo mejnim ravnim črtam OA in AB . Če imamo niz takih krivulj kot s slike 2-24, lahko pri določenem elementu na enostaven način poiščemo maksimalno napetost vlakna zaradi vpliva ekscentrično nanešene osne tlačne obtežbe pri znani vrednosti ekscentričnosti.



Slika 2-24: Vrednosti maksimalne napetosti vlakna σ_{\max} v odvisnosti povprečne vrednosti napetosti P/A pomnoženih s kvadratno vrednostjo vitkosti $(l/r)^2$, pri modulu elastičnosti $E = 30\,000\,000 \text{ psi} = 20\,684.4 \text{ kN/cm}^2$ ($1 \text{ psi} = 1 \text{ pound per square inch} = 6.8948 \cdot 10^{-4} \text{ kN/cm}^2$) in različnih razmerjih ekscentričnosti proti radiju jedra e/s (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 39)

Te krivulje lahko uporabimo npr. v primeru določenega ekscentrično obremenjenega jeklenega elementa ($z E = 30\,000\,000 \text{ psi} = 20\,684.4 \text{ kN/cm}^2$) kot na sliki 2-10 b, pri določevanju velikosti tlačne obtežbe ob upoštevanju varnostnega faktorja. V primeru elementa z

materialom, ki ima napetost na meji elastičnosti v velikosti $40\,000\text{ psi} = 27.579\text{ kN/cm}^2$, z razmerjem ekscentričnosti proti radiju jedru $e/s = 0.1$, z vitkostjo $l/r = 100$ in ob upoštevanju varnostnega faktorja v vrednosti $n = 2.5$, lahko uporabimo take krivulje. Če narišemo vodoravno črto mp pri $\sigma_{\max} = 40\,000\text{ psi} = 27.579\text{ kN/cm}^2$, do točke presečišča p s krivuljo pri $e/s = 0.1$ na sliki 2-24, dobimo točko p_1 na abscisi iz katere dobimo povprečno vrednost napetosti σ_c , pri kateri pride do maksimalne napetosti kateregakoli vlakna v vrednosti enaki vrednosti napetosti na meji elastičnosti. To povprečno vrednost napetosti označimo z:

$$(\sigma_c)_{YP}.$$

Če ima varnostni faktor vrednost $n = 2.5$, ima dovoljena povprečna vrednost napetosti 0.4-kratno vrednost napetosti določene v točki p_1 . Ta vrednost je določena s točko p_2 na sliki 2-24, kjer je $P/A = 9\,700\text{ psi} = 6.688\text{ kN/cm}^2$. Pripadajoča ordinata h krivulji z $e/s = 0.1$ je določena s črto Om_2 , kjer dobimo maksimalno napetost vlakna:

$$\sigma_{\max} = 11\,400\text{ psi} = 7.86\text{ kN/cm}^2,$$

katero moramo upoštevati kot projektno napetost, da zadovoljimo zahtevam varnostnega faktorja. Ugotovimo, da je vrednost pridobljene projektne napetosti v tem primeru znatno manjša od napetosti, ki bi jo dobili z enačbo (2-75), katera znaša $16\,000\text{ psi} = 11.032\text{ kN/cm}^2$.

Namesto uporabe prej omenjenih krivulj, lahko direktno uporabimo sekantno formulo oziroma enačbo (2-80) pri dimenzioniranju ekscentrično obremenjenih elementov. Če P označuje varno vrednost obtežbe in n označuje varnostni faktor, potem $n \cdot P$ označuje obtežbo pri kateri je maksimalna napetost vlakna enaka napetosti na meji elastičnosti. Enačba (2-80) se v primeru take obtežbe spremeni v:

$$\sigma_{YP} = \frac{n \cdot P}{A} \cdot \left(1 + \frac{e}{s} \cdot \sec \left(\frac{l}{2 \cdot r} \cdot \sqrt{\frac{n \cdot P}{A \cdot E}} \right) \right). \quad (2-81)$$

To enačbo lahko uporabimo pri napetosti P/A z uporabo metode s poskušanjem

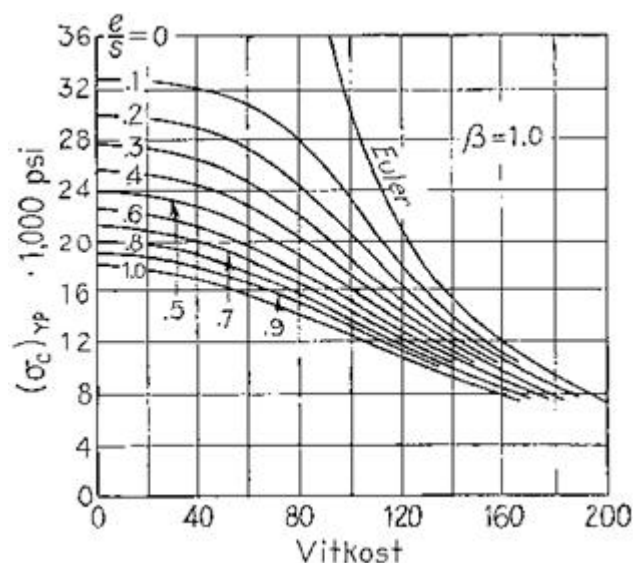
(trial-and-error) in na ta način dobimo varno povprečno vrednost napetosti P / A v določenem primeru elementa.

Če predpostavimo določeno vrednost napetosti na meji elastičnosti σ_{YP} , vrednost varnostnega faktorja n in vrednost razmerja ekcentričnosti obtežbe proti radiju jedra e / s , pri uporabi enačbe (2-81), lahko določimo niz varnih vrednosti povprečnih tlačnih napetosti $\sigma_c = P / A$, za določene vrednosti vitkosti l / r . To zvezo med vrednostjo povprečne tlačne napetosti σ_c in vitkosti l / r , lahko predstavimo grafično v obliki krivulj.

Da bi dobili krivulje neodvisne od varnostnega faktorja n , lahko prikažemo vrednosti:

$$(\sigma_c)_{YP} = \frac{n \cdot P}{A}$$

v odvisnosti od vitkosti l / r , tako da lahko vrednost povprečne tlačne napetosti pri napetosti v robnem vlaknu na meji elastičnosti $(\sigma_c)_{YP}$ dobimo direktno s pomočjo krivulj in jo delimo z zahtevanim varnostnim faktorjem n ter tako dobimo povprečno vrednost napetosti. Slika 2-25 prikazuje niz krivulj za konstrukcijsko jeklo z modulom elastičnosti $E = 30\,000\,000 \text{ psi} = 20\,684.4 \text{ kN/cm}^2$, z maksimalno napetostjo vlakna (robnega vlakna) na meji elastičnosti $\sigma_{YP} = 36\,000 \text{ psi} = 24.821 \text{ kN/cm}^2$ in pri različnih razmerjih ekscentričnosti obtežbe proti radiju jedra e / s od 0.1 do 1.0. Če imamo take krivulje lahko na enostaven način določimo prečni prerez elementa z ekscentrično osno tlačno obtežbo.



Slika 2-25: Vrednosti povprečne tlačne napetosti $(\sigma_c)_{YP}$ v odvisnosti od vitkosti l/r pri vrednosti modula elastičnosti $E = 30\,000\,000$ psi = $20\,684.4$ kN/cm² (1 psi = 1 pound per square inch = $6.8948 \cdot 10^{-4}$ kN/cm²), pri napetosti v robnem vlaknu na meji elastičnosti $\sigma_{YP} = 36\,000$ psi = 24.821 kN/cm² in različnih razmerjih ekscentričnosti proti radiju jedra e/s , za primer členkasto podprtega elementa na obeh koncih z ekscentrično osno tlačno obtežbo z dvema enakima ekscentričnostima pri $\beta = 1$ (prirejeno po Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 41)

Podobne krivulje lahko dobimo tudi za ostale primere elementov s prečno obtežbo in osno tlačno obtežbo, kjer namesto enačbe (2-41) v izpeljavi uporabljamo enačbe za ostale primere.

V primeru členkasto podprtega elementa na obeh koncih z nanešeno osno tlačno obtežbo z dvema različnima ekscentričnostima e_a in e_b s slike 2-26, uporabimo enačbo (2-36).

Predpostavimo da je e_a večja izmed ekscentričnosti in da izraz:

$$\beta = e_a / e_b$$

označuje razmerje ekscentričnosti. Vrednost β variira od +1.0 v primeru, ko sta ekscentričnosti enaki, do -1.0 v primeru, ko sta ekscentričnosti enake dolžine toda nasprotno usmerjeni.



Slika 2-26: Element členkasto podprt na obeh koncih z ekscentrično osno tlačno obtežbo z dvema različnima ekscentričnostima e_a in e_b (Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 42)

V primeru kratkih elementov se maksimalna napetost pojavi na koncu elementa, označenim s točko A , kjer je ekscentričnost večja. Vrednost te napetosti lahko dobimo iz enačbe za primer kombinirane upogibne in tlačne obremenitve, kjer vrednost povprečne tlačne napetosti pri napetosti v robnem vlaknu na meji elastičnosti dobimo iz enačbe:

$$(\sigma_c)_{YP} = \frac{\sigma_{YP}}{1 + e_a / s}. \quad (2-82)$$

V primeru vitkih elementov pride do maksimalne napetosti v prerezu na sredini elementa in vrednost povprečne tlačne napetosti dobimo iz enačbe:

$$(\sigma_c)_{YP} = \frac{\sigma_{YP}}{1 + (e_a / s) \cdot \psi \cdot \operatorname{cosec}(2 \cdot u)}, \quad (2-83)$$

kjer sta:

$$2 \cdot u = k \cdot l = l \cdot \sqrt{\frac{P_{YP}}{E \cdot I}}, \quad \psi = \sqrt{\beta^2 - 2 \cdot \beta \cdot \cos(2 \cdot u) + 1}.$$

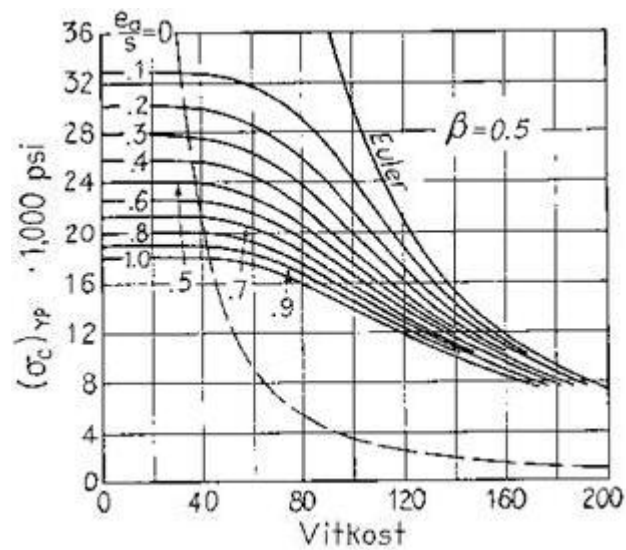
Mejno vrednost vitkosti l / r do katere lahko enačbo (2-82) uporabimo, dobimo v vsakem posameznem primeru z uporabo enačbe:

$$\cos^{-1}(\beta) = \frac{l}{r} \cdot \sqrt{\frac{(\sigma_c)_{YP}}{E}}, \quad (2-84)$$

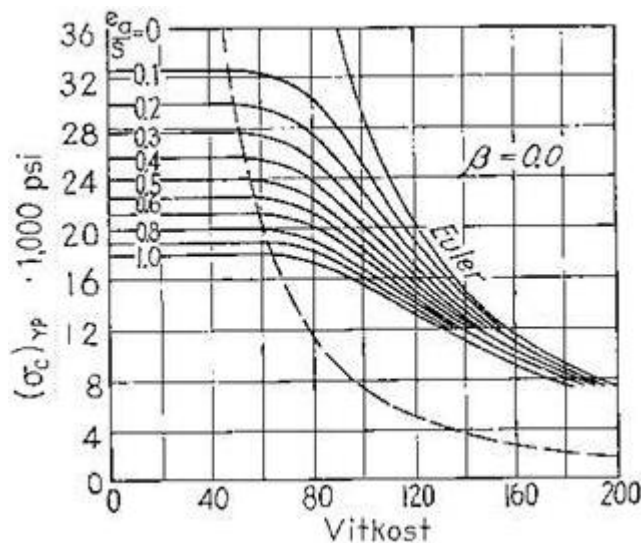
ki jo dobimo iz enačb (2-82) in (2-83).

Enačbe od (2-82) do (2-84) so brez izpeljave v literaturi Theory of Elastic Stability:
International Student Edition, Second Edition; 1961.

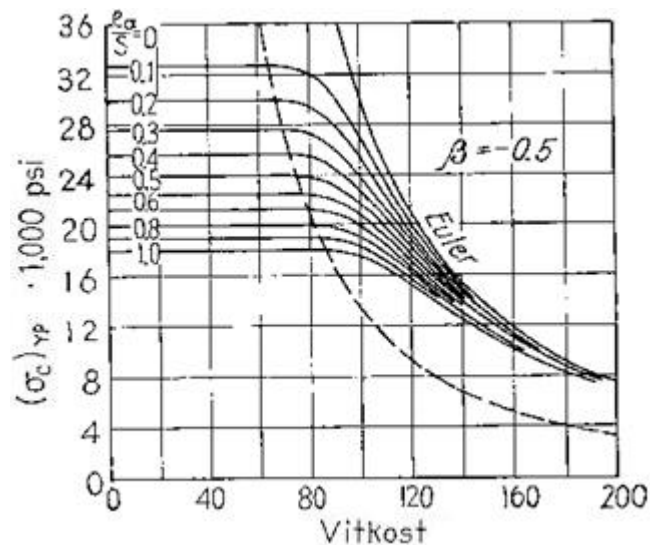
Rezultati dobljeni z enačbami (2-82), (2-83) in (2-84) so prikazani s krivuljami na slikah 2-27, 2-28, 2-29 ter 2-30. Krivulje so prikazane za konstrukcijsko jeklo z modulom elastičnosti $E = 30\,000\,000 \text{ psi} = 20\,684.4 \text{ kN/cm}^2$ in pri maksimalni napetosti vlakna (robnega vlakna) na meji elastičnosti $\sigma_{YP} = 36\,000 \text{ psi} = 24.821 \text{ kN/cm}^2$. Krivulje so prikazane za različne vrednosti razmerja e_a / s od 0.1 do 1.0 pri različnih vrednostih razmerja $\beta = e_a / e_b$. Z uporabo teh krivulj lahko na enostaven način dobimo vrednost povprečne tlačne napetosti pri maksimalni napetosti na meji elastičnosti $(\sigma_c)_{YP}$. Črtkano prikazane krivulje na slikah 2-27, 2-28, 2-29 dobimo iz enačbe (2-84), prikazujejo pa razmejitev med kratkimi elementi, kjer uporabljamo enačbo (2-82) in vitkimi elementi, kjer uporabljamo enačbo (2-83).



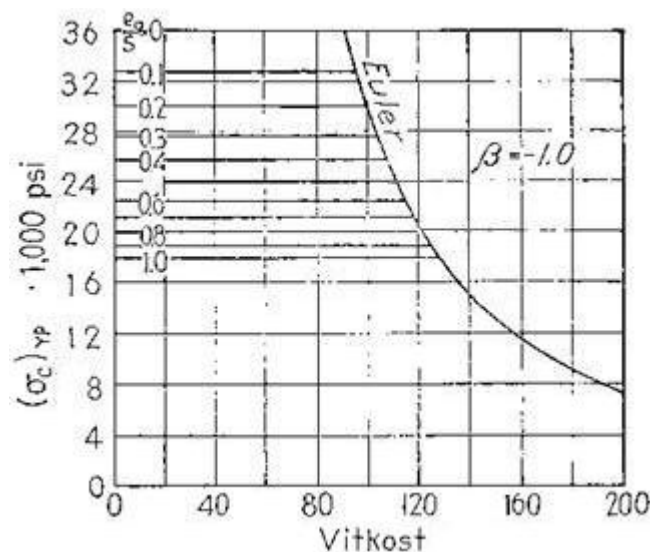
Slika 2-27: Vrednosti povprečne tlačne napetosti $(\sigma_c)_{YP}$ v odvisnosti od vitkosti l/r pri vrednosti modula elastičnosti $E = 30\,000\,000 \text{ psi} = 20\,684.4 \text{ kN/cm}^2$ ($1 \text{ psi} = 1 \text{ pound per square inch} = 6.8948 \cdot 10^{-4} \text{ kN/cm}^2$), pri napetosti v robnem vlaknu na meji elastičnosti $\sigma_{YP} = 36\,000 \text{ psi} = 24.821 \text{ kN/cm}^2$ in različnih razmerjih ekscentričnosti proti radiju jedra e/s , za primer členkasto podprtega elementa na obeh koncih z ekscentrično osno tlačno obtežbo z dvema različnima ekscentričnostima pri $\beta = 0.5$ (prirejeno po Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 43)



Slika 2-28: Vrednosti povprečne tlačne napetsti $(\sigma_c)_{YP}$ v odvisnosti od vitkosti l/r pri vrednosti modula elastičnosti $E = 30\,000\,000 \text{ psi} = 20\,684.4 \text{ kN/cm}^2$ ($1 \text{ psi} = 1 \text{ pound per square inch} = 6.8948 \cdot 10^{-4} \text{ kN/cm}^2$), pri napetosti v robnem vlaknu na meji elastičnosti $\sigma_{YP} = 36\,000 \text{ psi} = 24.821 \text{ kN/cm}^2$ in različnih razmerjih ekscentričnosti proti radiju jedra e/s , za primer členkasto podprtega elementa na obeh koncih z ekscentrično osno tlačno obtežbo z dvema različnima ekscentričnostima pri $\beta = 0$ (prirejeno po Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 43)



Slika 2-29 Vrednosti povprečne tlačne napetsti $(\sigma_c)_{YP}$ v odvisnosti od vitkosti l/r pri vrednosti modula elastičnosti $E = 30\,000\,000 \text{ psi} = 20\,684.4 \text{ kN/cm}^2$ ($1 \text{ psi} = 1 \text{ pound per square inch} = 6.8948 \cdot 10^{-4} \text{ kN/cm}^2$), pri napetosti v robnem vlaknu na meji elastičnosti $\sigma_{YP} = 36\,000 \text{ psi} = 24.821 \text{ kN/cm}^2$ in različnih razmerjih ekscentričnosti proti radiju jedra e/s , za primer členkasto podprtega elementa na obeh koncih z ekscentrično osno tlačno obtežbo z dvema različnima ekscentričnostima pri $\beta = -0.5$ (prirejeno po Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 43)



Slika 2-30: Vrednosti povprečne tlačne napetosti $(\sigma_c)_{YP}$ v odvisnosti od vitkosti l/r pri vrednosti modula elastičnosti $E = 30\,000\,000 \text{ psi} = 20\,684.4 \text{ kN/cm}^2$ ($1 \text{ psi} = 1 \text{ pound per square inch} = 6.8948 \cdot 10^{-4} \text{ kN/cm}^2$), pri napetosti v robnem vlaknu na meji elastičnosti $\sigma_{YP} = 36\,000 \text{ psi} = 24.821 \text{ kN/cm}^2$ in različnih razmerjih ekscentričnosti proti radiju jedra e/s , za primer členkasto podprtega elementa na obeh koncih z ekscentrično osno tlačno obtežbo z dvema različnima ekscentričnostima pri $\beta = -1$ (prirejeno po Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 44)

Ko ekscentričnost e_a zavzame vrednost nič, je vrednost povprečne tlačne napetosti $(\sigma_c)_{YP}$ enaka vrednosti napetosti v robnem vlaknu na meji elastičnosti σ_{YP} . Pri vitkih elementih z večjo vrednostjo razmerja l/r se vrednost $(\sigma_c)_{YP}$ približuje vrednosti P_{cr}/A , kjer je P_{cr} kritična obtežba iz enačbe (2-26). Krivulja pri razmerju $e_a/s = 0$ se imenuje Euler-jeva krivulja, kritična obtežba P_{cr} pa je Euler-jeva obtežba.

Na podoben način lahko dobimo vrednost obtežbe pri zagotavljeni varnosti, v primeru tlačnega elementa z začetno nepopolnostjo geometrije. Obravnavamo lahko primer elementa z začetno nepopolnostjo geometrije v obliki sinusne krivulje s slike 2-21, ki je opisana z enačbo:

$$y_0 = a \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right).$$

Če je tlačna obtežba P centrično nanešena na koncih elementa, lahko končni upogibek na sredini elementa dobimo z vstavljanjem vrednosti $x = l / 2$ v enačbo (2-71), kjer ob upoštevanju oznake $\alpha = P / P_{cr}$ dobimo:

$$\frac{1}{1 - P / P_{cr}},$$

pri maksimalni vrednosti tlačne napetosti:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} \cdot \left(1 + \frac{a}{s} \cdot \frac{1}{1 - P / P_{cr}} \right), \quad (2-85)$$

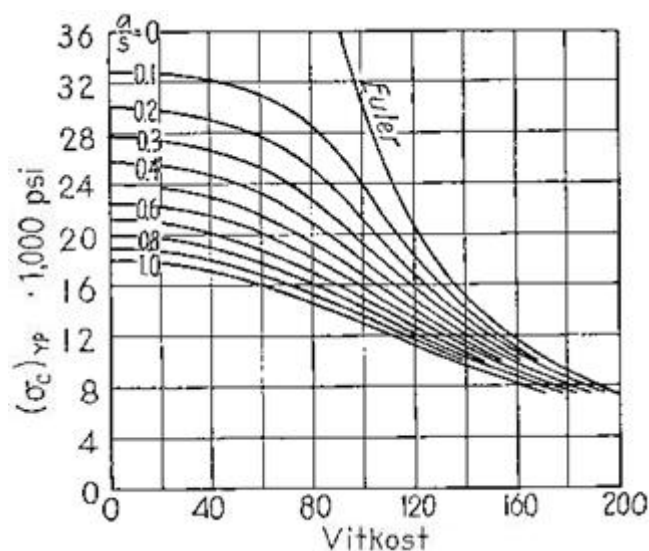
kjer s označuje radij jedra prečnega prereza. Z uporabo oznake $(\sigma_c)_{YP}$ za vrednost povprečne tlačne napetosti, pri kateri pride do maksimalne napetosti v najbolj obremenjenem vlaknu z vrednostjo, ki je enaka napetosti na meji elastičnosti, lahko enačbo (2-85) zapišemo v obliki:

$$\sigma_{YP} = (\sigma_c)_{YP} \cdot \left[1 + \frac{a}{s} \cdot \frac{1}{1 - ((\sigma_c)_{YP} / (\pi^2 \cdot E)) \cdot (l^2 / r^2)} \right]. \quad (2-86)$$

S pomočjo te kvadratne enačbe lahko izračunamo $(\sigma_c)_{YP}$, pri izbranih vrednostih razmerja med amplitudo sinusoide na sredini elementa (členkasto podprtega na obeh koncih) proti radiju jedra a / s in pri izbranih vrednostih vitkosti l / r .

Ko določimo vrednost povprečne tlačne napetosti pri napetosti v robnem vlaknu na meji elastičnosti $(\sigma_c)_{YP}$, jo delimo z varnostnim faktorjem n in dobimo dopustno vrednost povprečne tlačne napetosti, v primeru elementa z začetno nepopolnostjo geometrije, ki je členkasto podprt na obeh koncih. Slika 2-31 prikazuje krivulje z vrednostmi povprečne tlačne napetosti $(\sigma_c)_{YP}$ v primeru konstrukcijskega jekla z modulom elastičnosti $E = 30\,000\,000$ psi = 20 684.4 kN/cm² in pri napetosti v robnem vlaknu na meji elastičnosti $\sigma_{YP} = 36\,000$ psi = 24.821 kN/cm². Te krivulje so prikazane pri razmerjih a / s od 0.1 do 1.0. Z uprabo teh krivulj lahko v primeru takega elementa z začetno nepopolnostjo geometrije, ki je členkasto podprt na obeh koncih, izračunamo dopustno vrednost obtežbe pri izbranem varnostnem

faktorju, z metodo s poizkušanjem (trial-and-error). Krivulje na sliki 2-31 so zelo podobne krivuljam s slike 2-25 za primer ekscentrično obremenjenega elementa pri $\beta = 1$, pri enakih izbranih vrednostih razmerja a/s in e/s .



Slika 2-31: Vrednosti povprečne tlačne napetosti $(\sigma_c)_{YP}$ v odvisnosti od vitkosti l/r pri vrednosti modula elastičnosti $E = 30\,000\,000 \text{ psi} = 20\,684.4 \text{ kN/cm}^2$ ($1 \text{ psi} = 1 \text{ pound per square inch} = 6.8948 \cdot 10^{-4} \text{ kN/cm}^2$), pri napetosti v robnem vlaknu na meji elastičnosti $\sigma_{YP} = 36\,000 \text{ psi} = 24.821 \text{ kN/cm}^2$ in različnih razmerjih nepopolnosti na sredini začetno ukrivljenega tlačno obremenjenega elementa proti radiju jedra a/s (prirejeno po Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition; 1961, str. 45)

3 DIMENZIONIRANJE LESENIH STEBROV-NOSILCEV POD VPLIVOM KOMBINIRANE OSNE TLAČNE IN UPOGIBNE OBREMENITVE PO STANDARDU SIST EN 1995-1-1

3.1 Namen

Naslednje besedilo (od str. 57 do str. 58) je povzeto iz literature Timber Engineering: Edited by Thelandersson S. and Larsen H. J.; 2003.

Konstrukcijski les spada med najstarejše materiale v gradbeništvu. Ima zelo visoko razmerje trdnosti proti teži in sposobnost prenosa natezne, tlačne ter upogibne obremenitve. Uporablja se za različne konstrukcijske elemente, kot so grede oziroma nosilci, stebri, vezi in okvirji.

Oblikovanje lesa je enostavno, pri izvedbi spojev pa lahko uporabljamo različna sredstva kot so žebli, vijaki in mozniki. Vremenski pogoji vplivajo na lastnosti lesa, vsebnost vlage vpliva na mehanske in reološke lastnosti lesa.

Les se kot glavni uporabljeni konstrukcijski material uporablja pri različnih stavbah in inženirskih konstrukcijah. Lahki leseni okvirji iz konstrukcijskega lesa, lesnih proizvodov in panelov se lahko uporabijo pri enodružinskih hišah, večnadstropnih stanovanjskih ter poslovnih stavbah. Elementi kot so stene in strehe se uporabljajo tudi pri industrijskih objektih. Les se pogosto uporablja za strešno konstrukcijo tudi pri stavbah, kjer je za ostali del konstrukcije uporabljen drugi material.

Les je okolju prijazen material z možnostjo enostavnega recikliranja. Poraba energije pri proizvodnji oziroma pripravi je majhna v primerjavi z ostalimi materiali. Zaradi majhne teže pa so proizvodnja, transport in gradnja olajšani, enostavnejše pa je tudi temeljenje.

Zaradi svojega biološkega izvora je les visokotrden vlaknasti kompozit, ki je anizotropen

oziroma ima različne mehanske lastnosti v različnih smereh. Žagani les je nehomogen material, ki vsebuje nepravilnosti zaradi rasti v obliki grč, neravno orientacijo vlaken itd., katere pa zmanjšujejo trdnost lesenih elementov.

Naslednje besedilo (od str. 58 do str. 81) je povzeto iz literature Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007.

Konstrukcijo lahko analiziramo z uporabo več različnih metod:

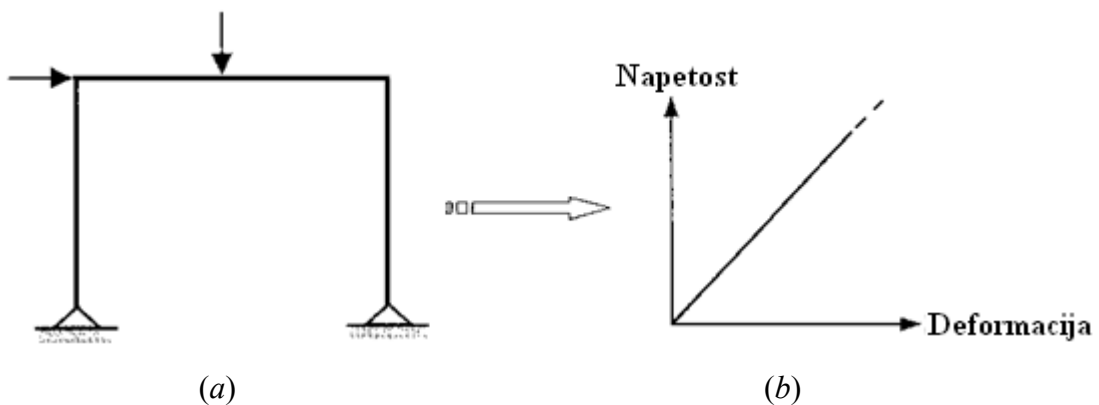
- linearna elastična analiza, ki temelji na linearni zvezi med napetostmi in specifičnimi deformacijami ter ukrivljenosti zaradi upogibnega momenta:
 - analiza po teoriji prvega reda brez prerazporeditve, je analiza ki jo izvedemo ob upoštevanju začetne nedeformirane geometrije konstrukcije in elementov konstrukcije, brez upoštevanja prerazporeditve notranjih sil ter momentov. Na temu temelji večina računalniških programov za linearno elastično analizo po teoriji prvega reda (slika 3-1).
 - Analiza po teoriji prvega reda s prerazporeditvijo, je analiza ki jo izvedemo ob upoštevanju začetne nedeformirane geometrije konstrukcije in elementov konstrukcije, toda s prilagoditvijo notranjih sil in momentov, tako da zadovoljijo vrednostim zasukov in kontroli rotacijske kapacitete.
 - Analiza po teoriji drugega reda, je analiza ki jo izvedemo ob upoštevanju deformirane geometrije konstrukcije (slika 3-1).
- Nelinearna analiza, ki temelji na nelinearni zvezi med napetostmi in specifičnimi deformacijami (slika 3-3):
 - analiza po teoriji prvega reda, ki se izvede ob upoštevanju začetne nedeformirane geometrije konstrukcije.
 - Analiza po teoriji drugega reda, ki se izvede ob upoštevanju deformirane geometrije konstrukcije.

Naslednji opisi so pogosto povezani z nelinearnimi analizami, ki vključujejo plastično obnašanje:

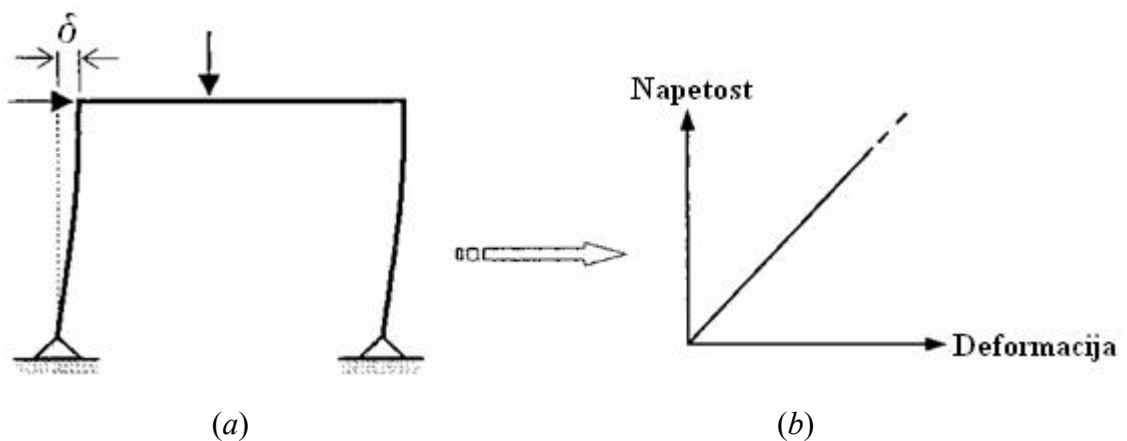
- Elastično-idealno plastično obnašanje, je linearno elastično obnašanje kateremu

sledi čisto plastično obnašanje (slika 3-3 *a*).

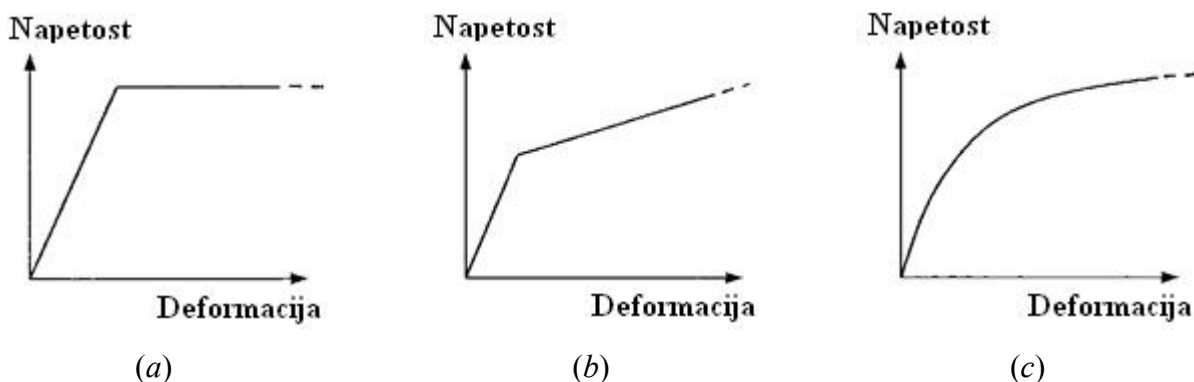
- Elasto-plastično obnašanje (slika 3-3 *b*), je linearno elastično obnašanje kateremu sledi plastično obnašanje z utrjevanjem glede na specifične deformacije.
- Togo plastično obnašanje (slika 3-4), je čisto plastično obnašanje, pri upoštevanju analize mejnih stanj glede na obremenitev s porušno obtežbo (obnašanje spojev pri uporabi lesnih zvez iz kovinskih moznikov).



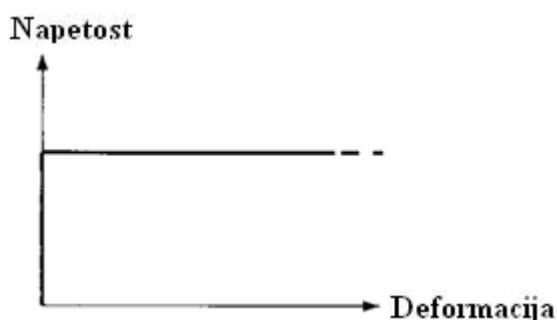
Slika 3-1: Linearno elastična analiza po teoriji prvega reda (*a*), linearno elastično obnašanje (*b*) (prirejeno po Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 61)



Slika 3-2: Linearno elastična analiza po teoriji drugega reda (*a*), linearno elastično obnašanje (*b*) (prirejeno po Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 61)



Slika 3-3: Ostali primeri zveze med napetostmi in specifičnimi deformacijami pri nelinearni analizi: elastično-idealno plastično obnašanje (a), elasto-plastično obnašanje z utrjevanjem glede na specifične deformacije (b), poljubna nelinearna zveza med napetostmi in specifičnimi deformacijami (c) (prirejeno po Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 61)

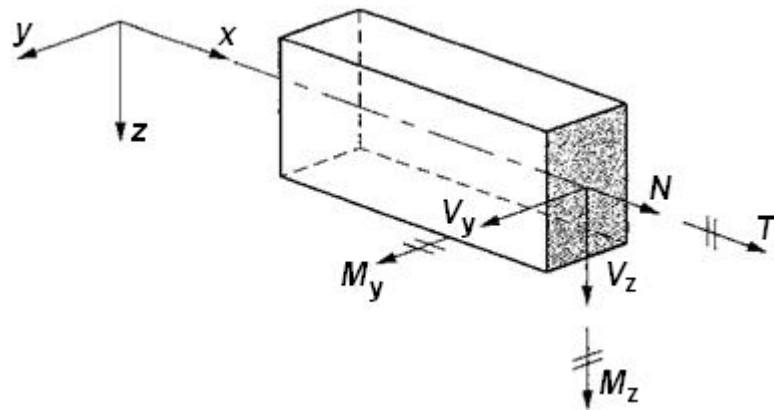


Slika 3-4: Togo plastično obnašanje (prirejeno po Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 62)

3.2 Dimenzioniranje lesenih elementov pod vplivom upogibne obremenitve

Dimenzioniranje lesenih elementov pod vplivom upogibne obremenitve v mejnih stanjih nosilnosti (MSN) iz masivnega lesa ali ostalih lesnih konstrukcijskih proizvodov obravnava poglavje 6 v standardu SIST EN 1995-1-1.

Glede na elastično upogibno teorijo, pri elementih s pravokotnim prečnim prerezom, upoštevamo lokalni koordinatni sistem s slike 3-3, kjer os z poteka v močni smeri in kjer je M_y upogibni moment okoli močne osi $y-y$.

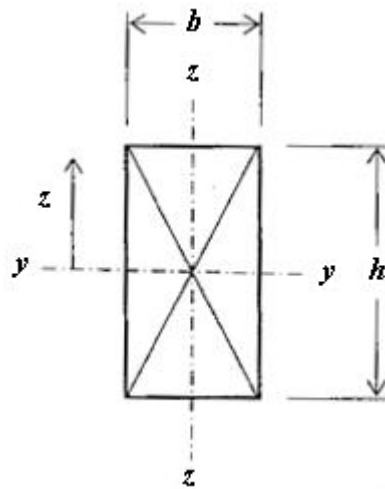


Slika 3-5: Element s pravokotnim prečnim prerezem in lokalnim koordinatnim sistemom, kjer os z poteka v močni smeri, upogibni moment M_y pa deluje okoli močne osi y - y (prirejeno po Timber Engineering: Edited by Thelandersson S. and Larsen H. J.; 2003, str. 202)

Iz elastične upogibne teorije sledi, da je v primeru pravokotnega prečnega prereza s slike 3-6 pod vplivom upogibnega momenta okoli močne osi y - y projektna napetost na poljubni razdalji z od te osi enaka:

$$\sigma = \frac{M_y \cdot z}{I_y}, \quad (3-1)$$

kjer je I_y vztrajnostni moment prečnega prereza okoli y - y osi.



Slika 3-6: Pravokotni prečni prerez elementa (Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 105)

Razmerje med vztrajnostnim momentom I_y okoli močne osi in razdaljo z pomeni odpornostni moment prečnega prereza W_y okoli močne osi y - y :

$$W_y = \frac{I_y}{z}.$$

Vrednost odpornostnega momenta W_y je odvisna od razdalje z od močne osi y - y , kjer pri dimenzioniranju za razdaljo z izberemo razdaljo od osi y - y do maksimalno tlačno in maksimalno natezno obremenjenega vlakna v prečnem prerezu. Projektna upogibna napetost $\sigma_{m,y,d}$ maksimalno obremenjenega vlakna v prečnem prerezu s slike 3-6, pri obremenitvi s projektno vrednostjo upogibnega momenta $M_{y,d}$ okoli močne osi je:

$$\sigma_{m,y,d} = \frac{M_{y,d}}{W_y}, \quad (3-2)$$

kjer je:

$$W_y = \frac{I_y}{z} = \frac{b \cdot h^3}{12} \cdot \frac{2}{h} = \frac{b \cdot h^2}{6}. \quad (3-3)$$

Podobne izraze lahko dobimo za projektno upogibno napetost v maksimalno obremenjenih vlaknih, pri upogibu s projektnim upogibnim momentom okoli šibke z - z osi in za odpornostni moment W_z .

Pri elementu pod vplivom upogiba, kjer ni redukcije nosilnosti zaradi prečne torzijske nestabilnosti oziroma bočne zvrnitve, se projektna trdnost nanaša na upogibno trdnost materiala elementa. Do nevarnosti bočne zvrnitve pride pri elementu pod vplivom upogiba okoli močne y - y osi, ko tlačeni del elementa ni dovolj podprt oziroma nima povsem preprečenih bočnih pomikov, v splošnem pa povsod tam kjer je relativna vitkost $\lambda_{rel,m}$ glede na upogib okoli te y - y osi večja od 0.75.

V primeru elementa pod vplivom enoosnega upogiba okoli močne y - y osi, kjer je relativna vitkost $\lambda_{rel,m}$ glede na upogib okoli te y - y osi manjša ali enaka 0.75, projektni pogoj zahteva, da maksimalna upogibna napetost v prerezu pri upogibu okoli te y - y osi ne sme preseči vrednosti projektne upogibne trdnosti materiala lesenega elementa oziroma lesnega konstrukcijskega proizvoda. Ta pogoj predstavlja enačba:

$$\frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} \leq 1. \quad (3-4)$$

V primeru elementa pod vplivom enoosnega upogiba okoli šibke z - z osi ne pride do pojava bočne zvrnitve in projektni pogoj zahteva, da maksimalna upogibna napetost v prerezu pri upogibu okoli te z - z osi ne sme preseči vrednosti projektne upogibne trdnosti materiala lesenega elementa oziroma lesnega konstrukcijskega proizvoda. Ta pogoj pa predstavlja enačba:

$$\frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1. \quad (3-5)$$

V primeru elementa pod vplivom dvoosnega upogiba oziroma pod vplivom upogibnega momenta okoli obeh osi y - y in z - z , kjer je relativna vitkost glede na upogib okoli močne y - y osi manjša ali enaka 0.75, so projektni pogoji taki, da moramo izpolniti zahteve enačb (6.11) ter

(6.12) iz standarda SIST EN 1995-1-1 oziroma enačb:

$$\frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} + k_m \cdot \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1, \quad (3-6)$$

$$k_m \cdot \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} + \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1, \quad (3-7)$$

kjer sta $\sigma_{m,y,d}$, $\sigma_{m,z,d}$ projektni upogibni napetosti pri upogibu okoli močne y - y in šibke z - z osi prečnega prereza s slike 3-6, s širino b ter višino h :

$$\sigma_{m,y,d} = \frac{M_{y,d}}{W_y},$$

$$\sigma_{m,z,d} = \frac{M_{z,d}}{W_z}.$$

Z $M_{y,d}$ je označen projektni upogibni moment okoli močne y - y osi, z W_y pa je označen odpornostni moment prečnega prereza okoli te y - y osi:

$$W_y = \frac{b \cdot h^2}{6}.$$

Z $M_{z,d}$ je označen projektni upogibni moment okoli šibke z - z osi, z W_z pa je označen odpornostni moment prečnega prereza okoli te z - z osi:

$$W_z = \frac{h \cdot b^2}{6}.$$

S $f_{m,y,d}$ in $f_{m,z,d}$ sta označeni projektni upogibni trdnosti okoli močne y - y ter šibke z - z osi prečnega prereza s slike 3-6, kjer velja:

$$f_{m,y/z,d} = \frac{k_{\text{mod}} \cdot k_h \cdot f_{m,k}}{\gamma_M}. \quad (3-8)$$

Kjer so:

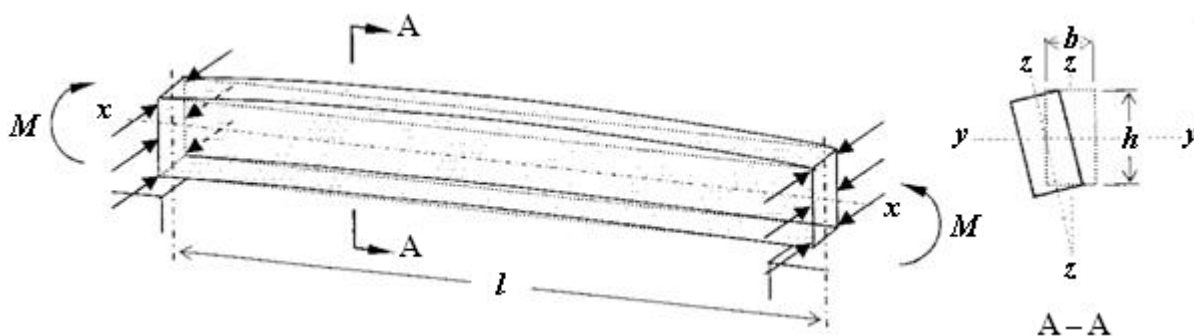
- k_{mod} , modifikacijski faktor za trajanje obtežbe in vlažnost,
- k_h , faktor višine prereza, kjer se efekt višine prereza nanaša na masivni les, slojnati furnirni les (laminated veneer lumber oziroma LVL) pri upogibu glede na sloje ter lepljeni lamelirani les (glued-laminated timber oziroma glulam). Pri dimenzioniranju ostalih lesnih konstrukcijskih proizvodov je faktor višine prereza k_h enak 1. Faktor višine prereza k_h je odvisen od dimenzije v smeri upogiba, zato se vrednost faktorja pri upogibu okoli ene osi lahko razlikuje od vrednosti faktorja pri upogibu okoli druge osi,
- $f_{m,k}$, karakteristična upogibna trdnost lesenega elementa ali karakteristična upogibna trdnost glede na obravnavano os upogiba pri uporabi ostalih lesnih konstrukcijskih proizvodov,
- γ_M , delni varnostni faktor za lastnosti materiala, ki upošteva tudi negotovost oziroma nezanesljivost modela za račun odpornosti in spremenljivost dimezij,
- k_m , faktor, ki upošteva možnost prerazporeditve upogibnih napetosti v prečnem prerezu in upošteva vpliv odstopanja pri lastnostih materiala. Vrednosti faktorja k_m so podane v podglavju 6.1.6 v odstavku (2) standarda SIST EN 1995-1-1:
 - pri elementih iz masivnega lesa in slojnatega furnirnega lesa (laminated veneer lumber oziroma LVL) ter lepljenega lameliranega lesa (glued-laminated timber oziroma glulam) je $k_m = 0.7$ v primeru pravokotnega prečnega prereza oziroma $k_m = 1.0$ pri ostalih prečnih prerezih,
 - pri ostalih lesnih konstrukcijskih proizvodih je $k_m = 1.0$ pri katerikoli obliki prečnega prereza.

V primerih prečnih prerezov, kjer imata vztrajnostna momenta okoli y - y osi in z - z osi enako vrednost (na primer kvadratni ali krožni prečni prerez) ne pride do pojava bočne zvrnitve, projektni vrednosti upogibne trdnosti $f_{m,y,d}$ ter $f_{m,z,d}$ pa sta enaki. V primeru krožnega prečnega prereza je odpornostni moment:

$$W = \frac{\pi \cdot d^3}{32},$$

kjer je d premer prereza.

Ob upoštevanju teorije elastičnega uklona v primeru idealno ravnega elementa pod vplivom upogibnega momenta okoli močne y - y osi lahko ugotovimo, da obstaja elastična kritična obtežba pri kateri pride do hipne nestabilnosti elementa, kjer pride do bočnih upogibkov in torzijskih zasukov okoli vzdolžne x - x osi. Ta oblika nestabilnosti se imenuje bočni torzijski uklon oziroma bočna zvrnitev, ki je prikazana s prerezom A - A s slike 3-7, za primer elementa pod vplivom čistega upogiba okoli močne y - y osi.



Slika 3-7: Bočna zvrnitev elementa s projektno dolžino l , s preprečenimi torzijskimi zasuki na obeh koncih in omogočenimi prečnimi pomiki vzdolž elementa, ki je pod vplivom čistega upogibnega momenta M okoli močne y - y osi (Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 107)

Upogibni moment pri katerem pride do elastičnega uklona se imenuje elastični kritični moment in je funkcija obtežbe, dolžine elementa, vrste podpor, relativne razdalje od lege obtežbe elementa do strižnega težišča, strižnega modula, modula elastičnosti in geometrijskih lastnosti prečnega prereza. Pri elementu s projektno dolžino l , ki je podprt tako, da so torzijski zasuki na koncih elementa preprečeni, prečni pomiki vzdolž elementa pa so možni in ki je pod vplivom obtežbe s čistim upogibnim momentom okoli močne y - y osi, nanešene na koncih elementa kot prikazuje slika 3-7, lahko ugotovimo, da je vrednost elastičnega kritičnega momenta elementa (enačba je povzeta iz literature Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007):

$$M_{y,crit} = \frac{\pi}{l} \cdot \sqrt{\frac{E_{0.05} \cdot I_z \cdot G_{0.05} \cdot I_{tor}}{(1 - (I_y/I_z))}} \quad (3-9)$$

V primeru pravokotnega prečnega prereza širine b , višine h , je vztrajnostni moment okoli šibke

osi z-z enak:

$$I_z = \frac{h \cdot b^3}{12},$$

za približno vrednost torzijskega vztrajnostnega momenta I_{tor} lahko upoštevamo izraz (enačba je brez izpeljave v literaturi Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007):

$$I_{\text{tor}} = \frac{b^3 \cdot h \cdot (1 - 0.63 \cdot (b/h))}{3},$$

in z vstavljanjem teh količin v enačbo (3-9) dobimo vrednost elastičnega kritičnega momenta:

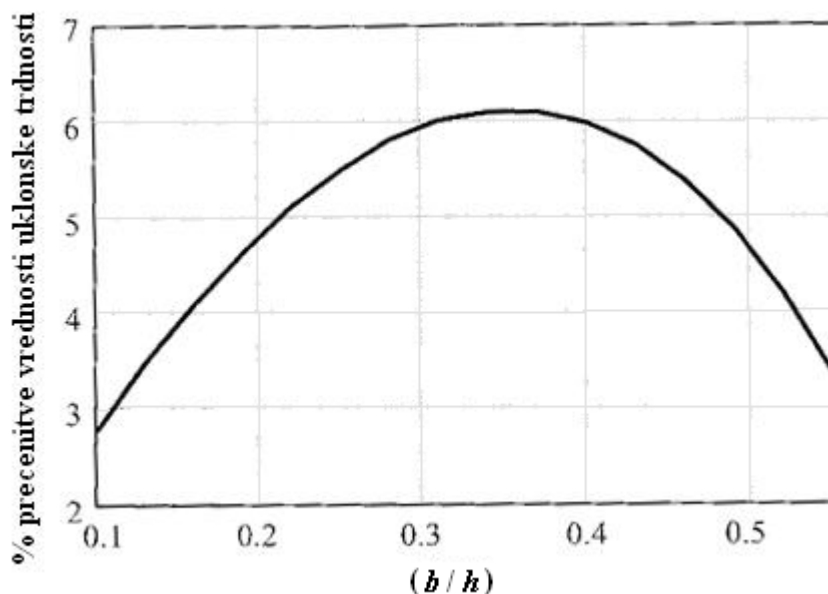
$$M_{y,\text{crit}} = \frac{\pi \cdot (b^3 \cdot h) \cdot \sqrt{E_{0.05} \cdot G_{0.05} \cdot ((1 - 0.63 \cdot (b/h)) / (1 - (b/h)^2))}}{6 \cdot l}, \quad (3-10)$$

kjer je $E_{0.05}$ 5-odstotni kvantil karakteristične vrednosti modula elastičnosti lesenega elementa vzporedno z vlakni, $G_{0.05}$ pa je 5-odstotni kvantil karakteristične vrednosti strižnega modula.

Pri vseh običajnih praktičnih dimenzijah elementa iz masivnega lesa, lahko del izraza pod korenem iz enačbe (3-10) označimo s faktorjem a :

$$a = \sqrt{((1 - 0.63 \cdot (b/h)) / (1 - (b/h)^2))}.$$

Faktor a je za razmerje $b/h \leq 0.6$ manjši od ena in zelo malo vpliva na kritični moment. To predstavlja slika 3-8, ki prikazuje procent precenitve kritičnega momenta iz standarda SIST EN 1995-1-1 v odvisnosti od razmerja širine in višine prečnega prereza, ob zanemaritvi faktorja a . Ugotovimo lahko, da je elastični kritični moment precejšen od 3% do 6%, kjer do maksimalne precenitve pride pri razmerju širine in višine prečnega prereza med 0.3 ter 0.4.



Slika 3-8: Procent precenitve kritičnega momenta iz Evrokoda 5 v odvisnosti od razmerja širine in višine pravokotnega prečnega prereza, ko ne upoštevamo faktorja a (prirejeno po Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 108)

Glede na standard SIST EN 1995-1-1, faktor a zanemarimo v primeru elementov s pravokotnim prečnim prerezom iz masivnega "mehkega" lesa (iglavci in topolovina, trdnostni razredi C), kjer je potem približna vrednost elastičnega kritičnega momenta:

$$M_{y,crit} = \frac{\pi \cdot (b^3 \cdot h) \cdot \sqrt{E_{0.05} \cdot G_{0.05}}}{6 \cdot l} \quad (3-11)$$

V primeru elementov s pravokotnim prečnim prerezom iz masivnega "trdega lesa" (listavci, trdnostni razredi D), slojnatega furnirnega lesa (laminated veneer lumber oziroma LVL) in lepljenega lameliranega lesa (glued-laminated timber oziroma glulam) se glede na standard SIST EN 1995-1-1 upošteva polno torzijsko togost, le da se izraz:

$$(1 - (b/h)^2)$$

pri faktorju a zanemari. Potem je približna vrednost elastičnega kritičnega momenta enaka:

$$M_{y,crit} = \frac{\pi \cdot (b^3 \cdot h) \cdot \sqrt{E_{0.05} \cdot G_{0.05} \cdot (1 - 0.63 \cdot (b/h))}}{6 \cdot l} \quad (3-12)$$

Ko enačbo (3-12) delimo z odpornostnim momentom pravokotnega prečnega prereza okoli močne y - y osi, dobimo kritično upogibno napetost oziroma uklonsko trdnost:

$$\sigma_{m,crit} = \frac{M_{y,crit}}{W_y} = \frac{\pi \cdot b^2}{h \cdot l} \cdot \sqrt{E_{0.05} \cdot G_{0.05} \cdot \left(1 - 0.63 \cdot \frac{b}{h}\right)} \quad (3-13)$$

Enačba (3-13) se nanaša pravokotni prečni prerez iz masivnega "trdega" lesa, slojnatega furnirnega lesa ali lepljenega lameliranega lesa pod vplivom obtežbe v obliki dveh koncentriranih upogibnih momentov nanešenih na obeh koncih elementa. Ta enačba je poenostavitev enačbe (6.31) iz standarda SIST EN 1995-1-1.

V primeru pravokotnega prečnega prereza iz "mehkega" lesa je razmerje med 5-odstotnim kvantilom karakteristične vrednosti modula elastičnosti lesenega elementa vzporedno z vlakni $E_{0.05}$ in 5-odstotnim kvantilom karakteristične vrednosti strižnega modula $G_{0.05}$, približno enako 16. Z vstavljanjem te približne vrednosti v enačbo (3-11) in ko to enačbo delimo z odpornostnim momentom, dobimo kritično upogibno napetost oziroma uklonsko trdnost, za primer elementa s pravokotnim prečnim prerezom, pri upogibu okoli močne y - y osi:

$$\sigma_{m,crit} = \frac{M_{y,crit}}{W_y} = \frac{0.78 \cdot b^2}{h \cdot l} \cdot E_{0.05} \quad (3-14)$$

kjer je $E_{0.05}$ 5-odstotni kvantil karakteristične vrednosti modula elastičnosti lesenega elementa vzporedno z vlakni, b je širina prečnega prereza elementa, h je višina prečnega prereza elementa, l je razpon elementa med prečnima členkastima podporama na koncih elementa, W_y pa je odpornostni moment prečnega prereza elementa okoli močne y - y osi.

Enačbi (3-11) in (3-12) veljata samo v primeru, kjer je obtežba s koncentriranim momentom nanešena na koncih elementa, kjer podpora na koncih elementa preprečujeta pomik v prečni smeri, v podporah je preprečen torzijski zasuk, omogočen pa je zasuk v ravnini elementa (okoli

osi pravokotne na vzdolžno os elementa). V primerih z drugačnimi robnimi pogoji (oziroma podporami drugačne vrste), v primerih kjer pride do upogibnih momentov zaradi drugih vrst obtežbe, kakor tudi primerih, kjer je obtežba nanešena na tlačnem ali nateznem robu prečnega prereza izven središčne osi elementa (oziroma pri ekscentrični obtežbi), lahko elastični kritični moment izračunamo z enakim izrazom, le da namesto dejanskega razpona l vstavimo efektivno dolžino elementa l_{ef} . Efektivno dolžino elementa l_{ef} dobimo s prilagoditvijo projektne dolžine l , kjer upoštevamo vpliv spremembe lege in vrste obtežbe ter robne pogoje oziroma pogoje podpiranja, vrednosti za dimenzioniranje v splošnih praktičnih primerih pa so podane v preglednici 3-1.

Izjemno težko je doseči polno vpetost elementa oziroma preprečiti zasuke v ravnini elementa (okoli osi pravokotne vzdolžni osi elementa), razen v primeru konzolnega elementa (kjer je polna vpetost). Pri vseh ostalih primerih iz preglednice 3-1 je predpostavljeno, da je element popolnoma torzijsko podprt, omogočeni pa so zasuki v ravnini na koncih elementa.

Pri dimenzioniranju pravokotnih prečnih prerezov iz masivnega "mehkega" lesa, lahko ob upoštavanju efektivne dolžine elementa l_{ef} , enačbo (3-14) zapišemo na naslednji način:

$$\sigma_{m,crit} = \frac{0.78 \cdot b^2}{h \cdot l_{ef}} \cdot E_{0.05}. \quad (3-15)$$

Ta enačba je enakovredna enačbi (6.32) iz standarda SIST EN 1995-1-1.

Pri dimenzioniranju pravokotnih prečnih prerezov iz masivnega "trdega" lesa, slojnatega furnirnega lesa in lepljenega lameliranega lesa, pa ob uporabi efektivne dolžine elementa l_{ef} , lahko enačbo (3-13) zapišemo na naslednji način, kjer dobimo enačbo enakovredno enačbi (6.31) iz standarda SIST EN 1995-1-1:

$$\sigma_{m,crit} = \frac{\pi \cdot b^2}{h \cdot l_{ef}} \cdot \sqrt{E_{0.05} \cdot G_{0.05} \cdot \left(1 - 0.63 \cdot \frac{b}{h}\right)}. \quad (3-16)$$

Efektivno dolžino l_{ef} iz enačb (3-15) in (3-16) dobimo za različne vrste obtežbe iz

preglednice 3-1, ki vključuje primere obtežb iz preglednice 6.1 iz standarda SIST EN 1995-1-1 in ostale primere obtežb.

Preglednica 3-1: Razmerje efektivne dolžine l_{ef} in razpona nosilca l (prirejeno po Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 110)

Robni pogoji nosilca: prečno podprto; torzijsko podprto; prosti zasuki v ravnini	Nanešena obtežba	l_{ef} / l Evrokod 5	l_{ef} / l ostali primeri
Prostoležeči nosilec	Konstantni moment	1.0	
	Enakomerno porazdeljena obtežba	0.9	
	Koncentrirana sila na sredini razpona	0.8	
	Koncentrirane sile na četrtni in treh četrtninah razpona		0.96
	Moment M na enem koncu in moment $M / 2$ v nasprotni smeri na drugem koncu nosilca		0.76
	Moment M na enem koncu in brez momenta na drugem koncu nosilca		0.53
Nosilec vpet na obeh konceh	Enakomerno porazdeljena obtežba		0.78
	Koncentrirana sila na sredini razpona		0.64
Prostoležeči nosilec z bočno torzijsko podporo na sredini razpona	Koncentrirana sila na sredini razpona		0.28
Konzolni nosilec	Enakomerno porazdeljena obtežba	0.5	
	Koncentrirana sila na prostem koncu konzolnega nosilca	0.8	

V preglednici 3-1, razmerje med efektivno dolžino l_{ef} in razponom l elementa, velja za elemente s torzijskimi podporami, ki so obteženi v težišču. Če obtežba deluje na tlačnem robu elementa, se v skladu s standardom SIST EN 1995-1-1 l_{ef} poveča za $2 \cdot h$ (kjer je h višina prečnega prereza elementa); če pa deluje na nateznem robu elementa, se l_{ef} lahko zmanjša za

$0.5 \cdot h$. Konzolni element je na vpetem koncu prečno podprt, torzijsko podprt in na tem mestu so preprečeni zasuki v ravnini elementa, na prostem koncu pa so prečni pomiki in zasuki omogočeni.

Uklonska trdnost oziroma kritična upogibna napetost $\sigma_{m,crit}$ in karakteristična vrednost upogibne trdnosti $f_{m,k}$ elementa sta v standardu SIST EN 1995-1-1 povezani z enačbo:

$$(\lambda_{rel,m})^2 \cdot \sigma_{m,crit} = f_{m,k} ,$$

oziroma:

$$\lambda_{rel,m} = \sqrt{\frac{f_{m,k}}{\sigma_{m,crit}}} \quad (3-17)$$

kjer je $\lambda_{rel,m}$ relativna vitkost pri upogibu.

Enačba (3-17) velja samo v primeru, ko je kritična upogibna napetost $\sigma_{m,crit}$ manjša ali enaka od napetosti na meji elastičnosti materiala. Pri napetosti večji od napetosti na meji elastičnosti, je potrebno to zvezo modificirati, kjer upoštevamo vpliv nelinearnega obnašanja materiala in kjer postavimo minimalno vrednost relativne vitkosti pod katero ne pride do torzijskega uklona.

V standardu SIST EN 1995-1-1 je postavljena meja relativne vitkosti glede na upogib $\lambda_{rel,m} = 0.75$, pod katero ima element dovolj veliko togost, da ne pride do bočnega torzijskega uklona oziroma bočne zvrnitve. Pri vseh vrednostih relativne vitkosti glede na upogib $\lambda_{rel,m}$, manjših od 0.75 lahko upoštevamo projektni pogoj, kjer maksimalna upogibna napetost v prečnem prerezu ne sme preseči upogibne trdnosti elementa. Pri tem pogoju upoštevamo osnovne zahteve za upogib, kjer je relativna vitkost elementa $\lambda_{rel,m}$ glede na upogib okoli močne y-y osi manjša ali enaka 0.75.

Pri vrednosti relativne vitkosti glede na upogib $\lambda_{rel,m} = 1.4$, je vrednost razmerja karakteristične upogibne trdnosti in uklonske trdnosti $f_{m,k} / \sigma_{m,crit}$ približno enaka 2, kar predstavlja mejo

elastičnosti materiala. Zato pri relativni vitkosti glede na upogib $\lambda_{rel,m} \geq 1.4$ upoštevamo elastični uklon, kjer je projektni pogoj elastična kritična upogibna trdnost. Pri vrednostih relativne vitkosti med 0.75 in 1.4 pa pride do neelastične porušitve prereza, kjer standard SIST EN 1995-1-1 podaja poenostavljeno linearno zvezo med relativno vitkostjo in razpoložljivo trdnostjo elementa med temi dvema mejnimi vrednostmi.

Vpliv redukcije trdnosti elementa pri povečevanju relativne vitkosti $\lambda_{rel,m}$ zajamemo z redukcijskim koeficientom bočne nestabilnosti k_{crit} , ki ga upoštevamo pri projektni upogibni trdnosti elementa, tako da v mejnih stanjih nosilnosti (MSN) osnovno upogibno trdnost množimo s tem koeficientom. Vrednosti koeficienta bočne nestabilnosti k_{crit} , ob upoštevanju omejitev glede odstopanja od ravne osi elementa, ki se meri na sredini med podporami (iz standarda SIST EN 1995-1-1), so podane v preglednici 3-2.

Preglednica 3-2: Vrednosti koeficienta bočne nestabilnosti k_{crit} (standard SIST EN 1995-1-1, podpoglavje 6.3.3, odstavek 4; str. 48)

Vrednosti koeficienta bočne nestabilnosti k_{crit}	Vrednosti relativne vitkosti $\lambda_{rel,m}$
1	$\lambda_{rel,m} \leq 0.75$
$1.56 - 0.75 \cdot \lambda_{rel,m}$	$0.75 < \lambda_{rel,m} \leq 1.4$
$1 / \lambda_{rel,m}^2$	$1.4 < \lambda_{rel,m}$

Pri stebrih oziroma gredah, kjer lahko pride do bočne nestabilnosti sme odstopanje od ravne osi, ki se meri na sredini med podporami znašati največ 1 / 300 dolžine v primeru masivnega lesa in 1 / 500 dolžine v primeru slojnatega furnirnega lesa (laminated veneer lumber oziroma LVL) ali lepljenega lameliranega lesa (glued-laminated timber oziroma glulam), kjer je l dolžina stebra oziroma grede v mm. Pravila za dokazovanje trdnosti v standardu SIST EN 1995-1-1 upoštevajo te nepopolnosti.

Pri vrednosti relativne vitkosti $\lambda_{rel,m} \leq 0.75$ je projektna trdnost enaka osnovni upogibni trdnosti elementa, kjer je vrednost koeficienta bočne nestabilnosti $k_{crit} = 1$. V primeru, ko je obnašanje elementa znotraj elastičnega območja, pri vrednosti razmerja uklonske trdnosti proti karakteristični upogibni trdnosti $\sigma_{m,crit} / f_{m,k} < 0.51$, je merodajen uklon in projektna trdnost je

enaka elastični napetosti pri uklonu. V tem primeru je vrednost koeficienta bočne nestabilnosti k_{crit} odvisna le od relativne vitkosti $\lambda_{\text{rel,m}}$:

$$k_{\text{crit}} = \frac{1}{\lambda_{\text{rel,m}}^2} = \frac{\sigma_{\text{m,crit}}}{f_{\text{m,k}}}. \quad (3-18)$$

Ko vrednost razmerja uklonske trdnosti in karakteristične upogibne trdnosti na meji elastičnosti $\sigma_{\text{m,crit}} / f_{\text{m,k}} = 0.51$ vstavimo v enačbo (3-17), dobimo vrednost relativne vitkosti $\lambda_{\text{rel,m}} = 1.4$. Zveza iz enačbe (3-18) velja pri vseh vrednostih relativne vitkosti $\lambda_{\text{rel,m}} \geq 1.4$.

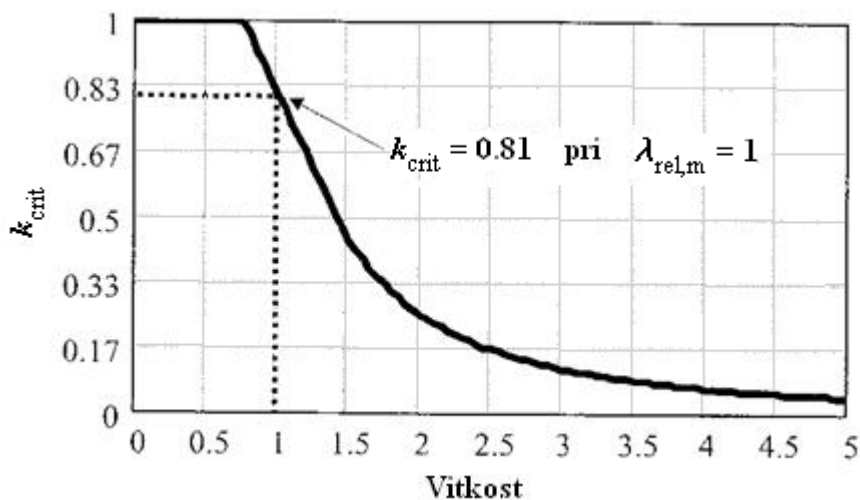
Iz enačbe (3-17) dobimo uklonsko trdnost idealno ravnega elementa, pri kakršnemkoli odstopanju od ravne osi elementa pa je trdnost manjša od vrednosti, ki jo dobimo s to enačbo. Pri odstopanju od ravne osi elementa, ki je znotraj mejne vrednosti iz standarda SIST EN 1995-1-1, lahko pri dimenzioniranju še vedno uporabljamo enačbo (3-17).

Ko je vrednost relativne vitkosti, $\lambda_{\text{rel,m}}$ med 0.75 in 1.4 je potrebno uporabiti linearno zvezo, ki zmanjšuje upogibno trdnost materiala pri relativni vitkosti $\lambda_{\text{rel,m}} = 0.75$, kjer je vrednost koeficienta bočne nestabilnosti $k_{\text{crit}} = 1$, do elastične kritične upogibne trdnosti pri relativni vitkosti $\lambda_{\text{rel,m}} = 1.4$, kjer je vrednost koeficienta bočne nestabilnosti $k_{\text{crit}} = 0.51$:

$$k_{\text{crit}} = 1.56 - 0.75 \cdot \lambda_{\text{rel,m}}. \quad (3-19)$$

Vpliv odstopanja od ravne osi elementa oziroma vpliv začetnih nepopolnosti je tudi potrebno upoštevati znotraj tega območja relativne vitkosti. Ker gre pri uporabi linearne zveze iz enačbe (3-19) za konzervativen pristop, lahko zato istočasno zajame tudi vpliv redukcije trdnosti zaradi začetne nepopolnosti.

Vrednosti koeficienta bočne nestabilnosti k_{crit} v odvisnosti od relativne vitkosti glede na upogib $\lambda_{\text{rel,m}}$, so grafično prikazane na sliki 3-9.



Slika 3-9: Vrednosti koeficienta bočne nestabilnosti k_{crit} v odvisnosti od relativne vitkosti glede na upogib $\lambda_{rel,m}$ (prirejeno po Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 112)

Da preprečimo pojav bočne zvrnitve upoštevamo enačbo (6.33) iz standarda SIST EN 1995-1-1, ki zahteva da mora biti upogibna napetost v elementu manjša ali enaka reducirani upogibni trdnosti:

$$\sigma_{m,d} \leq k_{crit} \cdot f_{m,d} , \quad (3-20)$$

kjer je $\sigma_{m,d}$ projektna upogibna napetost, $f_{m,d}$ je projektna upogibna trdnost, k_{crit} pa je faktor redukcije upogibne trdnosti zaradi nevarnosti bočnega torzijskega uklona oziroma bočne zvrnitve.

Projektno vrednost upogibne trdnosti dobimo iz karakteristične vrednosti upogibne trdnosti ob upoštevanju enačbe (3-8), ki je enaka:

$$f_{m,y/z,d} = \frac{k_{mod} \cdot (k_h \cdot f_{m,k})}{\gamma_M} .$$

Vrednost reducirane upogibne trdnosti glede na upogib okoli močne osi y - y je:

$$k_{\text{crit}} \cdot f_{m,y,d} = \frac{k_{\text{mod}} \cdot k_h}{\gamma_M} \cdot (k_{\text{crit}} \cdot f_{m,k}) . \quad (3-21)$$

3.3 Dimenzioniranje lesenih elementov pod vplivom osne tlačne obtežbe

Leseni elementi pod vplivom osne tlačne obremenitve so elementi, kjer je osna obtežba vzporedna z vlakni vzdolž središčne osi elementa $x-x$, kot prikazuje slika 3-10. Med te elemente spadajo stebri, koli, vertikalni linijski elementi v stenah in elementi v paličnih konstrukcijah.



Slika 3-10: Leseni element pod vplivom osne tlačne obtežbe vzporedne z vlakni vzdolž središčne osi elementa $x-x$, (Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 150)

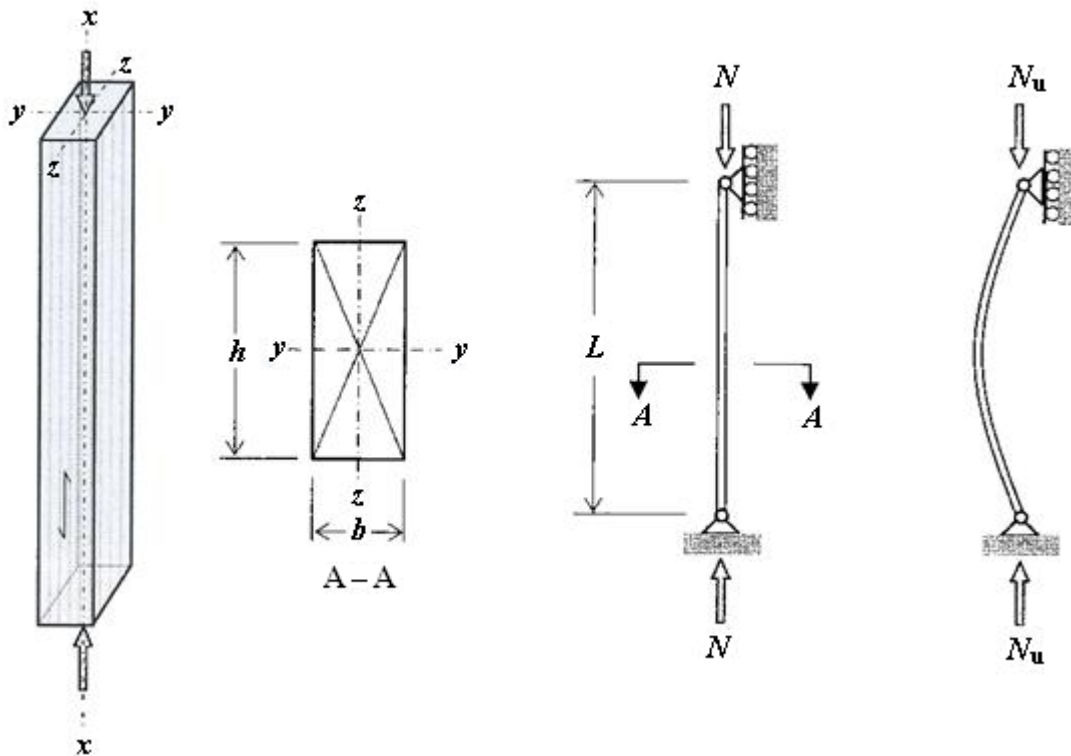
Porušna trdnost elementa pod vplivom osne tlačne obremenitve je odvisna od večih faktorjev:

- osnovne trdnosti/togosti – tlačne trdnosti in modula elastičnosti konstrukcijskega lesa;
- geometrije elementa – dimenzij prečnega prereza in dolžine elementa;
- pogojev podpiranja – števila in vrste podpor;
- geometrijskih nepopolnosti – odstopanj od nominalnih dimenzij, začetne ukrivljenosti (lokalne nepopolnosti) in nagnjenosti oziroma naklona elementa (globalne nepopolnosti);
- odstopanj pri lastnostih materiala in nepopolnosti – gostote, vpliva grč in vsebnosti vlage.

Zahteve v standardu SIST EN 1995-1-1 upoštevajo vse te faktorje.

Zaradi geometrijskih nepopolnosti elementa, odstopanj pri lastnostih elementa ali zaradi kombinacije nepopolnosti in odstopanj, pri elementu pod vplivom osne tlačne obremenitve,

obstaja nevarnost porasta prečnih pomikov ter posledičnega uklona, pri naraščanju vitkosti elementa λ , kot prikazuje slika 3-11.



Slika 3-11: Leseni element členkasto podprt na obeh koncih, pod vplivom osne tlačne obtežbe vzporedne z vlakni vzdolž središčne osi elementa $x-x$, (Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 151)

Vitkost elementa je določena kot razmerje efektivne oziroma uklonske dolžine elementa L_e in vztrajnostnega radija prečnega prereza i :

$$\lambda = \frac{L_e}{i}, \quad (3-22)$$

kjer je velikost vztrajnostnega radija:

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}},$$

I je vztrajnostni moment prečnega prereza, A pa površina prečnega prereza.

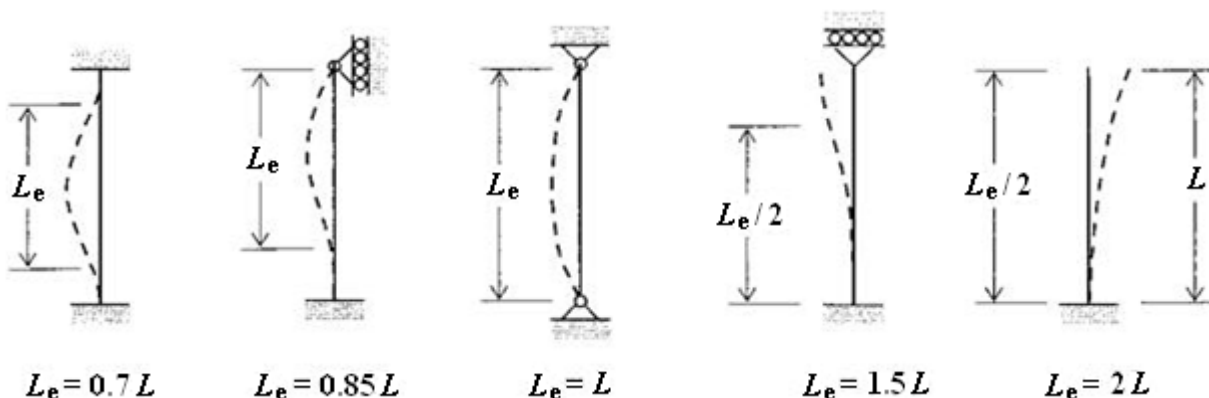
Pri elementu s pravokotnim prečnim prerezom je potrebno upoštevati vitkost λ_y pri uklonu okoli y - y osi in vitkost λ_z pri uklonu okoli z - z osi, kot prikazuje prečni prerez stebra A - A s slike 3-11:

$$\lambda_y = \frac{L_{e,y}}{i_y} = \frac{L_{e,y}}{h/\sqrt{12}} \quad \text{in} \quad \lambda_z = \frac{L_{e,z}}{i_z} = \frac{L_{e,z}}{b/\sqrt{12}},$$

kjer sta $L_{e,y}$ ter $L_{e,z}$ uklonski dolžini pri uklonu okoli y - y oziroma z - z osi. Do uklona pride okoli tiste osi, kateri pripada večja vitkost.

Efektivna oziroma uklonska dolžina L_e tlačnega elementa je razdalja med prevojnimi točkami deformirane osi elementa pri uklonu, kjer je vrednost upogibnega momenta enaka nič.

Standard SIST EN 1995-1-1 ne podaja informacij kako določiti uklonsko dolžino tlačnega elementa, zato lahko uklonsko dolžino določimo glede na robne pogoje oziroma vrsto in lego podpor, kjer si lahko pomagamo s sliko 3-12. Slika 3-12 prikazuje uklonske primere, kjer je L_e uklonska dolžina, L pa dejanska dolžina elementa. Kjer ne moremo uporabiti robnih pogojev s slike 3-12, togosti podpor pa so znane, je primerno uporabiti različne metode za analizo po teoriji drugega reda.



Slika 3-12: Uklonske dolžine elementov pri različnih načinih podpiranja (Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 152)

Ker pri lesenih elementih ne moremo zagotoviti polne vpetosti se uklonska dolžina prvega elementa $L_e = 0.7 \cdot L$ s slike 3-12, razlikuje od uklonske dolžine elementa s slike 2-20 (b), ki je enaka 0.5-krat dolžina elementa. Prav tako se uklonska dolžina drugega elementa $L_e = 0.85 \cdot L$ s slike 3-12, razlikuje od uklonske dolžine elementa s slike 2-18, ki je 0.699-krat dolžina elementa.

V primeru idealno ravnega nepomično členkasto podprtega elementa na obeh koncih, z dolžino L , z nespremenljivimi oziroma konstantnimi lastnostmi, je teoretična osna tlačna obtežba znotraj meje elastičnosti materiala, pri kateri pride do uklona okoli y - y osi ali z - z osi, enaka Euler-jevi kritični uklonski sili glede na določeno os (y - y ali z - z). Če zapišemo Euler-jevo kritično uklonsko silo z uporabo izraza za vitkost, dobimo za obe osi pravokotnega prečnega prereza enačbi:

$$P_{E,y} = \frac{\pi^2 \cdot E_{0,05} \cdot A}{\lambda_y^2} \quad \text{in} \quad P_{E,z} = \frac{\pi^2 \cdot E_{0,05} \cdot A}{\lambda_z^2}, \quad (3-23)$$

kjer je $P_{E,y}$ Euler-jeva kritična uklonska sila pri uklonu okoli y - y osi, $P_{E,z}$ je Euler-jeva kritična uklonska sila pri uklonu okoli z - z osi, $E_{0,05}$ je 5-odstotni kvantil karakteristične vrednosti modula elastičnosti lesenega elementa vzporedno z vlakni:

$$E_{0,05} = 0.67 \cdot E_{0,\text{mean}} \quad \text{za "mehki" les (iglavci in topolovina, trdnostni razred C),}$$

$$E_{0,05} = 0.84 \cdot E_{0,\text{mean}} \quad \text{za "trdi" les (listavci, trdnostni razred D),}$$

$E_{0,\text{mean}}$ je srednja vrednost modula elastičnosti vzporedno z vlakni, A je površina prečnega prereza elementa, λ_y je vitkost glede na uklon okoli y - y osi:

$$\lambda_y = \frac{1.0 \cdot L}{i_y},$$

λ_z pa je vitkost glede na uklon okoli z - z osi:

$$\lambda_z = \frac{1.0 \cdot L}{i_z}.$$

Ko obe Euler-jevi kritični uklonski sili oziroma enačbi (3-23) delimo s površino prečnega prereza elementa A , dobimo uklonsko trdnost elementa $\sigma_{E,y}$ okoli osi $y-y$ in uklonsko trdnost elementa $\sigma_{E,z}$ okoli osi $z-z$:

$$\sigma_{E,y} = \frac{\pi^2 \cdot E_{0,05}}{\lambda_y^2} \quad \text{in} \quad \sigma_{E,z} = \frac{\pi^2 \cdot E_{0,05}}{\lambda_z^2}. \quad (3-24)$$

V standardu SIST EN 1995-1-1 pomeni kvadratni koren razmerja karakteristične tlačne trdnosti konstrukcijskega lesa v smeri vlaken $f_{c,0,k}$ proti uklonski trdnosti elementa $\sigma_{E,y}$ okoli osi $y-y$ in uklonski trdnosti elementa $\sigma_{E,z}$ okoli osi $z-z$, relativno vitkost λ_{rel} :

$$\lambda_{rel,y} = \frac{\lambda_y}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0,05}}} \quad \text{in} \quad \lambda_{rel,z} = \frac{\lambda_z}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0,05}}}, \quad (3-25)$$

kjer je v primeru lege osi kot so na sliki 3-11 (Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 151), $\lambda_{rel,y}$ relativna vitkost pri uklonu okoli $y-y$ osi (do pomikov elementa pride v z smeri) oziroma $\lambda_{rel,z}$ je relativna vitkost pri uklonu okoli $z-z$ osi (do pomikov elementa pride v y smeri).

Te zveze so podane v enačbah (6.21) in (6.22) v podpoglavju 6.3.2 v standardu SIST EN 1995-1-1.

V primeru kratkega in čokatega elementa ne pride do uklona, zato ker pride do porušitve, ko napetost preseže trdnost materiala in v standardu SIST EN 1995-1-1 je to upoštevano z omejitvijo relativnih vitkosti $\lambda_{rel,y} \leq 0.3$ in $\lambda_{rel,z} \leq 0.3$. Z vstavljanjem karakteristične vrednosti za tlačno trdnost v smeri vlaken $f_{c,0,k}$ in 5-odstotnega kvantila vrednosti modula elastičnosti vzporedno z vlakni $E_{0,05}$ za "mehki" les, v enačbo (3-25), pri relativni vitkosti $\lambda_{rel} = 0.3$, dobimo maksimalno vrednost geometrijske vitkosti elementa λ med 16.2 ter 18.1. Razpon teh vrednosti je pri "trdem" lesu malo večji. V primeru elementa iz "mehkega" lesa s

pravokotnim prečnim prerezom, kjer je širina b manjša izmed obeh dimenzij, dobimo ob upoštevanju maksimalnih vrednosti vitkosti elementa in z uporabo naslednje enačbe:

$$L_E = (b / \sqrt{12}) \cdot \lambda,$$

vrednosti pripadajočih uklonskih dolžin $4.66 \cdot b$ ter $5.23 \cdot b$. Iz teh rezultatov lahko sklepamo, da je v praktičnih primerih pri dimezioniranju bolj verjetno, da bo merodajen uklon kot pa porušitev glede na material, zaradi preseženih mejnih napetosti v prečnem prerezu.

Ko vrednost relativne vitkosti $\lambda_{rel,y}$ in/ali $\lambda_{rel,z}$ preseže vrednost 0.3, moramo upoštevati uklon elementa. Iz enačbe (3-25) pri relativni vitkosti $\lambda_{rel,y} = 0.3$ lahko ugotovimo, da je vrednost varnostnega faktorja oziroma razmerje uklonske trdnosti pri Eulerjevi kritični uklonski obtežbi proti tlačni trdnosti v smeri vlaken približno 11. Pri ugotavljanju te vrednosti so upoštevani teoretično idealizirani pogoji, kjer ni nepopolnosti, ekscentričnosti in kjer je upoštevano elastično obnašanje.

Naslednje besedilo (od str. 81 do str. 86) je povzeto iz literature Timber Engineering: Edited by Thelandersson S. and Larsen H. J.; 2003.

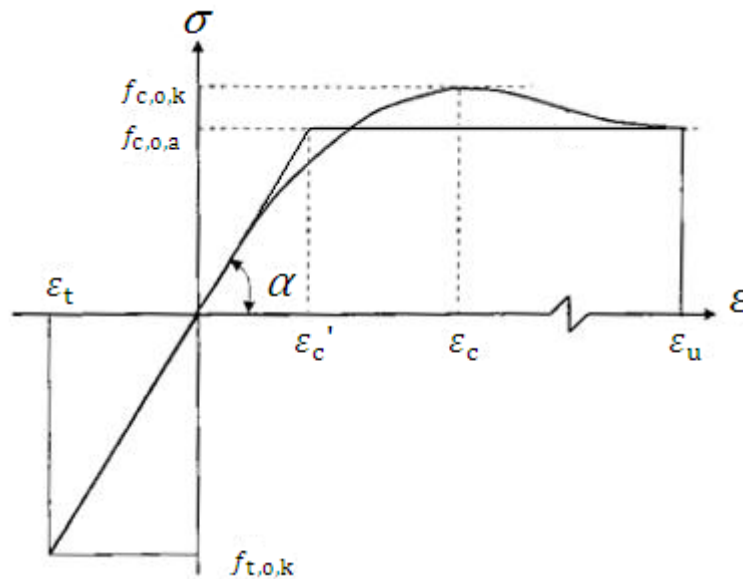
Slika 3-13 prikazuje krivuljo napetost-specifična deformacija pri obremenjevanju lesenega elementa z osno obtežbo, avtor (Hans J. Blass) predlaga naslednje rešitve za zvezo med napetosmi in specifičnimi deformacijami. V primeru natezne obremenitve je zveza med napetostmi in specifičnimi deformacijami linearna. V primeru tlačne obremenitve pa zvezo med napetostmi in specifičnimi deformacijami določa začetni modul elastičnosti E , karakteristična tlačna trdnost v smeri vlaken $f_{c,0,k}$, asimptotična tlačna trdnost $f_{c,0,a}$ (N/mm^2) pri porušni deformaciji ε_u in deformacija pri maksimalni tlačni napetosti ε_c . Pri tem diagramu veljajo naslednje empirične zveze:

$$\sigma = \frac{E \cdot \varepsilon + k_1 \cdot (\varepsilon/\varepsilon_c)^7}{1 + k_2 \cdot \varepsilon + k_1 \cdot (\varepsilon/\varepsilon_c)^7 / f_{c,0,a}}, \quad (3-26)$$

kjer sta:

$$k_1 = \frac{f_{c,0,a}}{6 \cdot (1 - (f_{c,0,a}/f_{c,0,k}))} \quad \text{in} \quad (3-27)$$

$$k_2 = \frac{E}{f_{c,0,k}} - \frac{7}{6 \cdot \varepsilon_c} \quad (3-28)$$



Slika 3-13: Vrednosti napetosti v odvisnosti od vrednosti specifičnih deformacij pri obremenjevanju lesenega elementa z osno tlačno in natezno obtežbo v smeri vlaken (prirejeno po Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 153)

Pri tem diagramu napetost-specifična deformacija iz testa z osno obremenitvijo lesenega elementa velja tudi:

$$f_{c,0,a} \cong 0.8 \cdot f_{c,0,k} ,$$

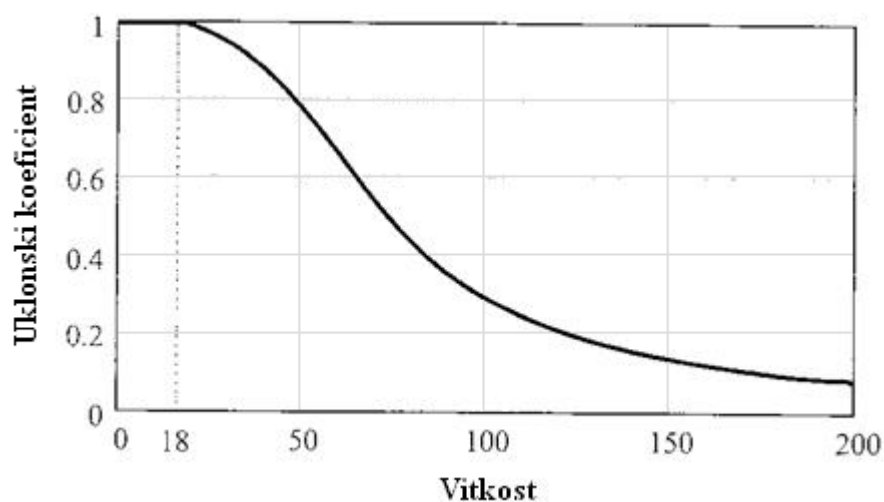
$$\operatorname{tg}(\alpha) = E ,$$

$$\varepsilon_c = 0.8-1.2 \% \quad \text{in}$$

$$\varepsilon_u \cong 3 \cdot \varepsilon_c .$$

Z upoštevanjem te krivulje, z upoštevanjem vpliva pri povečevanju vitkosti in z upoštevanjem nepopolnosti, je modelirana uklonska trdnost tlačnih elementov. Izračun je izvršen na osnovi plastične iterativne analize po teoriji drugega reda, ki upošteva obnašanje lesa nad mejo elastičnosti in posledične spremembe togosti elementa. Na osnovi tega so izdelana pravila za projektiranje elementov pod vplivom osne tlačne obremenitve v standardu SIST EN 1995-1-1.

Diagram uklonske trdnosti v odvisnosti od vitkosti je pridobljen iz analize pri različnih trdnostih lesa. Tipični diagram, ki prikazuje padec uklonske trdnosti pri naraščanju vitkosti je prikazan na sliki 3-14.

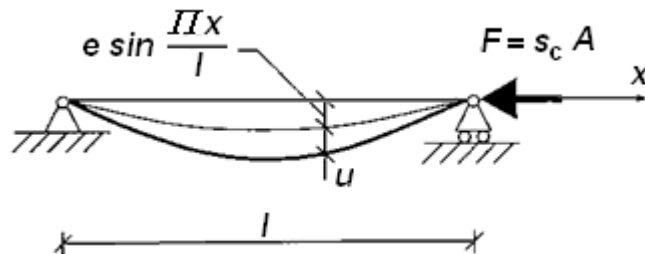


Slika 3-14: Vrednosti uklonskega koeficienta v odvisnosti od vitkosti elementa (prirejeno po Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 154)

Uklonska trdnost centrično obremenjenega elementa je izražena z redukcijo tlačne trdnosti $f_{c,0,k}$ z redukcijskim koeficientom uklonske trdnosti k_c oziroma z izrazom $k_c \cdot f_{c,0,k}$. Tlačna trdnost v smeri vlaken $f_{c,0,k}$ je določena iz testov pri vrednosti relativne vitkosti $\lambda_{rel} \sim 0.3$ in zato je vrednost uklonskega koeficienta $k_c = 1$ pri relativni vitkosti $\lambda_{rel} \leq 0.3$. V primeru vitkih elementov je uklonska trdnost približno enaka Eulerjevi kritični uklonski obtežbi, kjer je vrednost uklonskega koeficienta:

$$k_{c,y} = \frac{1}{\lambda_{rel}^2} \cdot \quad (3-29)$$

Uklonski koeficient k_c lahko določimo iz preprostega primera. Predpostavljeno je, da ima os elementa začetno obliko sinusne krivulje z amplitudo e na sredini, kot prikazuje slika 3-15.



Slika 3-15: Element z začetno ukrivljeno osjo v obliki sinusne krivulje z amplitudo e na sredini, pod vplivom centrične osne tlačne obtežbe (Timber Engineering: Edited by Thelandersson S. and Larsen H. J.; 2003, str. 215)

Iz diferencialne enačbe za določitev upogibnice tega elementa dobimo izraz:

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} = -M = -F \cdot \left(u + e \cdot \sin \left(\frac{\pi \cdot x}{l} \right) \right), \quad (3-30)$$

od tod dobimo rezultirajoči upogibek na sredini elementa:

$$e + u_{\text{mid}} = e \cdot \frac{1}{1 - \lambda_{\text{rel}}^2 \cdot \sigma_c / f_c} \quad (3-31)$$

Tlačna napetost je pri tem označena s σ_c , vrednost upogibne napetosti na sredini elementa pa je enaka:

$$\sigma_m = \frac{F \cdot (e + u_{\text{mid}})}{W}.$$

Z vstavljanjem teh izrazov za napetosti v kombiniran porušni pogoj:

$$\frac{\sigma_c}{f_c} + \frac{\sigma_m}{f_m} \leq 1,$$

dobimo enačbo:

$$\frac{\sigma_c}{f_c} + \frac{\sigma_c \cdot A}{W \cdot f_m} \cdot e \cdot \frac{1}{1 - \lambda_{rel}^2 \cdot \sigma_c / f_c} \leq 1 . \quad (3-32)$$

Ko je leva stran enačbe (3-32) enaka ena, velja zapis:

$$\frac{\sigma_c}{f_c} = k_c ,$$

in k_c določimo s pomočjo izraza:

$$k_c \cdot \left(1 + \frac{e \cdot A}{W} \cdot \frac{f_c}{f_m} \cdot \frac{1}{1 - \lambda_{rel}^2 \cdot k_c} \right) = 1 . \quad (3-33)$$

Enačba za določitev uklonske trdnosti elementa iz standarda SIST EN 1995-1-1, upošteva krivuljo napetost-specifična deformacija iz tlačnega preskusa lesenega elementa, kot je prikazana na sliki 3-13, upošteva pa tudi predpostavljeno linearno zvezo med specifičnimi deformacijami in napetostmi po višini prereza za stanje ob porušitvi, kot jo prikazuje slika 3-16, kjer je uporabljena parabolična zveza napetost-specifična deformacija. V tem primeru ni mogoče dobiti zaključene rešitve in potrebno je upoštevati numerično iterativno metodo:

- Oceniti je potrebno začetno odstopanje od ravne osi elementa oziroma začetno nepopolnost, kjer ima os členkasto podprtega elementa začetno obliko sinusne krivulje z amplitudo e na sredini, kot je prikazano na sliki 3-15. Pri ostalih pogojih podpiranja je pri začetnem odstopanju oziroma nepopolnosti potrebno upoštevati obliko upogibnice, ki jo dobimo pri obremenitvi elementa.
- Potrebno je določiti začetno vrednost osne obtežbe in izračunati začetne vrednosti upogibnih momentov.
- Izračunati je treba togost v vseh prečnih prerezih. Togost se zmanjšuje ob povečevanju osne obtežbe in upogibnih momentov.
- Za tem sledi izračun upogibkov, kjer dobimo nov razpored upogibnih momentov in nove vrednosti togosti.

- Če vrednosti upogibkov divergirajo oziroma naraščajo proti neskončni vrednosti, je vrednost kritične obtežbe presežena in potrebno je določiti novo, manjšo vrednost obtežbe.
- Če pa vrednosti upogibkov konvergirajo k neki vrednosti, potem je treba preveriti ali ta vrednost presega vrednost nosilnosti. Nosilnost je presežena:
 - če je presežena tlačna trdnost f_c ali deformacija pri tlačni trdnosti ε_c ,
 - če je presežena trdnost v tlačni coni,
 - če je presežena natezna trdnost.
- Če je nosilnost pri obremenjevanju presežena, izvedemo nov poskus z nižjo vrednostjo obtežbe. Če pa nosilnost ni presežena, pa izvedemo nov poskus z višjo vrednostjo obtežbe.
- Izračune je treba ponavljati dokler ne dosežemo ravnotežja pri osni tlačni obtežbi, ki je enaka odpornosti prečnih prerezov.

Izračune lahko izvedemo z uporabo determinističnih projektnih vrednosti ali pa upoštevamo, da so parametri naključne spremenljivke. Naslednji izrazi podani v Evrokodu 5 se nanašajo na prilagajanje krivulje rezultatom (curve fitting to results) iz Monte Carlo simulacij:

$$k_c = \begin{cases} 1; & \lambda_{\text{rel}} \leq 0.3; \\ \frac{1}{k + \sqrt{k^2 - \lambda_{\text{rel}}^2}}; & \lambda_{\text{rel}} > 0.3; \end{cases} \quad (3-34)$$

$$k = 0.5 \cdot (1 + \beta_c \cdot (\lambda_{\text{rel}} - 0.3) + \lambda_{\text{rel}}^2). \quad (3-35)$$

Predpostavljena vrednost začetnega odstopanja od ravne osi elementa oziroma začetna nepopolnost znaša pri konstrukcijskem masivnem lesu $e = 0.005 \cdot l$ in $e = 0.003 \cdot l$ pri lepljenem lameliranem lesu (glulam).

Naslednje besedilo (od str. 86 do str. 90) je povzeto iz literature Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007.

Uklonske trdnosti pri različnih vrednostih vitkosti so pridobljene za masivni les in lepljeni lamelirani les, ob upoštevanju trdnostnih razredov lesa in geometrijskih nepopolnosti. Iz teh

rezultatov je pridobljena tudi približna krivulja v odvisnosti od relativne vitkosti $\lambda_{rel,y}$ oziroma $\lambda_{rel,z}$, na osnovi katere dobimo redukcijski koeficient uklonske trdnosti $k_{c,y}$ oziroma $k_{c,z}$, ki je v standardu SIST EN 1995-1-1 imenovan kot faktor nestabilnosti oziroma uklonski koeficient, ki je pridobljen za masivni les, lepleni lamelirani les ter slojnati furnirni les (laminated veneer lumber oziroma LVL). Enačbi za redukcijska koeficienta uklonske trdnosti glede na uklon okoli osi $y-y$ in $z-z$ sta:

$$k_{c,y} = \frac{1}{k_y + \sqrt{k_y^2 - \lambda_{rel,y}^2}}, \quad (3-36)$$

$$k_{c,z} = \frac{1}{k_z + \sqrt{k_z^2 - \lambda_{rel,z}^2}}, \quad (3-37)$$

kjer sta:

$$k_y = 0.5 \cdot (1 + \beta_c \cdot (\lambda_{rel,y} - 0.3) + \lambda_{rel,y}^2), \quad (3-38)$$

$$k_z = 0.5 \cdot (1 + \beta_c \cdot (\lambda_{rel,z} - 0.3) + \lambda_{rel,z}^2). \quad (3-39)$$

Enačbe od (3-36) do (3-39) so enačbe od (6.25) do (6.28) v standardu SIST EN 1995-1-1. Koeficient β_c je pridobljen z analizami in se nanaša na polne pravokotne prečne prereze, v skladu z omejitvami glede odstopanj od ravne osi elementa iz poglavja 10 v standardu SIST EN 1995-1-1 (Konstrukcijske zahteve in nadzor gradnje). Za stebre-nosilce pri katerih lahko pride do nestabilnosti sme odstopanje od ravne osi, ki se meri na sredini elementa med podporami, znašati največ 1 / 500 dolžine elementa iz lepljenega lameliranega lesa (glulam) ali slojnatega furnirnega lesa (LVL) in 1 / 300 dolžine elementa iz masivnega lesa. Pri faktorju β_c so upoštevane tudi omejitve glede odstopanj pri dimenzijah elementov. V teh primerih standard SIST EN 1995-1-1, podaja vrednosti:

$$\beta_c = 0.2 \text{ za masivni les in} \quad (3-40)$$

$\beta_c = 0.1$ za lepljeni lamelirani les (glulam) in slojnati furnirni les (LVL).

Uklonski trdnosti v mejnem stanju nosilnosti z upoštevanjem predhodnih navedb znašata:

$$\text{Uklonska trdnost glede na upogib okoli } y\text{-}y \text{ osi: } k_{c,y} \cdot f_{c,0,d}, \quad (3-41)$$

$$\text{Uklonska trdnost glede na upogib okoli } z\text{-}z \text{ osi: } k_{c,z} \cdot f_{c,0,d}, \quad (3-42)$$

kjer koeficienta $k_{c,y}$ in $k_{c,z}$ dobimo iz enačbe (3-36) ter (3-37), $f_{c,0,d}$ pa je projektna tlačna trdnost elementa vzporedno z vlakni.

Ob upoštevanju enačb (3-25) za določitev relativne vitkosti elementa λ_{rel} glede na upogib okoli osi $y\text{-}y$ in $z\text{-}z$, pri upoštevanju ostalih zahtev, poteka dimenzioniranje osno obremenjenih lesenih elementov po standardu SIST EN 1995-1-1 po naslednji proceduri.

- Kjer sta obe relativni vitkosti $\lambda_{rel,y}$ in $\lambda_{rel,z}$ manjši od ali enaki vrednosti 0.3:

v tem primeru, pri elementu ni nevarnosti uklona, zato pri dimenzioniranju upoštevamo le zahtevo, da projektna obremenitev ne preseže projektne tlačne trdnosti oziroma upoštevamo enačbo (6.2) v standardu SIST EN 1995-1-1:

$$\sigma_{c,0,d} \leq f_{c,0,d}, \quad (3-43)$$

kjer je $\sigma_{c,0,d}$ projektna obremenitev s tlačno naptostjo v smeri vlaken lesa:

$$\sigma_{c,0,d} = \frac{N_d}{A}, \quad (3-44)$$

pri čemer je N_d projektna osna sila, A pa je površina prečnega prereza. S $f_{c,0,d}$ je označena

projektna tlačna trdnost v smeri vlaken lesa:

$$f_{c,0,d} = \frac{k_{\text{mod}} \cdot f_{c,0,k}}{\gamma_M}, \quad (3-45)$$

kjer je k_{mod} modifikacijski faktor za trajanje obtežbe in vlažnost. Oznaka γ_M pomeni delni varnostni faktor za lastnosti materiala, ki upošteva tudi negotovost modela za račun odpornosti in spremenljivost dimenzij. S $f_{c,0,k}$ je označena karakteristična tlačna trdnost v smeri vlaken konstrukcijskega lesa oziroma lesnega proizvoda.

- Kjer je ena izmed relativnih vitkosti $\lambda_{\text{rel},y}$ in $\lambda_{\text{rel},z}$ ali kjer sta obe relativni vitkosti večji od vrednosti 0.3:

lahko pride do uklona elementa okoli osi $y-y$ ali $z-z$ oziroma okoli osi na katero se nanaša upogib pri katerem pripadajoča relativna vitkost elementa preseže vrednost 0.3. Ob upoštevanju vpliva redukcijskih koeficientov za izračun uklonske trdnosti mora biti tlačna napetost v elementu manjša od tlačne trdnosti elementa:

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,y} \cdot f_{c,0,d}} \leq 1, \quad \text{pri } \lambda_{\text{rel},y} > 0.3, \quad (3-46)$$

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,z} \cdot f_{c,0,d}} \leq 1, \quad \text{pri } \lambda_{\text{rel},z} > 0.3, \quad (3-47)$$

oziroma:

$$\sigma_{c,0,d} \leq k_{c,y} \cdot f_{c,0,d}, \quad \text{pri } \lambda_{\text{rel},y} > 0.3, \quad (3-48)$$

$$\sigma_{c,0,d} \leq k_{c,z} \cdot f_{c,0,d}, \quad \text{pri } \lambda_{\text{rel},z} > 0.3, \quad (3-49)$$

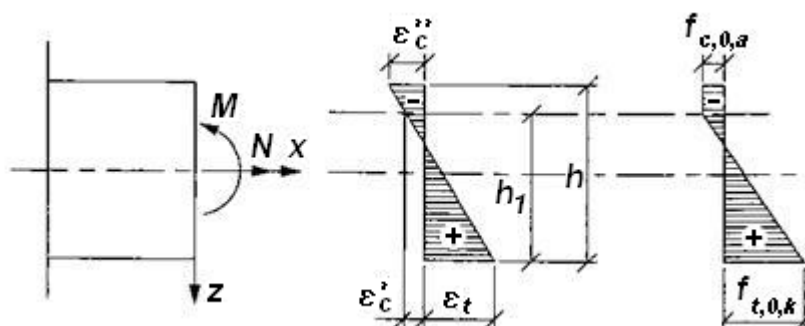
kjer sta $k_{c,y}$ in $k_{c,z}$ redukcijska koeficienta uklonske trdnosti, ki ju dobimo iz enačbe (3-36) ter (3-37).

Kritični projektni pogoj iz enačb (3-48) in (3-49) je tisti, pri katerem dobimo nižjo vrednost redukcijskega koeficienta uklonske nosilnosti kar pomeni, da je potrebno opraviti le kontrolo pri večji vrednosti vitkosti.

3.4 Dimenzioniranje lesenih elementov pod vplivom kombinirane osne tlačne in upogibne obremenitve

Naslednje besedilo (od str. 90 do str. 95) je povzeto iz literature Timber Engineering: Edited by Thelandersson S. and Larsen H. J.; 2003.

Obnašanje elementa pod vplivom kombinirane osne obtežbe in obtežbe z upogibnim momentom okoli močne osi $y-y$ ali ekscentrične osne obtežbe, lahko določimo z ravnotežnimi pogoji. Pri tem postopku lahko uporabimo poenostavljeni linearni elastično-plastični diagram napetost-specifična deformacija prikazan na sliki 3-13. Za stanje ob porušitvi je predpostavljena linearna zveza med specifičnimi deformacijami in napetostmi po višini prereza, kot je prikazana na sliki 3-16.



Slika 3-16: Zveza med specifičnimi deformacijami in napetostmi po višini pravokotnega prečnega prereza širine b pod vplivom kombinirane obremenitve z osno silo N in z upogibnim momentom M (prirejeno po Timber Engineering: Edited by Thelandersson S. and Larsen H. J.; 2003, str. 203)

Iz ravnotežja sil v smeri osi elementa dobimo:

$$N = b \cdot \left(-h \cdot f_{c,0,a} + \frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot (f_{c,0,a} + f_{t,0,k}) \right), \quad (3-50)$$

od tod pa dobimo s preureditvijo:

$$h_1 = 2 \cdot h \cdot \frac{N / (b \cdot h) + f_{c,0,a}}{f_{c,0,a} + f_{t,0,k}}. \quad (3-51)$$

Iz ravnotežja upogibnih momentov na spodnji rob (pri $z = 0.5 \cdot h$) pa dobimo izraz:

$$M - N \cdot \frac{h}{2} = b \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot f_{c,0,a} \cdot h^2 - \frac{1}{6} \cdot h_1^2 \cdot (f_{c,0,a} + f_{t,0,k}) \right). \quad (3-52)$$

Zvezo interakcije med M in N dobimo, ko enačbo (3-51) vstavimo v enačbo (3-52):

$$M = \frac{1}{2} \cdot N \cdot h - b \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{(N / b + h \cdot f_{c,0,a})^2}{f_{c,0,a} + f_{t,0,k}} - \frac{1}{2} \cdot f_{c,0,a} \cdot h^2 \right). \quad (3-53)$$

Upogibni moment lahko izrazimo z upogibno napetostjo σ_m :

$$\sigma_m = \frac{M}{W} = \frac{6 \cdot M}{b \cdot h^2} = 3 \cdot (\sigma_N + f_{c,0,a}) - 4 \cdot \frac{(\sigma_N + f_{c,0,a})^2}{f_{c,0,a} + f_{t,0,k}}, \quad (3-54)$$

kjer je:

$$\sigma_N = N / A.$$

Iz podobnih trikotnikov s slike 3-16 dobimo naslednjo zvezo med mejnimi specifičnimi deformacijami pri nateznih in tlačnih napetostih:

$$\frac{h_1}{h} = \frac{\varepsilon_c' + \varepsilon_t}{\varepsilon_c'' + \varepsilon_t},$$

$$\frac{\varepsilon_c'}{\varepsilon_t} = \frac{f_{c,0,a}}{f_{t,0,k}},$$

$$\varepsilon_c' = \frac{f_{c,0,a}}{f_{t,0,k}} \cdot \varepsilon_t \quad \text{in}$$

$$\frac{h_1}{h} = \frac{(f_{c,0,a} / f_{t,0,k} + 1) \cdot \varepsilon_t}{\varepsilon_c'' + \varepsilon_t}. \quad (3-55)$$

Ko enačbo (3-51) vstavimo v enačbo (3-55) dobimo izraz:

$$\varepsilon_c'' = \varepsilon_t \cdot \left(\frac{(1 + f_{c,0,a} / f_{t,0,k})^2}{2 \cdot (\sigma_N / f_{t,0,k} + f_{c,0,a} / f_{t,0,k})} - 1 \right). \quad (3-56)$$

Izrazi (3-52), (3-53) in (3-56) veljajo samo v primeru plastifikacije v tlačni coni, ko je $h_1 \leq h$.

Pri večjih nateznih silah so pogoji linearno-elastični.

V primeru čistega upogiba dobimo naslednje zveze:

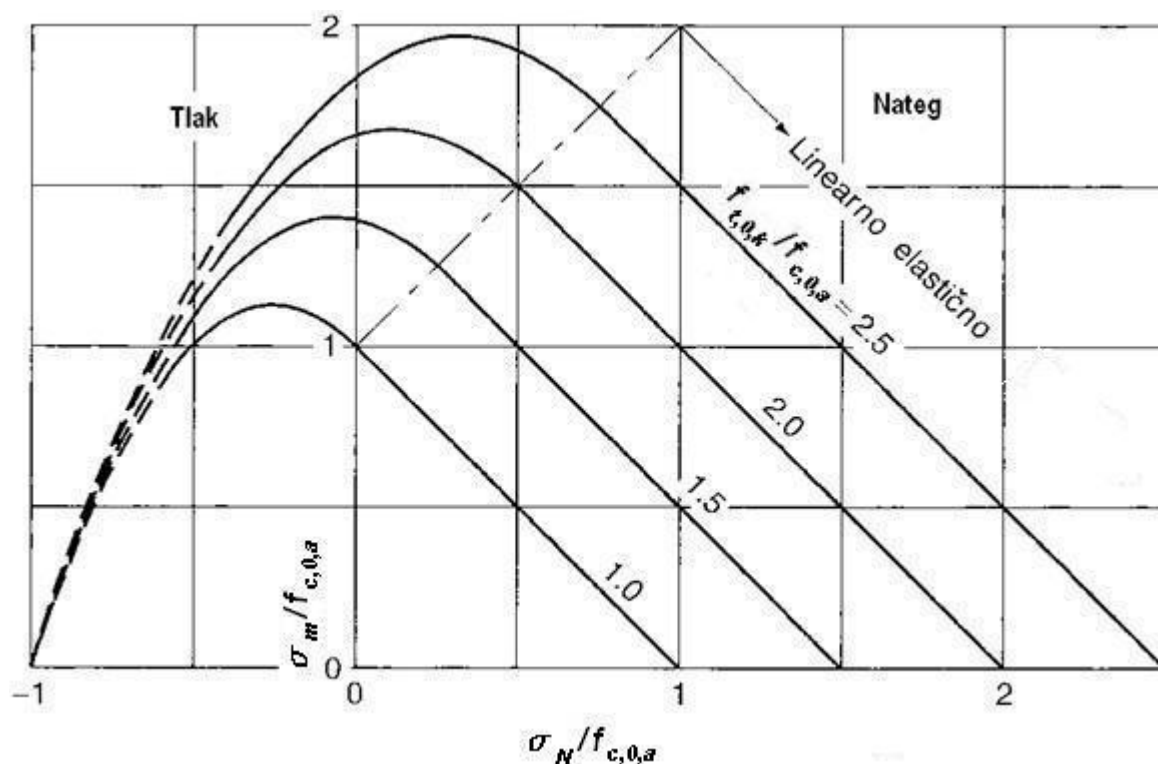
$$M = \frac{b \cdot h^2}{6} \cdot f_{c,0,a} \cdot \left(3 - \frac{4 \cdot f_{c,0,a}}{f_{c,0,a} + f_{t,0,k}} \right), \quad (3-57)$$

$$\sigma_m = f_{c,0,a} \cdot \left(3 - \frac{4 \cdot f_{c,0,a}}{f_{c,0,a} + f_{t,0,k}} \right), \quad (3-58)$$

$$\varepsilon_c = \frac{\varepsilon_t}{2} \cdot \left(\frac{f_{t,0,k}}{f_{c,0,a}} + \frac{f_{c,0,a}}{f_{t,0,k}} \right). \quad (3-59)$$

Na sliki 3-17 so v obliki interakcijski diagramov prikazane mejne vrednosti razmerja upogibne

napetosti proti asimptotični tlačni trdnosti $\sigma_m / f_{c,0,a}$, v odvisnosti od razmerja osne napetosti proti asimptotični tlačni trdnosti $\sigma_N / f_{c,0,a}$, pri izbranih razmerjih nateznih trdnosti proti asimptotičnim tlačnim trdnostim $f_{t,0,k} / f_{c,0,a}$. Črtkani deli krivulj predstavljajo stanje pri $\varepsilon_c'' > 3 \cdot \varepsilon_t$, katerega težko dosežemo. Porušno stanje je odvisno od vrednosti osne obtežbe. Pri velikih pozitivnih oziroma nateznih vrednostih osnih sil so pogoji linearno elastični, vse do porušitve. Pri majhnih vrednostih nateznih osnih sil oziroma pri ukrivljenem delu diagrama, pride na začetku do plastifikacije vlaken pod vplivom tlačnih napetosti in nato do porušitve pri nateznih napetostih. Pri velikih vrednostih razmerja natezne trdnosti proti asimptotični tlačni trdnosti $f_{t,0,k} / f_{c,0,a}$, pride do zmanjšanja upogibne nosilnosti pri nanosu tlačne obtežbe. Pri majhnih vrednostih razmerja $f_{t,0,k} / f_{c,0,a}$, pa pride do povečanja upogibne nosilnosti takoj pri nanosu tlačne obtežbe, zato ker tlačna osna sila razbremeni del prečnega prereza, ki je sicer pod vplivom nateznih napetosti.



Slika 3-17: Mejne vrednosti razmerja upogibne napetosti proti asimptotični tlačni trdnosti $\sigma_m / f_{c,0,a}$, v odvisnosti od razmerja osne napetosti proti asimptotični tlačni trdnosti $\sigma_N / f_{c,0,a}$, pri izbranih razmerjih nateznih trdnosti proti asimptotičnim tlačnim trdnostim $f_{t,0,k} / f_{c,0,a}$ (prirejeno po Timber Engineering: Edited by Thelandersson S. and Larsen H. J.; 2003, str. 204)

Natezna trdnost je določena iz testov, kjer osna sila deluje v geometrijskem središču oziroma težišču prečnega prereza. Zaradi grč v lesu in odstopanj pri gostoti lesa vzdolž preskušanca in po prečnem prerezu, so vrednosti upogibnih napetosti pogosto večje. Ko te sekundarne vplive v prečnem prerezu preprečimo se dodatne napetosti lahko prerazporedijo, ko nastopi porušitveno stanje. Zato je potrebno upoštevati večje vrednosti natezne trdnosti od vrednosti, ki se jih uporablja pri dimenzioniranju nateznih elementov in jih vstaviti v prejšnje izraze. Ob uporabi vrednosti natezne trdnosti, ki je 1.5-krat večja od vrednosti upogibne trdnosti, $f_t \sim 1.5 \cdot f_m$, dobimo sprejemljive rezultate.

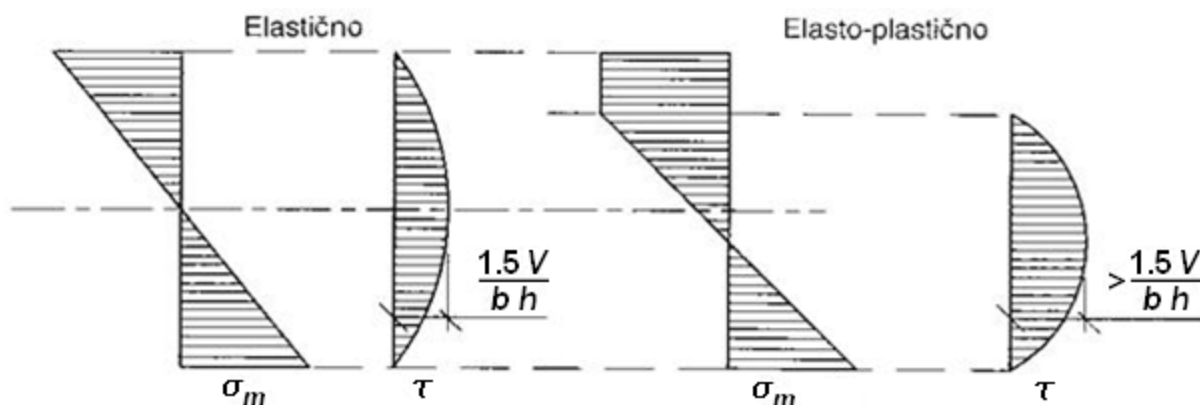
V primerih, kjer so vrednosti upogibnih napetosti pri tlačni obtežbi tako velike, da pride do plastifikacije vlaken, potem te vrednosti vplivajo tudi na razpored strižnih napetosti, kot

prikazuje slika 3-18. Upogibne napetosti so skoraj konstantne v plastični coni oziroma plastificiranem delu prečnega prereza in zato so na tem mestu vrednosti strižnih napetosti enake nič. Strižno silo upoštevamo na reducirani višini prečnega prereza:

$$(3 - \sigma_m / f_{c,0,a}) \cdot h / 2 ,$$

kjer dobimo:

$$\tau_{\max} = \frac{2 \cdot f_{c,0,a}}{3 \cdot f_{c,0,a} - \sigma_m} \cdot \frac{1.5 \cdot V}{b \cdot h} . \quad (3-60)$$

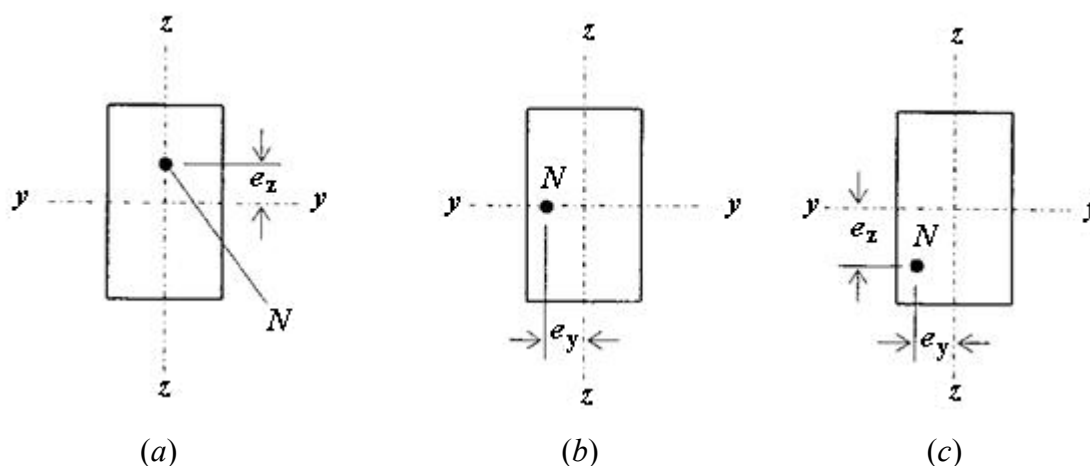


Slika 3-18: Razpored upogibnih napetosti σ_m in strižnih napetosti τ po višini pravokotnega prečnega prereza pod vplivom obremenitve z upogibnim momentom M ter prečne sile V , v primeru elastičnega oziroma elasto-plastičnega obnašanja (Timber Engineering: Edited by Thelandersson S. and Larsen H. J.; 2003, str. 205)

Naslednje besedilo (od str. 95 do str. 97) je povzeto iz literature Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007.

Kjer je potrebno upoštevati vpliv nestabilnosti glede na Evrokod 5, so zahteve za določanje nosilnosti v primeru stebra pod vplivom kombinirane upogibne in osne tlačne obtežbe, drugačne od zahtev za določanje nosilnosti v primeru nosilca pod vplivom kombinirane upogibne in osne tlačne obtežbe.

V primeru elementa pod vplivom kombinirane upogibne in osne tlačne obremenitve, ko je relativna vitkost elementa glede na upogib okoli močne osi, $\lambda_{rel,m} \leq 0.75$, ne pride do bočne torzijske nestabilnosti oziroma bočne zvrnitve. Elementi pod vplivom kombinirane prečne in osne tlačne obtežbe in elementi pod vplivom ekscentrične osne tlačne obtežbe vzdolž osi $x-x$ s slike 3-19, prav tako spadajo v skupino elementov pod vplivom kombinirane upogibne in osne tlačne obremenitve.



Slika 3-19: Pravokotni prečni prerez pod vplivom ekscentrične osne tlačne obtežbe N z ekscentričnostjo e_z v smeri šibke osi $z-z$ (a), z ekscentričnostjo e_y v smeri močne osi $y-y$ (b), z dvojno ekscentričnostjo e_z in e_y (c) (Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 164)

V primeru (a) s slike 3-19, ekscentrična osna tlačna obtežba N z ekscentričnostjo e_z v smeri šibke osi $z-z$ glede na težišče pravokotnega prečnega prereza, povzroča upogibni moment okoli močne osi $y-y$:

$$M_{y-y} = N \cdot e_z .$$

V primeru (b) s slike 3-19, ekscentrična osna tlačna obtežba N z ekscentričnostjo e_y v smeri močne osi $y-y$ glede na težišče pravokotnega prečnega prereza, povzroča upogibni moment okoli šibke osi $z-z$:

$$M_{z-z} = N \cdot e_y .$$

V primeru (c) s slike 3-19, pa ekscentrična osna tlačna obtežba N z ekscentričnostjo e_z v smeri šibke $z-z$ in ekscentričnostjo e_y v smeri močne osi $y-y$ glede na težišče pravokotnega prečnega prereza, povzroča upogibna momenta okoli močne $y-y$ ter šibke osi $z-z$:

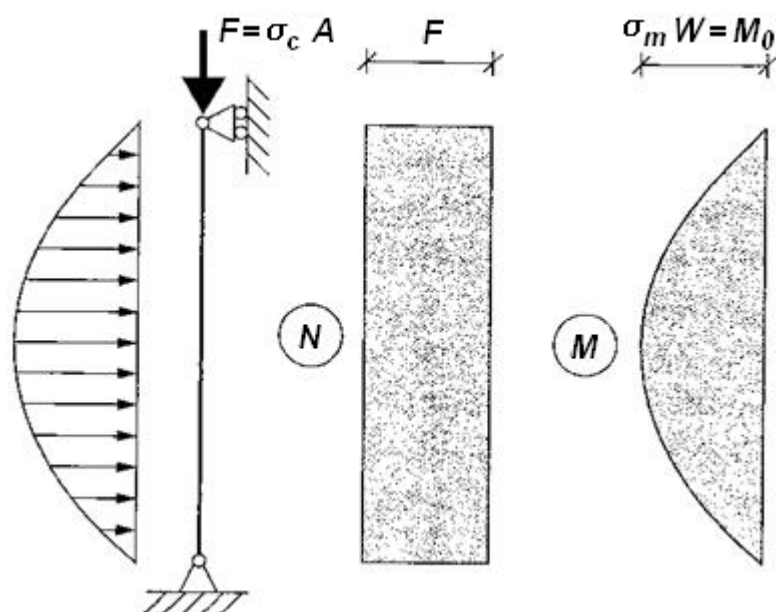
$$M_{y-y} = N \cdot e_z ,$$

$$M_{z-z} = N \cdot e_y .$$

Naslednje besedilo (od str. 97 do str. 98) je povzeto iz literature Timber Engineering: Edited by Thelandersson S. and Larsen H. J.; 2003.

V primeru ekscentrične tlačne obtežbe lahko obravnavamo členkasto podprt element na obeh koncih, kot prikazuje slika 3-20. Poleg osne tlačne obtežbe je nanešena še prečna porazdeljena obtežba, ki povzroči upogibni moment M_0 in pripadajočo upogibno napetost σ_m na sredini nedeformiranega elementa, ki ima drugačen pomen kot upogibna napetost glede na enačbo (3-32), kjer je upoštevana začetna nepopolnost e . Ta primer je centrično obremenjen element, kjer je vrednost upogibka nasredini enaka:

$$(e + M_0/F).$$



Slika 3-20: Element členkasto podprt na obeh koncih, pod vplivom osne tlačne obtežbe in porazdeljene prečne obtežbe (Timber Engineering: Edited by Thelandersson S. and Larsen H. J.; 2003, str. 216)

Naslednje besedilo (od str. 98 do str. 106) je povzeto iz literature Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007.

Elementi pod vplivom čiste osne tlačne obtežbe so obravnavani v podpoglavju 3.3. Kjer ni pojava bočne torzijske nestabilnosti, lahko pride do dveh primerov porušitve:

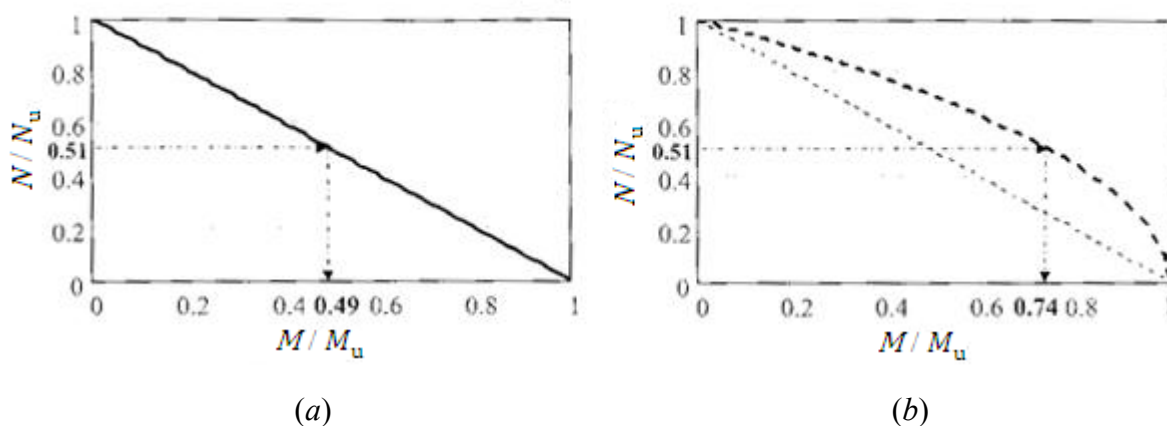
- ko sta vrednosti obeh relativnih vitkosti $\lambda_{rel,y} \leq 0.3$ in $\lambda_{rel,z} \leq 0.3$, uklona ne upoštevamo, do porušitve pa pride, ko obremenitev doseže tlačno trdnost elementa.
- Če je katerakoli izmed vrednosti relativnih vitkosti $\lambda_{rel,y} > 0.3$ ali $\lambda_{rel,z} > 0.3$, lahko pride do uklona, kjer pride do porušitve, ko vrednost obremenitve doseže oziroma preseže vrednost tlačne trdnosti elementa pomnoženo s koeficientom nestabilnosti oziroma redukcijskim koeficientom uklonske trdnosti $k_{c,y}$ oziroma $k_{c,z}$.

Projektne zahteve za omenjena primera porušitve, glede na standard SIST EN 1995-1-1 so naslednje:

- v primeru, ko sta vrednosti obeh relativnih vitkosti $\lambda_{rel,y} \leq 0.3$ in $\lambda_{rel,z} \leq 0.3$:

ni redukcije trdnosti zaradi uklona in glede na standard SIST EN 1995-1-1, pri določevanju trdnosti pa lahko izkoristimo prednosti plastičnega obnašanja lesenih elementov pod vplivom tlačnih napetosti.

Slika 3-21 prikazuje interakcijska diagrama za element pod vplivom kombinirane obremenitve z upogibnim momentom in osno tlačno silo, ob upoštevanju elastične ter plastične teorije. Glede na elastično teorijo, pride do porušitve, ko vrednost kombinirane tlačne napetosti v elementu doseže vrednost tlačne trdnosti materiala. Glede na plastično teorijo, ko obremenitev doseže tlačno trdnost materiala, pa pride do tečenja materiala ki omogoči, da se napetosti v prerezu prerazporedijo oziroma razširijo po površini in da se tako nosilnost poveča.



Slika 3-21: Porušni kriterij za element pod vplivom kombinirane obremenitve z osno tlačno silo in upogibnim momentom, z vrednostmi razmerja osne obtežbe proti osni porušni obtežbi ter upogibne obtežbe proti upogibni porušni obtežbi ob upoštevanju elastične (a) oziroma plastične teorije (b) (prirejeno po Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 165)

Glede na elastično teorijo, vsota razmerja upogibne napetosti proti upogibni trdnosti in osne tlačne napetosti proti tlačni trdnosti ne sme preseči vrednosti ena. Po plastični teoriji, pa je razmerje osne tlačne napetosti proti tlačni trdnosti nelinearno, ki elementu omogoča, da prevzame višjo vrednost razmerja upogibne napetosti proti upogibni trdnosti pri enakem razmerju osne tlačne napetosti proti tlačni trdnosti, kot v primeru elastične teorije. Glede na

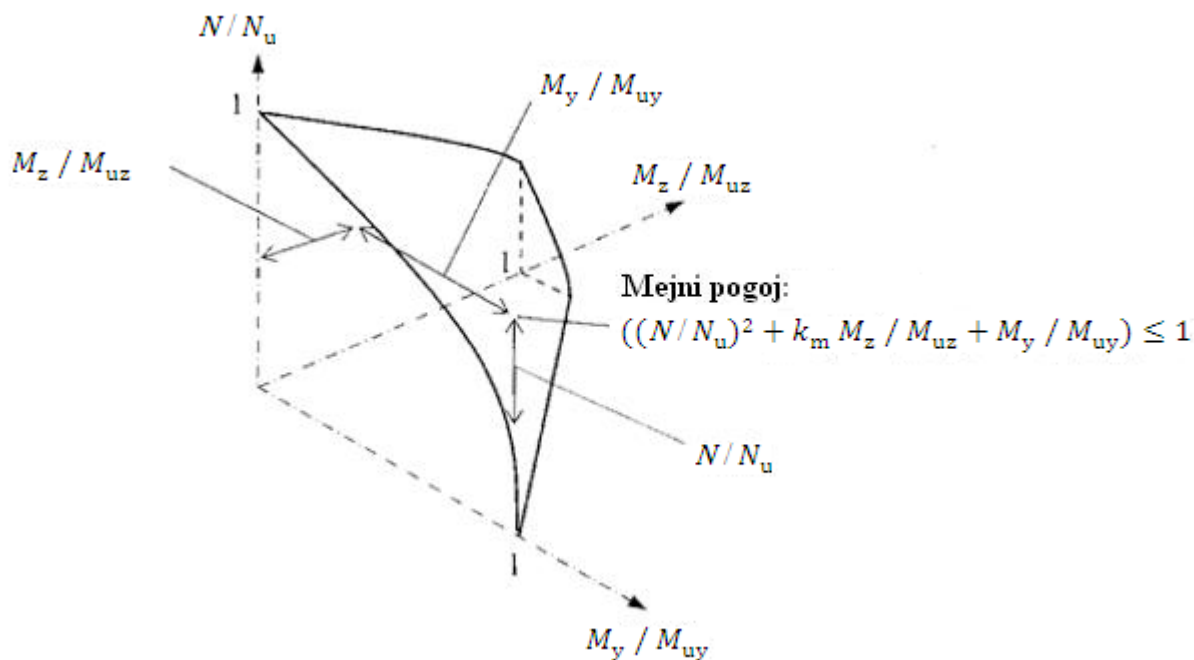
primer s slike 3-21, se pri vrednosti razmerja osne tlačne napetosti proti tlačni trdnosti enaki 0.51, ob upoštevanju plastične teorije, vrednost razmerja upogibne napetosti proti upogibni trdnosti, v primerjavi z elastično teorijo, poveča za približno 50%.

Zaradi plastičnega obnašanja elementov pod vplivom tlačne obremenitve, je v Evrokodu 5 privzeta plastična teorija v primeru ko sta vrednosti obeh relativnih vitkosti $\lambda_{rel,y} \leq 0.3$ in $\lambda_{rel,z} \leq 0.3$. Na sliki 3-22 je prikazana interakcijska krivulja za osno silo in upogibni moment, v primeru kombinirane obremenitve z dvoosnim upogibom in osno silo, kjer sta vrednosti obeh relativnih vitkosti $\lambda_{rel,y} \leq 0.3$ in $\lambda_{rel,z} \leq 0.3$, ob upoštevanju redukcije razmerja upogibne napetosti proti upogibni trdnosti z redukcijskim faktorjem k_m (ki upošteva možnost prerazporeditve upogibnih napetosti v prečnem prerezu). Pri dimenzioniranju teh elementov pod vplivom kombinirane upogibne in osne tlačne obremenitve uporabljamo naslednji enačbi, ki sta enakovredni enačbama (6.19) in (6.20) iz standarda SIST EN 1995-1-1:

$$\left(\frac{\sigma_{c,0,d}}{f_{c,0,d}}\right)^2 + \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} + k_m \cdot \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1, \quad (3-61)$$

$$\left(\frac{\sigma_{c,0,d}}{f_{c,0,d}}\right)^2 + k_m \cdot \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} + \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1, \quad (3-62)$$

kjer sta vrednosti upogibnih trdnosti glede na upogib okoli osi $y-y$ ter $z-z$ lahko različni zaradi različnih faktorjev višine prereza, k_h .



Slika 3-22: Interakcijski diagram za element pod vplivom kombinirane obremenitve z osno tlačno silo in dvoosnim upogibom, z vrednostmi razmerja osne obtežbe proti osni mejni obtežbi ter upogibne obtežbe proti upogibni mejni obtežbi okoli osi y - y oziroma z - z (pri kateri je upoštevan redukcijski faktor k_m), v primeru ko sta vrednosti obeh relativnih vitkosti $\lambda_{rel,y} \leq 0.3$ in $\lambda_{rel,z} \leq 0.3$ (prirejeno po Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 165)

Ker enačbi (3-61) in (3-62) ne upoštevata vpliva bočne torzijske nestabilnosti oziroma bočne zvrnitve, sta uporabni samo v primerih, kjer do bočne zvrnitve ne more priti ali pa je preprečena. Taki so primeri s kvadratnim ali krožnim prečnim prerezom in primeri, kjer je vrednost relativne vitkosti pri upogibu $\lambda_{rel,m} \leq 0.75$. Pri takem elementu, kjer lahko pride do bočne zvrnitve, pa ti dve enačbi veljata samo v primeru, ko na ta element lahko vpliva samo upogibni moment okoli šibke osi.

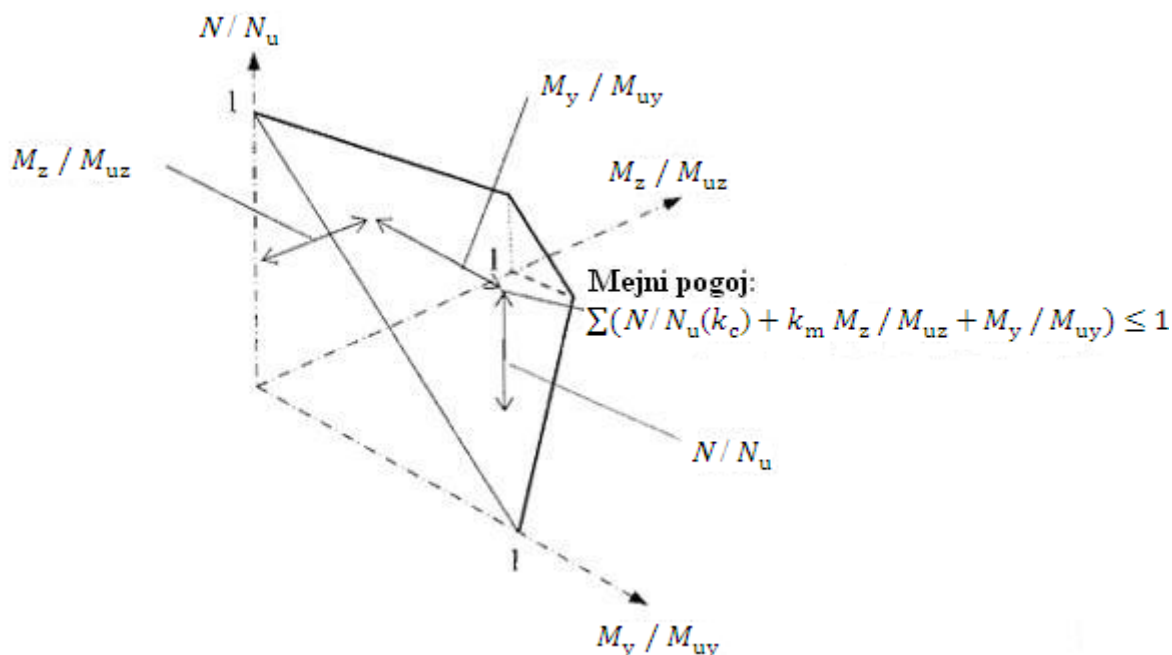
- V primeru, ko je vrednost relativne vitkosti $\lambda_{rel,y} > 0.3$ in/ali $\lambda_{rel,z} > 0.3$:
je zaradi obremenitve z osno tlačno silo, potrebno upoštevati vpliv uklona. V tem primeru ne moremo izkoristiti plastičnega obnašanja v elementu, mejno obtežbo pa dosežemo, ko obremenitev doseže porušno napetost materiala v maksimalno obremenjenem vlaknu. To se

nanaša na interakcijsko krivuljo za element pod vplivom kombinirane obremenitve z upogibnim momentom in osno tlačno silo, ob upoštevanju elastične teorije, s slike 3-21 (a). Na sliki 3-23 je prikazana interakcijska krivulja za osno silo in upogibni moment, v primeru kombinirane obremenitve z dvoosnim upogibom in osno silo, kjer je vrednost relativne vitkosti $\lambda_{rel,y} > 0.3$ in/ali $\lambda_{rel,z} > 0.3$, ob upoštevanju redukcije razmerja upogibne napetosti proti upogibni trdnosti, z redukcijskim faktorjem k_m (ki upošteva možnost prerazporeditve upogibnih napetosti v prečnem prerezu). Pri dimenzioniranju teh elementov pod vplivom kombinirane upogibne ter osne tlačne obremenitve, ko je vrednost relativne vitkosti $\lambda_{rel,y} > 0.3$ in/ali $\lambda_{rel,z} > 0.3$, uporabljamo naslednji enačbi, ki sta enakovredni enačbama (6.23) in (6.24) iz standarda SIST EN 1995-1-1:

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,y} \cdot f_{c,0,d}} + \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} + k_m \cdot \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1, \quad (3-63)$$

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,z} \cdot f_{c,0,d}} + k_m \cdot \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} + \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \leq 1, \quad (3-64)$$

kjer sta vrednosti upogibnih trdnosti glede na upogib okoli osi $y-y$ ter $z-z$ lahko različni zaradi različnih faktorjev višine prereza k_h . S $k_{c,y}$ in $k_{c,z}$ sta označena uklonska koeficienta glede na uklon okoli $y-y$ osi oziroma $z-z$ osi. S k_m pa je označen redukcijski faktor, ki upošteva možnost prerazporeditve upogibnih napetosti v prečnem prerezu, v standardu SIST EN 1995-1-1 je za pravokotni prečni prerez $k_m = 0.7$.



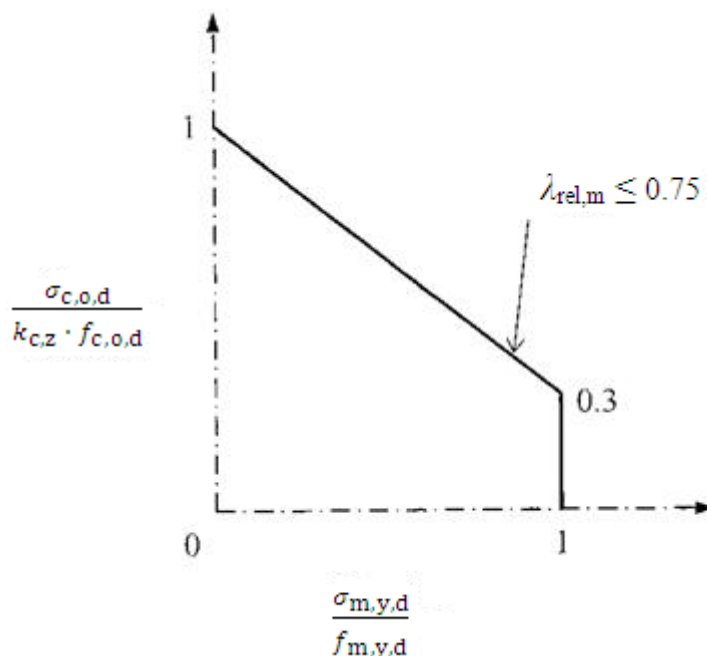
Slika 3-23: Interakcijski diagram za element pod vplivom kombinirane obremenitve z osno tlačno silo in dvoosnim upogibnim momentom, z vrednostmi razmerja osne obtežbe proti osni porušni obtežbi (v odvisnosti od k_c) ter upogibne obtežbe proti upogibni porušni obtežbi okoli osi y - y oziroma z - z (pri kateri je upoštevan redukcijski faktor k_m), v primeru ko je vrednost relativne vitkosti $\lambda_{rel,y} > 0.3$ in/ali $\lambda_{rel,z} > 0.3$ (prirejeno po Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 166)

Tako kot v prejšnjem primeru oziroma pri enačbah (3-61) in (3-62), velja tudi v tem primeru, da sta enačbi (3-63) ter (3-64) uporabni samo v primerih, kjer do bočne zvrnitve ne more priti ali pa je preprečena, zato ker ti dve enačbi ne upoštevata vpliva bočne torzijske nestabilnosti oziroma bočne zvrnitve. V nasprotnem primeru, pa ti dve enačbi veljata samo, ko na ta element lahko vpliva samo upogibni moment okoli šibke osi.

V primeru elementa pod vplivom kombinirane obremenitve z osno tlačno obtežbo in enoosnim upogibnim momentom okoli močne osi y - y , iz enačb (3-63) ter (3-64) dobimo samo eno enačbo za določitev trdnosti:

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,z} \cdot f_{c,0,d}} + k_m \cdot \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} \leq 1. \quad (3-65)$$

Enačba (3-65) velja v primeru, ko ne pride do bočne zvrnitve oziroma, kjer je vrednost relativne vitkosti $\lambda_{rel,m} \leq 0.75$, pri kateri je faktor redukcije upogibne trdnosti zaradi bočne zvrnitve $k_{crit} = 1$. V tem primeru so mejne vrednosti iz enačbe (3-65) za pravokotne prečne prereze iz masivnega lesa, slojnatega furnirnega lesa (laminated veneer lumber oziroma LVL) ali lepljenega lameliranega lesa (glued-laminated timber oziroma glulam), določene z omejitvami s slike 3-24.



Slika 3-24: Interakcijski diagram za element pod vplivom kombinirane obremenitve z osno tlačno silo in enoosnim upogibnim momentom, z vrednostmi razmerja osne tlačne napetosti proti osni tlačni trdnosti v smeri vlaken (reducirane z uklonskim koeficientom $k_{c,z}$) ter upogibne napetosti proti upogibni trdnosti okoli močne osi y - y (Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 167)

V primeru, ko vrednost relativne vitkosti $\lambda_{rel,m}$ preseže 0.75, je treba pri določanju nosilnosti glede na Evrokod 5, upoštevati bočno torzijsko nestabilnost zaradi vpliva upogiba okoli glavne

oziroma močne osi. Ta primer se nanaša na elemente pod vplivom kombinirane obtežbe z osno tlačno silo in upogibnim momentom okoli samo glavne osi, kjer se bočna zvrnitev lahko pojavi. V primeru elementa pod vplivom kombinirane osne tlačne in upogibne obremenitve okoli osi y - y ter z - z pri vrednosti relativne vitkosti $\lambda_{rel,m}$ večji od 0.75 pa ni podanih pogojev.

V primeru elementa pod vplivom kombinirane osne tlačne in upogibne obremenitve, kjer lahko pride do bočne zvrnitve, upoštevanje plastičnega obnašanja pri vplivu osne tlačne obtežbe ni dovoljeno, dovoljeno pa je pri vplivu obtežbe z upogibnim momentom. Interakcija med osno tlačno obremenitvijo in obremenitvijo z upogibnim momentom se nanaša na plastično obnašanje podobno kot ga prikazuje slika 3-21 (b). V tem primeru upoštevamo projektno zahtevo oziroma enačbo (6.35) iz standarda SIST EN 1995-1-1:

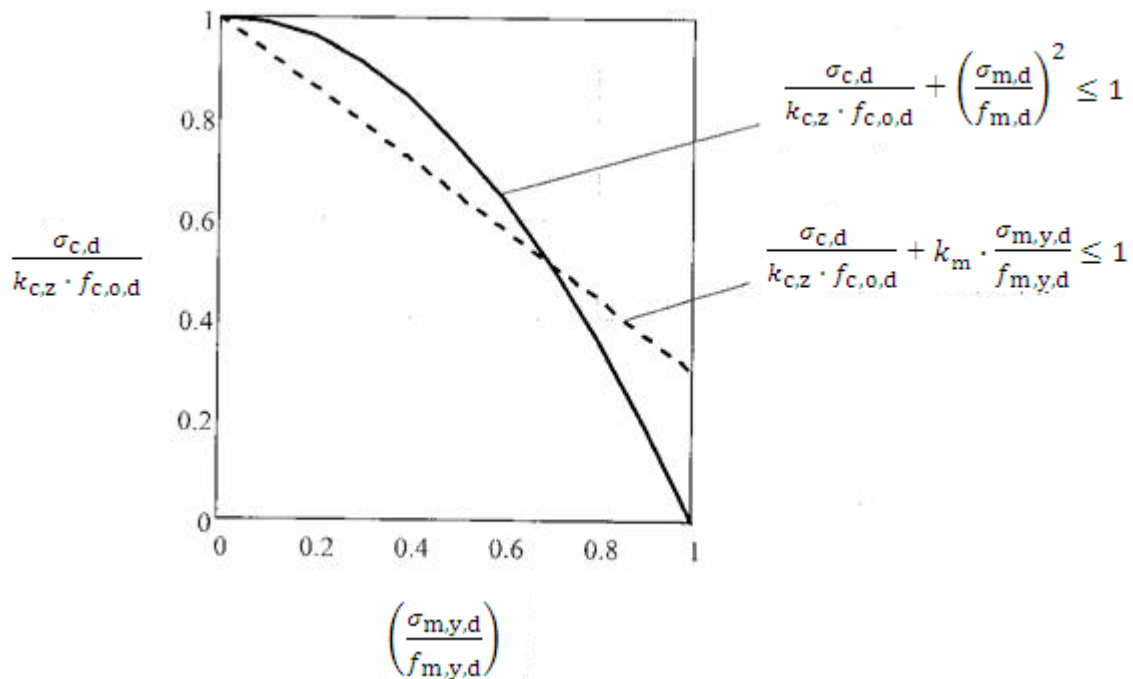
$$\frac{\sigma_{c,d}}{k_{c,z} \cdot f_{c,0,d}} + \left(\frac{\sigma_{m,d}}{k_{crit} \cdot f_{m,d}} \right)^2 \leq 1, \quad (3-66)$$

kjer je $\sigma_{m,d}$ projektna upogibna napetost glede na upogib okoli močne osi y - y :

$$\sigma_{m,d} = \frac{M_{y,d}}{W_y},$$

$M_{y,d}$ je projektni upogibni moment okoli osi y - y , W_y je odpornostni moment okoli osi y - y , $\sigma_{c,d}$ je projektna tlačna napetost enaka $\sigma_{c,0,d}$ iz enačbe (3-44), $f_{c,0,d}$ je projektna tlačna trdnost v smeri vlaken iz enačbe (3-45), k_{crit} pa je faktor redukcije upogibne trdnosti zaradi nevarnosti bočne zvrnitve.

Primerjava zveze v enačbah (3-65) in (3-66) je prikazana na sliki 3-25. V primeru, ko je vrednost razmerja med projektno upogibno napetostjo pri upogibu okoli močne y - y osi proti upogibni trdnosti $\sigma_{m,y,d} / f_{m,y,d} \leq 0.7$, mejni projektni pogoj določa enačba (3-65), ko pa je vrednost tega razmerja $\sigma_{m,y,d} / f_{m,y,d} > 0.7$, pa ta mejni projektni pogoj določa enačba (3-66).



Slika 3-25: Interakcijski diagram za element pod vplivom kombinirane obremenitve z osno tlačno silo in enoosnim upogibnim momentom, z vrednostmi razmerja osne tlačne napetosti proti osni tlačni trdnosti v smeri vlaken (reducirane z uklonskim koeficientom $k_{c,z}$) ter upogibne napetosti proti upogibni trdnosti okoli močne osi y - y , glede na enačbo (3-65) oziroma (3-66) (velja za vrednost faktorja redukcije upogibne trdnosti zaradi bočne zvrnitve $k_{crit} = 1$) (Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition; 2007, str. 168)

4 LINEARNA ELASTIČNA STABILNOSTNA ANALIZA IN STATIČNA GEOMETRIJSKO-NELINEARNA ANALIZA P-DELTA V RAČUNALNIŠKEM PROGRAMU SAP2000

Naslednje besedilo v poglavju 4 (od str. 107 do str. 114) je v celoti povzeto iz literature CSI Analysis Reference Manual For SAP2000, ETABS, and SAFE; 2008.

Računalniški program SAP2000 pri linearni stabilnostni analizi oziroma pri uklonski analizi (load case type: buckling) išče oblike nestabilnosti oziroma uklonske oblike konstrukcije glede na P-delta vpliv pri določenem nizu obtežb. Uklonska analiza vključuje reševanje posplošenega problema lastnih vrednosti:

$$[K - \lambda \cdot G(r)] \cdot \Psi = 0,$$

kjer je K togostna matrika, $G(r)$ je geometrijska P-delta togostna matrika glede na obtežni vektor r , λ je diagonalna matrika lastnih vrednosti, Ψ pa je pripadajoča matrika lastnih vektorjev oziroma uklonskih oblik.

Vsak par lastne vrednosti in lastnega vektorja se imenuje uklonska oblika konstrukcije. Oblike so označene s števili od 1 do n .

Lastna vrednost λ se imenuje uklonski koeficient s katerim moramo pomnožiti obtežbe v obtežnem vektorju r , da povzročimo uklon pri določeni uklonski obliki. Če je uklonski koeficient večji od ena moramo obtežbo z njim pomnožiti, če hočemo povzročiti uklon, če pa je vrednost uklonskega koeficienta manjša od ena, pa moramo obtežbo z njim reducirati, da preprečimo uklon. Če je vrednost uklonskega koeficienta negativna, moramo upoštevati obtežbo v nasprotni smeri, če hočemo povzročiti uklon.

Sestavimo lahko poljubno število uklonskih obtežnih primerov. V vsakem od teh obtežnih primerov lahko uporabimo kombinacijo obtežb, ki sestavljajo obtežni vektor r . Določimo lahko

število uklonskih oblik za izračun in toleranco pri konvergiranju. Priporočeno je upoštevati več oziroma vsaj šest uklonskih oblik pri izračunu, ker ima prvih nekaj uklonskih oblik pogosto zelo podobne vrednosti uklonskih koeficientov.

Upoštevati je potrebno, da so uklonske oblike odvisne od obtežbe, zato je potrebno uklon izračunati pri posameznih obtežbah.

V posameznem linearnem stabilnostnem obtežnem primeru lahko zahtevamo, da program upošteva ali togostno matriko celotne konstrukcije v začetnem neobremenjenem stanju ali togostno matriko konstrukcije po izvršeni analizi glede na nelinearni obtežni primer. Z uporabo togosti po izvršeni analizi glede na nelinearni obtežni primer lahko upoštevamo P-delta vpliv.

Potrebno je upoštevati razliko med linearnim in nelinearnim obtežnim primerom v računalniškem programu SAP2000. Obtežni primeri v programu SAP2000 so praviloma linearni, razen statične analize (static analysis) in dinamične časovno odvisne analize korak za korakom (time-history analysis), ki sta nelinearni.

Lastnosti konstrukcije (togost, koeficient dušenja itd.) so pri linearni analizi konstantne. Pri nelinearni analizi pa lastnosti konstrukcije variirajo s časom, deformacijami in obtežbo. Količina nelinearnosti, ki se pojavijo, je odvisna od lastnosti, ki jih določimo v programu, odvisna je tudi od vrednosti obtežbe.

Začetni pogoji pri linearni analizi so taki, da se analiza začne pri napetostih z vrednostjo nič. Ne vključuje obtežb iz prejšnjih analiz, tudi ko upoštevamo togost iz predhodno izvršene nelinearne analize. Začetni pogoji pri nelinearni analizi pa so lahko tudi taki, da se analiza nadaljuje iz predhodno izvršene nelinearne analize, kjer lahko upoštevamo vse obtežbe, deformacije, napetosti itd. iz tega prejšnjega nelinearnega primera.

Odziv konstrukcije pri linearni analizi je tak, da so vse vrednosti pomikov, napetosti, reakcij itd. premo sorazmerne vrednosti nanešenih obtežb. Uporabimo lahko superpozicijo rezultatov

iz različnih linearnih analiz. Odziv konstrukcije pri nelinearni analizi pa praviloma ni premo sorazmeren z obtežbo, zaradi variiranja lastnosti konstrukcije in različnih začetnih pogojev glede na začetno stanje. Zato ne moremo uporabiti superpozicije rezultatov iz različnih nelinearnih analiz.

Računalniški program SAP2000 lahko upošteva geometrijsko nelinearnost v obliki P-delta vpliva. Pri deformacijah v elementih je predpostavljeno, da imajo majhne vrednosti. Geometrijsko nelinearnost pri nelinearni statični analizi (load case type: static) lahko program upošteva na osnovi analize korak za korakom (step-by-step), pri togostni matriki.

V primeru dovolj majhnih vrednosti pomikov oziroma rotacij zaradi vpliva obtežbe na konstrukcijo, je zveza med obtežbo in pomiki oziroma rotacijami konstrukcije linearna. V večini primerov je v analizah v programu SAP2000 predpostavljeno tako linearno obnašanje. V tem primeru program upošteva ravnotežne enačbe pri začetni nedeformirani obliki konstrukcije.

Linearne ravnotežne enačbe so neodvisne od nanešene obtežbe in rezultirajočih pomikov oziroma rotacij. Zaradi tega lahko uporabimo superpozicijo rezultatov pri različnih statičnih in/ali dinamičnih obtežbah, kar poenostavi izračun.

Če je vrednost obtežbe konstrukcije in/ali rezultirajočih pomikov oziroma rotacij velika, potem lahko zveza med obtežbo in pomiki oziroma rotacijami konstrukcije postane nelinearna. Tako nelinearno obnašanje lahko upoštevamo s P-delta vplivom. Ko so v konstrukciji prisotne visoke vrednosti napetosti oziroma notranjih sil in momentov, se zapisane ravnotežne enačbe za začetno nedeformirano ter deformirano konstrukcijo bistveno razlikujejo.

Po izvedeni nelinearni analizi lahko program uporabi končno togostno matriko iz te analize v nadaljni novi linearni analizi. Tako geometrijska nelinearnost, upoštevana v nelinearni analizi, vpliva na rezultate iz linearne analize.

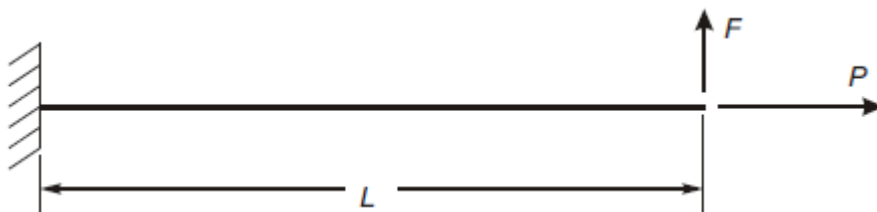
Pri nelinearnem statičnem obtežnem primeru z upoštevanjem P-delta vpliva (load case type:

static), ravnotežne enačbe delno upoštevajo deformirano obliko konstrukcije. Natezne sile se upirajo rotacijam elementa in tako povečujejo togost konstrukcije, tlačne sile pa povečujejo rotacije elementa ter tako zmanjšujejo stabilnost konstrukcije. Ko nadaljujemo en nelinearni obtežni primer iz drugega končanega nelinearnega obtežnega primera je priporočeno uporabiti enake nastavitve geometrijske nelinearnosti v obeh primerih.

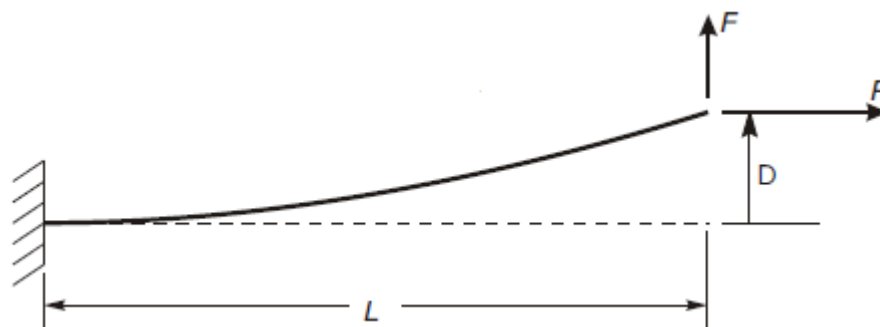
P-delta vpliv brez upoštevanja velikih pomikov (P-delta only) lahko upoštevamo pri konstrukcijah, ki niso podvržene velikim deformacijam. Primeri analize konstrukcij pod vplivom velikih deformacij so analiza preskoka sistema (snap-trough buckling), obnašanje konstrukcije po uklonu (post-buckling behavior) in modeliranje kablov z elementi okvirja (frame elements) itd. P-delta vpliv brez upoštevanja velikih pomikov (P-delta only), je primerno upoštevati predvsem, ko dominira materialna nelinearnost.

P-delta vpliv se nanaša na geometrijsko nelinearni vpliv pri velikih nateznih ali tlačnih normalnih napetostih zaradi upogiba in striga. Pri tlačni napetosti je konstrukcija bolj podajna, pri natezni napetosti pa je bolj toga, glede na prečno deformacijo.

Osnovni koncept pri P-delta vplivu je prikazan na naslednjem primeru konzolnega elementa pod vplivom obtežbe z osno silo P in prečno silo F , kot prikazuje slika 4-1. Notranja osna sila vzdolž elementa je enaka vrednosti P .



Slika 4-1: Začetna nedeformirana oblika konzolnega elementa (CSI Analysis Reference Manual For SAP2000, ETABS, and SAFE; 2008, str. 346)

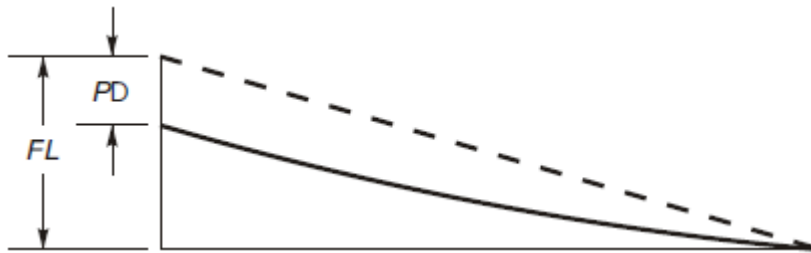


Slika 4-2: Deformirana oblika konzolnega elementa (CSI Analysis Reference Manual For SAP2000, ETABS, and SAFE; 2008, str. 346)

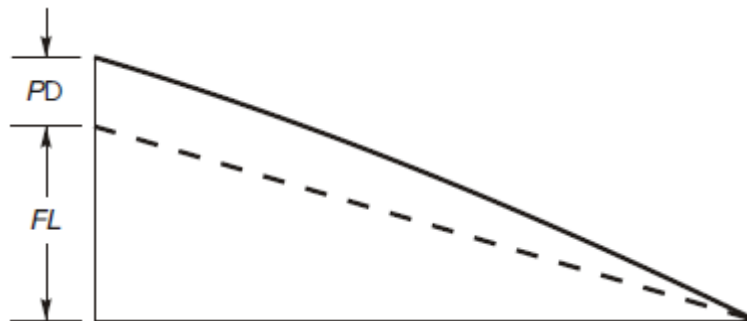
Pri določitvi ravnotežja na začetni nedeformirani konstrukciji je vrednost upogibnega momenta ob vpetju enaka $M = F \cdot L$, in se linearno zmanjšuje vzdolž elementa do prostega konca z nanešeno obtežbo, kjer je vrednost upogibnega momenta enaka nič. Če ravnotežje upoštevamo na deformirani konstrukciji, dobimo dodatni upogibni moment zaradi osne sile P , ki deluje v kombinaciji s prečnim pomikom D . V tem primeru se moment ne spreminja linearno vzdolž nosilca, sprememba pa je odvisna od deformirane oblike. Vrednost upogibnega momenta ob vpetju je sedaj $M = F \cdot L - P \cdot D$. Diagrami upogibnih momentov so prikazani na slikah 4-3, 4-4 in 4-5.



Slika 4-3: Diagram upogibnega momenta pri določitvi ravnotežja na začetni nedeformirani obliki konzolnega elementa (CSI Analysis Reference Manual For SAP2000, ETABS, and SAFE; 2008, str. 348)



Slika 4-4: Diagram upogibnega momenta pri določitvi ravnotežja na deformirani obliki konzolnega elementa pri osni natezni obremenitvi (ob upoštevanju P-delta vpliva) (CSI Analysis Reference Manual For SAP2000, ETABS, and SAFE; 2008, str. 348)



Slika 4-5: Diagram upogibnega momenta pri določitvi ravnotežja na deformirani obliki konzolnega elementa pri osni tlačni obremenitvi (ob upoštevanju P-delta vpliva) (CSI Analysis Reference Manual For SAP2000, ETABS, and SAFE; 2008, str. 348)

Pri deformirani obliki je upoštevan samo prečni pomik. Sprememba vrednosti upogibnega momenta zaradi spremembe dolžine elementa oziroma vzdolžnega pomika pa je zanemarljiva.

Če je element pod vplivom natezne obremenitve je vrednost upogibnega momenta ob vpetju reducirana in zato je reduciran tudi prečni pomik D . Zato je element navidezno bolj tog glede na obremenitev s prečno silo F .

Nasprotno je v primeru, ko je element pod vplivom tlačne obremenitve, takrat so vrednosti upogibnih momentov vzdolž elementa povečane in zato tudi prečni pomik D . Zato je element navidezno bolj podajen glede na obremenitev s prečno silo F .

V primeru dovolj visoke vrednosti tlačne sile, togost pada proti nič in zato vrednost pomika D

narašča proti neskončnosti. V tem primeru pride do uklona konstrukcije. Teoretična vrednost sile P pri kateri pride do uklona konstrukcije je Euler-jeva uklonska obtežba, označena s P_{cr} in podana z enačbo:

$$P_{cr} = -\frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{4 \cdot L^2},$$

ki je enaka enačbi (2-49), kjer je z $E \cdot I$ označena upogibna togost elementa.

P-delta vpliv osne obtežbe na prečne pomike in togost je bolj komplicirana funkcija od razmerja obtežbe P proti uklonski sili P_{cr} . Prava deformirana oblika elementa in vpliv na diagram upogibnega momenta zaradi te deformirane oblike, sta določeni s kubičnimi funkcijami pri vrednosti osne obtežbe enaki nič, s hiperboličnimi funkcijami pri vplivu natega ter trigonometričnimi funkcijami pri vplivu tlaka.

P-delta vpliv lahko prikažemo tudi v primeru drugače podprtih elementov. P-delta vpliv lahko upoštevamo lokalno pri posameznih elementih ali pri celotnem konstrukcijskem sistemu.

Glavna značilnost je, da velika osna sila, ki deluje v kombinaciji z majhnim prečnim pomikom, povzroči upogibni moment z značilno vrednostjo, ki vpliva na obnašanje elementa oziroma celotne konstrukcije. Če je vrednost pomika majhna, potem je vrednost povzročene upogibnega momenta sorazmerna z vrednostjo pomika.

Deformirana oblika pri upoštevanju P-delta vpliva je kubična ali linearna. P-delta vpliv program integrira vzdolž vsakega elementa ob upoštevanju deformacije znotraj elementa. Predpostavljeno je, da je prečno deformirana oblika, med nepomičnima koncema elementa kubična v primeru upogiba in linearna v primeru striga.

Prava deformirana oblika se lahko v določenih primerih nekoliko razlikuje od kubične/linearne oblike:

- element ima lastnosti neprizmatičnega prečnega prereza. V tem primeru se deformirana oblika zaradi P-delta vpliva, izračuna kot v primeru elementa s prizmatičnim prečnim

prerezom, toda z upoštevanjem povprečja lastnosti vzdolž elementa.

- Obtežba je nanešena vzdolž elementa. V tem primeru se deformirana oblika zaradi P-delta vpliva izračuna ob upoštevanju ekvivalentnih sil nanešenih na konceh elementov.
- Vrednost sile P , ki deluje na element je velika. Prava deformirana oblika je določena s trigonometričnimi funkcijami pri vplivu velike tlačne sile in s hiperboličnimi funkcijami pri vplivu velike natezne sile.

Predpostavljeno kubično obliko je ponavadi primerno uporabiti pri teh oblikah, razen v primeru vrednosti tlačne sile P blizu vrednosti uklonske obtežbe pri določenih vrstah podpor. Dobre rezultate dobimo, če element konstrukcije razdelimo na več elementov.

5 PRIMERI

Primeri od A do F prikazujejo dimenzioniranje (stabilnostna analiza) enostavnih lesenih stebrov obremenjenih s tlačno osno silo, po standardu SIST EN 1995-1-1, kjer sta izvedeni tudi linearna stabilnostna analiza oziroma uklonska analiza (load case type: buckling) in nelinearna statična analiza P-delta (load case type: static) z uporabo računalniškega programa SAP2000.

Primer A prikazuje dimenzioniranje enostavnega lesenega stebra, členkasto podprtega na obeh konceh, s pravokotnim prečnim prerezom in obremenjenega s centrično osno tlačno silo. Glede na literaturo Theory of Elastic Stability je izračunana projektna uklonska trdnost pri maksimalni obtežbi oziroma vrednost povprečne tlačne napetosti v prečnem prerezu ($(\sigma_c)_{YP}$), ki povzroči maksimalno napetost robnega vlakna (v prečnem prerezu) na meji elastičnosti (σ_{YP}). Z uporabo programa SAP2000 je izvedena uklonska analiza (load case type: buckling), kjer je izračunana Eulerjeva kritična uklonska sila (P_{cr}). Izvedena je tudi statična geometrijsko-nelinearna analiza P-delta (load case type: static), kjer je prikazano nelinearno naraščanje vertikalnega pomika na sredini glede na vzdolžno os stebra v odvisnosti od naraščanja obtežbe oziroma reakcije v podpori.

Primer B prikazuje dimenzioniranje enako podprtega stebra, z drugimi dimenzijami pravokotnega prečnega prereza, drugim razredom trdnosti lesa in z ekscentrično nanešeno osno tlačno silo. Tudi v tem primeru je glede na literaturo Theory of Elastic Stability je izračunana projektna uklonska trdnost pri maksimalni obtežbi in z uporabo programa SAP2000 sta izvedeni uklonska analiza ter statična geometrijsko nelinearna analiza P-delta.

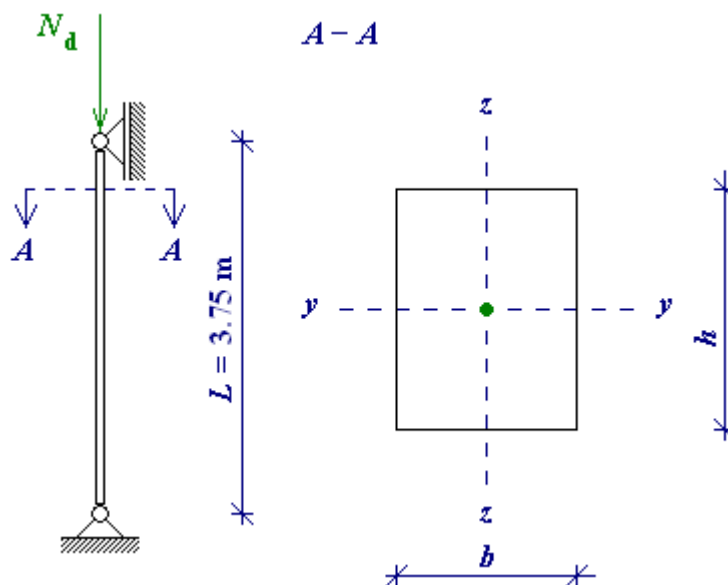
Primer C prikazuje dimenzioniranje drugače podprtega stebra in z drugimi dimenzijami pravokotnega prečnega prereza, z ekscentrično nanešeno osno tlačno silo. Z uporabo programa SAP2000 sta izvedeni uklonska analiza ter statična geometrijsko nelinearna analiza P-delta.

Primeri od D do F prikazujejo dimenzioniranje različno podprtih stebrov s centrično nanešeno osno tlačno silo, z različnimi dimenzijami pravokotnega prečnega prereza in različnimi razredi trdnosti lesa. Tudi v teh primerih sta z uporabo programa SAP2000 na enak način izvedeni

uklonska analiza in statična geometrijsko nelinearna analiza P-delta.

5.1 Primer A: Dimenzioniranje lesenega stebra pod vplivom centrične osne tlačne sile po standardu SIST EN 1995-1-1

Leseni stebel (masivni les) z naslednje slike ima pravokotni prečni prerez dimenzij $b \cdot h = 150 \text{ mm} \cdot 200 \text{ mm}$, spada v trdnostni razred C18 in 2. razred uporabe, višina stebra pa je 3.75 m. Steber je členkasto podprt na obeh koncih, dovoljen je le pomik v smeri osi stebra v podpori na zgornjem koncu. Obremenjen je centrično, s karakteristično stalno obtežbo 30 kN (tlačna sila, ki vključuje lastno težo) in s karakteristično spremenljivo obtežbo s srednje dolgim trajanjem 50 kN (tlačna sila).



Slika 5-1: Primer A: Leseni stebel pod vplivom centrične osne tlačne obremenitve

- Geometrijske karakteristike:
 - dolžina stebra: $L = 3.75 \text{ m}$,
 - uklonska dolžina glede na uklon okoli osi y - y :

$$L_{e,y} = 1.0 \cdot L = 3.75 \text{ m},$$

- uklonska dolžina glede na uklon okoli osi z - z :

$$L_{e,z} = 1.0 \cdot L = 3.75 \text{ m},$$

- širina prečnega prereza elementa: $b = 150 \text{ mm}$,
- višina prečnega prereza elementa: $h = 200 \text{ mm}$,
- površina prečnega prereza elementa:

$$A = b \cdot h = 3.0 \cdot 10^4 \text{ mm}^2,$$

- vztrajnostni moment prečnega prereza elementa okoli osi y - y :

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} = 1.0 \cdot 10^8 \text{ mm}^4,$$

- vztrajnostni radij prečnega prereza elementa okoli osi y - y :

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 57.735 \text{ mm},$$

- vitkost elementa pri uklonu okoli osi y - y :

$$\lambda_y = \frac{L_{e,y}}{i_y} = 64.952,$$

- vztrajnostni moment prečnega prereza elementa okoli osi z - z :

$$I_z = \frac{b^3 \cdot h}{12} = 5.63 \cdot 10^7 \text{ mm}^4,$$

- vztrajnostni radij prečnega prereza elementa okoli osi z - z :

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 43.301 \text{ mm},$$

- vitkost elementa pri uklonu okoli osi z - z :

$$\lambda_z = \frac{L_{e,z}}{i_z} = 86.603.$$

- Lastnosti lesa:

- trdnostni razred: C18,
- karakteristična tlačna trdnost vzporedno z vlakni: $f_{c,0,k} = 18 \text{ N/mm}^2$,
- 5-odstotni kvantil vrednosti modula elastičnosti vzporedno z vlakni:

$$E_{0,05} = 6 \text{ kN/mm}^2.$$

- Delni varnostni faktorji:

- obtežni varnostni faktor pri stalnih vplivih: $\gamma_G = 1.35$,
- obtežni varnostni faktor pri spremenljivih vplivih: $\gamma_Q = 1.5$,
- varnostni faktor za lastnosti materiala, nezanesljivost modela odpornosti pri masivnem lesu (SIST EN 1995-1-1, preglednica 2.3): $\gamma_M = 1.3$.

- Obtežba:

- karakteristična vrednost stalne obtežbe z osno tlačno silo (ki vključuje lastno težo):

$$G_k = 30 \text{ kN},$$

- karakteristična vrednost spremenljive obtežbe (s srednje dolgim trajanjem) z osno tlačno silo:

$$Q_k = 50 \text{ kN},$$

- projektna tlačna obtežba pri kritični obtežni kombinaciji:

$$N_d = \gamma_G \cdot G_k + \gamma_Q \cdot Q_k = 1.16 \cdot 10^5 \text{ N}.$$

- Modifikacijski faktorji:

- modifikacijski faktor za trajanje obtežbe in vlažnost, za masivni les pri obtežbi srednje dolgega trajanja ter 2. razredu uporabe (SIST EN 1995-1-1, preglednica 3.1): $k_{\text{mod,med}} = 0.8$,

- Tlačna nosilnost stebra:

Kritični obtežni primer pri MSN je kombinacija stalne in neugodne spremenljive obtežbe s srednje dolgim trajanjem.

- Projektna tlačna napetost:

$$\sigma_{c,0,d} = \frac{N_d}{A} = 3.85 \text{ N/mm}^2,$$

- projektna tlačna trdnost:

$$f_{c,0,d} = \frac{k_{\text{mod,med}} \cdot f_{c,0,k}}{\gamma_M} = 11.077 \text{ N/mm}^2.$$

- Uklonska nosilnost stebra (SIST EN 1995-1-1, podpoglavje 6.3.2):

- relativna vitkost elementa glede na uklon okoli osi y - y (SIST EN 1995-1-1, enačba 6.21):

$$\lambda_{\text{rel},y} = \frac{\lambda_y}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0.05}}} = 1.132,$$

- relativna vitkost elementa glede na uklon okoli osi z - z (SIST EN 1995-1-1, enačba 6.22):

$$\lambda_{\text{rel},z} = \frac{\lambda_z}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0.05}}} = 1.510,$$

ker sta obe vrednosti relativne vitkosti večji od 0.3, upoštevamo pogoje iz podpoglavja 6.3.2(3) iz standarda SIST EN 1995-1-1.

- Maksimalna vrednost relativne vitkosti elementa: $\lambda_{\text{rel},z} = 1.510$,
- faktor za elemente znotraj omejitev ravnosti, opredeljenih v poglavju 10 iz standarda SIST EN 1995-1-1 (SIST EN 1995-1-1, enačba 6.29): $\beta_c = 0.2$,
- faktor k_z glede na upogib okoli osi z - z (SIST EN 1995-1-1, enačba 6.28):

$$k_z = 0.5 \cdot (1 + \beta_c \cdot (\lambda_{\text{rel},z} - 0.3) + \lambda_{\text{rel},z}^2) = 1.761,$$

- redukcijski koeficient uklonske trdnosti glede na nevarnost uklona okoli osi $z-z$ (SIST EN 1995-1-1, enačba 6.26):

$$k_{c,z} = \frac{1}{k_z + \sqrt{k_z^2 - \lambda_{rel,z}^2}} = 0.375,$$

- projektna uklonska trdnost:

$$k_{c,z} \cdot f_{c,0,d} = 4.154 \text{ N/mm}^2,$$

- razmerje projektne tlačne napetosti proti projektni uklonski trdnosti:

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,z} \cdot f_{c,0,d}} = 0.927.$$

Projektna tlačna napetost je manjša od projektne uklonske trdnosti in zato pravokotni prečni prerez lesenega stebra, dimenzij $b \cdot h = 150 \text{ mm} \cdot 200 \text{ mm}$, ki spada v trdnostni razred C18 ter 2. razred uporabe, izpolnjuje zahteve pri mejnih stanjih nosilnosti (MSN) iz standarda SIST EN 1995-1-1.

- Razmerje kritične uklonske sile iz uklonske analize po standardu SIST EN 1995-1-1 proti začetni vrednosti projektne tlačne obtežbe:

$$\alpha_{cr,EC5} = \frac{N_{d(cr,EC5)}}{N_d} = \frac{k_{c,z} \cdot f_{c,0,d}}{\sigma_{c,0,d}} = 1.079,$$

- kritična obtežba iz uklonske analize po standardu SIST EN 1995-1-1:

$$N_{d(cr,EC5)} = \alpha_{cr,EC5} \cdot N_d = 124.606 \text{ kN}.$$

- Uklonska nosilnost stebra z začetno nepopolnostjo geometrije glede na enačbe iz literature Theory of Elastic Stability (linearno elastična stabilnostna analiza):

- odstopnanje od ravne osi, ki se meri na sredini med podporami:

$$a = e_0 = L / 300 = 12.5 \text{ mm},$$

- vztrajnostni radij: $r = i_z = 43,301 \text{ mm}$,
- radij jedra v primeru pravokotnega prereza s širino b in višino h :

$$s = s_z = \frac{W_z}{A} = \frac{h \cdot b^2 / 6}{b \cdot h} = 25 \text{ mm},$$

- modul elastičnosti: $E = E_{0,05} = 6000 \text{ N/mm}^2$,
- projektna tlačna obtežba: $n \cdot P = N_d = 1.16 \cdot 10^5 \text{ N}$,
- izračun vrednosti povprečne tlačne napetosti (pri napetosti v robnih vlaknih na meji elastičnosti) iz enačbe za izračun uklonske trdnosti stebra z začetno nepopolnostjo geometrije (glede na enačbe iz literature Theory of Elastic Stability, linearno elastična stabilnostna analiza):

$$\sigma_{YP} = (\sigma_c)_{YP} \cdot \left[1 + \frac{a}{s} \cdot \frac{1}{1 - ((\sigma_c)_{YP} / (\pi^2 \cdot E)) \cdot (l^2 / r^2)} \right] = f_{c,0,d} = 11.077 \text{ N/mm}^2,$$

$$\rightarrow (\sigma_c)_{YP} = 4.836 \text{ N/mm}^2,$$

- vrednost dopustne tlačne obtežbe:
 $(n \cdot P)_{\max} = A \cdot (\sigma_c)_{YP} = 1.45 \cdot 10^5 \text{ N}$,
- razmerje vrednosti maksimalne dopustne tlačne obtežbe za izračun uklonske trdnosti stebra z začetno nepopolnostjo geometrije, glede na enačbe iz literature (Theory of Elastic Stability, linearno elastična stabilnostna analiza) proti začetni vrednosti projektne tlačne obtežbe (iz uklonske analize glede na enačbe iz standarda SIST EN 1995-1-1):

$$\alpha_{cr,LA,e0} = \frac{(n \cdot P)_{\max}}{N_d} = 1.256.$$

- Euler-jeva kritična uklonska napetost:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E}{(l / r)^2} = 7.896 \text{ N/mm}^2.$$

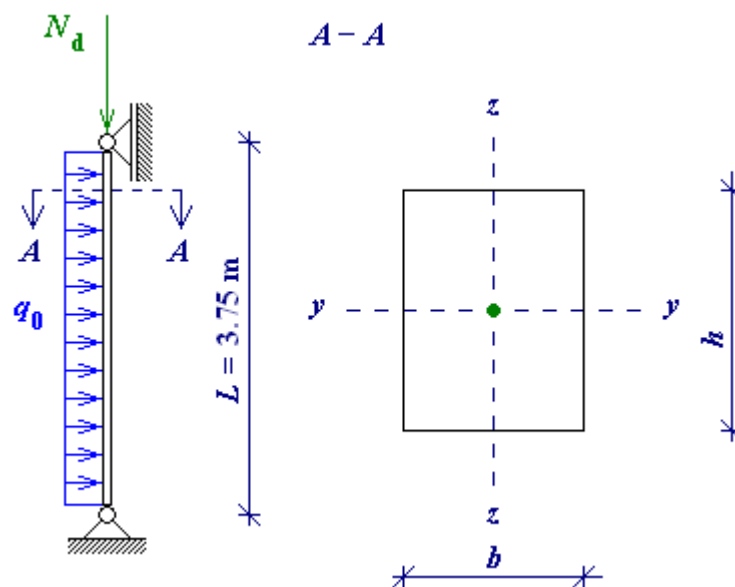
- Euler-jeva kritična uklonska sila:

$$P_{cr} = \sigma_{cr} \cdot A = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2} = 236.871 \text{ kN},$$

- razmerje Euler-jeve kritične uklonske sile proti začetni vrednosti projektne tlačne obtežbe iz uklonske analize glede na enačbe iz standarda SIST EN 1995-1-1:

$$\alpha_{cr,LA,Euler} = \frac{P_{cr}}{N_d} = 2.051.$$

- Uklonska nosilnost stebra glede na uklonsko (load case type: buckling) analizo (program išče uklonske oblike konstrukcije glede na P-delta vpliv) in statično (load case type: static) geometrijsko nelinearno analizo P-delta (kjer dobimo grafični prikaz nelinearnega naraščanja pomika v odvisnosti od naraščanja obtežbe), z računalniškim programom SAP2000:



Slika 5-2: Primer A: Leseni steber pod vplivom centrične osne tlačne obremenitve in ekvivalentne prečne obtežbe q_0 (odstopanje od ravne osi $e_0 = L / 300$, uklonska analiza in statična geometrijsko-nelinearna analiza P-delta z uporabo računalniškega programa SAP2000)

- odstopanje od ravne osi, ki se meri na sredini med podporami:
 $a = e_0 = L / 300 = 12.5 \text{ mm},$
- upogibni moment, ki ga povzroči osna tlačna obtežba pri odstopanju od ravne osi:
 $M_0 = N_d \cdot e_0 = 1.444 \text{ kNm},$
- ekvivalentna prečna obtežba, ki povzroči enak maksimalni upogibni moment kot osna tlačna obtežba pri odstopanju od ravne osi:

$$q_0 = M_0 \cdot 8 / L^2 = 0.821 \text{ kN/m},$$

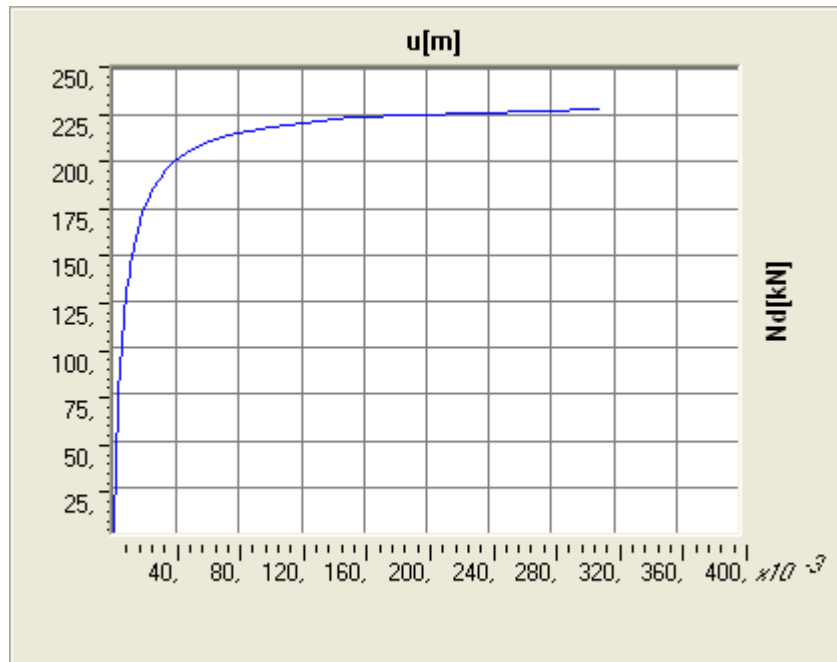
- kritična uklonska sila iz uklonske analize (load case type: buckling) z računalniškim programom SAP2000 (program išče uklonske oblike konstrukcije glede na P-delta vpliv):

$$P_{\text{cr,LA,SAP2000}} = 232.986 \text{ kN},$$

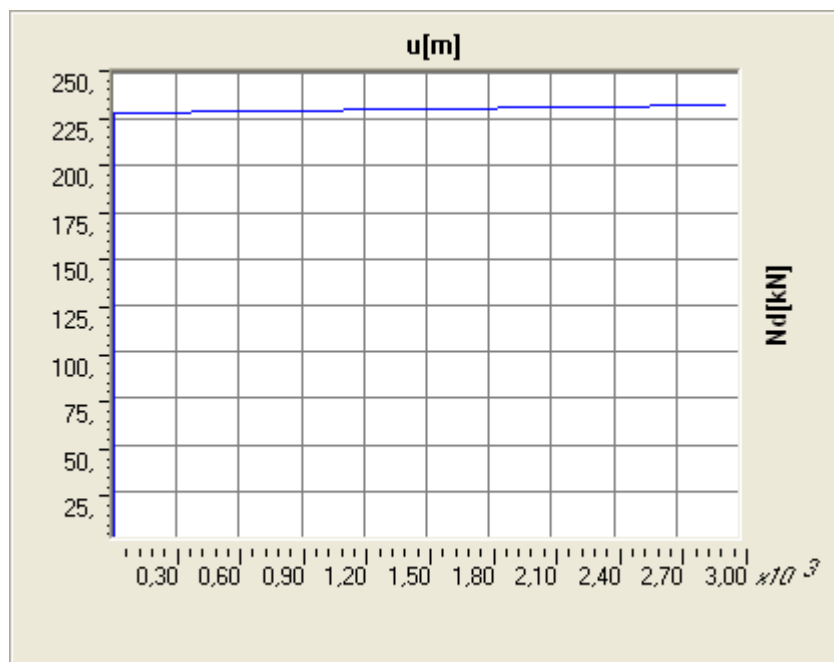
- razmerje kritične uklonske sile iz uklonske analize z računalniškim programom SAP2000 proti začetni vrednosti projektne tlačne obtežbe iz uklonske analize glede na enačbe iz standarda SIST EN 1995-1-1:

$$\alpha_{\text{cr,LA,SAP2000}} = \frac{P_{\text{cr,LA,SAP2000}}}{N_d} = 2.017,$$

- grafični prikaz naraščanja vrednosti prečnega pomika (smer y) na sredini glede na vzdolžno os stebra, v odvisnosti od vrednosti tlačne obtežbe v smeri osi stebra, iz statične (load case type: static) geometrijsko nelinearne analize P-delta, z računalniškim programom SAP2000, pri 50 izbranih korakih pri katerih program shranjuje rezultate (results saved: multiple states):



Slika 5-3: Vrednosti prečnega pomika osi na sredini višine stebra, v odvisnosti od vrednosti tlačne obtežbe v smeri osi stebra, iz statične geometrijsko nelinearne analize P-delta, z računalniškim programom SAP2000, pri 49. koraku od 50 izbranih korakov analize



Slika 5-4: Vrednosti prečnega pomika osi na sredini višine stebra, v odvisnosti od vrednosti tlačne obtežbe v smeri osi stebra, iz statične geometrijsko nelinearne analize P-delta, z računalniškim programom SAP2000, pri 50. koraku od 50 izbranih korakov analize

- kritična uklonska sila iz statične (load case type: static) geometrijsko nelinearne analize P-delta z računalniškim programom SAP2000:

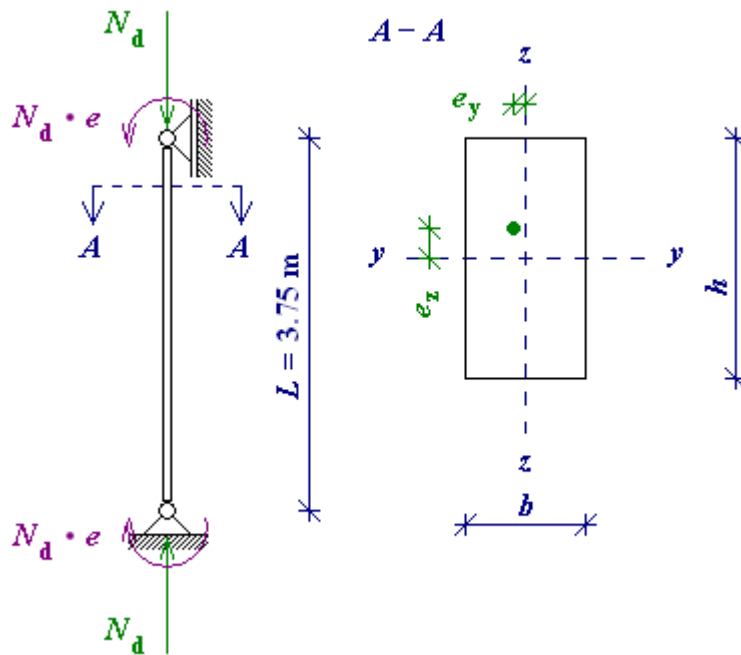
$$P_{cr,P-\Delta,SAP2000} = 232.986 \text{ kN.}$$

5.2 Primera B in C: Dimenzioniranje lesenega stebra pod vplivom ekscentrične osne tlačne sile po standardu SIST EN 1995-1-1

5.2.1 Primer B

Leseni steber (masivni les) z naslednje slike ima pravokotni prečni prerez dimenzij $b \cdot h = 100 \text{ mm} \cdot 200 \text{ mm}$, spada v trdnostni razred C24 in 2. razred uporabe, višina stebra pa je 3.75 m. Steber je členkasto podprt na obeh konceh, dovoljen je le pomik v smeri osi stebra v podpori na zgornjem koncu. Obremenjen je ekscentrično, s karakteristično stalno obtežbo

10 kN (tlačna sila, ki vključuje lastno težo) in s karakteristično spremenljivo obtežbo s srednje dolгим trajanjem 17.5 kN (tlačna sila). Ekscentričnost od osi y - y znaša $e_z = 25$ mm, ekscentričnost od osi z - z pa znaša $e_y = 10$ mm.



Slika 5-5: Primer B: Leseni steber pod vplivom ekscentrične osne tlačne obremenitve

- Geometrijske karakteristike:
 - dolžina stebra: $L = 3.75$ m,
 - uklonska dolžina glede na uklon okoli osi y - y :
 $L_{e,y} = 1.0 \cdot L = 3.75$ m,
 - uklonska dolžina glede na uklon okoli osi z - z :
 $L_{e,z} = 1.0 \cdot L = 3.75$ m,
 - širina prečnega prereza elementa: $b = 100$ mm,
 - višina prečnega prereza elementa: $h = 200$ mm,
 - površina prečnega prereza elementa:

$$A = b \cdot h = 2.0 \cdot 10^4 \text{ mm}^2,$$

- vztrajnostni moment prečnega prereza elementa okoli osi y - y :

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} = 6.67 \cdot 10^7 \text{ mm}^4,$$

- odpornostni moment prečnega prereza elementa okoli osi y - y :

$$W_y = \frac{2 \cdot I_y}{h} = 6.67 \cdot 10^5 \text{ mm}^3,$$

- vztrajnostni radij prečnega prereza elementa okoli osi y - y :

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 57.735 \text{ mm},$$

- vitkost elementa pri uklonu okoli osi y - y :

$$\lambda_y = \frac{L_{e,y}}{i_y} = 64.952,$$

- vztrajnostni moment prečnega prereza elementa okoli osi z - z :

$$I_z = \frac{b^3 \cdot h}{12} = 1.67 \cdot 10^7 \text{ mm}^4,$$

- odpornostni moment prečnega prereza elementa okoli osi z - z :

$$W_z = \frac{2 \cdot I_z}{b} = 3.333 \cdot 10^5 \text{ mm}^3,$$

- vztrajnostni radij prečnega prereza elementa okoli osi z - z :

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 28.868 \text{ mm},$$

- vitkost elementa pri uklonu okoli osi z - z :

$$\lambda_z = \frac{L_{e,z}}{i_z} = 129.904.$$

- Lastnosti lesa:

- trdnostni razred: C24,

- karakteristična upogibna trdnost glede na upogib okoli y - y osi: $f_{m,y,k} = 24 \text{ N/mm}^2$,
- karakteristična upogibna trdnost glede na upogib okoli z - z osi: $f_{m,z,k} = 24 \text{ N/mm}^2$,
- karakteristična tlačna trdnost vzporedno z vlakni: $f_{c,0,k} = 21 \text{ N/mm}^2$,
- 5-odstotni kvantil vrednosti modula elastičnosti vzporedno z vlakni:

$$E_{0,05} = 7.4 \text{ kN/mm}^2.$$

- Delni varnostni faktorji:
 - obtežni varnostni faktor pri stalnih vplivih: $\gamma_G = 1.35$,
 - obtežni varnostni faktor pri spremenljivih vplivih: $\gamma_Q = 1.5$,
 - varnostni faktor za lastnosti materiala, nezanesljivost modela odpornosti pri masivnem lesu (SIST EN 1995-1-1, preglednica 2.3): $\gamma_M = 1.3$.
- Obtežba:
 - karakteristična vrednost stalne obtežbe z osno tlačno silo (ki vključuje lastno težo):
 $G_k = 10 \text{ kN}$,
 - karakteristična vrednost spremenljive obtežbe (s srednje dolgim trajanjem) z osno tlačno silo:
 $Q_k = 17.5 \text{ kN}$,
 - projektna tlačna obtežba pri kritični obtežni kombinaciji:
 $N_d = \gamma_G \cdot G_k + \gamma_Q \cdot Q_k = 3.975 \cdot 10^4 \text{ N}$,
 - ekscentričnost od osi y - y :
 $e_z = 25 \text{ mm}$,
 - projektna vrednost obtežbe s koncentriranim upogibnim momentom okoli osi y - y :
 $M_{y,d} = N_d \cdot e_z = 0.994 \text{ kNm}$,
 - ekscentričnost od osi z - z :

$$e_y = 10 \text{ mm},$$

- projektna vrednost obtežbe s koncentriranim upogibnim momentom okoli osi z-z:

$$M_{z,d} = N_d \cdot e_y = 0.398 \text{ kNm}.$$

- Modifikacijski faktorji:

- modifikacijski faktor za trajanje obtežbe in vlažnost, za masivni les pri obtežbi srednje dolgega trajanja ter 2. razredu uporabe (SIST EN 1995-1-1, preglednica 3.1): $k_{\text{mod,med}} = 0.8$,

- faktor višine prereza pri upogibu elementa iz masivnega lesa okoli osi y-y (SIST EN 1995-1-1, podpoglavje 3.2):

$$h = 200 \text{ mm},$$

$$k_{h,1}(h \geq 150 \text{ mm}) = 1,$$

$$k_{h,1}(h < 150 \text{ mm}) = \min \left\{ \begin{array}{l} (150/h)^{0.2}, \\ 1.3, \end{array} \right.$$

$$\rightarrow k_{h,1} = 1,$$

- faktor višine prereza pri upogibu elementa iz masivnega lesa okoli osi z-z (SIST EN 1995-1-1, podpoglavje 3.2):

$$b = 100 \text{ mm},$$

$$k_{h,2}(b \geq 150 \text{ mm}) = 1,$$

$$k_{h,2}(b < 150 \text{ mm}) = \min \left\{ \begin{array}{l} (150/b)^{0.2}, \\ 1.3, \end{array} \right.$$

$$\rightarrow k_{h,2} = 1.084.$$

- Upogibna nosilnost stebra:

Kritični obtežni primer pri mejnih stanjih nosilnosti (MSN) je kombinacija stalne in neugodne spremenljive obtežbe s srednje dolgim trajanjem.

- Upogibna napetost pri upogibu okoli osi y-y:

$$\sigma_{m,y,d} = \frac{M_{y,d}}{W_y} = 1.49 \text{ N/mm}^2,$$

- upogibna napetost pri upogibu okoli osi z-z:

$$\sigma_{m,z,d} = \frac{M_{z,d}}{W_z} = 1.19 \text{ N/mm}^2,$$

- projektna upogibna trdnost glede na upogib okoli osi y-y:

$$f_{m,y,d} = \frac{k_{\text{mod,med}} \cdot k_{h,1} \cdot f_{m,y,k}}{\gamma_M} = 14.769 \text{ N/mm}^2,$$

- projektna upogibna trdnost glede na upogib okoli osi z-z:

$$f_{m,z,d} = \frac{k_{\text{mod,med}} \cdot k_{h,2} \cdot f_{m,z,k}}{\gamma_M} = 16.017 \text{ N/mm}^2.$$

- Kritična upogibna napetost in relativna vitkost pri upogibu:

- efektivna dolžina pri upogibu okoli močne osi y-y:

$$l_{\text{ef}} = 1.0 \cdot L = 3.75 \cdot 10^3 \text{ mm},$$

- kritična upogibna napetost v primeru pravokotnega prečnega prereza iz "mehkega" lesa, z močno osjo y-y:

$$\sigma_{m,\text{crit}} = \frac{M_{y,\text{crit}}}{W_y} = \frac{0.78 \cdot b^2}{h \cdot l_{\text{ef}}} \cdot E_{0.05} = 76.96 \text{ N/mm}^2,$$

- relativna vitkost pri upogibu okoli močne osi y-y:

$$\lambda_{\text{rel,m}} = \sqrt{\frac{f_{m,k}}{\sigma_{m,\text{crit}}}} = 0.558 \leq 0.75.$$

- Tlačna nosilnost stebra:

Kritični obtežni primer pri MSN je kombinacija stalne in neugodne spremenljive obtežbe s srednje dolgim trajanjem.

- Projektna tlačna napetost:

$$\sigma_{c,0,d} = \frac{N_d}{A} = 1.988 \text{ N/mm}^2,$$

- projektna tlačna trdnost:

$$f_{c,0,d} = \frac{k_{\text{mod,med}} \cdot f_{c,0,k}}{\gamma_M} = 12.923 \text{ N/mm}^2.$$

- Uklonska nosilnost stebra (SIST EN 1995-1-1, podpoglavje 6.3.2):
 - relativna vitkost elementa glede na uklon okoli osi y - y (SIST EN 1995-1-1, enačba 6.21):

$$\lambda_{\text{rel},y} = \frac{\lambda_y}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0.05}}} = 1.101,$$

- relativna vitkost elementa glede na uklon okoli osi z - z (SIST EN 1995-1-1, enačba 6.22):

$$\lambda_{\text{rel},z} = \frac{\lambda_z}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0.05}}} = 2.203,$$

ker sta obe vrednosti relativne vitkosti večji od 0.3, upoštevamo pogoje iz podpoglavja 6.3.2(3) iz standarda SIST EN 1995-1-1.

- faktor za elemente znotraj omejitev ravnosti, opredeljenih v poglavju 10 iz standarda SIST EN 1995-1-1 (SIST EN 1995-1-1, enačba 6.29): $\beta_c = 0.2$,
- faktor k_y glede na upogib okoli osi y - y (SIST EN 1995-1-1, enačba 6.27):

$$k_y = 0.5 \cdot (1 + \beta_c \cdot (\lambda_{\text{rel},y} - 0.3) + \lambda_{\text{rel},y}^2) = 1.187,$$

- redukcijski koeficient uklonske trdnosti glede na nevarnost uklona okoli osi y - y (SIST EN 1995-1-1, enačba 6.25):

$$k_{c,y} = \frac{1}{k_y + \sqrt{k_y^2 - \lambda_{\text{rel},y}^2}} = 0.614,$$

- faktor k_z glede na upogib okoli osi z - z (SIST EN 1995-1-1, enačba 6.28):

$$k_z = 0.5 \cdot (1 + \beta_c \cdot (\lambda_{\text{rel},z} - 0.3) + \lambda_{\text{rel},z}^2) = 3.116,$$

- redukcijski koeficient uklonske trdnosti glede na nevarnost uklona okoli osi z - z (SIST EN 1995-1-1, enačba 6.26):

$$k_{c,z} = \frac{1}{k_z + \sqrt{k_z^2 - \lambda_{rel,z}^2}} = 0.188,$$

- faktor, ki upošteva možnost prerazporeditve upogibnih napetosti v pravokotnem prečnem prerezu iz masivnega lesa (SIST EN 1995-1-1, podpoglavje 6.1.6):

$$k_m = 0.7,$$

- kontrola napetosti, ki se povečajo zaradi uklona (SIST EN 1995-1-1, enačbi 6.23 in 6.24):

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,y} \cdot f_{c,0,d}} + \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} + k_m \cdot \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} = 0.403 \leq 1,$$

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,z} \cdot f_{c,0,d}} + k_m \cdot \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} + \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} = 0.963 \leq 1.$$

Zahtevam pri kontroli napetosti, ki se povečajo zaradi uklona je zadoščeno, zato pravokotni prečni prerez lesenega stebra, dimenzij $b \cdot h = 100 \text{ mm} \cdot 200 \text{ mm}$, ki spada v trdnostni razred C24 ter 2. razred uporabe, izpolnjuje zahteve pri mejnih stanjih nosilnosti (MSN) iz standarda SIST EN 1995-1-1.

- Razmerje kritične uklonske sile iz uklonske analize po standardu SIST EN 1995-1-1 proti začetni vrednosti projektne tlačne obtežbe:

$$\alpha_{cr,EC5} = \frac{N_{d(cr,EC5)}}{N_d} = 1 / \left(\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,z} \cdot f_{c,0,d}} + k_m \cdot \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} + \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \right) = 1.038,$$

- kritična obtežba iz uklonske analize po standardu SIST EN 1995-1-1:

$$N_{d(cr,EC5)} = \alpha_{cr,EC5} \cdot N_d = 41.261 \text{ kN}.$$

- Uklonska nosilnost stebra z ekscentrično obtežbo glede na enačbe iz literature Theory of Elastic Stability (linearno elastična stabilnostna analiza):

- modul elastičnosti:

$$E = E_{0,05} = 7400 \text{ N/mm}^2,$$

- vztrajnostni radij prečnega prereza elementa okoli osi y - y : $r_y = i_y = 57,735 \text{ mm}$,

- vztrajnostni radij prečnega prereza elementa okoli osi z - z : $r_z = i_z = 28,868$ mm,
- radij jedra (v primeru pravokotnega prereza s širino b in višino h) okoli osi y - y

$$s_y = \frac{W_y}{A} = \frac{b \cdot h^2 / 6}{b \cdot h} = 33.333 \text{ mm},$$

- radij jedra (v primeru pravokotnega prereza s širino b in višino h) okoli osi z - z

$$s_z = \frac{W_z}{A} = \frac{h \cdot b^2 / 6}{b \cdot h} = 16.667 \text{ mm},$$

- projektna tlačna obtežba:

$$n \cdot P = N_d = 3.98 \cdot 10^4 \text{ N},$$

- izračun vrednosti povprečne tlačne napetosti (pri napetosti v robnih vlaknih na meji elastičnosti) iz enačbe za izračun uklonske trdnosti stebra z ekscentrično obtežbo (glede na enačbe iz literature Theory of Elastic Stability, linearno elastična stabilnostna analiza):

$$\sigma_{YP} = (\sigma_c)_{YP} \cdot \left(1 + \frac{e_z}{s_y} \cdot \sec \left(\frac{l}{2 \cdot r_y} \cdot \sqrt{\frac{n \cdot P}{A \cdot E}} \right) + \frac{e_y}{s_z} \cdot \sec \left(\frac{l}{2 \cdot r_z} \cdot \sqrt{\frac{n \cdot P}{A \cdot E}} \right) \right) =$$

$$= f_{c,0,d} = 12.923 \text{ N/mm}^2,$$

$$\rightarrow (\sigma_c)_{YP} = 3.016 \text{ N/mm}^2,$$

- vrednost dopustne tlačne obtežbe:

$$(n \cdot P)_{\max} = A \cdot (\sigma_c)_{YP} = 6.03 \cdot 10^4 \text{ N},$$

- razmerje vrednosti maksimalne dopustne tlačne obtežbe za izračun uklonske trdnosti stebra z ekscentrično obtežbo, glede na enačbe iz literature (Theory of Elastic Stability, linearno elastična stabilnostna analiza) proti začetni vrednosti projektne tlačne obtežbe iz uklonske analize glede na enačbe iz standarda SIST EN 1995-1-1:

$$\alpha_{cr,LA,e0} = \frac{(n \cdot P)_{\max}}{N_d} = 1.518.$$

- Euler-jeva kritična uklonska napetost:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E}{(l / r_z)^2} = 4.328 \text{ N/mm}^2.$$

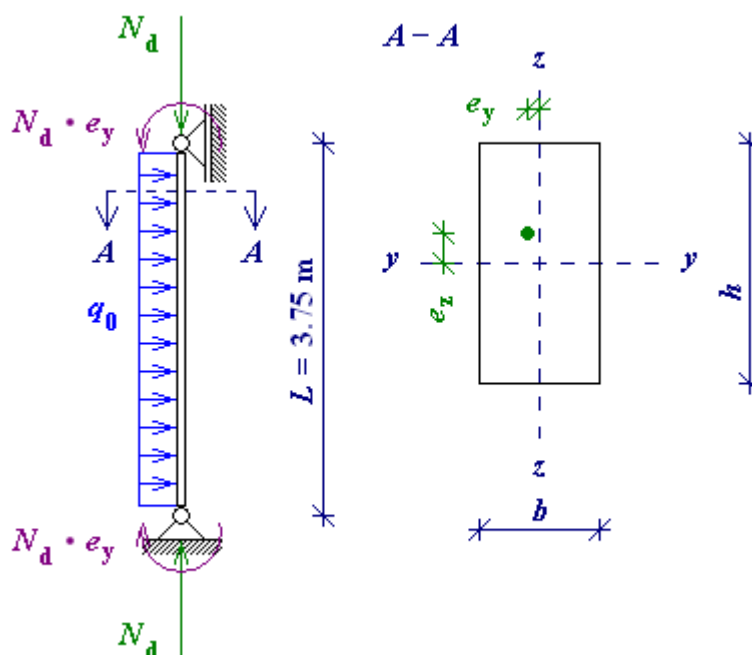
- Euler-jeva kritična uklonska sila:

$$P_{cr} = \sigma_{cr} \cdot A = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2} = 86.560 \text{ kN},$$

- razmerje Euler-jeve kritične uklonske sile proti začetni vrednosti projektne tlačne obtežbe iz uklonske analize glede na enačbe iz standarda SIST EN 1995-1-1:

$$\alpha_{cr,LA,Euler} = \frac{P_{cr}}{N_d} = 2.18.$$

- Uklonska nosilnost stebra glede na uklonsko (load case type: buckling) analizo (program išče uklonske oblike konstrukcije glede na P-delta vpliv) in statično (load case type: static) geometrijsko nelinearno analizo P-delta (kjer dobimo grafični prikaz nelinearnega naraščanja pomika v odvisnosti od naraščanja obtežbe), z računalniškim programom SAP2000:



Slika 5-6: Primer B: Leseni steber pod vplivom ekscentrične osne tlačne obremenitve in ekvivalentne prečne obtežbe q_0 (odstopanje od ravne osi $e_0 = L / 300$, uklonska analiza in statična geometrijsko-nelinearna analiza P-delta z uporabo računalniškega programa SAP2000)

- odstopnanje od ravne osi, ki se meri na sredini med podporami:
$$a = e_0 = L / 300 = 12.5 \text{ mm},$$
- upogibni moment, ki ga povzroči osna tlačna obtežba pri odstopanju od ravne osi:
$$M_0 = N_d \cdot e_0 = 0.497 \text{ kNm},$$
- ekvivalentna prečna obtežba, ki povzroči enak maksimalni upogibni moment kot osna tlačna obtežba pri odstopanju od ravne osi:

$$q_0 = M_0 \cdot 8 / L^2 = 0.283 \text{ kN/m},$$

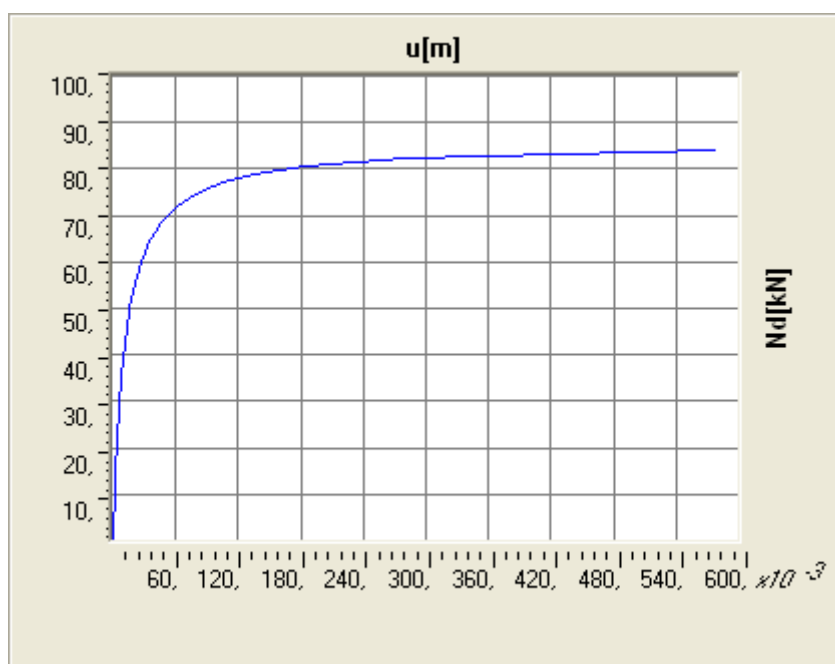
- kritična uklonska sila iz uklonske analize (load case type: buckling) z računalniškim programom SAP2000 (program išče uklonske oblike konstrukcije glede na P-delta vpliv):

$$P_{cr,LA,SAP2000} = 85.885 \text{ kN},$$

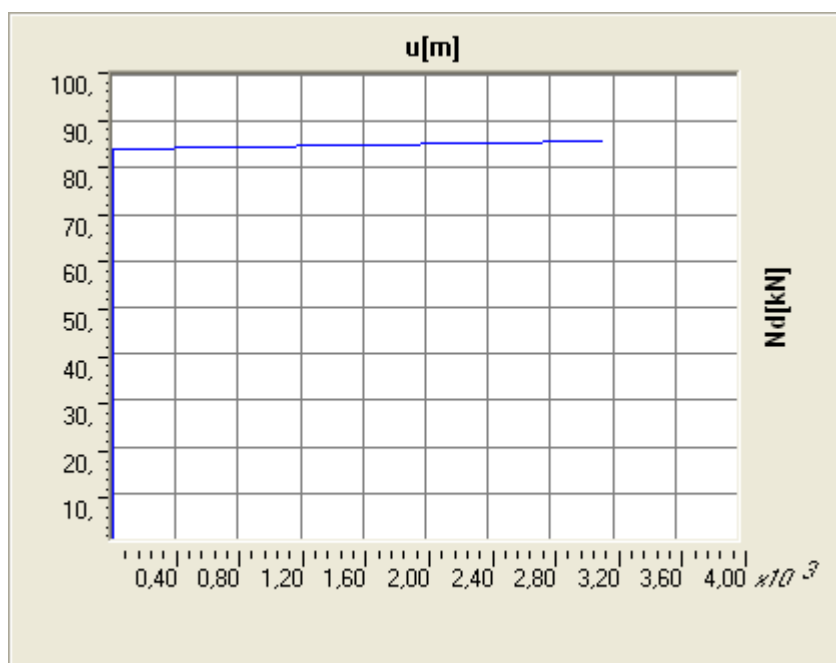
- razmerje kritične uklonske sile iz uklonske analize z računalniškim programom SAP2000 proti začetni vrednosti projektne tlačne obtežbe iz uklonske analize glede na enačbe iz standarda SIST EN 1995-1-1:

$$\alpha_{cr,LA,SAP2000} = \frac{P_{cr,LA,SAP2000}}{N_d} = 2.161,$$

- grafični prikaz naraščanja vrednosti prečnega pomika (smer y) na sredini glede na vzdolžno os stebra, v odvisnosti od vrednosti tlačne obtežbe v smeri osi stebra, iz statične (load case type: static) geometrijsko nelinearne analize P-delta, z računalniškim programom SAP2000, pri 50 izbranih korakih pri katerih program shranjuje rezultate (results saved: multiple states):



Slika 5-7: Vrednosti prečnega pomika osi na sredini višine stebra, v odvisnosti od vrednosti tlačne obtežbe v smeri osi stebra, iz statične geometrijsko nelinearne analize P-delta, z računalniškim programom SAP2000, pri 49. koraku od 50 izbranih korakov analize



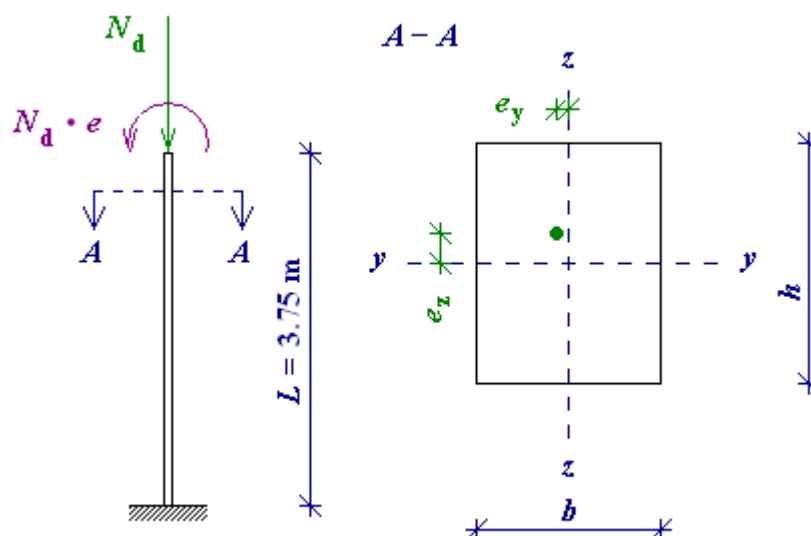
Slika 5-8: Vrednosti prečnega pomika osi na sredini višine stebra, v odvisnosti od vrednosti tlačne obtežbe v smeri osi stebra, iz statične geometrijsko nelinearne analize P-delta, z računalniškim programom SAP2000, pri 50. koraku od 50 izbranih korakov analize

- kritična uklonska sila iz statične (load case type: static) geometrijsko nelinearne analize P-delta z računalniškim programom SAP2000:

$$P_{cr,P-\Delta,SAP2000} = 85.885 \text{ kN.}$$

5.2.2 Primer C

Leseni steber (masivni les) z naslednje slike ima pravokotni prečni prerez dimenzij $b \cdot h = 160 \text{ mm} \cdot 200 \text{ mm}$, spada v trdnostni razred C24 in 2. razred uporabe, višina stebra pa je 3.75 m. Steber je spodaj vpet in zgoraj nepodprt. Obremenjen je ekscentrično, s karakteristično stalno obtežbo 10 kN (tlačna sila, ki vključuje lastno težo) in s karakteristično spremenljivo obtežbo s srednje dolgim trajanjem 17.5 kN (tlačna sila). Ekscentričnost od osi y - y znaša $e_z = 25 \text{ mm}$, ekscentričnost od osi z - z pa znaša $e_y = 10 \text{ mm}$.



Slika 5-9: Primer C: Leseni steber pod vplivom ekscentrične osne tlačne obremenitve

- Geometrijske karakteristike:

- dolžina stebra: $L = 3.75\text{m}$,

- uklonska dolžina glede na uklon okoli osi y - y :

$$L_{e,y} = 2.0 \cdot L = 7.5 \text{ m},$$

- uklonska dolžina glede na uklon okoli osi z - z :

$$L_{e,z} = 2.0 \cdot L = 7.5 \text{ m},$$

- širina prečnega prereza elementa: $b = 160 \text{ mm}$,

- višina prečnega prereza elementa: $h = 200 \text{ mm}$,

- površina prečnega prereza elementa:

$$A = b \cdot h = 3.2 \cdot 10^4 \text{ mm}^2,$$

- vztrajnostni moment prečnega prereza elementa okoli osi y - y :

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} = 1.067 \cdot 10^8 \text{ mm}^4,$$

- odpornostni moment prečnega prereza elementa okoli osi y - y :

$$W_y = \frac{2 \cdot I_y}{h} = 1.067 \cdot 10^6 \text{ mm}^3,$$

- vztrajnostni radij prečnega prereza elementa okoli osi y-y:

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 57.735 \text{ mm},$$

- vitkost elementa pri uklonu okoli osi y-y:

$$\lambda_y = \frac{L_{e,y}}{i_y} = 129.904,$$

- vztrajnostni moment prečnega prereza elementa okoli osi z-z:

$$I_z = \frac{b^3 \cdot h}{12} = 6.827 \cdot 10^7 \text{ mm}^4,$$

- odpornostni moment prečnega prereza elementa okoli osi z-z:

$$W_z = \frac{2 \cdot I_z}{b} = 8.533 \cdot 10^5 \text{ mm}^3,$$

- vztrajnostni radij prečnega prereza elementa okoli osi z-z:

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 46.188 \text{ mm},$$

- vitkost elementa pri uklonu okoli osi z-z:

$$\lambda_z = \frac{L_{e,z}}{i_z} = 162.38.$$

- Lastnosti lesa:

- trdnostni razred: C24,
- karakteristična upogibna trdnost glede na upogib okoli y-y osi: $f_{m,y,k} = 24 \text{ N/mm}^2$,
- karakteristična upogibna trdnost glede na upogib okoli z-z osi: $f_{m,z,k} = 24 \text{ N/mm}^2$,
- karakteristična tlačna trdnost vzporedno z vlakni: $f_{c,0,k} = 21 \text{ N/mm}^2$,
- 5-odstotni kvantil vrednosti modula elastičnosti vzporedno z vlakni:

$$E_{0,05} = 7.4 \text{ kN/mm}^2.$$

- Delni varnostni faktorji:
 - obtežni varnostni faktor pri stalnih vplivih: $\gamma_G = 1.35$,
 - obtežni varnostni faktor pri spremenljivih vplivih: $\gamma_Q = 1.5$,
 - varnostni faktor za lastnosti materiala, nezanesljivost modela odpornosti pri masivnem lesu (SIST EN 1995-1-1, preglednica 2.3): $\gamma_M = 1.3$.

- Obtežba:
 - karakteristična vrednost stalne obtežbe z osno tlačno silo (ki vključuje lastno težo):
 $G_k = 10 \text{ kN}$,
 - karakteristična vrednost spremenljive obtežbe (s srednje dolgim trajanjem) z osno tlačno silo:
 $Q_k = 17.5 \text{ kN}$,
 - projektna tlačna obtežba pri kritični obtežni kombinaciji:
 $N_d = \gamma_G \cdot G_k + \gamma_Q \cdot Q_k = 3.975 \cdot 10^4 \text{ N}$,
 - ekscentričnost od osi y-y:
 $e_z = 25 \text{ mm}$,
 - projektna vrednost obtežbe s koncentriranim upogibnim momentom okoli osi y-y:
 $M_{y,d} = N_d \cdot e_z = 0.994 \text{ kNm}$,
 - ekscentričnost od osi z-z:
 $e_y = 10 \text{ mm}$,
 - projektna vrednost obtežbe s koncentriranim upogibnim momentom okoli osi z-z:
 $M_{z,d} = N_d \cdot e_y = 0.398 \text{ kNm}$.

- Modifikacijski faktorji:

- modifikacijski faktor za trajanje obtežbe in vlažnost, za masivni les pri obtežbi srednje dolgega trajanja ter 2. razredu uporabe (SIST EN 1995-1-1, preglednica 3.1): $k_{\text{mod,med}} = 0.8$,
- faktor višine prereza pri upogibu elementa iz masivnega lesa okoli osi y - y (SIST EN 1995-1-1, podpoglavje 3.2):

$$h = 200 \text{ mm},$$

$$k_{h,1}(h \geq 150 \text{ mm}) = 1,$$

$$k_{h,1}(h < 150 \text{ mm}) = \min \left\{ \begin{array}{l} (150/h)^{0.2}, \\ 1.3, \end{array} \right.$$

$$\rightarrow k_{h,1} = 1,$$

- faktor višine prereza pri upogibu elementa iz masivnega lesa okoli osi z - z (SIST EN 1995-1-1, podpoglavje 3.2):

$$b = 160 \text{ mm},$$

$$k_{h,2}(b \geq 150 \text{ mm}) = 1,$$

$$k_{h,2}(b < 150 \text{ mm}) = \min \left\{ \begin{array}{l} (150/b)^{0.2}, \\ 1.3, \end{array} \right.$$

$$\rightarrow k_{h,2} = 1.$$

- Upogibna nosilnost stebra:

Kritični obtežni primer pri mejnih stanjih nosilnosti (MSN) je kombinacija stalne in neugodne spremenljive obtežbe s srednje dolgim trajanjem.

- Upogibna napetost pri upogibu okoli osi y - y :

$$\sigma_{m,y,d} = \frac{M_{y,d}}{W_y} = 0.932 \text{ N/mm}^2,$$

- upogibna napetost pri upogibu okoli osi z - z :

$$\sigma_{m,z,d} = \frac{M_{z,d}}{W_z} = 0.466 \text{ N/mm}^2,$$

- projektna upogibna trdnost glede na upogib okoli osi y-y:

$$f_{m,y,d} = \frac{k_{\text{mod,med}} \cdot k_{h,1} \cdot f_{m,y,k}}{\gamma_M} = 14.769 \text{ N/mm}^2,$$

- projektna upogibna trdnost glede na upogib okoli osi z-z:

$$f_{m,z,d} = \frac{k_{\text{mod,med}} \cdot k_{h,2} \cdot f_{m,z,k}}{\gamma_M} = 14.769 \text{ N/mm}^2.$$

- Kritična upogibna napetost in relativna vitkost pri upogibu:

- efektivna dolžina pri upogibu okoli močne osi y-y:

$$l_{\text{ef}} = 2.0 \cdot L = 7.5 \cdot 10^3 \text{ mm},$$

- kritična upogibna napetost v primeru pravokotnega prečnega prereza iz "mehkega" lesa, z močno osjo y-y:

$$\sigma_{m,\text{crit}} = \frac{M_{y,\text{crit}}}{W_y} = \frac{0.78 \cdot b^2}{h \cdot l_{\text{ef}}} \cdot E_{0.05} = 98.509 \text{ N/mm}^2,$$

- relativna vitkost pri upogibu okoli močne osi y-y:

$$\lambda_{\text{rel,m}} = \sqrt{\frac{f_{m,k}}{\sigma_{m,\text{crit}}}} = 0.494 \leq 0.75.$$

- Tlačna nosilnost stebra:

Kritični obtežni primer pri MSN je kombinacija stalne in neugodne spremenljive obtežbe s srednje dolgim trajanjem.

- Projektna tlačna napetost:

$$\sigma_{c,0,d} = \frac{N_d}{A} = 1.242 \text{ N/mm}^2,$$

- projektna tlačna trdnost:

$$f_{c,0,d} = \frac{k_{\text{mod,med}} \cdot f_{c,0,k}}{\gamma_M} = 12.923 \text{ N/mm}^2.$$

- Uklonska nosilnost stebra (SIST EN 1995-1-1, podpoglavje 6.3.2):

- relativna vitkost elementa glede na uklon okoli osi y - y (SIST EN 1995-1-1, enačba 6.21):

$$\lambda_{\text{rel},y} = \frac{\lambda_y}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0,05}}} = 2.203,$$

- relativna vitkost elementa glede na uklon okoli osi z - z (SIST EN 1995-1-1, enačba 6.22):

$$\lambda_{\text{rel},z} = \frac{\lambda_z}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0,05}}} = 2.753,$$

ker sta obe vrednosti relativne vitkosti večji od 0.3, upoštevamo pogoje iz podpoglavja 6.3.2(3) iz standarda SIST EN 1995-1-1.

- faktor za elemente znotraj omejitev ravnosti, opredeljenih v poglavju 10 iz standarda SIST EN 1995-1-1 (SIST EN 1995-1-1, enačba 6.29): $\beta_c = 0.2$,

- faktor k_y glede na upogib okoli osi y - y (SIST EN 1995-1-1, enačba 6.27):

$$k_y = 0.5 \cdot (1 + \beta_c \cdot (\lambda_{\text{rel},y} - 0.3) + \lambda_{\text{rel},y}^2) = 3.116,$$

- redukcijski koeficient uklonske trdnosti glede na nevarnost uklona okoli osi y - y (SIST EN 1995-1-1, enačba 6.25):

$$k_{c,y} = \frac{1}{k_y + \sqrt{k_y^2 - \lambda_{\text{rel},y}^2}} = 0.188,$$

- faktor k_z glede na upogib okoli osi z - z (SIST EN 1995-1-1, enačba 6.28):

$$k_z = 0.5 \cdot (1 + \beta_c \cdot (\lambda_{\text{rel},z} - 0.3) + \lambda_{\text{rel},z}^2) = 4.536,$$

- redukcijski koeficient uklonske trdnosti glede na nevarnost uklona okoli osi z - z (SIST EN 1995-1-1, enačba 6.26):

$$k_{c,z} = \frac{1}{k_z + \sqrt{k_z^2 - \lambda_{\text{rel},z}^2}} = 0.123,$$

- faktor, ki upošteva možnost prerazporeditve upogibnih napetosti v pravokotnem prečnem prerezu iz masivnega lesa (SIST EN 1995-1-1, podglavje 6.1.6):

$$k_m = 0.7,$$

- kontrola napetosti, ki se povečajo zaradi uklona (SIST EN 1995-1-1, enačbi 6.23 in 6.24):

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,y} \cdot f_{c,0,d}} + \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} + k_m \cdot \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} = 0.597 \leq 1,$$

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,z} \cdot f_{c,0,d}} + k_m \cdot \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} + \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} = 0.858 \leq 1.$$

Zahtevam pri kontroli napetosti, ki se povečajo zaradi uklona je zadoščeno in zato pravokotni prečni prerez lesenega sebra, dimenzij $b \cdot h = 160 \text{ mm} \cdot 200 \text{ mm}$, ki spada v trdnostni razred C24 ter 2. razred uporabe, izpolnjuje zahteve pri mejnih stanjih nosilnosti (MSN) iz standarda SIST EN 1995-1-1.

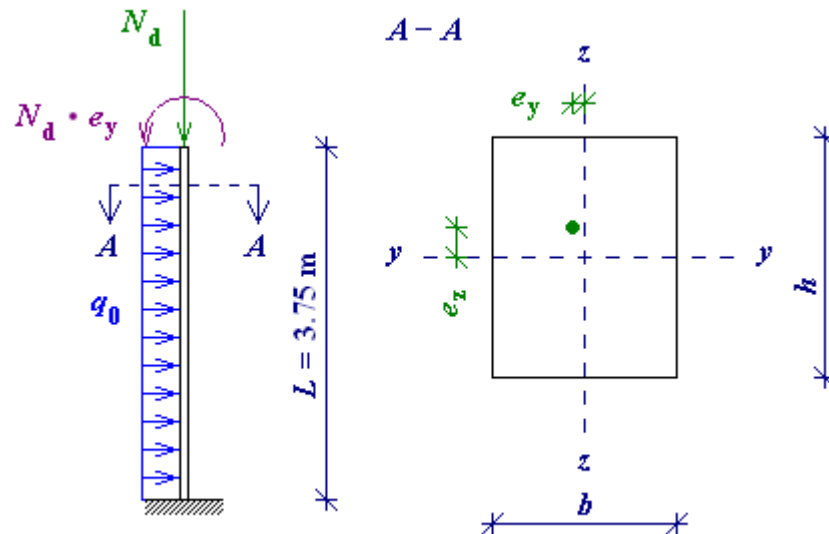
- Razmerje kritične uklonske sile iz uklonske analize po standardu SIST EN 1995-1-1 proti začetni vrednosti projektne tlačne obtežbe:

$$\alpha_{cr,EC5} = \frac{N_{d(cr,EC5)}}{N_d} = 1 / \left(\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,z} \cdot f_{c,0,d}} + k_m \cdot \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} + \frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}} \right) = 1.165,$$

- kritična obtežba iz uklonske analize po standardu SIST EN 1995-1-1:

$$N_{d(cr,EC5)} = \alpha_{cr,EC5} \cdot N_d = 46.317 \text{ kN}.$$

- Uklonska nosilnost stebra glede na uklonsko (load case type: buckling) analizo (program išče uklonske oblike konstrukcije glede na P-delta vpliv) in statično (load case type: static) geometrijsko nelinearno analizo P-delta (kjer dobimo grafični prikaz nelinearnega naraščanja pomika v odvisnosti od naraščanja obtežbe), z računalniškim programom SAP2000:



Slika 5-10: Primer C: Leseni steber pod vplivom ekscentrične osne tlačne obremenitve in ekvivalentne prečne obtežbe q_0 (odstopanje od ravne osi $e_0 = L / 300$, uklonska analiza in statična geometrijsko-nelinearna analiza P-delta z uporabo računalniškega programa SAP2000)

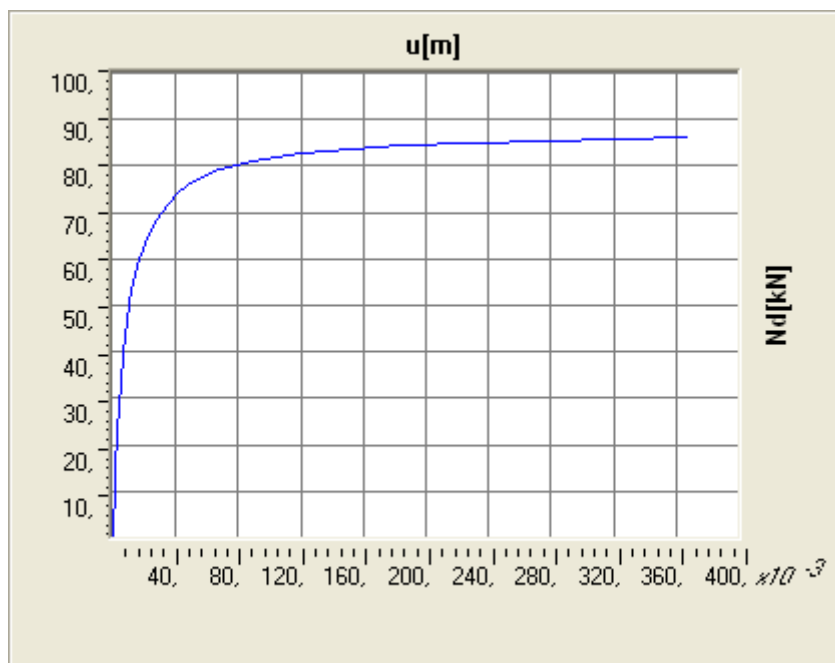
- kritična uklonska sila iz uklonske analize (load case type: buckling) z računalniškim programom SAP2000 (program išče uklonske oblike konstrukcije glede na P-delta vpliv):

$$P_{cr,LA,SAP2000} = 88.004 \text{ kN},$$

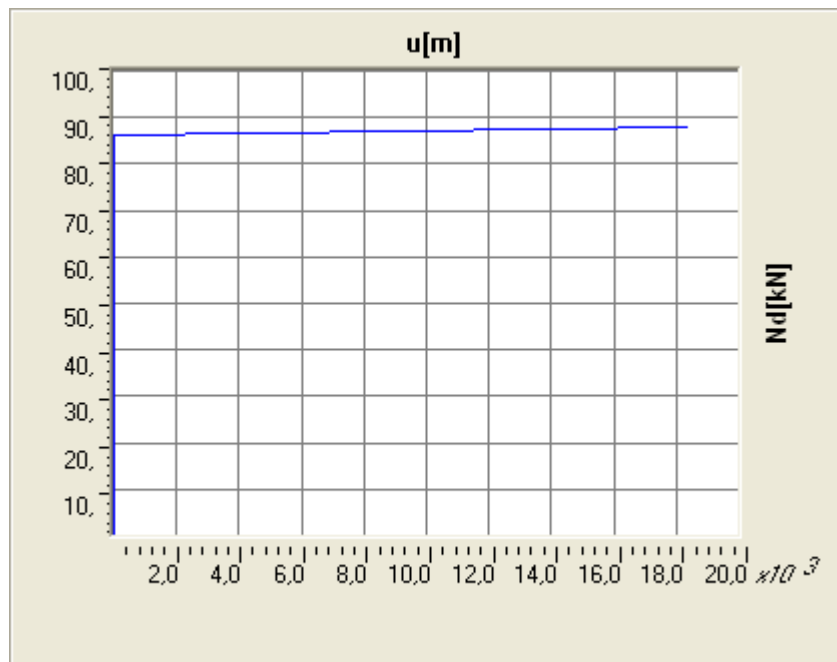
- razmerje kritične uklonske sile iz uklonske analize z računalniškim programom SAP2000 proti začetni vrednosti projektne tlačne obtežbe iz uklonske analize glede na enačbe iz standarda SIST EN 1995-1-1:

$$\alpha_{cr,LA,SAP2000} = \frac{P_{cr,LA,SAP2000}}{N_d} = 2.214,$$

- grafični prikaz naraščanja vrednosti prečnega pomika (smer y) na nepodprtem koncu vzdolžne osi stebra, v odvisnosti od vrednosti tlačne obtežbe v smeri osi stebra, iz statične (load case type: static) geometrijsko nelinearne analize P-delta, z računalniškim programom SAP2000, pri 50 izbranih korakih pri katerih program shranjuje rezultate (results saved: multiple states):



Slika 5-11: Vrednosti prečnega pomika osi na nepodprtem koncu stebra, v odvisnosti od vrednosti tlačne obtežbe v smeri osi stebra, iz statične geometrijsko nelinearne analize P-delta, z računalniškim programom SAP2000, pri 49. koraku od 50 izbranih korakov analize



Slika 5-12: Vrednosti prečnega pomika osi na nepodprtem koncu stebra, v odvisnosti od vrednosti tlačne obtežbe v smeri osi stebra, iz statične geometrijsko nelinearne analize P-delta, z računalniškim programom SAP2000, pri 50. koraku od 50 izbranih korakov analize

- kritična uklonska sila iz statične (load case type: static) geometrijsko nelinearne analize P-delta z računalniškim programom SAP2000:

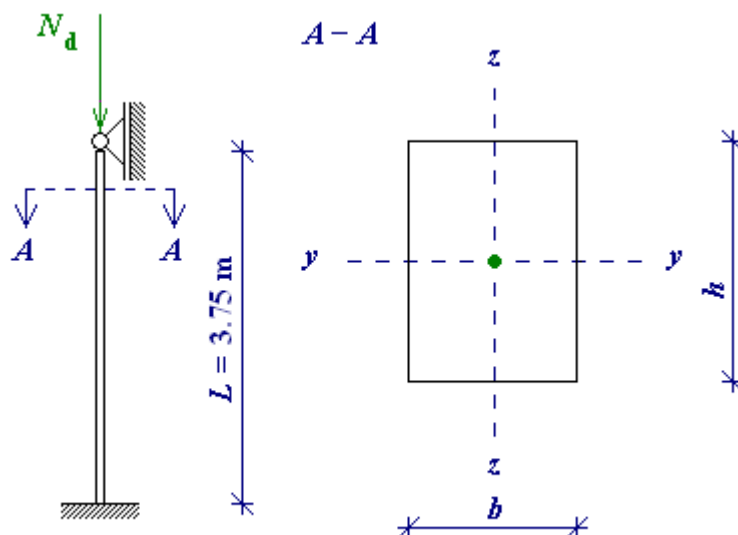
$$P_{cr,P-\Delta,SAP2000} = 88.004 \text{ kN},$$

5.3 Primeri D-F: Dimenzioniranje lesenega stebra pod vplivom centrične osne tlačne sile po standardu SIST EN 1995-1-1

5.3.1 Primer D

Leseni steber (masivni les) z naslednje slike ima pravokotni prečni prerez dimenzij $b \cdot h = 140 \text{ mm} \cdot 200 \text{ mm}$, spada v trdnostni razred C18 in 2. razred uporabe, višina stebra pa je 3.75 m. Steber je spodaj vpet, zgoraj pa je členkasto podprt (kjer je samo preprečen pomik v prečni smeri glede na vzdolžno os stebra). Obremenjen je centrično, s karakteristično stalno obtežbo 30 kN (tlačna sila, ki vključuje lastno težo) in s karakteristično spremenljivo obtežbo s

srednje dolgim trajanjem 50 kN (tlačna sila).



Slika 5-13: Primer D: Leseni steber pod vplivom centrične osne tlačne obremenitve

- Geometrijske karakteristike:

- dolžina stebra: $L = 3.75 \text{ m}$,

- uklonska dolžina glede na uklon okoli osi y - y :

$$L_{e,y} = 0.85 \cdot L = 3.188 \text{ m},$$

- uklonska dolžina glede na uklon okoli osi z - z :

$$L_{e,z} = 0.85 \cdot L = 3.188 \text{ m},$$

- širina prečnega prereza elementa: $b = 140 \text{ mm}$,

- višina prečnega prereza elementa: $h = 200 \text{ mm}$,

- površina prečnega prereza elementa:

$$A = b \cdot h = 2.8 \cdot 10^4 \text{ mm}^2,$$

- vztrajnostni moment prečnega prereza elementa okoli osi y - y :

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} = 9.33 \cdot 10^7 \text{ mm}^4,$$

- vztrajnostni radij prečnega prereza elementa okoli osi y - y :

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 57.735 \text{ mm},$$

- vitkost elementa pri uklonu okoli osi y - y :

$$\lambda_y = \frac{L_{e,y}}{i_y} = 55.209,$$

- vztrajnostni moment prečnega prereza elementa okoli osi z - z :

$$I_z = \frac{b^3 \cdot h}{12} = 4.57 \cdot 10^7 \text{ mm}^4,$$

- vztrajnostni radij prečnega prereza elementa okoli osi z - z :

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 40.415 \text{ mm},$$

- vitkost elementa pri uklonu okoli osi z - z :

$$\lambda_z = \frac{L_{e,z}}{i_z} = 78.870.$$

- Lastnosti lesa:

- trdnostni razred: C18,
- karakteristična tlačna trdnost vzporedno z vlakni: $f_{c,0,k} = 18 \text{ N/mm}^2$,
- 5-odstotni kvantil vrednosti modula elastičnosti vzporedno z vlakni:

$$E_{0,05} = 6 \text{ kN/mm}^2.$$

- Delni varnostni faktorji:

- obtežni varnostni faktor pri stalnih vplivih: $\gamma_G = 1.35$,
- obtežni varnostni faktor pri spremenljivih vplivih: $\gamma_Q = 1.5$,

- varnostni faktor za lastnosti materiala, nezanesljivost modela odpornosti pri masivnem lesu (SIST EN 1995-1-1, preglednica 2.3): $\gamma_M = 1.3$.
- Obtežba:
 - karakteristična vrednost stalne obtežbe z osno tlačno silo (ki vključuje lastno težo):
 $G_k = 30 \text{ kN}$,
 - karakteristična vrednost spremenljive obtežbe (s srednje dolgim trajanjem) z osno tlačno silo:
 $Q_k = 50 \text{ kN}$,
 - projektna tlačna obtežba pri kritični obtežni kombinaciji:
 $N_d = \gamma_G \cdot G_k + \gamma_Q \cdot Q_k = 1.16 \cdot 10^5 \text{ N}$.
- Modifikacijski faktorji:
 - modifikacijski faktor za trajanje obtežbe in vlažnost, za masivni les pri obtežbi srednje dolgega trajanja ter 2. razredu uporabe (SIST EN 1995-1-1, preglednica 3.1): $k_{\text{mod,med}} = 0.8$,
- Tlačna nosilnost stebra:

Kritični obtežni primer pri MSN je kombinacija stalne in neugodne spremenljive obtežbe s srednje dolgim trajanjem.

- Projektna tlačna napetost:

$$\sigma_{c,0,d} = \frac{N_d}{A} = 4.125 \text{ N/mm}^2,$$

- projektna tlačna trdnost:

$$f_{c,0,d} = \frac{k_{\text{mod,med}} \cdot f_{c,0,k}}{\gamma_M} = 11.077 \text{ N/mm}^2.$$

- Uklonska nosilnost stebra (SIST EN 1995-1-1, podpoglavje 6.3.2):

- relativna vitkost elementa glede na uklon okoli osi y - y (SIST EN 1995-1-1, enačba 6.21):

$$\lambda_{\text{rel},y} = \frac{\lambda_y}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0,05}}} = 0.963,$$

- relativna vitkost elementa glede na uklon okoli osi z - z (SIST EN 1995-1-1, enačba 6.22):

$$\lambda_{\text{rel},z} = \frac{\lambda_z}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0,05}}} = 1.375,$$

ker sta obe vrednosti relativne vitkosti večji od 0.3, upoštevamo pogoje iz podpoglavja 6.3.2(3) iz standarda SIST EN 1995-1-1.

- Maksimalna vrednost relativne vitkosti elementa: $\lambda_{\text{rel},z} = 1.375$,
- faktor za elemente znotraj omejitev ravnosti, opredeljenih v poglavju 10 iz standarda SIST EN 1995-1-1 (SIST EN 1995-1-1, enačba 6.29): $\beta_c = 0.2$,
- faktor k_z glede na upogib okoli osi z - z (SIST EN 1995-1-1, enačba 6.28):

$$k_z = 0.5 \cdot (1 + \beta_c \cdot (\lambda_{\text{rel},z} - 0.3) + \lambda_{\text{rel},z}^2) = 1.553,$$

- redukcijski koeficient uklonske trdnosti glede na nevarnost uklona okoli osi z - z (SIST EN 1995-1-1, enačba 6.26):

$$k_{c,z} = \frac{1}{k_z + \sqrt{k_z^2 - \lambda_{\text{rel},z}^2}} = 0.440,$$

- projektna uklonska trdnost:

$$k_{c,z} \cdot f_{c,0,d} = 4.870 \text{ N/mm}^2,$$

- razmerje projektne tlačne napetosti proti projektni uklonski trdnosti:

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,z} \cdot f_{c,0,d}} = 0.847.$$

Projektna tlačna napetost je manjša od projektne uklonske trdnosti in zato pravokotni prečni prerez lesenega stebra, dimenzij $b \cdot h = 140 \text{ mm} \cdot 200 \text{ mm}$, ki spada v trdnostni razred C18 ter 2. razred uporabe, izpolnjuje zahteve pri mejnih stanjih nosilnosti (MSN) iz standarda SIST EN 1995-1-1.

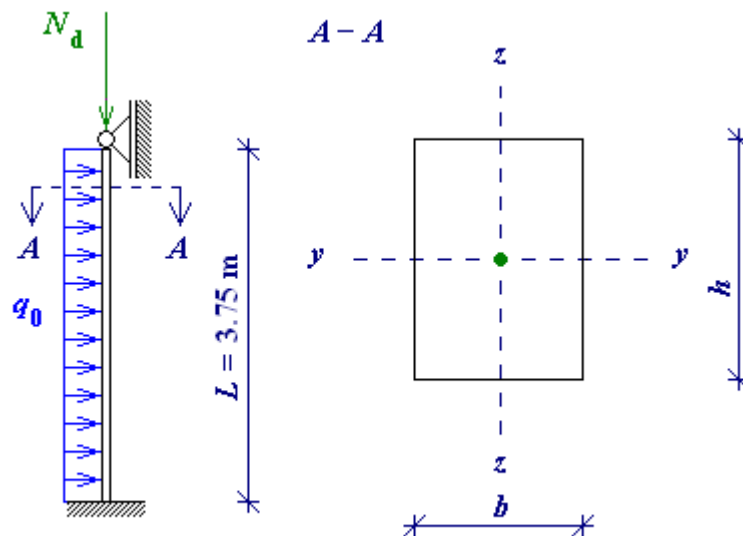
- Razmerje kritične uklonske sile iz uklonske analize po standardu SIST EN 1995-1-1 proti začetni vrednosti projektne tlačne obtežbe:

$$\alpha_{\text{cr,EC5}} = \frac{N_{\text{d(cr,EC5)}}}{N_{\text{d}}} = \frac{k_{\text{c,z}} \cdot f_{\text{c,0,d}}}{\sigma_{\text{c,0,d}}} = 1.181,$$

- kritična obtežba iz uklonske analize po standardu SIST EN 1995-1-1:

$$N_{\text{d(cr,EC5)}} = \alpha_{\text{cr,EC5}} \cdot N_{\text{d}} = 136.360 \text{ kN}.$$

- Uklonska nosilnost stebra glede na uklonsko (load case type: buckling) analizo (program išče uklonske oblike konstrukcije glede na P-delta vpliv) in statično (load case type: static) geometrijsko nelinearno analizo P-delta (kjer dobimo grafični prikaz nelinearnega naraščanja pomika v odvisnosti od naraščanja obtežbe), z računalniškim programom SAP2000:



Slika 5-14: Primer D: Leseni steber pod vplivom centrične osne tlačne obremenitve in ekvivalentne prečne obtežbe q_0 (odstopanje od ravne osi $e_0 = L / 300$, uklonska analiza in statična geometrijsko-nelinearna analiza P-delta z uporabo računalniškega programa SAP2000)

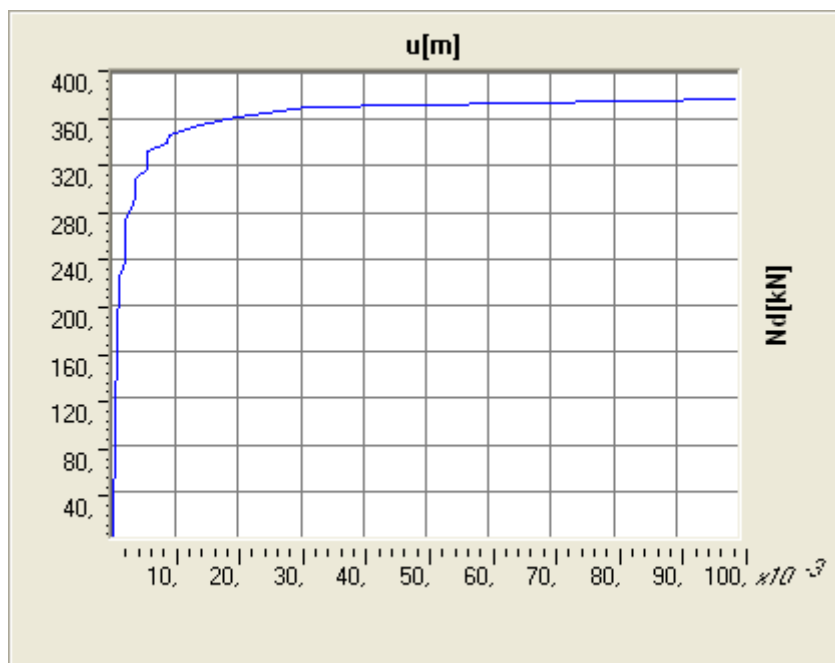
- kritična uklonska sila iz uklonske analize (load case type: buckling) z računalniškim programom SAP2000 (program išče uklonske oblike konstrukcije glede na P-delta vpliv):

$$P_{cr,LA,SAP2000} = 381.351 \text{ kN},$$

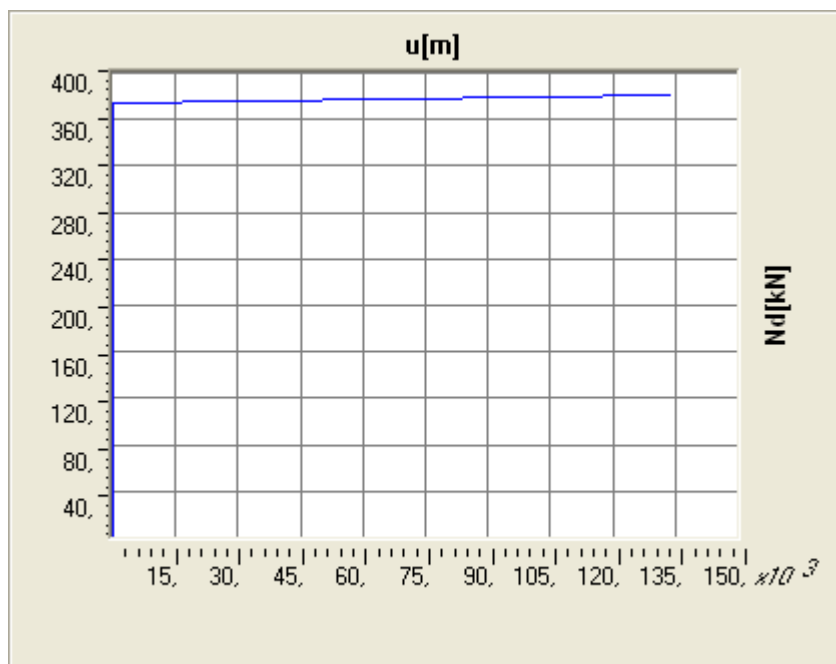
- razmerje kritične uklonske sile iz uklonske analize z računalniškim programom SAP2000 proti začetni vrednosti projektne tlačne obtežbe iz uklonske analize glede na enačbe iz standarda SIST EN 1995-1-1:

$$\alpha_{cr,LA,SAP2000} = \frac{P_{cr,LA,SAP2000}}{N_d} = 3.302,$$

- grafični prikaz naraščanja vrednosti prečnega pomika (smer y) na 0.65-krat višina stebra (od spodaj navzgor), v odvisnosti od vrednosti tlačne obtežbe v smeri osi stebra, iz statične (load case type: static) geometrijsko nelinearne analize P-delta, z računalniškim programom SAP2000, pri 50 izbranih korakih pri katerih program shranjuje rezultate (results saved: multiple states):



Slika 5-15: Vrednosti prečnega pomika osi na 0.65-krat višina stebra (od spodaj navzgor), v odvisnosti od vrednosti tlačne obtežbe v smeri osi stebra, iz statične geometrijsko nelinearne analize P-delta, z računalniškim programom SAP2000, pri 49. koraku od 50 izbranih korakov analize



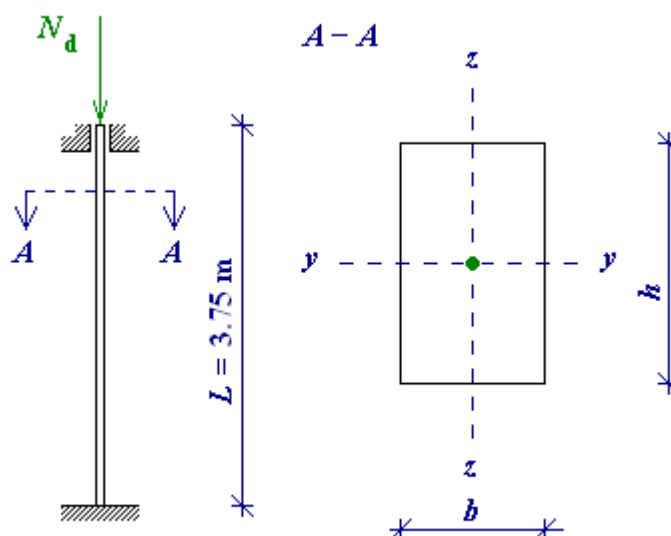
Slika 5-16: Vrednosti prečnega pomika osi na 0.65-krat višina stebra (od spodaj navzgor), v odvisnosti od vrednosti tlačne obtežbe v smeri osi stebra, iz statične geometrijsko nelinearne analize P-delta, z računalniškim programom SAP2000, pri 50. koraku od 50 izbranih korakov analize

- kritična uklonska sila iz statične (load case type: static) geometrijsko nelinearne analize P-delta z računalniškim programom SAP2000:

$$P_{cr,P-\Delta,SAP2000} = 381.351 \text{ kN},$$

5.3.2 Primer E

Leseni steber (masivni les) z naslednje slike ima pravokotni prečni prerez dimenzij $b \cdot h = 120 \text{ mm} \cdot 200 \text{ mm}$, spada v trdnostni razred C18 in 2. razred uporabe, višina stebra pa je 3.75 m. Steber je spodaj vpet, zgoraj pa je samo dovoljen pomik v smeri vzdolžne osi stebra. Obremenjen je centrično, s karakteristično stalno obtežbo 30 kN (tlačna sila, ki vključuje lastno težo) in s karakteristično spremenljivo obtežbo s srednje dolgim trajanjem 50 kN (tlačna sila).



Slika 5-17: Primer E: Leseni steber pod vplivom centrične osne tlačne obremenitve

- Geometrijske karakteristike:

- dolžina stebra: $L = 3.75\text{ m}$,

- uklonska dolžina glede na uklon okoli osi y - y :

$$L_{e,y} = 0.7 \cdot L = 2.625 \text{ m},$$

- uklonska dolžina glede na uklon okoli osi z - z :

$$L_{e,z} = 0.7 \cdot L = 2.625 \text{ m},$$

- širina prečnega prereza elementa: $b = 120 \text{ mm}$,

- višina prečnega prereza elementa: $h = 200 \text{ mm}$,

- površina prečnega prereza elementa:

$$A = b \cdot h = 2.4 \cdot 10^4 \text{ mm}^2,$$

- vztrajnostni moment prečnega prereza elementa okoli osi y - y :

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} = 8.0 \cdot 10^7 \text{ mm}^4,$$

- vztrajnostni radij prečnega prereza elementa okoli osi y - y :

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 57.735 \text{ mm},$$

- vitkost elementa pri uklonu okoli osi y - y :

$$\lambda_y = \frac{L_{e,y}}{i_y} = 45.466,$$

- vztrajnostni moment prečnega prereza elementa okoli osi z - z :

$$I_z = \frac{b^3 \cdot h}{12} = 2.88 \cdot 10^7 \text{ mm}^4,$$

- vztrajnostni radij prečnega prereza elementa okoli osi z - z :

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 34.641 \text{ mm},$$

- vitkost elementa pri uklonu okoli osi z - z :

$$\lambda_z = \frac{L_{e,z}}{i_z} = 75.777.$$

- Lastnosti lesa:

- trdnostni razred: C18,
- karakteristična tlačna trdnost vzporedno z vlakni: $f_{c,0,k} = 18 \text{ N/mm}^2$,
- 5-odstotni kvantil vrednosti modula elastičnosti vzporedno z vlakni:

$$E_{0,05} = 6 \text{ kN/mm}^2.$$

- Delni varnostni faktorji:

- obtežni varnostni faktor pri stalnih vplivih: $\gamma_G = 1.35$,
- obtežni varnostni faktor pri spremenljivih vplivih: $\gamma_Q = 1.5$,
- varnostni faktor za lastnosti materiala, nezanesljivost modela odpornosti pri masivnem lesu (SIST EN 1995-1-1, preglednica 2.3): $\gamma_M = 1.3$.

- Obtežba:
 - karakteristična vrednost stalne obtežbe z osno tlačno silo (ki vključuje lastno težo):

$$G_k = 30 \text{ kN},$$
 - karakteristična vrednost spremenljive obtežbe (s srednje dolgim trajanjem) z osno tlačno silo:

$$Q_k = 50 \text{ kN},$$
 - projektna tlačna obtežba pri kritični obtežni kombinaciji:

$$N_d = \gamma_G \cdot G_k + \gamma_Q \cdot Q_k = 1.16 \cdot 10^5 \text{ N}.$$

- Modifikacijski faktorji:
 - modifikacijski faktor za trajanje obtežbe in vlažnost, za masivni les obtežbi srednje dolgega trajanja ter 2. razredu uporabe (SIST EN 1995-1-1, preglednica 3.1): $k_{\text{mod,med}} = 0.8$,

- Tlačna nosilnost stebra:

Kritični obtežni primer pri MSN je kombinacija stalne in neugodne spremenljive obtežbe s srednje dolgim trajanjem.

 - Projektna tlačna napetost:

$$\sigma_{c,0,d} = \frac{N_d}{A} = 4.813 \text{ N/mm}^2,$$
 - projektna tlačna trdnost:

$$f_{c,0,d} = \frac{k_{\text{mod,med}} \cdot f_{c,0,k}}{\gamma_M} = 11.077 \text{ N/mm}^2.$$

- Uklonska nosilnost stebra (SIST EN 1995-1-1, podpoglavje 6.3.2):
 - relativna vitkost elementa glede na uklon okoli osi y - y (SIST EN 1995-1-1, enačba 6.21):

$$\lambda_{\text{rel},y} = \frac{\lambda_y}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0,05}}} = 0.793,$$

- relativna vitkost elementa glede na uklon okoli osi z - z (SIST EN 1995-1-1, enačba 6.22):

$$\lambda_{\text{rel},z} = \frac{\lambda_z}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0,05}}} = 1.321,$$

ker sta obe vrednosti relativne vitkosti večji od 0.3, upoštevamo pogoje iz podpoglavja 6.3.2(3) iz standarda SIST EN 1995-1-1.

- Maksimalna vrednost relativne vitkosti elementa: $\lambda_{\text{rel},z} = 1.321$,
- faktor za elemente znotraj omejitev ravnosti, opredeljenih v poglavju 10 iz standarda SIST EN 1995-1-1 (SIST EN 1995-1-1, enačba 6.29): $\beta_c = 0.2$,
- faktor k_z glede na upogib okoli osi z - z (SIST EN 1995-1-1, enačba 6.28):

$$k_z = 0.5 \cdot (1 + \beta_c \cdot (\lambda_{\text{rel},z} - 0.3) + \lambda_{\text{rel},z}^2) = 1.475,$$

- redukcijski koeficient uklonske trdnosti glede na nevarnost uklona okoli osi z - z (SIST EN 1995-1-1, enačba 6.26):

$$k_{c,z} = \frac{1}{k_z + \sqrt{k_z^2 - \lambda_{\text{rel},z}^2}} = 0.469,$$

- projektna uklonska trdnost:

$$k_{c,z} \cdot f_{c,0,d} = 5.200 \text{ N/mm}^2,$$

- razmerje projektne tlačne napetosti proti projektni uklonski trdnosti:

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,z} \cdot f_{c,0,d}} = 0.926.$$

Projektna tlačna napetost je manjša od projektne uklonske trdnosti in zato pravokotni prečni prerez lesenega stebra, dimenzij $b \cdot h = 120 \text{ mm} \cdot 200 \text{ mm}$, ki spada v trdnostni razred C18 ter 2. razred uporabe, izpolnjuje zahteve pri mejnih stanjih nosilnosti (MSN) iz standarda SIST EN 1995-1-1.

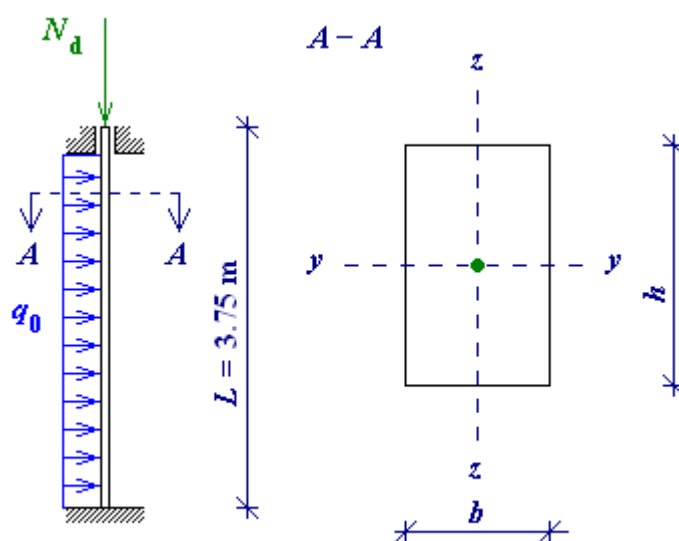
- Razmerje kritične uklonske sile iz uklonske analize po standardu SIST EN 1995-1-1 proti začetni vrednosti projektne tlačne obtežbe:

$$\alpha_{cr,EC5} = \frac{N_{d(cr,EC5)}}{N_d} = \frac{k_{c,z} \cdot f_{c,0,d}}{\sigma_{c,0,d}} = 1.080,$$

- kritična obtežba iz uklonske analize po standardu SIST EN 1995-1-1:

$$N_{d(cr,EC5)} = \alpha_{cr,EC5} \cdot N_d = 124.791 \text{ kN.}$$

- Uklonska nosilnost stebra glede na uklonsko (load case type: buckling) analizo (program išče uklonske oblike konstrukcije glede na P-delta vpliv) in statično (load case type: static) geometrijsko nelinearno analizo P-delta (kjer dobimo grafični prikaz nelinearnega naraščanja pomika v odvisnosti od naraščanja obtežbe), z računalniškim programom SAP2000:



Slika 5-18: Primer E: Leseni steber pod vplivom centrične osne tlačne obremenitve in ekvivalentne prečne obtežbe q_0 (odstopanje od ravne osi $e_0 = L / 300$, uklonska analiza in statična geometrijsko-nelinearna analiza P-delta z uporabo računalniškega programa SAP2000)

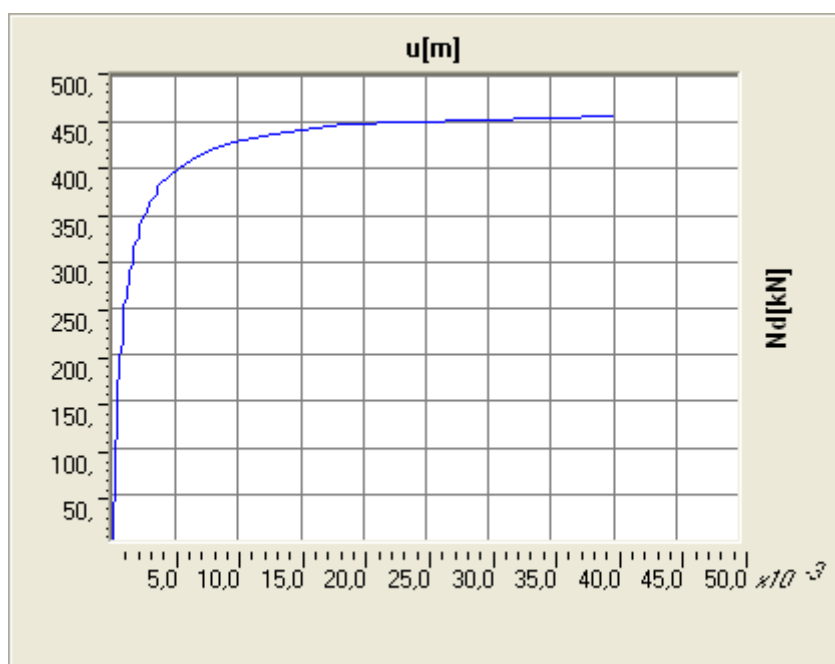
- kritična uklonska sila uklonske analize (load case type: buckling) z računalniškim programom SAP2000 (program išče uklonske oblike konstrukcije glede na P-delta vpliv):

$$P_{cr,LA,SAP2000} = 466.119 \text{ kN},$$

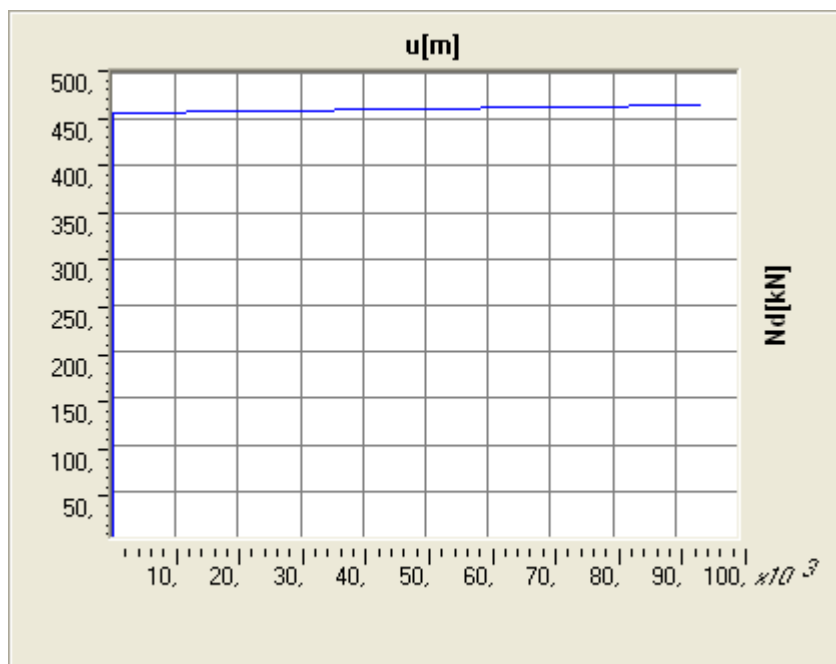
- razmerje kritične uklonske sile iz uklonske analize z računalniškim programom SAP2000 proti začetni vrednosti projektne tlačne obtežbe iz uklonske analize glede na enačbe iz standarda SIST EN 1995-1-1:

$$\alpha_{cr,LA,SAP2000} = \frac{P_{cr,LA,SAP2000}}{N_d} = 4.036,$$

- grafični prikaz naraščanja vrednosti prečnega pomika (smer y) na sredini glede na vzdolžno os stebra, v odvisnosti od vrednosti tlačne obtežbe v smeri osi stebra, iz statične (load case type: static) geometrijsko nelinearne analize P-delta, z računalniškim programom SAP2000, pri 50 izbranih korakih pri katerih program shranjuje rezultate (results saved: multiple states):



Slika 5-19: Vrednosti prečnega pomika osi na sredini višine stebra, v odvisnosti od vrednosti tlačne obtežbe v smeri osi stebra, iz statične geometrijsko nelinearne analize P-delta, z računalniškim programom SAP2000, pri 49. koraku od 50 izbranih korakov analize



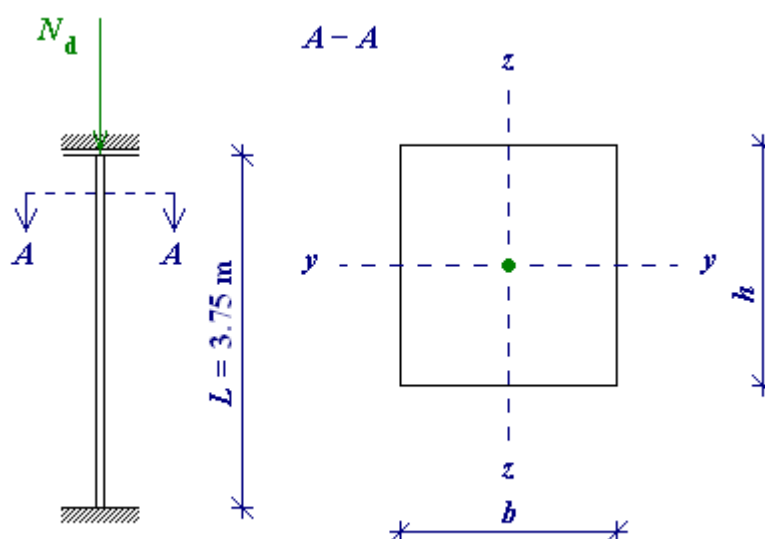
Slika 5-20: Vrednosti prečnega pomika osi na sredini višine stebra, v odvisnosti od vrednosti tlačne obtežbe v smeri osi stebra, iz statične geometrijsko nelinearne analize P-delta, z računalniškim programom SAP2000, pri 50. koraku od 50 izbranih korakov analize

- kritična uklonska sila iz statične (load case type: static) geometrijsko nelinearne analize P-delta z računalniškim programom SAP2000:

$$P_{cr,P-\Delta,SAP2000} = 466.119 \text{ kN},$$

5.3.3 Primer F

Leseni steber (masivni les) z naslednje slike ima pravokotni prečni prerez dimenzij $b \cdot h = 180 \text{ mm} \cdot 200 \text{ mm}$, spada v trdnostni razred C24 in 2. razred uporabe, višina stebra pa je 3.75 m. Steber je spodaj vpet, zgoraj pa je samo dovoljen pomik v prečni smeri glede na vzdolžno os stebra. Obremenjen je centrično, s karakteristično stalno obtežbo 30 kN (tlačna sila, ki vključuje lastno težo) in s karakteristično spremenljivo obtežbo s srednje dolgim trajanjem 50 kN (tlačna sila).



Slika 5-21: Primer F: Leseni steber pod vplivom centrične osne tlačne obremenitve

- Geometrijske karakteristike:

- dolžina stebra: $L = 3.75 \text{ m}$,

- uklonska dolžina glede na uklon okoli osi y - y :

$$L_{e,y} = 1.5 \cdot L = 5.625 \text{ m},$$

- uklonska dolžina glede na uklon okoli osi z - z :

$$L_{e,z} = 1.5 \cdot L = 5.625 \text{ m},$$

- širina prečnega prereza elementa: $b = 180 \text{ mm}$,

- višina prečnega prereza elementa: $h = 200 \text{ mm}$,

- površina prečnega prereza elementa:

$$A = b \cdot h = 3.6 \cdot 10^4 \text{ mm}^2,$$

- vztrajnostni moment prečnega prereza elementa okoli osi y - y :

$$I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} = 1.2 \cdot 10^8 \text{ mm}^4,$$

- vztrajnostni radij prečnega prereza elementa okoli osi y - y :

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = 57.735 \text{ mm},$$

- vitkost elementa pri uklonu okoli osi y - y :

$$\lambda_y = \frac{L_{e,y}}{i_y} = 97.428,$$

- vztrajnostni moment prečnega prereza elementa okoli osi z - z :

$$I_z = \frac{b^3 \cdot h}{12} = 9.72 \cdot 10^7 \text{ mm}^4,$$

- vztrajnostni radij prečnega prereza elementa okoli osi z - z :

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} = 51.962 \text{ mm},$$

- vitkost elementa pri uklonu okoli osi z - z :

$$\lambda_z = \frac{L_{e,z}}{i_z} = 108.253.$$

- Lastnosti lesa:

- trdnostni razred: C24,
- karakteristična tlačna trdnost vzporedno z vlakni: $f_{c,0,k} = 21 \text{ N/mm}^2$,
- 5-odstotni kvantil vrednosti modula elastičnosti vzporedno z vlakni:

$$E_{0,05} = 7.4 \text{ kN/mm}^2.$$

- Delni varnostni faktorji:

- obtežni varnostni faktor pri stalnih vplivih: $\gamma_G = 1.35$,
- obtežni varnostni faktor pri spremenljivih vplivih: $\gamma_Q = 1.5$,
- varnostni faktor za lastnosti materiala, nezanesljivost modela odpornosti pri masivnem lesu (SIST EN 1995-1-1, preglednica 2.3): $\gamma_M = 1.3$.

- Obtežba:
 - karakteristična vrednost stalne obtežbe z osno tlačno silo (ki vključuje lastno težo):
 $G_k = 30 \text{ kN}$,
 - karakteristična vrednost spremenljive obtežbe (s srednje dolgim trajanjem) z osno tlačno silo:
 $Q_k = 50 \text{ kN}$,
 - projektna tlačna obtežba pri kritični obtežni kombinaciji:
 $N_d = \gamma_G \cdot G_k + \gamma_Q \cdot Q_k = 1.16 \cdot 10^5 \text{ N}$.

- Modifikacijski faktorji:
 - modifikacijski faktor za trajanje obtežbe in vlažnost, za masivni les pri obtežbi srednje dolgega trajanja ter 2. razredu uporabe (SIST EN 1995-1-1, preglednica 3.1): $k_{\text{mod,med}} = 0.8$,

- Tlačna nosilnost stebra:

Kritični obtežni primer pri MSN je kombinacija stalne in neugodne spremenljive obtežbe s srednje dolgim trajanjem.

 - Projektna tlačna napetost:
 $\sigma_{c,0,d} = \frac{N_d}{A} = 3.208 \text{ N/mm}^2$,
 - projektna tlačna trdnost:
 $f_{c,0,d} = \frac{k_{\text{mod,med}} \cdot f_{c,0,k}}{\gamma_M} = 12.923 \text{ N/mm}^2$.

- Uklonska nosilnost stebra (SIST EN 1995-1-1, podpoglavje 6.3.2):
 - relativna vitkost elementa glede na uklon okoli osi y - y (SIST EN 1995-1-1, enačba 6.21):

$$\lambda_{\text{rel},y} = \frac{\lambda_y}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0,05}}} = 1.652,$$

- relativna vitkost elementa glede na uklon okoli osi z - z (SIST EN 1995-1-1, enačba 6.22):

$$\lambda_{\text{rel},z} = \frac{\lambda_z}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0,05}}} = 1.836,$$

ker sta obe vrednosti relativne vitkosti večji od 0.3, upoštevamo pogoje iz podpoglavja 6.3.2(3) iz standarda SIST EN 1995-1-1.

- Maksimalna vrednost relativne vitkosti elementa: $\lambda_{\text{rel},z} = 1.836$,
- faktor za elemente znotraj omejitev ravnosti, opredeljenih v poglavju 10 iz standarda SIST EN 1995-1-1 (SIST EN 1995-1-1, enačba 6.29): $\beta_c = 0.2$,
- faktor k_z glede na upogib okoli osi z - z (SIST EN 1995-1-1, enačba 6.28):

$$k_z = 0.5 \cdot (1 + \beta_c \cdot (\lambda_{\text{rel},z} - 0.3) + \lambda_{\text{rel},z}^2) = 2.338,$$

- redukcijski koeficient uklonske trdnosti glede na nevarnost uklona okoli osi z - z (SIST EN 1995-1-1, enačba 6.26):

$$k_{c,z} = \frac{1}{k_z + \sqrt{k_z^2 - \lambda_{\text{rel},z}^2}} = 0.264,$$

- projektna uklonska trdnost:

$$k_{c,z} \cdot f_{c,0,d} = 3.413 \text{ N/mm}^2,$$

- razmerje projektne tlačne napetosti proti projektni uklonski trdnosti:

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,z} \cdot f_{c,0,d}} = 0.940.$$

Projektna tlačna napetost je manjša od projektne uklonske trdnosti in zato pravokotni prečni prerez lesenega stebra, dimenzij $b \cdot h = 180 \text{ mm} \cdot 200 \text{ mm}$, ki spada v trdnostni razred C24 ter 2. razred uporabe, izpolnjuje zahteve pri mejnih stanjih nosilnosti (MSN) iz standarda SIST EN 1995-1-1.

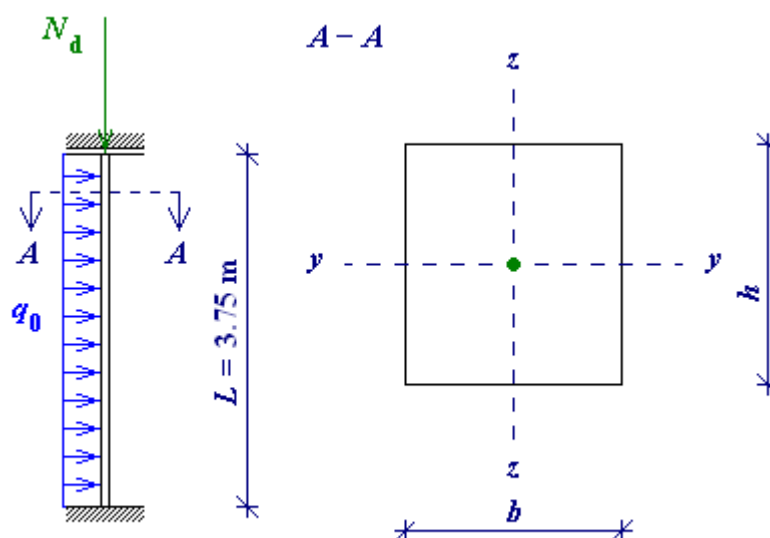
- Razmerje kritične uklonske sile iz uklonske analize po standardu SIST EN 1995-1-1 proti začetni vrednosti projektne tlačne obtežbe:

$$\alpha_{cr,EC5} = \frac{N_{d(cr,EC5)}}{N_d} = \frac{k_{c,z} \cdot f_{c,0,d}}{\sigma_{c,0,d}} = 1.064,$$

- kritična obtežba iz uklonske analize po standardu SIST EN 1995-1-1:

$$N_{d(cr,EC5)} = \alpha_{cr,EC5} \cdot N_d = 122.854 \text{ kN}.$$

- Uklonska nosilnost stebra glede na uklonsko (load case type: buckling) analizo (program išče uklonske oblike konstrukcije glede na P-delta vpliv) in statično (load case type: static) geometrijsko nelinearno analizo P-delta (kjer dobimo grafični prikaz nelinearnega naraščanja pomika v odvisnosti od naraščanja obtežbe), z računalniškim programom SAP2000:



Slika 5-22: Primer F: Leseni steber pod vplivom centrične osne tlačne obremenitve in ekvivalentne prečne obtežbe q_0 (odstopanje od ravne osi $e_0 = L / 300$, uklonska analiza in statična geometrijsko-nelinearna analiza P-delta z uporabo računalniškega programa SAP2000)

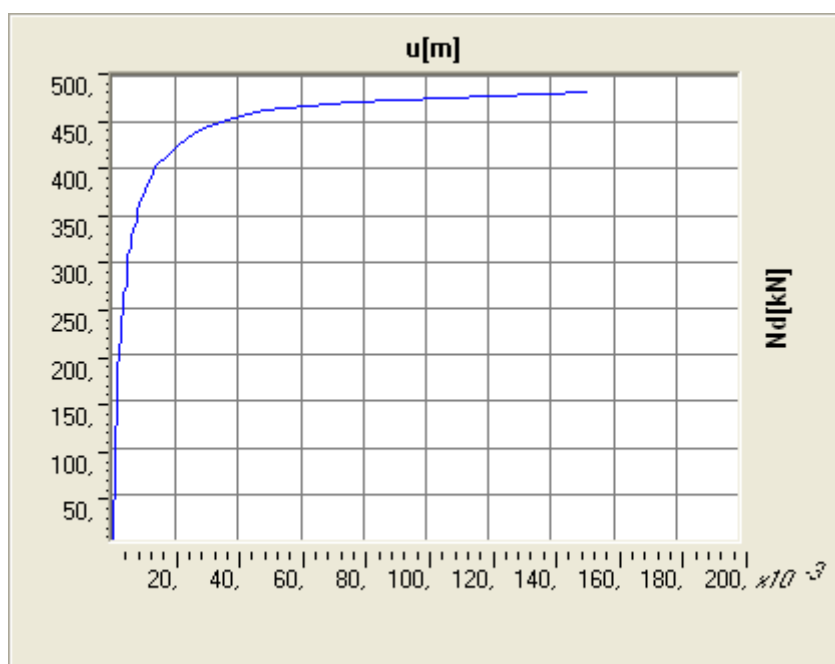
- kritična uklonska sila iz uklonske analize (load case type: buckling) z računalniškim programom SAP2000 (program išče uklonske oblike konstrukcije glede na P-delta vpliv):

$$P_{cr,LA,SAP2000} = 492.249 \text{ kN},$$

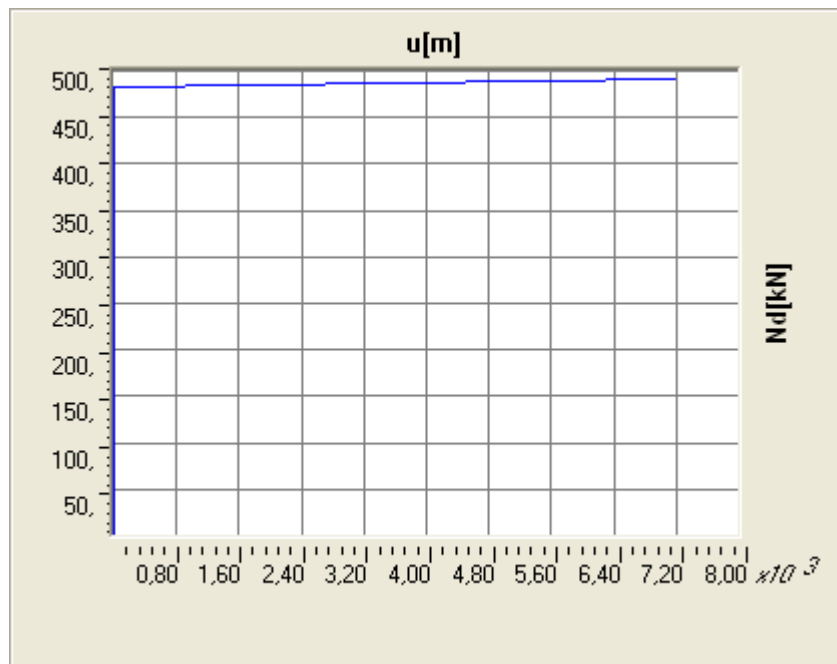
- razmerje kritične uklonske sile iz uklonske analize z računalniškim programom SAP2000 proti začetni vrednosti projektne tlačne obtežbe iz uklonske analize glede na enačbe iz standarda SIST EN 1995-1-1:

$$\gamma_{cr,LA,SAP2000} = \frac{P_{cr,LA,SAP2000}}{N_d} = 4.262,$$

- grafični prikaz naraščanja vrednosti prečnega pomika (smer y) na zgornjem koncu stebra, v odvisnosti od vrednosti tlačne obtežbe v smeri osi stebra, iz statične (load case type: static) geometrijsko nelinearne analize P-delta, z računalniškim programom SAP2000, pri 50 izbranih korakih pri katerih program shranjuje rezultate (results saved: multiple states):



Slika 5-23: Vrednosti prečnega pomika osi na zgornjem koncu stebra, v odvisnosti od vrednosti tlačne obtežbe v smeri osi stebra, iz statične geometrijsko nelinearne analize P-delta, z računalniškim programom SAP2000, pri 49. koraku od 50 izbranih korakov analize



Slika 5-24: Vrednosti prečnega pomika osi na zgornjem koncu stebra, v odvisnosti od vrednosti tlačne obtežbe v smeri osi stebra, iz statične geometrijsko nelinearne analize P-delta, z računalniškim programom SAP2000, pri 50. koraku od 50 izbranih korakov analize

- kritična uklonska sila iz statične (load case type: static) geometrijsko nelinearne analize P-delta z računalniškim programom SAP2000:

$$P_{cr,P-\Delta,SAP2000} = 210.485 \text{ kN},$$

6 ZAKLJUČKI

Iz osnovne upogibne teorije dobimo osnovne diferencialne enačbe za upogib stebra oziroma nosilca pod vplivom kombinirane osne tlačne in prečne obtežbe. Pri teoriji elastične stabilnosti pa pridemo na osnovi teh enačb do enačbe upogibnice za steber oziroma nosilec pod vplivom kombinirane osne tlačne in prečne obtežbe ali momentne obtežbe, pri različnih pogojih podpiranja. Ko gre osna obtežba proti mejni oziroma kritični vrednosti, gre upogibek že pri zelo majhni vrednosti prečne obtežbe proti neskončni vrednosti.

Izraz za upogibek je sestavljen iz dveh izrazov, prvi predstavlja upogibek zaradi prečne obtežbe, drugi izraz, ki se imenuje tudi koeficient amplifikacije pa predstavlja vpliv zaradi osne tlačne obtežbe. S pomočjo poenostavljenega izraza za koeficient amplifikacije lahko določimo približno vrednost upogibka in približno upoštevamo teorijo drugega reda.

Pri linearni oziroma elastični stabilnostni analizi lahko kritično obtežbo izpeljemo na osnovi osnovnih diferencialnih enačb za upogib, ob upoštevanju začetno idealno ravnega stebra oziroma nosilca, ki je obremenjen s centrično tlačno obtežbo, pri različnih pogojih podpiranja. Te enačbe za določitev Euler-jeve kritične uklonske sile veljajo samo v primeru vitkega stebra oziroma nosilca, pri maksimalnih tlačnih napetostih znotraj meje elastičnosti materiala. Iz teh enačb pa lahko izračunamo tudi Euler-jevo kritično uklonsko napetost, ki je odvisna samo od modula elastičnosti in vitkosti.

Enačbo upogibnice lahko izpeljemo tudi ob upoštevanju začetno ukrivljenega stebra oziroma nosilca in v primeru obremenitve z ekscentrično osno tlačno obtežbo. Začetna ukrivljenost in ekscentričnost vplivata na vrednost mejnih napetosti v prečnem prerezu.

Stabilnostna analiza pri dimenzioniranju lesenih elementov pod vplivom osne tlačne obtežbe oziroma kombinirane osne tlačne in upogibne obtežbe, glede na Evrokod 5 oziroma standard SIST EN 1995-1-1 upošteva več faktorjev. Med te faktorje spadajo: trdnost/togost (tlačna trdnost, modul elastičnosti), geometrija elementa (dimenzije prečnega prereza, dolžina elementa), pogoji podpiranja (število in vrsta podpor), geometrijske nepopolnosti (odstopanje

od nominalnih dimenzij, začetna ukrivljenost, nagnjenost oziroma naklon elementa), odstopanje pri lastnostih materiala in nepopolnosti (gostota, vpliv grč, vsebnost vlage).

V Evrokodu 5 pomeni kvadratni koren razmerja karakteristične tlačne trdnosti konstrukcijskega lesa v smeri vlaken proti uklonski trdnosti elementa, relativno vitkost pri uklonu tlačnega elementa. Ko relativna vitkost preseže vrednost 0.3, moramo upoštevati uklon elementa. Navodila za projektiranje elementov pod vplivom osne tlačne obremenitve v Evrokodu 5 so izdelana na osnovi izračunov iz plastične iterativne analize po teoriji drugega reda, ki upošteva obnašanje lesa nad mejo elastičnosti in posledične spremembe togosti elementa.

Ko sta vrednosti relativnih vitkosti pri uklonu okoli obeh osi pravokotnega elementa manjši ali enaki 0.3, uklona ne upoštevamo, do porušitve pa pride, zaradi izčrpanja osnovne tlačne nosilnosti elementa. V tem primeru ni redukcije trdnosti zaradi uklona in glede na Evrokod 5 lahko pri določevanju trdnosti izkoristimo prednosti plastičnega obnašanja lesenih elementov pod vplivom tlačnih napetosti.

Če je vrednosti relativne vitkosti pri uklonu okoli vsaj ene izmed osi večja od 0.3, je potrebno pri dimenzioniranju upoštevati uklon elementa.

Kvadratni koren razmerja karakteristične vrednosti upogibne trdnosti proti kritični upogibni napetosti, v Evrokodu 5 pomeni relativno vitkost pri upogibu. Ko je relativna vitkost elementa glede na upogib okoli močne osi manjša ali enaka 0.75, računsko ne pride do bočne torzijske nestabilnosti oziroma bočne zvrnitve, pri večji vrednosti pa je potrebno v kontrole vključiti tudi bočno zvrnitev.

V primeru, ko vrednost relativne vitkosti pri upogibu preseže 0.75, je treba pri določanju trdnosti glede na Evrokod 5, upoštevati bočno zvrnitev zaradi vpliva upogiba okoli glavne oziroma močne osi. Ta primer se nanaša na elemente pod vplivom kombinirane obremenitve z osno tlačno silo in upogibnim momentom okoli samo glavne osi, kjer se bočna zvrnitev lahko pojavi. V primeru elementa pod vplivom kombinirane osne tlačne in upogibne obremenitve,

kjer lahko pride do bočne zvrnitve, upoštevanje plastičnega obnašanja pri vplivu osne tlačne obtežbe ni dovoljeno, dovoljeno pa je pri vplivu obtežbe z upogibnim momentom.

Računalniški program SAP2000 pri linearni stabilnostni analizi oziroma uklonski analizi (load case type: buckling) išče oblike nestabilnosti oziroma uklonske oblike konstrukcije glede na P-delta vpliv pri določenem nizu obtežb, kjer uklonska analiza vključuje reševanje posplošenega problema lastnih vrednosti.

Računalniški program SAP2000 lahko upošteva geometrijsko nelinearnost v obliki P-delta vpliva, kjer je pri deformacijah v elementih predpostavljeno, da imajo majhne vrednosti. Geometrijsko nelinearnost pri nelinearni statični analizi (load case type: static) lahko program upošteva na osnovi analize korak za korakom (step-by-step). P-delta vpliv se nanaša na geometrijsko nelinearni vpliv pri velikih nateznih ali tlačnih normalnih napetostih zaradi upogiba in striga. Pri tlačni napetosti je konstrukcija bolj podajna, pri natezni napetosti pa je bolj toga glede na prečno deformacijo.

V primeru dovolj visoke vrednosti tlačne sile, togost pada proti nič, zato vrednost pomika narašča proti neskončnosti. V tem primeru pride do uklona konstrukcije, teoretična vrednost sile pri kateri pride do uklona konstrukcije, pa je Euler-jeva kritična uklonska obtežba.

Na osnovi opazovanja nelinearnega naraščanja vrednosti pomikov v odvisnosti od naraščanja obtežbe proti kritični uklonski vrednosti, lahko opazimo, da pride že pri vrednosti sile, manjši od kritične vrednosti, do velikih nesprejemljivih vrednosti pomikov.

Rezultati pri izračunu mejnih napetosti glede na izraze iz teorije elastične stabilnosti, pri ekscentrično obremenjenem elementu ali začetno ukrivljenem elementu, so bližje rezultatom pri dimenzioniranju tlačno oziroma tlačno in upogibno obremenjenega elementa glede na standard SIST EN 1995-1-1, kot rezultati pri uporabi izraza za Euler-jevo kritično uklonsko napetost tlačno obremenjenega stebra oziroma nosilca.

VIRI

CSI Analysis Reference Manual For SAP2000, ETABS, and SAFE. 2008. Berkeley, Computers and Structures: str. 297-298, 343-349.

Porteous, J., Kermani, A. 2007. Structural Timber Design to Eurocode 5: Illustrated Edition. Chichester, John Wiley and Sons: str. 104-112, 150-156, 163-168, 177-179, 181-185.

SIST EN 1995-1-1:2005. Evrokod 5: Projektiranje lesenih konstrukcij – 1-1. del: Splošna pravila in pravila za stavbe.

Thelandersson, S. (ur.), Larsen, H. J. (ur.). 2003. Timber Engineering. Chichester, John Wiley and Sons: str. 202-205, 214-217.

Timoshenko, S. P., Gere, J. M. 1961. Theory of Elastic Stability: International Student Edition, Second Edition. New York, McGraw-Hill Book Company: str. 1-7, 12-15, 31-59, 163-184.