

Univerza  
v Ljubljani  
Fakulteta  
*za gradbeništvo  
in geodezijo*



Jamova cesta 2  
1000 Ljubljana, Slovenija  
<http://www3.fgg.uni-lj.si/>

**DRUGG** – Digitalni repozitorij UL FGG  
<http://drugg.fgg.uni-lj.si/>

V zbirki je izvirna različica izdajatelja.

Prosimo, da se pri navajanju sklicujete na bibliografske podatke, kot je navedeno:

University  
of Ljubljana  
Faculty of  
*Civil and Geodetic  
Engineering*



Jamova cesta 2  
SI – 1000 Ljubljana, Slovenia  
<http://www3.fgg.uni-lj.si/en/>

**DRUGG** – The Digital Repository  
<http://drugg.fgg.uni-lj.si/>

This is a publisher's version PDF file.

When citing, please refer to the publisher's bibliographic information as follows:

Sterle, O., Stopar, B., Pavlovčič Prešeren, P. 2014. Metoda PPP pri statični izmeri GNSS = PPP method for static GNSS survey. *Geodetski vestnik* 58, 3: 446–481

DOI: <http://dx.doi.org/10.15292/geodetski-vestnik.2014.03.466-481>  
<http://drugg.fgg.uni-lj.si/4967/>

Datum arhiviranja / Archiving Date: 9-10-2014

# METODA PPP PRI STATIČNI IZMERI GNSS

# PPP METHOD FOR STATIC GNSS SURVEY

*Oskar Sterle, Bojan Stopar, Polona Pavlovčič Prešeren*

UDK: 528.22

Klasifikacija prispevka po COBISS.SI: 1.01

Prispelo: 26.3.2014

Sprejeto: 6.8.2014

DOI: 10.15292/geodetski-vestnik.2014.03.466-481

SCIENTIFIC ARTICLE

Received: 26.3.2014

Accepted: 6.8.2014

---

## IZVLEČEK

*V prispevku je obravnavana metoda Precise Point Positioning (PPP), metoda obdelave opazovanj GPS enega samega sprejemnika, ki zagotavlja najvišjo kakovost določitve koordinat. Osnovni pogoji za pridobitev kakovostnih rezultatov so točen matematični model, kakovostno modeliranje vplivov na opazovanja GPS in kakovostni produkti službe IGS. Na podlagi enomesečnih opazovanj GPS na stalno delujoči postaji GRAZ v Gradcu v Avstriji bomo prikazali, da lahko z metodo PPP pridobimo položaj s centimetrovsko natančnostjo in točnostjo v globalnem koordinatnem sestavu ITRF. Ker je transformacija med ITRF in ETRS89 določena z visoko natančnostjo, lahko z metodo PPP v Sloveniji pridobimo natančen položaj tudi v državnem koordinatnem referenčnem sistemu D96/TM, saj ta temelji na ETRS89.*

---

## ABSTRACT

*This paper presents Precise Point Positioning (PPP), a method of GPS observation processing from a single receiver that provides coordinates of the highest quality. The requirements for high quality results are an exact mathematical model, high quality GPS biases modelling, and high quality IGS products. On the basis of monthly GPS observations from a permanent station GRAZ in Graz, Austria, we will demonstrate that PPP method is able to determine stations position with the accuracy and precision of a centimetre in the ITRF global coordinate frame. Because of high precision transformation between ITRF and ETRS89, the PPP method can also be used in Slovenia to determine high precision positions in the national coordinate reference system of Slovenia (D96/TM), as it is based on ETRS89.*

---

## KLJUČNE BESEDE

GPS, Precise Point Positioning (PPP), matematični model, vplivi na opazovanja GPS, ITRF, ETRS89

---

## KEY WORDS

GPS, Precise Point Positioning (PPP), mathematical model, GPS biases, ITRF, ETRS89

## 1 UVOD

Uporaba opazovanj GNSS (angl. Global Navigation Satellite Systems), predvsem GPS (angl. Global Positioning System), za geodetske namene, pri katerih je potrebna milimetrska oziroma centimetrška natančnost položaja, sega v začetek 80. let prejšnjega stoletja, ko so bile predstavljene fazne razlike za določanje položaja (Remondi, 1984). Prednost uporabe faznih razlik je v zmanjšanju ali odstranitvi sistematičnih vplivov na opazovanja GNSS, po drugi strani pa otežijo postopek obdelave (Xu, 2007). Uporaba dvojnih faznih razlik je skozi čas postala glavno orodje geodetske uporabe GNSS za statične in kinematične aplikacije, saj praktično vsi programski paketi za obdelavo opazovanj GNSS, tako komercialni (na primer Trimble Geomatics, Leica GeoOffice, Topcon Tools) kot profesionalni (na primer Bernese, Gamit), slonijo na uporabi dvojnih faznih razlik.

V sredini 90. let prejšnjega stoletja se je začela uporabljati tudi metoda PPP (angl. Precise Point Positioning), ki omogoča pridobitev položaja z najvišjo mogočo natančnostjo na podlagi opazovanj GNSS enega samega sprejemnika (Heroux in Kouba, 1995; Zumberge in sod., 1997). Uporabnost metode PPP se je povečala z razvojem koordinatnih sistemov (Altamimi in sod., 2011), modelov vplivov na opazovanja GNSS (Petit in Luzum, 2010) in produktov službe IGS (angl. International GNSS Service) (Dach in Jean, 2013). O uporabi metode PPP je na voljo številna znanstvena literatura, od znanstvenih člankov (Bisnath in Gao, 2009; Heroux in Kouba, 1995; Zumberge in sod., 1997) do doktorskih disertacij (Leandro, 2009; Witchayangkoon, 2000), izdelani sta tudi dve diplomski nalogi v slovenskem jeziku (Čadež, 2010; Sterle, 2004). Metoda PPP omogoča določitev absolutnega položaja ene serije izmere s centimetrsko točnostjo pri statični izmeri in decimetrsko točnost absolutnega položaja pri kinematični izmeri (Bisnath in Gao, 2009).

V prispevku prikazujemo glavne značilnosti metode PPP, matematični model obdelave opazovanj GPS in način modeliranja vplivov na opazovanja GPS. Z obdelavo opazovanj GPS stalno delujoče postaje GRAZ v Gradcu v Avstriji bomo prikazali koncept in praktično uporabnost metode PPP. Pokazali bomo, da je z metodo PPP mogoče določiti absolutni položaj točke v globalnem koordinatnem sestavu ITRF (angl. International Terrestrial Reference Frame), torej v istem koordinatnem sestavu, v katerem so podane precizne efemeride. Natančnost dobljenih koordinat je 3 milimetre po horizontalnih koordinatah in 7 milimetrov po višini za srednji položaj celotnega meseca opazovanj. Ker je točka GRAZ vključena tudi v omrežje stalno delujočih postaj IGS, je njen položaj v sestavu ITRF poznan, pridobljena odstopanja danih koordinat od izračunanih z metodo PPP znašajo približno en centimeter. Kakovosten položaj točke v koordinatnem sestavu ITRF nam zagotovi tudi kakovosten položaj točke v ETRS89 ter tudi v državnem koordinatnem sistemu Slovenije D96/TM, ki sloni na ETRS89. Izkaže se, da je metoda PPP kakovostno orodje za določanje položajev točk na podlagi GPS v globalnem koordinatnem sestavu ITRF, posledično tudi v ETRS89, in je primerljiva z diferencialnimi metodami določanja položajev točk na podlagi opazovanj GPS. Opazovanja GPS so bila obdelana s programsko opremo lastne izdelave.

## 2 OPAZOVANJA GNSS

Metoda PPP je postopek določitve koordinat geodetske točke na podlagi opazovanj GNSS enega samega sprejemnika, kjer za doseganje najvišje dosegljive natančnosti in točnosti pridejo v poštev opazovanja dvofrekvenčnih geodetskih sprejemnikov GNSS. Čeprav obstaja že nekaj sistemov GNSS, ki so polno

operativni (na primer GPS, GLONASS) ali vključujejo operativno delujoče satelite (na primer Galileo, Beidou), bomo v prispevku obravnavali le opazovanja sistema GPS. Dodatno bomo kljub potekajoči posodobitvi sistema GPS, pri kateri je pomembna predvsem uvedba novega (tretjega) nosilnega valovanja  $L5$  na novjših satelitih GPS, obravnavali le opazovanja ( $L_1$ ,  $L_2$ ,  $P_1$  in  $P_2$ ) na obeh osnovnih nosilnih valovanjih  $L1$  in  $L2$ .

Pri geodetskem dvofrekvenčnem sprejemniku GPS imamo tako na voljo vrednosti faznih ( $L_1$ [m] in  $L_2$ [m]) in kodnih opazovanj ( $P_1$ [m] in  $P_2$ [m]), ki jih modeliramo kot (Dach in sod., 2007; Kouba, 2009; Leick, 1995; Xu, 2007):

$$\begin{aligned} L_1 &= \rho + c\Delta t + T - I + N_1 + \xi + \varepsilon_{L_1} \\ L_2 &= \rho + c\Delta t + T - \gamma I + N_2 + \xi + \varepsilon_{L_2} \\ P_1 &= \rho + c\Delta t + T + I + D_1 + \xi + \varepsilon_{P_1} \\ P_2 &= \rho + c\Delta t + T + \gamma I + D_2 + \xi + \varepsilon_{P_2} \end{aligned} \quad (1)$$

Oznake v enačbi (1) so:

$\rho$	geometrična razdalja med položajem satelita ( $X, Y, Z$ ) v času oddaje signala in med položajem sprejemnika ( $x, y, z$ ) v času sprejema signala;
$\Delta t$	pogrešek ure sprejemnika ( $c$ je hitrost svetlobe);
$T$	vpliv nevtralnega dela atmosfere – troposfere;
$I$	vpliv disperzivnega dela atmosfere – ionosfere ( $\gamma = f_1^2 / f_2^2$ , kjer sta $f_1$ in $f_2$ frekvenci obeh nosilnih valovanj $L1$ in $L2$ );
$N_1, N_2$	fazni nedoločenosti oziroma neznana števila celih valov za obe fazni opazovanji;
$D_1, D_2$	kodna zamika (angl. Differential Code Biases – DCB) za obe kodni opazovanji;
$\xi$	drugi vplivi, kot so pogrešek položaja in ure satelita, plimovanja (plimovanje čvrste Zemlje, plimovanje oceanov), relativnost (Sagnacov vpliv, vpliv ekscentricitete orbite satelita, vpliv razlike koordinatne in geometrične razdalje), preskok faze, odboj signala, nesovpadanje faznega in geometričnega centra antene sprejemnika in anten satelitov;
$\varepsilon_{L_1}, \varepsilon_{L_2}, \varepsilon_{P_1}, \varepsilon_{P_2}$	slučajni pogreški vseh opazovanj.

Največji vpliv na opazovanja GPS je vpliv ionosfere, ki ga odstranimo s sestavo linearnih kombinacij oblike (Dach in sod., 2007):

$$\begin{aligned} L_3 &= \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} L_1 - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} L_2 = \rho + c\Delta t + T + N_3 + \xi + \varepsilon_{L_3} \\ P_3 &= \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} P_1 - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} P_2 = \rho + c\Delta t + T + D_3 + \xi + \varepsilon_{P_3} \end{aligned} \quad (2)$$

Enačbi (2) opisujeta dve novi opazovanji, ki ju uporabimo pri metodi PPP in sta praktično neodvisni od vpliva ionosfere (glej poglavje 3.3). Fazni nedoločenosti  $N_1$  in  $N_2$  se pretvorita v fazno nedoločenost  $N_3$  (ni več celo, ampak postane realno število), kodna zamika  $D_1$  in  $D_2$  se pretvorita v kodni zamik  $D_3$  in slučajna pogreška opazovanj iz enačb (2)  $\varepsilon_{L_3}$ ,  $\varepsilon_{p_3}$  se povečata za faktor približno 3 glede na slučajne pogreške osnovnih opazovanj iz enačb (1).

### 3 MODELIRANJE VPLIVOV NA OPAZOVANJA GNSS

Za zagotovitev najvišje kakovosti koordinat, določenih z metodo PPP, je treba vse vplive, ki so po velikosti večji od milimetra, odstraniti oziroma modelirati. Ti vplivi so različne velikosti in imajo različen izvor. V nadaljevanju so predstavljeni vsi pomembni vplivi na opazovanja GPS (Kouba, 2009; Leick, 1995; Xu, 2007).

#### 3.1 Pogrešek položaja satelitov, satelitovih ur in parametrov vrtenja Zemlje

Za uspešnost metode PPP je nujna uporaba preciznih efemerid, preciznih popravkov ur satelitov in parametrov vrtenja Zemlje, ki jih zagotavlja služba IGS (<http://igsb.jpl.nasa.gov/>). Produkti službe IGS so določeni s centimetrovsko natančnostjo in točnostjo, tako pogrešek položajev in ur satelitov ter vrtenja Zemlje zmanjšamo na centimetrovsko raven (Dach in Jean, 2013). Položaje satelitov lahko obravnavamo kot dane količine, ki nam določijo koordinatni sestav, v katerem bomo pridobili ocenjene koordinate točke (antene GPS). Koordinatni sestav preciznih efemerid je IGS in ga obravnavamo kot praktično enakega koordinatnemu sestavu ITRF. Uporaba s satelita oddanih efemerid (Pavlovčič Prešeren in Stopar, 2004) namesto produktov službe IGS bi omogočila določitev koordinat sprejemnika s točnostjo le približno deset metrov.

#### 3.2 Vpliv relativnosti

Na sistem GPS vplivata posebna in splošna relativnost. Vpliv obeh sta podrobno opisala Ashby (2003) in Jelenc (2006). Posebna relativnost izhaja iz velike relativne hitrosti gibanja satelita glede na Zemljo, splošna pa iz manjše težnosti na tirnici satelita glede na težnost na Zemlji. Zaradi skupnega vpliva obeh relativnosti ure na krovu satelita prehitvevajo ure na Zemlji za 38 ms/dan (posebna relativnost povzroči zaostajanje ure satelita za 7 ms/dan, splošna pa prehitavanje za 45 ms/dan). Vpliv obeh relativnosti je odstranjen tako, da je frekvenca osnovnega oscilatorja na satelitih  $f_0 = 10,22999999543$  MHz namesto nominalne frekvence sistema GPS, ki znaša  $f_0 = 10,23$  MHz. Na tek satelitove ure vpliva tudi ekscentričnost elipse tirnice, ki povzroči spremembo hitrosti gibanja satelita in posledično tek satelitove ure. To je periodični vpliv velikosti približno 7 metrov. Sledi Sagnacov efekt, ki je posledica vrtenja Zemlje, saj se Zemlja med potovanjem signala od satelita do sprejemnika zasučje za določen kot. Zasuk Zemlje povzroči spremembo geometrične razdalje med satelitom in sprejemnikom, ki znaša do nekaj 10 metrov. Zadnji je tako imenovani vpliv razlike koordinatne in geometrične razdalje (angl. path range delay), ki pomeni razliko med izmerjeno razdaljo satelit–sprejemnik v fizičnem prostoru in izračunano razdaljo iz koordinat ter znaša približno 2 centimetra.

### 3.3 Vpliv ionosfere

Vpliv ionosfere je največji vpliv na opazovanja GPS (Leick, 1995; Xu, 2007). Najučinkovitejši način za zmanjšanje vpliva ionosfere pri dvofrekvenčnih opazovanjih je sestava linearnih kombinacij  $L_3$  in  $P_3$  (enačba (2)) na podlagi faznih oziroma kodnih opazovanj. S sestavo linearnih kombinacij odstranimo večji del (približno 99,9 %) vpliva ionosfere (Petit in Luzum, 2010), neodstranjeni del pa je v splošnem zanemarljiv. Druge, a manj učinkovite možnosti za zmanjšanje vpliva ionosfere so uporaba modelov ionosfere, na primer modelov GIM (angl. Global Ionosphere Maps) (Schaer, 1999) ali Klobucharjevega modela (Klobuchar, 1996), oziroma modeliranje vpliva ionosfere iz opazovanj GPS (Sterle in sod., 2013).

### 3.4 Vpliv troposfere

Troposfera vpliva na vse opazovane količine (enačbe (1)) enako, zato je edina možnost za odstranitev njenega vpliva modeliranje. Vpliv troposfere  $T$  razdelimo na vpliv suhe komponente  $T_s$  in mokre komponente  $T_m$  (Kouba, 2009; Leick, 1995; Xu, 2007). Suho komponento  $T_s$  lahko modeliramo z ustrežno natančnostjo in točnostjo, kar pa ne velja za mokro komponento  $T_m$ . Če želimo z metodo PPP pridobiti koordinate najvišje kakovosti, je treba mokro komponento  $T_m$  modelirati z uporabo zveze (Bar-Sever in sod., 1998; Petit in Luzum, 2010):

$$T_m = M_m T_m^z + M_g (G_N \cos \alpha + G_E \sin \alpha) \quad (3)$$

V enačbi (3) so:

- $T_m^z$  zenitna troposferska refrakcija mokre komponente;
- $M_m$  projekcijska komponenta zenitne troposferske refrakcije mokre komponente;
- $G_N, G_E$  gradienta troposfere v smeri S–J ( $G_N$ ) in V–Z ( $G_E$ ), kjer je  $\alpha$  azimut satelita glede na sprejemnik v lokalnem geodetskem koordinatnem sistemu sprejemnika GPS;
- $M_g$  projekcijska komponenta gradientov troposfere.

Količine  $T_m^z$ ,  $G_N$  in  $G_E$  so dodatne neznanke v matematičnem modelu metode PPP (glej poglavje 4). V nadaljevanju bomo uporabili Saastamoinenov model troposfere z Niellovo projekcijsko komponento (Niell, 1996).

### 3.5 Vplivi plimovanj

Vplive plimovanja sta natančno opisala Petit in Luzum (2010). Največji vpliv ima periodično plimovanje čvrste Zemlje z amplitudo do približno 30 centimetrov po višini in do približno 10 centimetrov po obeh horizontalnih komponentah. Veliko manjši je vpliv plimovanja oceanov na položaje točk na kopnem, in sicer manjši od enega centimetra.

### 3.6 Vpliv preskoka faze

Preskok faze vpliva le na fazna opazovanja in je posledica lastnosti nosilnih valovanj, oddanih s satelitov GPS. Ker je nosilno valovanje desnosučno krožno polarizirano, se kakšno koli sukanje sprejemnika/satelita okoli zveznice sprejemnik-satelit odraža kot sprememba merjene faze na sprejemniku (Kouba, 2009). Neupoštevanje preskoka faze bi omogočilo le decimetrsko natančnost koordinat, določenih z metodo PPP.

### 3.7 Nesovpadanje faznega in geometričnega centra anten sprejemnika in satelitov

Fazna in kodna opazovanja GPS se nanašajo na fazne in ne na geometrične centre anten sprejemnika in satelitov. Fazni center antene sprejemnika ni stalna točka, ampak se spreminja v odvisnosti od zenitne razdalje in azimuta satelita. Fazni center antene satelita pa je odvisen le od nadirnega kota sprejemnika na satelitu. Za določitev razdalje med posameznim satelitom in sprejemnikom je treba opazovane količine, ki se nanašajo na fazna centra, reducirati na geometrijska centra antene satelita in sprejemnika. Določitev in modeliranje odstopanj faznega od geometričnega centra anten sprejemnikov in satelitov so opisali Schmid in sod. (2007). Nesovpadanje med geometričnim in faznim centrom antene sprejemnika/satelitov povzroči napako v koordinatah točke tudi približno 10 centimetrov, predvsem v po višini.

### 3.8 Večpotje

Večpotje je edini sistematični vpliv, za katerega ne moremo vzpostaviti zanesljivega modela. Za kodna opazovanja lahko doseže polovico valovne dolžine kode (do 150 metrov), pri čemer praktično dosega vrednosti nekaj metrov, za kar pa je odločilna kakovost obdelave signala v sprejemniku. Za fazna opazovanja znaša večpotje do nekaj centimetrov (Langley, 1998). Vpliv večpotja lahko zmanjšamo s primerno obliko antene GNSS (uporaba antenskih ali dušilnih obročev) in skrbno izbiro ustrezne točke na terenu. Programsko pa večpotja ne moremo ne modelirati ne odstraniti, zato se v celoti prenese na popravke opazovanj oziroma v neznanke.

## 4 MODELIRANJE OPAZOVANJ PRI METODI PPP

Matematični model je sestavljen iz funkcionalnega in stohastičnega modela (Mikhail in Ackermann, 1976), kjer funkcionalni model predstavlja funkcijske povezave med opazovanji in neznankami, stohastični model pa natančnost opazovanj.

### 4.1 Funkcionalni model PPP

Za sestavo funkcionalnega modela predpostavimo, da imamo podatke opazovanj statične izmere GPS, pridobljene na eni točki. Opazovanja so zabeležena v  $n$ -tih epohah, kjer je v  $i$ -ti epohi zabeleženih  $2 \cdot n_i$  opazovanj signala do  $n_i$  satelitov (enačba (1)). Za satelit  $k$  v epohi  $i$  imamo dve opazovanji in tako lahko zapišemo dve enačbi, kot pri enačbah (2) z upoštevanjem enačbe (3):

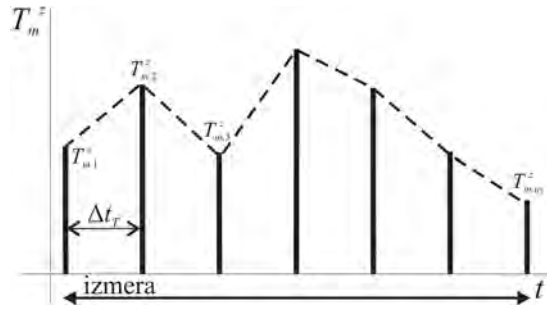
$$L_3^k = \rho_k + c\Delta t_i + T_s^k + M_m^k T_m^z + M_g^k (G_N \cos \alpha_k + G_E \sin \alpha_k) + N_3^k + \xi_k + \varepsilon_{L_3^k} \tag{4}$$

$$P_3^k = \rho_k + c\Delta t_i + T_s^k + M_m^k T_m^z + M_g^k (G_N \cos \alpha_k + G_E \sin \alpha_k) + D_3^k + \xi_k + \varepsilon_{P_3^k}$$

V enačbah (4) indeks  $k$  pomeni oznako satelita in indeks  $i$  oznako epohe. Enačbi (4) sta podlaga za sestavo funkcionalnega modela. V enačbah (4) nastopajo različne vrste neznanek, ki so predstavljene spodaj.

- Koordinate točke  $(x, y, z)$ , na kateri je postavljena antena sprejemnika GPS, nastopajo v geometrijski razdalji  $\rho_k$ . Pri statični izmeri imamo  $u_c = 3$  koordinatne neznanke. Z izravnavo ocenjujemo popravke približnih koordinat točke  $(\delta x, \delta y, \delta z)$ , zato je vektor popravkov približnih koordinat točk določen z  $\mathbf{X} = [\delta x \quad \delta y \quad \delta z]^T$ .

- Zenitna troposferska refrakcija  $T_m^z$ . Zenitno troposfersko refrakcijo modeliramo kot zvezno odsekoma linearno funkcijo – zvezno linearno lomljenko skozi čas (Dach in sod., 2007), kjer vsaka lomna točka predstavlja eno neznanko zenitne troposferske refrakcije. Slika 1 prikazuje način modeliranja zenitne troposferske refrakcije za celoten čas izmere. Število neznank zenitne troposferske refrakcije  $u_T$  je odvisno od izbranega časovnega intervala  $\Delta t_T$  med lomnimi točkami. Pri izbranem intervalu 2 h in dnevnih opazovanjih imamo  $u_T = 13$  neznank zenitne troposferske refrakcije. Neznane vrednosti zenitne troposferske refrakcije združimo v vektorju  $\mathbf{T} = [T_{m,1}^z \ T_{m,2}^z \ \dots \ T_{m,u_T}^z]^T$ .



Slika 1: Prikaz modeliranja zenitne troposferske refrakcije kot zvezne odsekoma linearne funkcije. Abscisa predstavlja čas, ordinata pa zenitno troposfersko refrakcijo. Prva neznanka zenitne troposferske refrakcije  $T_{m,1}^z$  nastopi prvi trenutek izmere, preostale neznanke na vsakih  $\Delta t_T$  in končna neznanka  $T_{m,u_T}^z$  v zadnjem trenutku izmere.

- Gradiente troposfere  $G_N$  (smer S–J) in  $G_E$  (smer V–Z) modeliramo kot zvezno funkcijo za vsak dan opazovanj in podobno kot pri modeliranju zenitne troposferske refrakcije, a le z začetnim in končnim gradientom za vsako smer (S–J in V–Z) za celotno izmero. Število neznank gradientov troposfere je  $u_G = 4$ , dva za vrednost gradienta v smeri V–Z in dva za vrednost gradienta v smeri S–J. Vse neznane vrednosti gradientov troposfere združimo v vektorju  $\mathbf{G} = [G_{E,1} \ G_{E,2} \ G_{N,1} \ G_{N,2}]^T$ . Vloga gradientov troposfere je v modeliranju azimutalne nesimetrije sloja troposfere.
- Fazne nedoločenosti ( $N_3^k$ ) za vse satelite se nanašajo le na fazna opazovanja. Za posamezen satelit je fazna nedoločenost konstantna vrednost do izgube sprejema signala. Število neznanih faznih nedoločenosti  $u_N$  je tako enako ali večje od števila vseh satelitov, ki jih je sprejemnik beležil. Zberemo jih v vektorju  $\mathbf{A} = [N_3^{1,1} \ N_3^{1,2} \ N_3^{2,1} \ \dots \ N_3^{k,i}]^T$  kjer je  $N_3^{k,i}$   $i$ -ta fazna nedoločenost opazovanj satelita  $k$ .
- Kodni zamiki za vsak satelit ( $D_3^k$ ) so relativni časovni zamiki kode, naneseni na obe nosilni valovanji. Kodni zamik je konstanten za posamezen satelit za celotno obdobje izmere, tako da je število neznank kodnih zamikov  $u_D = s$  enako številu satelitov, ki jih je sprejemnik beležil. Zberemo jih v vektorju  $\mathbf{D} = [D_3^1 \ D_3^2 \ \dots \ D_3^s]^T$ , kjer nadpisano podamo oznako satelita kodnega zamika.
- Popravek ure sprejemnika določimo za vsako epoho izvedenih opazovanj, zato je število neznanih vrednosti popravkov ure sprejemnika enako številu epoh opazovanj, torej  $u_C = n$ . Neznane vrednosti ure sprejemnika zberemo v vektorju  $\mathbf{C} = [c\Delta t_1 \ c\Delta t_2 \ c\Delta t_3 \ \dots \ c\Delta t_n]^T$ .

## 4.2 Stohastični model PPP

Stohastični model predstavlja variančno-kovariančna matrika ali matrika uteži opazovanj. Natančnost posameznega opazovanja je odvisna od vrste opazovanj (kodna, fazna) in od višinskega kota satelita.



V splošnem velja, da so fazna opazovanja natančnejša od kodnih, njihova natančnost pa se povečuje z večanjem višinskega kota  $e$  satelita. Za linearni kombinaciji opazovanj iz enačb (2) določimo vrednosti referenčnih standardnih odklonov, ki znašajo (Dach in sod., 2007):

$$\sigma_{L_3} = 0,006 \text{ m in } \sigma_{B_3} = 0,6 \text{ m} \tag{5}$$

Iz enačbe (5) je razvidno, da obravnavamo fazna opazovanja kot 100-krat bolj natančna od kodnih opazovanj. Vpliv višinskega kota satelita na utež opazovanja določimo s funkcijo  $p(e) = \cos^2 e$  (Dach in sod, 2007). Uteži za posamezno opazovano količino v enačbah (4) določimo za  $k$ -ti satelit z zvezo:

$$p_{L_3} = p(e_k) \text{ in } p_{B_3} = p(e_k) \cdot \left( \frac{\sigma_{L_3}}{\sigma_{B_3}} \right)^2 \tag{6}$$

V enačbi (6) sta predstavljeni uteži obeh vrst opazovanj, ki ju bomo uporabili v okviru metode PPP. Fazna opazovanja imajo tako za faktor  $10^4$  večjo vrednost uteži kot kodna opazovanja. Vsa opazovanja se obravnavajo kot nekorelirana, tako v isti epohi kot med posameznimi epohami (Kouba, 2009).

### 4.3 Matematični model PPP

Za opis matematičnega modela obdelave opazovanj z metodo PPP je dovolj, da sestavimo matematični model za eno samo epoho, na primer  $i$ -to epoho izmere. Izhajamo iz enačb (2), kjer definiramo:

- $\mathbf{v}_i$                  vektor popravkov vseh opazovanj v epohi  $i$ , velikosti  $2n_i \times 1$ ;
- $\mathbf{f}_i$                  vektor odstopanj enačb popravkov v epohi  $i$ , velikosti  $2n_i \times 1$ ;
- $\mathbf{B}_i^{\mathbf{X}}$                matrika koeficientov (parcialnih odvodov) enačb popravkov v epohi  $i$ , ki se nanašajo na neznane koordinate točke, zbrane v vektorju  $\mathbf{X}$ , velikosti  $2n_i \times 3$ ;
- $\mathbf{B}_i^{\mathbf{T}}$                matrika koeficientov (parcialnih odvodov) enačb popravkov v epohi  $i$ , ki se nanašajo na neznane vrednosti zenitne troposferske refrakcije, zbrane v vektorju  $\mathbf{T}$ , velikosti  $2n_i \times u_T$ ;
- $\mathbf{B}_i^{\mathbf{G}}$                matrika koeficientov (parcialnih odvodov) enačb popravkov v epohi  $i$ , ki se nanašajo na neznane vrednosti gradientov troposfere, zbranih v vektorju  $\mathbf{G}$ , velikosti  $2n_i \times u_G$ ;
- $\mathbf{B}_i^{\mathbf{A}}$                matrika koeficientov (parcialnih odvodov) enačb popravkov v epohi  $i$ , ki se nanašajo na neznane vrednosti faznih nedoločenosti, zbranih v vektorju  $\mathbf{A}$ , velikosti  $2n_i \times u_N$ ;
- $\mathbf{B}_i^{\mathbf{D}}$                matrika koeficientov (parcialnih odvodov) enačb popravkov v epohi  $i$ , ki se nanašajo na neznanke kodnih zamikov, zbranih v vektorju  $\mathbf{D}$ , velikosti  $2n_i \times u_D$ ;
- $\mathbf{1}_i$                  vektor enic, velikosti  $2n_i \times 1$ .

V matrični obliki zapišemo funkcionalni model metode PPP za epoho  $i$  v obliki:

$$\mathbf{v}_i + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_i^X & \mathbf{B}_i^T & \mathbf{B}_i^G & \mathbf{B}_i^A & \mathbf{B}_i^D & -\mathbf{1}_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{T} \\ \mathbf{G} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{D} \\ c\Delta t_i \end{bmatrix} = \mathbf{f}_i \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v}_i + \mathbf{B}_i \cdot \Delta_i = \mathbf{f}_i \quad (7)$$

Stohastični model izravnave metode PPP je predstavljen z matriko  $\mathbf{P}_p$ , ki jo sestavimo na podlagi enačb (6) kot diagonalno matriko, saj vsa opazovanja obravnavamo kot med seboj nekorelirana. Enačba (7) predstavlja zvezo med  $2 \cdot n_i$  ( $n_i$  kodnih in  $n_i$  faznih) opazovanj in neznankami v epohi  $i$ , to so 3 neznane koordinate točke, 2 neznani vrednosti zenitne troposferske refrakcije, 4 neznane vrednosti gradientov troposfere,  $n_i$  neznanih faznih nedoločenosti,  $n_i$  neznanih kodnih zamikov in 1 neznana vrednost pogreška ure sprejemnika.

### 5 POSTOPEK OBDELAVE OPAZOVANJ

Pri statični izmeri GPS imamo opravka z velikim številom opazovanj in neznank, kar pomeni, da je postopek za rešitev v enem koraku (za vse epohe skupaj) lahko časovno in procesorsko prezahteven. Postopek, ki nam ob zmanjšanju razsežnosti matrik matematičnega modela zagotovi enake rezultate, je odstranitev pogreškov ure sprejemnika iz sistema normalnih enačb za vsako epoho izmere (Brockmann, 1996) in nato uporaba zaporedne izravnave po metodi najmanjših kvadratov (Koch, 1999; Mikhail in Ackermann, 1976).

#### 5.1 Odstranitev pogreškov ure sprejemnika iz sistema normalnih enačb

Pri postopku odstranitve pogreškov ure sprejemnika iz sistema normalnih enačb izhajamo iz matričnega modela izravnave za epoho  $i$  iz enačbe (7). Definirajmo vektor  $\mathbf{x}$  kot vektor vseh neznank razen pogreška ure sprejemnika  $\mathbf{x} = [\mathbf{X} \ \mathbf{T} \ \mathbf{G} \ \mathbf{A} \ \mathbf{D}]^T$  velikosti  $(u_c + u_T + u_G + u_N + u_D) \times 1$  in matriko  $\tilde{\mathbf{B}}$  kot matriko parcialnih odvodov enačb opazovanj po vseh neznankah, razen po neznanem pogrešku ure sprejemnika v epohi  $i$   $\tilde{\mathbf{B}}_i = [\mathbf{B}_i^X \ \mathbf{B}_i^T \ \mathbf{B}_i^G \ \mathbf{B}_i^A \ \mathbf{B}_i^D]$ . Enačbo (7) in sistem normalnih enačb za epoho  $i$  lahko zapišemo v obliki:

$$\mathbf{v}_i + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_i & -\mathbf{1}_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ c\Delta t_i \end{bmatrix} = \mathbf{f}_i \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v}_i + \mathbf{B}_i \cdot \Delta_i = \mathbf{f}_i$$

$$\mathbf{B}_i^T \mathbf{P} \mathbf{B}_i \cdot \Delta_i = \mathbf{B}_i^T \mathbf{P} \mathbf{f}_i \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{N}_i \cdot \Delta_i = \mathbf{b}_i \quad (8)$$

Z razcepom vektorja neznank  $\Delta_i = [\mathbf{x}^T \ c\Delta t_i]^T$  na dva dela lahko sistem normalnih enačb, zapisanih v obliki (8), preuredimo in zapišemo kot:

$$\mathbf{N}_i \cdot \Delta_i = \mathbf{b}_i \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11,i} & \mathbf{N}_{12,i} \\ \mathbf{N}_{21,i} & \mathbf{N}_{22,i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ c\Delta t_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{1,i} \\ \mathbf{b}_{2,i} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Z odstranitvijo pogreška ure sprejemnika iz sistema normalnih enačb iz enačbe (9) dobimo reduciran

sistem normalnih enačb, ki pa še vedno ohranja vse informacije matematičnega modela (Brockmann, 1996) in je dan z:

$$\left( \mathbf{N}_{11,i} - \mathbf{N}_{12,i} \mathbf{N}_{22,i}^{-1} \mathbf{N}_{21,i} \right) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_{1,i} - \mathbf{N}_{12,i} \mathbf{N}_{22,i}^{-1} \mathbf{b}_{2,i} \tag{10}$$

Pogrešek ure sprejemnika iz sistema normalnih enačb v posamezni epohi odstranimo, da zmanjšamo število normalnih enačb, saj je število pogreškov ure sprejemnika bistveno večje kot število preostalih neznank. Končen sistem normalnih enačb za izračun neznank v vektorju  $\mathbf{x}$  je določen s superpozicijo sistemov normalnih enačb posameznih epoh (Brockmann, 1996; Mikhail in Ackermann, 1976) in ima obliko:

$$\left[ \sum_{i=1}^n \left( \mathbf{N}_{11,i} - \mathbf{N}_{12,i} \mathbf{N}_{22,i}^{-1} \mathbf{N}_{21,i} \right) \right] \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \left( \mathbf{b}_{1,i} - \mathbf{N}_{12,i} \mathbf{N}_{22,i}^{-1} \mathbf{b}_{2,i} \right) \Rightarrow \tilde{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}} \tag{11}$$

Enačba (11) predstavlja reduciran sistem normalnih enačb, ki pa vsebuje vse informacije za izračun vseh neznank (Brockmann, 1996).

### 5.2 Določitev neznank v postopku PPP

Določitev neznank pri postopku PPP poteka z uporabo enačbe (11), kjer je rešitev vektor neznank  $\mathbf{x}$ . Težava nastane, ker je matrika sistema normalnih enačb  $\tilde{\mathbf{N}}$  singularna, zato ne obstaja inverzna matrika  $\tilde{\mathbf{N}}^{-1}$  (Strang in Borre, 1997). Vzrok za singularnost matrike je v enačbah (2), iz katerih je razvidno, da pri obeh linearnih kombinacijah ( $P_3$  in  $L_3$ ) pogrešek ure sprejemnika v vsaki epohi nastopa skupaj s fazno nedoločenoostjo (primer  $L_3$ ) ali kodnim zamikom (primer  $P_3$ ). V takem primeru pogoj »opazovanosti« (angl. observability) funkcionalnega modela ni izpolnjen (Gelb, 2001), kar povzroči singularnost matrike  $\tilde{\mathbf{N}}$ .

Ugotoviti moramo, kolikšen je defekt  $d$  matrike  $\tilde{\mathbf{N}}$ , in sestaviti  $d$  veznih enačb med neznankami, ki nam bodo zagotovile tako imenovano rešitev z minimalnim številom veznih enačb (angl. minimally constrained solution), ne da bi pri tem posegali v geometrijo opazovanj, torej se pogoj minimalne vsote kvadratov popravkov opazovanj ohranja (Teunissen, 2006). Ugotoviti se da, da je pri metodi PPP defekt  $d = 1$  in lahko vezno enačbo zapišemo tako, da bo skupna vsota vseh kodnih zamikov enaka nič:

$$\sum_{i=1}^{u_D} D_i = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times u_T} & \mathbf{0}_{1 \times u_G} & \mathbf{0}_{1 \times u_N} & \mathbf{1}_{1 \times u_D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{T} \\ \mathbf{G} \\ \mathbf{A} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} = [0] \Leftrightarrow \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} = 0 \tag{12}$$

V enačbi (12) sta vektorja  $\mathbf{0}_{1 \times k}$  in  $\mathbf{1}_{1 \times k}$  vektorja ničel in enic velikosti  $1 \times k$ .

### 5.3 Ocena neznank po metodi najmanjših kvadratov

Rešitev vektorja  $\mathbf{x}$  s pripadajočo matriko kofaktorjev  $\mathbf{Q}$  dobimo na podlagi enačbe (11) ob upoštevanju vezne enačbe (12) kot:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{N}} & \mathbf{H}^T \\ \mathbf{H} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{b}} \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{N}} & \mathbf{H}^T \\ \mathbf{H} & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_x & \mathbf{Q}_{x\omega} \\ \mathbf{Q}_{\omega x} & q_\omega \end{bmatrix} \quad (13)$$

V enačbi (13) je  $\omega$  Lagrangejev multiplikator (Koch, 1999) oziroma korelat (Mikhail in Ackermann, 1976). Ocenjen vektor neznank  $\mathbf{x}$  vsebuje vse ocenjene neznanke razen pogreškov ure sprejemnika. Pogreške ure sprejemnika  $c\Delta t_i$  za vsako epoho izmere, s pripadajočim kofaktorjem,  $q_{c\Delta t_i}$  lahko pridobimo kot (Brockmann, 1996):

$$c\Delta t_i = \mathbf{N}_{22,i}^{-1} (\mathbf{b}_{2,i} - \mathbf{N}_{21,i} \mathbf{x}) \quad q_{c\Delta t_i} = \mathbf{N}_{22,i}^{-1} + \mathbf{N}_{22,i}^{-1} \mathbf{N}_{21,i} \mathbf{Q}_x \mathbf{N}_{12,i} \mathbf{N}_{22,i}^{-1} \quad (14)$$

Na koncu izračunamo referenčno varianco a-posteriori  $\hat{\sigma}_0^2$  (Brockmann, 1996):

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \mathbf{f}^T \mathbf{P} \mathbf{f} - \mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{b}} - \sum_{i=1}^n (\mathbf{b}_{2,i}^T \mathbf{N}_{22,i}^{-1} \mathbf{b}_{2,i}) \quad \hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n_o - u + d} \quad (15)$$

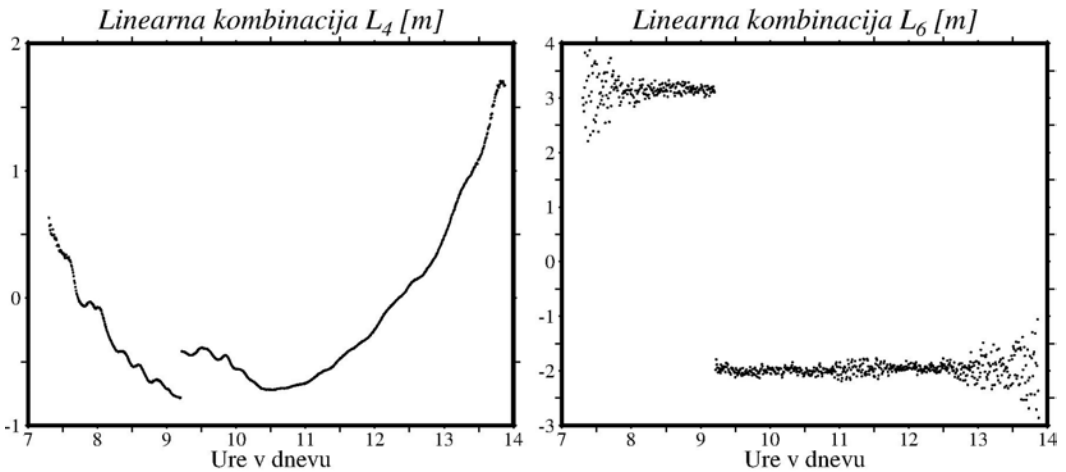
V enačbi (15) je  $n_o$  (v indeksu je oznaka  $o$  kot opazovanja) število vseh opazovanj,  $u$  število vseh neznank v modelu in  $d$  število veznih enačb (12).

## 6 ISKANJE IN ODSTRANJEVANJE IZPADOV SIGNALA FAZNIH OPAZOVANJ

Metoda PPP je učinkovita, natančna in točna le, če uporabimo fazna opazovanja, pri čemer pa je treba vse izpade signala (angl. cycle slips) poiskati in odstraniti. Izpad signala se v faznih opazovanjih odraža kot sprememba fazne nedoločenosti, ki je sicer konstantna vrednost. Vsak izpad signala, ki ni odstranjen, povzroči prisotnost niza grobo pogrešenih faznih opazovanj in neuporabne rezultate. Postopek za iskanje in odpravljanje izpadov signala je predstavil Blewitt (1990) in se od takrat ni bistveno spremenil. Ker se vrednosti opazovanj pri GPS spreminjajo tudi do 800 m/s (Leick, 1995), niso uporabne za iskanje izpadov signala. Sestaviti je treba linearno kombinacijo faznih ali faznih in kodnih opazovanj, ki je čim bolj časovno stabilna in čim bolj natančna. Dve taki linearni kombinaciji sta tako imenovana geometrije prosta linearna kombinacija  $L_4$  (angl. geometry free) in Melbourne-Wübenna linearna kombinacija  $L_6$  (Dach in sod., 2007; Leick, 1995; Xu, 2007). Enačbi za obe linearni kombinaciji sta:

$$L_4 = L_1 - L_2 \quad L_6 = \frac{1}{f_1 - f_2} (f_1 L_1 - f_2 L_2) - \frac{1}{f_1 + f_2} (f_1 P_1 + f_2 P_2) \quad (16)$$

Linearna kombinacija  $L_4$  je neodvisna od vseh količin iz enačbe (1), razen od ionosfere in faznih nedoločenosti, linearna kombinacija  $L_6$  pa je odvisna od faznih nedoločenosti in večpotja kodnih opazovanj (Dach in sod., 2007; Leick, 1995; Xu, 2007). Natančnost linearne kombinacije  $L_4$  je reda natančnosti faznih opazovanj (milimetrski natančnost), medtem ko je natančnost linearne kombinacije  $L_6$  za faktor 0,7 višja od natančnosti kodnih opazovanj. Na sliki 2 prikazujemo primer obeh linearnih kombinacij.



Slika 2: Prikaz linearnih kombinacij  $L_4$  in  $L_6$ , ki sta pomembni pri ugotavljanju izgube sledenja signala. Grafa prikazujeta časovni vrsti obeh linearnih kombinacij med približno 7. in 14. uro za opazovanja istega satelita.

S slike 2 so razvidne opisane lastnosti obeh linearnih kombinacij. Linearna kombinacija  $L_4$  je gladka funkcija, ki se skozi čas spreminja le zaradi spremembe vpliva ionosfere. Linearna kombinacija  $L_6$  pa je konstantna vrednost v času, le da je njena natančnost veliko slabša kot pri linearni kombinaciji  $L_4$ , kar je razvidno iz razpršenosti linearne kombinacije na grafu. Razviden je tudi izpad signala v času med 9<sup>00</sup> in 9<sup>30</sup>, kar se vidi kot skok v časovnih vrstah obeh linearnih kombinacij.

Cilj pri ugotavljanju izgube sledenja signala je najti podobne situacije kot na sliki 2 v času med 9<sup>00</sup> in 9<sup>30</sup>, izračunati, kakšen je skok obeh linearnih kombinacij po izgubi sledenja signala, in ta skok odstraniti iz faznih opazovanj. Postopek iskanja in odstranitve izpadov signala iz faznih opazovanj v našem primeru je:

1. Poiskati vse izpade signala na podlagi linearne kombinacije  $L_4$ .
2. Na podlagi linearne kombinacije  $L_6$  poiskati ostale izpade signala, ki jih v linearni kombinaciji  $L_4$  ni bilo mogoče zaznati.
3. Za vsak ugotovljeni izpad signala določiti spremembo faznih nedoločenosti za fazna opazovanja  $L_1$  in  $L_2$  v domeni naravnih števil in izpad signala odpraviti.
4. Če koraka 3 ne moremo izvesti, v obdelavi uvedemo novo neznanko fazne nedoločenosti za obravnavani satelit od trenutka izpada signala naprej.

Izpad signala, ki nam ga po zgoraj predstavljenem postopku ne uspe locirati, povzroči niz grobih pogreškov konstantne vrednosti v faznih opazovanjih  $L_3$ . Ti so lahko v najboljšem primeru velikosti nekaj centimetrov, v neugodnih primerih pa lahko pomenijo navzgor neomejene konstantne vrednosti in lahko znašajo več tisoč kilometrov.

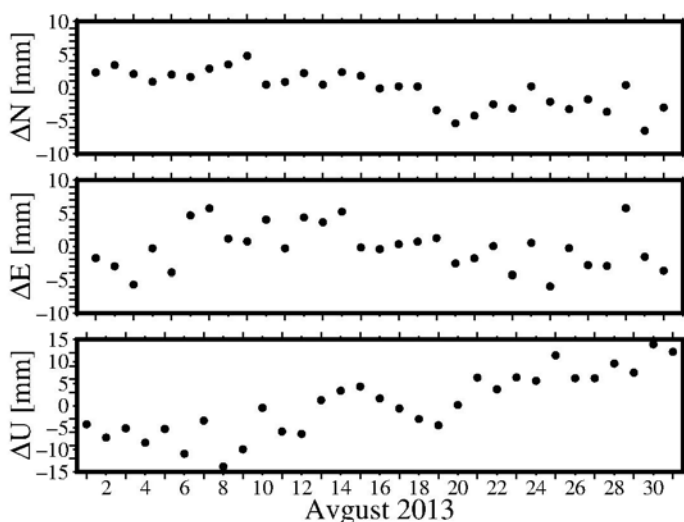
## 7 TESTNI PRIMER

Praktično uporabnost in domet metode PPP bomo prikazali na dnevnih opazovanjih za obdobje enega meseca na stalno delujoči GNSS-postaji GRAZ v mestu Gradec v Avstriji. Točka GRAZ je vključena v omrežje IGS (<http://igsb.jpl.nasa.gov/network/netindex.html>) in ima zato natančne koordinate z vek-

torjem hitrosti podane v koordinatnem sestavu ITRF ([http://itrf.ensg.ign.fr/ITRF\\_solutions/2008/doc/ITRF2008\\_GNSS.SSC.txt](http://itrf.ensg.ign.fr/ITRF_solutions/2008/doc/ITRF2008_GNSS.SSC.txt)). Ker je točka GRAZ vključena tudi v omrežje EPN (angl. European Permanent Network), ima koordinate določene tudi v koordinatnem sistemu ETRS89 (<http://www.epncb.oma.be>). Pri praktičnem primeru se bomo osredotočili na analizo kakovosti in točnosti le ocenjenih koordinat točke GRAZ. V poglavju 4.1 smo prikazali, da obstajajo še druge neznanke, ki z geodetskega stališča nimajo primarnega pomena, so pa zanimive v povezavi z drugimi znanostmi. Ocenjeni popravki ure sprejemnika so pomembni za določitev točnega časa, parametri troposfere pa za meteorologijo, saj zakasnitev signala lahko povežemo s količino vodne pare v zraku.

V obdelavo smo vključili opazovanja GPS od 1. do 31. avgusta 2013. Za obdelavo podatkov z metodo PPP smo ustrezne produkte službe IGS pridobili s spletne strani <ftp://igsb.jpl.nasa.gov/pub/product/>, kalibracijske parametre anten sprejemnikov in satelitov pa s spletne strani <ftp://igs.org/pub/station/general/igs08.atx>.

V prvem koraku smo obdelali opazovanja za vsak dan v avgustu 2013 (31 dni). Rezultat so časovne vrste koordinat točke, tj. niz trojic koordinat točke GRAZ za vseh 31 dni opazovanj GPS v koordinatnem sestavu ITRF (koordinatni sestav preciznih efemerid). Zaradi kratkega časovnega intervala (en mesec) lahko koordinate točk obravnavamo kot statične in izračunamo le utežne sredine dnevni koordinat točk (srednje koordinate točk). Natančnost metode PPP lahko določimo z razpršenostjo dnevni koordinat glede na srednje koordinate točke GRAZ, kar prikazuje slika 3.



Slika 3: Prikaz razpršenosti dnevni koordinat glede na srednje koordinate točke GRAZ v lokalnem geodetskem koordinatnem sistemu ( $\Delta N$  je razpršenost v smeri S–J,  $\Delta E$  v smeri V–Z in  $\Delta U$  po višini).

Na sliki 3 so prikazane razpršenosti dnevni koordinat glede na srednje koordinate točke GRAZ v lokalnem geodetskem koordinatnem sistemu. Iz slike je razvidno, da so razpršenosti koordinat majhne, kar priča o visoki natančnosti metode PPP. Standardni odkloni razpršenosti za vse tri komponente položaja točke ( $\sigma_N$ ,  $\sigma_E$  in  $\sigma_U$ ) so prikazani v preglednici 1. Dodatno sta za vsako koordinato predstavljeni tudi ekstremni vrednosti, največje (max) in najmanjše (min) odstopanje dnevni koordinat od srednjih koordinat točke GRAZ. Na podlagi slike 3 in preglednice 1 lahko vidimo, da je natančnost določitev

koordinate točke GRAZ na podlagi opazovanj enega meseca približno 3 milimetre za položajni koordinati in približno 7 milimetrov za višino.

Preglednica 1: Prikaz statističnih lastnosti razpršenosti dnevni koordinat glede na srednje koordinate točke GRAZ v lokalnem geodetskem koordinatnem sistemu.

$\sigma_N$	<i>min</i> $\Delta N$ <i>max</i> $\Delta N$	$\sigma_E$	<i>min</i> $\Delta E$ <i>max</i> $\Delta E$	$\sigma_U$	<i>min</i> $\Delta U$ <i>max</i> $\Delta U$
2,9 mm	-6,5 mm 4,8 mm	3,3 mm	-6,0 mm 5,8 mm	7,3 mm	-13,8 mm 13,9 mm

Naslednji parameter, ki nas zanima, pa je stopnja točnosti določitve koordinat točke GRAZ z metodo PPP. Točnost preverimo glede na koordinate točke GRAZ, ki jih podaja služba IGS. Preglednica 2 prikazuje srednje koordinate, dobljene z metodo PPP, referenčne koordinate, ki jih zagotavlja služba IGS, in razlike med njimi. Rezultati so podani v kartezičnih koordinatah (*X*, *Y* in *Z*), razlike koordinat pa tudi v lokalnem geodetskem sistemu (*N*, *E* in *U*).

Preglednica 2: Prikaz stopnje točnosti srednjih koordinat točke GRAZ, pridobljenih z metodo PPP, glede na koordinate točke, ki jih je določila služba IGS.

Vrsta koordinat	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>Z</i>
	$\Delta N$	$\Delta E$	$\Delta U$
IGS	4194423,6746 m	1162702,8494 m	4647245,5084 m
PPP	4194423,6756 m	1162702,8381 m	4647245,5003 m
PPP-IGS	0,0010 m	-0,0113 m	-0,0081 m
PPP-IGS	-0,0041 m	-0,0112 m	-0,0073 m

Iz preglednice 2 je razvidno, da je skladnost podanih koordinat IGS in srednjih koordinat, pridobljenih z metodo PPP, na ravni centimetra. Glede na rezultate iz preglednice 1 in preglednice 2 lahko ugotovimo, da je metoda bolj natančna, kot je točna. Vzroke za razlike iz preglednice 2 bo treba v prihodnje raziskati in matematično opredeliti. Pretvorbo iz koordinatnega sestava ITRF v koordinatni sistem ETRS89 sta opisala Boucher in Altamimi (2011), spletna aplikacija, ki izvede transformacijo, pa je na [http://www.epncb.oma.be/\\_productsservices/coord\\_trans/index.php](http://www.epncb.oma.be/_productsservices/coord_trans/index.php). Preglednica 3 prikazuje razlike med transformiranimi srednjimi koordinatami točke GRAZ v ETRS89 in koordinatami v ETRS89.

Preglednica 3: Prikaz razlik med ETRS89 koordinatami, pridobljenimi z metodo PPP, ter uradnimi koordinatami, objavljenimi na [http://www.epncb.oma.be/\\_productsservices/coordinates/crd4station.php?station=GRAZ](http://www.epncb.oma.be/_productsservices/coordinates/crd4station.php?station=GRAZ).

	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>Z</i>
ETRS89	4194424,127 m	1162702,459 m	4647245,196 m
PPP	4194424,121 m	1162702,443 m	4647245,191 m
PPP- ETRS89	0,006 m	0,016 m	0,005 m

Razlike iz preglednice 3 so primerljive z razlikami iz preglednice 2, saj je transformacija med ITRF in ETRS89 kakovostno določena.

## 8 SKLEP

V prispevku smo predstavili postopek obdelave opazovanj GPS posameznih sprejemnikov z metodo PPP. Prikazan je matematični model obdelave opazovanj (poglavje 4), kjer linearni kombinaciji  $L_3$  in  $P_3$  predstavimo z različnimi neznankami modela; koordinatami točk, neznankami zenitne troposferske refrakcije, gradientov troposfere, faznimi nedoločnostmi, kodnimi zamiki in pogreški ure sprejemnika. Opazovanja obravnavamo kot nekorelirana, kjer je njihova natančnost odvisna od vrste opazovanj (kodna, fazna) in višinskega kota satelita, s katerega smo jih pridobili. Poleg ustreznega matematičnega modela je pri metodi PPP pomembno modeliranje vplivov na opazovanja GPS do ravni milimetra. Pri tem moramo modelirati vse znane vplive: z izvorom v satelitu (pogrešek položaja in ur satelitov, nesovpadanje faznega in geometričnega centra antene satelitov, relativnost, fazni preskok), v mediju (ionosferska, troposferska refrakcija) in v anteni oziroma sprejemniku in njegovi okolici (plimovanje čvrste Zemlje in oceanov, večpotje, nesovpadanje faznega in geometričnega centra antene sprejemnika).

Na praktičnem primeru smo prikazali uporabnost metode PPP pri obdelavi opazovanj GPS na stalno delujoči postaji GRAZ v mestu Gradec v Avstriji. Opazovanja so bila pridobljena za celoten avgust leta 2013 (31 zaporednih dni). Za vsak dan smo na podlagi opazovanj ocenili koordinate točk, iz katerih smo nato izračunali srednje koordinate. Natančnost srednjih koordinat smo ocenili s standardnimi odkloni odstopanj dnevnih koordinat od srednjih koordinat točke GRAZ za vse tri komponente položaja v lokalnem geodetskem koordinatnem sistemu (N, E in U) in dobili vrednosti 2,9 mm, 3,3 mm in 7,3 mm za smeri S–J (N), V–Z (E) in po višini (U). Primerjava med srednjimi in danimi koordinatami (službe IGS) točke GRAZ je podala razlike – 4,1 mm, – 11,2 mm in – 7,3 mm za smeri S–J (N), V–Z (E) in po višini (U). Pri transformaciji koordinat točke GRAZ v ETRS89 so odstopanja srednjih koordinat od referenčnih koordinat enakega velikostnega reda kot razlike v ITRF. Rezultati kažejo na visoko natančnost pridobljenih rezultatov, če imamo na voljo celodnevna opazovanja na geodetskih točkah.

## Literatura in viri:

- Altamimi, Z., Collilieux, X., Métivier, L. (2011). ITRF2008: an improved solution of the international reference frame. *Journal of Geodesy*, 85(8), 457–473. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00190-011-0444-4>
- Ashby, N. (2003). Relativity in the Global Positioning System. *Living Reviews in Relativity* 6 (2003), 1. DOI: <http://dx.doi.org/10.12942/lrr-2003-1>
- Bar-Sever, Y. E., Kroger, P. M., Borjesson, J. A. (1998). Estimating horizontal gradients of tropospheric path delay with a single GPS receiver. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 103(B3), 5019–5035. DOI: <http://dx.doi.org/10.1029/97JB03534>
- Bisnath, S., Gao, Y. (2009). Current State of Precise Point Positioning and Future Prospects and Limitations. V: Sideris, M.G. (ur.), *Observing our Changing Earth. Proceedings of the 2007 IAG General Assembly*, Perugia, Italija. International Association of Geodesy Symposia (zv. 133, str. 615–623). Berlin in Heidelberg: Springer-Verlag. DOI: [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-85426-5\\_71](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-85426-5_71)
- Blewitt, G. (1990). An automated editing algorithm for GPS data. *Geophysical Research Letters*, 17(3), 199–202. DOI: <http://dx.doi.org/10.1029/GL017i003p00199>
- Boucher, C., Altamimi, Z. (2011). Memo: Specifications for reference frame fixing in the analysis of a EUREF GPS campaign. <http://etrs89.ensg.ign.fr/memo-V8.pdf>, pridobljeno: marec 2014.
- Brockmann, E. (1996). *Combination of Solutions for Geodetic and Geodynamic Applications of the Global Positioning System (GPS)*. Doktorska disertacija. Bern, Švica: Astronomski inštitut Univerze v Bernu.
- Čadež, P. (2010). *Analiza metod geodetske GNSS izmere*. Diplomski naloga. Ljubljana: Univerza v Ljubljani Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.
- Dach, R., Jean, Y. (2013). *IGS Technical Report 2012*. Bern: Astronomski inštitut Univerze v Bernu.
- Dach, R., Hugentobler, U., Fridez, P., Meindl, M. (2007). *Bernese GPS Software, Version 5.0*. Bern: Astronomski inštitut Univerze v Bernu.



Gelb, A. (2001). Applied Optimal Estimation. Sixteenth printing. Cambridge, Massachusetts in London: M. I. T. Press Massachusetts Institute of Technology.

Heroux, P., Kouba, J. (1995). GPS precise point positioning with a difference. Geomatics 1995. Ottawa, Ontario, Kanda.

Jelenc, B. (2006). Relativnostni vplivi na GPS opazovanja. Diplomsko naloga. Ljubljana: Univerza v Ljubljani Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.

Klobuchar, J. A. (1996). Ionospheric Effects on GPS. V Parkinson, B. W., Spilker, J. J. Jr (ur.), Global Positioning System: Theory and Applications Volume 1. Progress in Astronautics and Aeronautics. Volume 163. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc.

Koch, K. R. (1999). Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models, Second, Updated and Enlarged Edition. Berlin in Heidelberg: Springer-Verlag.

Kouba, J. (2009). A guide to using International GNSS Service (IGS) products. <http://igscb.jpl.nasa.gov/igscb/resource/pubs/UsingIGSProductsVer21.pdf>, pridobljeno: marec 2014.

Langley, R. B. (1998). Propagation of the GPS Signals. V: Teunissen, P. J. G., Kleusberg, A. (ur.), GPS for Geodesy, 2nd Edition. Berlin in Heidelberg: Springer-Verlag.

Leandro, R. F. (2009). Precise Point Positioning with GPS A new approach for positioning, atmospheric studies, and signal analysis. Doktorska disertacija. New Brunswick: Univerza New Brunswick.

Leick, A. (1995). GPS satellite surveying. Second Edition. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Mikhail, E. M., Ackermann, F. E. (1976). Observations and Least Squares. New York: Harper & Row.

Niell, A. E. (1996). Global mapping functions for the atmosphere delay at radio wavelengths. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 101(B2), 3227–3246. DOI: <http://dx.doi.org/10.1029/95JB03048>

Pavlovčič Prešeren, P., Stopar, B. (2004). Izračun položaja GPS-satelita iz podatkov oddanih efemerid. Geodetski vestnik, 48(2), 151–166.

Petit, G., Luzum, B. (2010). IERS Conventions (2010). IERS Conventions Centre. Frankfurt na Majni, Nemčija: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie.

Remondi, B. W. (1984). Using the Global Positioning System (GPS) phase observable for relative geodesy: modelling, processing, and results. Doktorska disertacija. Austin, Texas: Univerza v Teksasu.

Schaer, S. (1999). Mapping and Predicting the Earth's Ionosphere Using the Global Positioning System. Doktorska disertacija. Bern: Astronomski inštitut Univerze v Bernu.

Schmid, R., Steigenberger, P., Gendt, G., Ge, M., Rothacher, M. (2007). Generation of a consistent absolute phase center correction model for GPS receiver and satellite antennas. Journal of Geodesy, 81(12), 781–798. DOI: <http://dx.doi.org/10.1007/s00190-007-0148-y>

Sterle, O. (2004). Zasnova koncepta GPS opazovanj za stalno spremljanje geodamičnega dogajanja na širšem območju Premogovnika Velenje. Diplomsko naloga. Ljubljana: Univerza v Ljubljani Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.

Sterle, O., Stopar, B., Pavlovčič Prešeren, P. (2013). Modeliranje ionosferske refrakcije za izboljšavo absolutnega GPS-položaja s kodnimi instrumenti: priprava na 24. Sončev cikel. Geodetski vestnik, 57(1), 9–24. <http://dx.doi.org/10.15292/geodetski-vestnik.2013.01.009-024>

Strang, G., Borre, K. (1997). Linear Algebra, Geodesy, and GPS. Wellesley, Massachusetts, ZDA: Wellesley-Cambridge Press, ZDA.

Teunissen, P. J. G. (2006). Network Quality Control. Delft, Nizozemska: Delft University of Technology. VSSD.

Witchayangkoon, B. (2000). Elements of GPS Precise Point Positioning. Doktorska disertacija. Orono, Maine: Univerza Maine.

Xu, G. (2007). GPS Theory, Algorithms and Applications. Second Edition. Berlin in Heidelberg: Springer-Verlag.

Zumberge, J. F., Hefflin, M. B., Jefferson, D. C., Watkins, M. M., Webb, F. H. (1997). Precise point positioning for the efficient and robust analysis of GPS data from large networks. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 102(B3), 5005–5017. DOI: <http://dx.doi.org/10.1029/96JB03860>

Sterle O., Stopar B., Pavlovčič Prešeren P. (2014). Metoda PPP pri statični izmeri GNSS. Geodetski vestnik, 58 (3): 466-481. DOI: 10.15292/geodetski-vestnik.2014.03.466-481

**Asist. mag. Oskar Sterle, univ. dipl. inž. geod.**  
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo  
Jamova cesta 2, SI-1000 Ljubljana  
e-naslov: oskar.sterle@fgg.uni-lj.si

**Prof. dr. Bojan Stopar, univ. dipl. inž. geod.**  
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo  
Jamova cesta 2, SI-1000 Ljubljana  
e-naslov: bojan.stopar@fgg.uni-lj.si

**Doc. dr. Polona Pavlovčič-Prešeren, univ. dipl. inž. geod.**  
Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo  
Jamova cesta 2, SI-1000 Ljubljana  
e-naslov: polona.pavlovic@fgg.uni-lj.si