

Univerza  
v Ljubljani  
Fakulteta  
*za gradbeništvo  
in geodezijo*



Jamova cesta 2  
1000 Ljubljana, Slovenija  
<http://www3.fgg.uni-lj.si/>

**DRUGG** – Digitalni repozitorij UL FGG  
<http://drugg.fgg.uni-lj.si/>

V zbirki je izvirna različica izdajatelja.

Prosimo, da se pri navajanju sklicujete na bibliografske podatke, kot je navedeno:

University  
of Ljubljana  
Faculty of  
*Civil and Geodetic  
Engineering*



Jamova cesta 2  
SI – 1000 Ljubljana, Slovenia  
<http://www3.fgg.uni-lj.si/en/>

**DRUGG** – The Digital Repository  
<http://drugg.fgg.uni-lj.si/>

This is a publisher's version PDF file.

When citing, please refer to the publisher's bibliographic information as follows:

Marjetič, A. 2013. Datumska odvisnost deformacij in rotacij geodetske mreže = Dependency of strains and rotations in geodetic network. Geodetski vestnik 57, 3: 447-464.

DOI: <http://dx.doi.org/10.15292/geodetski-vestnik.2013.03.447-464>  
<http://drugg.fgg.uni-lj.si/4488/>

Datum arhiviranja / Archiving Date: 10-09-2014

# DATUMSKA ODVISNOST DEFORMACIJ IN ROTACIJ GEODETSKE MREŽE

DATUM DEPENDENCY OF STRAINS AND ROTATIONS IN GEODETIC NETWORK

*Aleš Marjetič*

UDK: 528.1:528.3

## IZVLEČEK

*V vsaki točki geodetske mreže obravnavamo kinematične količine: normalne deformacije, strižne deformacije in rotacije. Pristop se razlikuje od tradicionalnega geodetskega načina obravnave deformacij na podlagi premikov točk. Deformacije in rotacije so odvisne od spremembe geodetskega datuma. V primeru različnih koordinatnih sistemov v posamezni izmeri ne moremo izračunati pravih vrednosti premikov, deformacij in rotacij. Kljub že opravljenim empiričnim študijam o odvisnosti od datumskih sprememb smo analitično izpeljali matematične izraze odvisnosti deformacij in rotacij od relativne spremembe datumskih parametrov med dvema terminskima izmerama. Praktični prikaz funkcijske odvisnosti je bil izveden na primeru izbrane ravninske geodetske mreže.*

## KLJUČNE BESEDE

*deformacijska analiza, deformacija, rotacija, normalna deformacija, strižna deformacija, geodetski datum*

Klasifikacija prispevka po COBISS-u: 1.01

## ABSTRACT

*At each point of the geodetic network, kinematic quantities are considered: normal strain, shear strain and rotation. This differs from the treatment of deformations on the basis of point movements as the traditional geodetic approach. Strain and rotation depend on the changes of geodetic datum. In the case of two different coordinate systems in each epoch, we cannot calculate the real value of movements, strains and rotations. Despite the empirical studies of the datum invariance, we derived analytical mathematical expressions of functional dependency of strains and rotations from the relative change of datum parameters between two measurement epochs. Practical demonstration of functional dependencies has been shown in the case of the selected planar geodetic network.*

## KEY WORDS

*deformation analysis, strain, rotation, normal strain, shear strain, geodetic datum*

## 1 UVOD

Deformacije v geodetskem smislu obravnavamo na podlagi premikov posameznih točk objekta, ki so povezane v geodetsko mrežo na podlagi geodetskih opazovanj. Težava izračuna pravih vrednosti premikov se večinoma nanaša na pravilnost geodetskega datuma dveh primerjanih terminskih izmer. Te težave se pri nekaterih standardnih metodah deformacijske analize, kot so Delft, Hannover, Karlsruhe, Muenchen in Fredericton (Chrzanowski et al., 1983; Van Mierlo, 1978; Welsch in Zhang, 1983), rešujejo s primerjavo koordinat točk izravnave proste mreže dveh izmer. Tako se zagotovi enakost geodetskih datumov, in sicer z identično datumsko matriko, ki

zagotavlja ustrezne notranje datumske vezi v geodetski mreži. S postopki statističnega testiranja se določijo domnevno mirujoče točke geodetske mreže, s katerimi lahko na novo opredelimo geodetski datum s transformacijo  $S$  (Marjetič in Stopar, 2007). Transformiramo vektor koordinatnih sprememb preostalih točk v datum domnevno mirujočih točk.

Vprašanje geodetskega datuma obravnavamo nekoliko drugače. Namesto določanja statistično značilnih premikov točk geodetske mreže obravnavamo deformacije in rotacije telesa, ki je opisano z množico točk geodetske mreže. V posamezni točki računamo vrednosti kinematičnih količin: normalnih in strižnih deformacij ter rotacij, ki jih vsebujeta tenzorja deformacij in rotacij. Ugotovljamo statistično značilnost deformacij in rotacij. Osnovni pogoj za to je seveda poznavanje porazdelitev posameznih parametrov (Marjetič et al., 2010).

Tenzor deformacij, iz katerega računamo deformacijske parametre, je neodvisen od izbire koordinatnega sistema (Stanek in Turk, 1998). Posledično so tudi mere deformacij neodvisne od izbire geodetskega datuma. Vendar pa razlike v datumu med dvema izmerama, kljub datumski neodvisnosti tenzorja deformacij, lahko povzročijo spremembe v izračunanih deformacijah. Predvsem je, kot se izkaže v nadaljevanju, težava neenaka rotacija mreže. Za pravilno določitev deformacij in rotacij v geodetski mreži med dvema izmerama moramo imeti opredeljen primeren geodetski datum, ki mora biti enoten in enolično določen v obeh terminskih izmerah. Samo fizično predstavljen in identičen datum geodetske mreže v dveh obravnavanih terminskih izmerah je podlaga za določanje dejanskih premikov in oceno natančnosti premikov točk v geodetski mreži.

V članku skušamo podrobneje raziskati razlike v opredelitvi geodetskega datuma med dvema izmerama. Pogojno datumsko odvisnost deformacijskih parametrov bomo v nasprotju z do sedaj opravljenimi raziskavami (Xu et al., 2000) tudi analitično izpeljali na podlagi znane funkcijske odvisnosti deformacij s spremembami koordinat točk med dvema izmerama.

## 2 DEFORMACIJE V GEODETSKI MREŽI

Izhajamo iz tenzorja deformacij (Marjetič, 2011; Stanek in Turk, 1998), ki temelji na poznavanju vektorja premika  $\mathbf{u}(x, y, z)$  vsake točke obravnavanega objekta. V splošnem gre za heterogene deformacije (Sterle, 2007). V geodetski mreži obravnavamo situacijo, v kateri imamo na voljo podatke o premikih samo posameznih točk objekta. V tem primeru lahko določimo premike samo določenemu številu geodetskih točk. Določitev tenzorja deformacij ( $\varepsilon$ ) in rotacij ( $\omega$ ) v neki poljubni točki v takih primerih poteka po različnih metodah interpolacije ob predpostavki homogenih deformacij in rotacij na določenih območjih.

Obravnavamo tenzor majhnih deformacij in majhnih zasukov, ker predpostavljamo, da so deformacije objekta diferencialno majhne v primerjavi z dimenzijo objekta, ki ga predstavlja geodetska mreža (Stanek in Turk, 1998; Srpčič, 2003). Vektor premikov  $\mathbf{u}(x, y, z)$ , oziroma pripadajoče vektorsko polje premikov, je v primeru predpostavljenih homogenih deformacij zvezno, odvedljivo in s tem regularno, zato zanj obstaja popolni diferencial (Stanek in Turk, 1998). Povezava vektorskega polja premikov in tenzorja deformacij je mogoča prek matrike gradienta vektorskega polja premikov (Marjetič, 2011). Tako lahko zapišemo vektor potencialnega premika

$\mathbf{u}$  točke  $B$ , ki je z matriko gradienta v izhodiščni točki  $A$  v naslednji zvezi (Ašanin, 1986; Shames in Cozzarelli, 1997; Berber et al., 2006; Marjetič, 2011), ki velja le za homogeno polje deformacij:

$$\begin{bmatrix} u_x(B) \\ u_y(B) \end{bmatrix} = \mathbf{G}_A \begin{bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_x(A) \\ u_y(A) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$\mathbf{u}(B) = \mathbf{G}_A \cdot \mathbf{r}_{AB} + \mathbf{c}, \quad (2)$$

kjer je:

$$\mathbf{G}_A = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} + \omega_z \\ \varepsilon_{xy} - \omega_z & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} = \mathbf{e} + \mathbf{w}$$

- matrika gradienta vektorskega polja premikov,

$$\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = \begin{bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{bmatrix} - \text{razlika krajevnih vektorjev točk } A \text{ in } B,$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} u_x(A) \\ u_y(A) \end{bmatrix} - \text{vektor premika telesa v točki } A.$$

Vektor  $\mathbf{c}$  podaja premik točke  $A$ , ki ne vpliva na deformacijo v izhodiščni točki  $A$ .

Enačbo (1) oziroma (2) lahko zapišemo za vsako povezavo med točko  $A$  in sosednjimi točkami  $B_k$  ( $k = 0, 1 \dots (m-1)$ ,  $m$  - št. točk v mreži), in dobimo sistem v matrični obliki (Cai in Grafarend, 2007; Ašanin, 1986):

$$\begin{bmatrix} (x_1 - x_A) & (y_1 - y_A) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (x_1 - x_A) & (y_1 - y_A) \\ (x_2 - x_A) & (y_2 - y_A) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (x_2 - x_A) & (y_2 - y_A) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_k - x_A) & (y_k - y_A) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (x_k - x_A) & (y_k - y_A) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} u_x(B_1) - u_x(A) \\ u_y(B_1) - u_y(A) \\ u_x(B_2) - u_x(A) \\ u_y(B_2) - u_y(A) \\ \vdots \\ u_x(B_k) - u_x(A) \\ u_y(B_k) - u_y(A) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\text{ali drugače: } \mathbf{F} \cdot \text{vec}(\mathbf{G}_A^*) = \mathbf{u}_k - \mathbf{u}_A. \quad (4)$$

Vektor premikov točk mreže  $\mathbf{u}_k$  ( $\mathbf{u}_k \subset \mathbf{u}$ ) je rezultat izravnave opazovanj v mreži. Vektor  $\text{vec}(\mathbf{G}_A^*)$  je v vektorskem načinu zapisana matrika gradienta vektorskega polja premikov  $\mathbf{G}_A$ . Rešitev za  $\text{vec}(\mathbf{G}_A^*)$  dobimo z rešitvijo sistema (3) oziroma (4) po metodi najmanjših kvadratov:

$$\text{vec}(\mathbf{G}_A^*) = (\mathbf{F}^T \mathbf{P}_F \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{P}_F \cdot \mathbf{u}_k, \quad (5)$$

kjer je (Marjetič et al., 2010)  $\mathbf{P}_F$  - diagonalna matrika uteži s členi  $P_{Ak} = \frac{1}{1 + d_{Ak}^2}$  (Marjetič et al.

2010) ter  $d_{Ak}$  - razdalja med točkama  $A$  in  $B_k$ .

Iz matrike  $\mathbf{G}_A$  najprej določimo posamezne elemente tenzorja deformacij ( $\varepsilon$ ) in tenzorja majhnih zasukov ( $\omega$ ) (Shames in Cozzarelli, 1997; Stanek in Turk, 1998; Srpčič, 2003), (enačba (2)).

Ker želimo opisati deformacijo v točki z maksimalnimi vrednostmi, se osredotočimo samo na glavne normalne in glavne strižne deformacije v izbrani točki  $A$  (Srpčič, 2003), ki predstavljajo lastne vrednosti tenzorja deformacij:

- ekstremni vrednosti glavne normalne deformacije:

$$\varepsilon_{1,2}^A = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + \varepsilon_{xy}^2}, \text{ v smeri: } \alpha_{\varepsilon_{1,2}} = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}\right) + \frac{\pi}{2}k, \quad (6)$$

kjer je  $k = 0$  za  $\varepsilon_1$  in  $k = 1$  za  $\varepsilon_2$ ;

- ekstremni vrednosti glavne strižne deformacije:

$$\gamma_{1,2}^A = \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + \varepsilon_{xy}^2}, \text{ v smeri: } \alpha_{\gamma_1} = \frac{1}{2} \arctan\left(-\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2\varepsilon_{xy}}\right) + \frac{\pi}{2}k, \quad (7)$$

kjer je  $k = 0$  za  $\gamma_1$  in  $k = 1$  za  $\gamma_2$ ;

- rotacija v točki:

$$\omega_A = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right). \quad (8)$$

Glavne normalne in strižne deformacije ter rotacije so datumsko neodvisne (Shames in Cozzarelli, 1997) oziroma neodvisne od izbire koordinatnega sistema, v katerih jih predstavljamo, in podajajo deformacijske lastnosti deformabilnega telesa v točki.

### 3 DATUMSKA ODVISNOST DEFORMACIJ IN ROTACIJ

#### 3.1 Problem geodetskega datuma pri računanju premikov in deformacij

Deformacije v geodetskem smislu v splošnem obravnavamo prek premikov posameznih točk objekta, ki so določene z opazovanji (dolžin, kotov). Klasična terestrična geodetska opazovanja ne podajajo informacij o geodetskem datumu (razen opazovanih dolžin, ki podajajo merilo mreže). Z rešitvijo Gauss-Markovega modela geodetske mreže (Marjetič, 2011) po metodi najmanjših kvadratov izračunamo splošno rešitev za vektor neznanih koordinatnih komponent točk mreže v posamezni epohi  $t$ . Za izračun rešitve (vektor neznank) v splošnem uporabimo generalizirano inverzijo (Rao in Mitra, 1971) matrike normalnih enačb  $\mathbf{N}$ , ki ni enolična.

$$\mathbf{D}_t = (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{l}_t = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{l}_t = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{t}, \quad (9)$$

kjer je:  $\mathbf{D}_t$  - vektor koordinatnih neznank ali vektor popravkov približnih vrednosti koordinatnih neznank  $\mathbf{x}_t^0$  v epohi  $t$  ( $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_t^0 + \mathbf{D}_t$ );  $\mathbf{l}_t$  - vektor opazovanj v epohi  $t$ ;  $\mathbf{B}$  - matrika koeficientov neznank;  $\mathbf{P}$  - matrika uteži opazovanj.

Potrebujemo torej koordinate točk, ki jih izračunamo na podlagi izravnave opazovanj v geodetski mreži po metodi najmanjših kvadratov. Če predpostavimo, da so opazovanja med posameznimi izmerami med seboj neodvisna, lahko vektorsko polje premikov predstavimo z razliko rešitev za koordinatne komponente točk mreže  $\mathbf{x}_1$  in  $\mathbf{x}_2$  med dvema epohama  $t_1$  in  $t_2$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2. \quad (10)$$

Rešitev (9) in s tem tudi (10) je datumsko pogojena, to pomeni, da vsebuje tudi vse informacije o datumu geodetske mreže v posamezni terminski izmeri in jo v začetni fazi lahko imenujemo samo vektor koordinatnih sprememb. Da lahko spremembe koordinat definirajo vektorsko polje premikov, je nujno treba zagotoviti dvojce (Xu et al. 2000):

- i. Zagotoviti moramo enak geodetski datum v obeh časovno ločenih izmerah. Enak in pravilno/smiselno definiran geodetski datum zagotavlja, da lahko premike točk izrazimo s spremembami koordinat točk mreže.
- ii. Za določitev deformacij (komponent tenzorja deformacij) in rotacij telesa moramo poznati vektorsko polje premikov v vsaki točki obravnavanega deformabilnega telesa ali objekta.

Če ne upoštevamo glavnih predpostavk (i) in (ii), uporabljenih pri definiciji premika, imamo opravka z realno situacijo, v kateri:

- sta bila v obeh časovnih trenutkih  $t_1$  in  $t_2$  uporabljena različna koordinatna sistema,
- lahko rešitev vsebuje mnogo vrednosti, ki podajajo rotacijo, translacijo in spremembo merila geodetske mreže.

Enak koordinatni sistem (točka (i)) v dveh ločenih izmerah bi teoretično lahko zagotovili, če bi imeli enako geometrijo mreže, enak tip in število opazovanj, enak instrumentarij, enake vremenske pogoje, enake vrednosti danih količin ter način obdelave opazovanj (Sterle, 2007). To je nemogoče zagotoviti. Problem nekontinuiranega podajanja premikov točk (točka (ii)), iz katerih računamo deformacije telesa, lahko bistveno omilimo z že navedenimi predpostavkami o homogenih deformacijah ter s pravilno izbiro položajev in gostote točk na objektu. Zato iz vseh navedenih razlogov vektorja  $\mathbf{u}$  ne moremo obravnavati kot vektorja premika točk, ampak samo kot koordinatno spremembo.

V nadaljevanju bomo raziskali vpliv različno definiranih geodetskih datumov mreže v posameznih terminskih izmerah na izračunane vrednosti deformacijskih parametrov v točkah geodetske mreže.

### 3.2 Odvisnost deformacij od relativne spremembe geodetskega datuma med dvema terminskima izmerama

Neizpolnjevanje zahtev (i) in (ii) iz predhodnega poglavja lahko privede do napačnih vrednosti tenzorja deformacij, ki povzročijo zavajajoče končne sklepe o deformacijskem stanju obravnavanega objekta. Upoštevamo dejstvo, da imamo v dveh terminskih izmerah različno definirane koordinatne sisteme (geodetske datume –  $gd1$  in  $gd2$ ). Vektor premika ( $\tilde{\mathbf{u}}$ ) obravnavamo kot razliko definitivnih koordinat točk mreže, to je rešitev Gauss-Markovega modela geodetske mreže (Wolf, 1994) v posamezni epohi. Poleg tega upoštevamo različna premika

izhodišča koordinatnega sistema ( $\mathbf{t}_1$  in  $\mathbf{t}_2$ ), različni vrednosti rotacije (rotacijski matriki  $\mathbf{R}_1$  in  $\mathbf{R}_2$ ) ter različni merili mreže (skalarja  $s_1$  in  $s_2$ ) s transformacijo:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}} &= \mathbf{x}_2^{gd2} - \mathbf{x}_1^{gd1}, \\ \tilde{\mathbf{u}} &= [\mathbf{t}_2 + s_2 \mathbf{R}_2 (\mathbf{N}_2^{-\langle II \rangle} \mathbf{B}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{f}_2 + \mathbf{x}_2^0)] - [\mathbf{t}_1 + s_1 \mathbf{R}_1 (\mathbf{N}_1^{-\langle I \rangle} \mathbf{B}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{f}_1 + \mathbf{x}_1^0)], \\ \tilde{\mathbf{u}} &= (\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1) + (s_2 \mathbf{R}_2 \mathbf{N}_2^{-\langle II \rangle} \mathbf{B}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{f}_2 - s_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{N}_1^{-\langle I \rangle} \mathbf{B}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{f}_1 + (s_2 \mathbf{R}_2 \mathbf{x}_2^0 - s_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{x}_1^0))\end{aligned}\quad (11)$$

kjer se indeksa 1 in 2 nanašata na epohi  $t_1$  in  $t_2$ , oznaki I in II pa na različna tipa generalizirane inverzije v  $t_1$  in  $t_2$ .

Enačba (11) je splošna in upošteva tudi različno natančnost opazovanj ( $\mathbf{P}_1$  in  $\mathbf{P}_2$ ), različno geometrijo mreže ( $\mathbf{B}_1$  in  $\mathbf{B}_2$ ) ter možnost uporabe različnih tipov generalizirane inverzije matrike normalnih enačb ( $\mathbf{N}^{-\langle I \rangle}$  in  $\mathbf{N}^{-\langle II \rangle}$ ). Če v geodetski mreži v različnih epohah predpostavimo enako izhodišče koordinatnega sistema ( $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2$ ), enako rotacijo ( $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$ ), enake izhodiščne vrednosti približnih koordinat točk mreže ( $\mathbf{x}_2^0 = \mathbf{x}_1^0$ ) ter če so v mreži opazovane dolžine (merilo mreže je znano:  $s_1 = s_2 = 1$ ), potem je koordinatna razlika definirana kot:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{N}_2^{-\langle II \rangle} \mathbf{B}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{f}_2 - \mathbf{N}_1^{-\langle I \rangle} \mathbf{B}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{f}_1.\quad (12)$$

Kljub vsem predpostavkam v (12) vektorja koordinatnih sprememb  $\tilde{\mathbf{u}}$  še vedno ne moremo obravnavati kot vektorja premikov točk mreže. Problem ostaja v tipu generalizirane inverzije, ki je lahko za različni epohi različen. V praksi ga lahko rešimo na dva načina (Xu et al. 2000): prva možnost je izbira ustrezne množice potrebnih datumskih količin v mreži za definiranje geodetskega datuma mreže ali optimalna izbira enotnega tipa generalizirane inverzije za matriko normalnih enačb, s čimer dobimo spremembe koordinat, ki lahko predstavljajo premike točk geodetske mreže:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{N}_2^{-\langle II \rangle} \mathbf{B}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{f}_2 - \mathbf{N}_1^{-\langle I \rangle} \mathbf{B}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{f}_1 = \mathbf{u}.\quad (13)$$

Najbolj splošno uveljavljen način definiranja geodetskega datuma je uporaba notranjih vezi v prosti mreži na celotni mreži ali pa samo njenem delu. V matematičnem smislu gre za minimizacijo evklidske norme vektorja koordinatnih neznank  $\|\Delta\|_2 = \Delta^T \Delta = \min$ . Ta pristop zahteva, da je vsota popravkov koordinatnih neznank (za vse točke ali samo izbrano podmnožico točk) po posameznih koordinatnih komponentah minimalna. To seveda nima podlage v realnosti. Vendar vsi načini privedejo do rešitve, ki pa je lahko samo ena v množici in ni nujno, da ta rešitev predstavlja realne vrednosti premikov točk.

Rešitev (13) s svojimi predpostavkami ni v ničemer boljša ali slabša od katere koli druge rešitve (11), saj ne vsebuje več informacij o deformacijah objekta, predstavljenega z geodetsko mrežo. Definicija geodetskega datuma posamezne terminske izmere naj torej poteka klasično z izravnavo vpete mreže, ki ga definirajo stabilne točke ali pa naknadno z uporabo transformacije S iz proste mreže izračunanih koordinatnih komponent na izbran geodetski datum (Marjetič in Stopar, 2007).

Vpliv spremembe geodetskega datuma  $\Delta gd = gd2 - gd1$  med dvema terminskima izmerama

za obravnavano geodetsko mrežo lahko ugotovimo na dva načina. Prvi je, da s spreminjanjem vrednosti datumskih parametrov (zasuka in merila) računamo vrednosti deformacij in rotacij v geodetski mreži. To storimo posredno prek matrike gradienta vektorskega polja premikov  $\mathbf{G}$  v posamezni točki. Simulirano funkcijsko odvisnost posamezne deformacije in rotacije v izbrani točki (za izbrano obliko geodetske mreže) lahko neposredno grafično predstavimo. Poleg grafične empirične predstavitve funkcijske odvisnosti deformacij in rotacij lahko funkcijsko odvisnost tudi analitično izpeljemo. Analizo vpliva spremembe datumskih parametrov ločimo za spremembo merila in rotacije geodetske mreže, kot bo pokazano v nadaljevanju. Translacije ne obravnavamo, ker nima nobenega vpliva na deformacije v posamezni točki mreže.

### 3.3 Analiza vpliva spremembe datumskih količin na deformacije

Predpostavimo, da imamo v trenutku  $t_1$  opravka z rešitvijo geodetske mreže  $\mathbf{x}_1$ . V trenutku  $t_2$  pa imamo isto geodetsko mrežo, v kateri je v časovnem intervalu  $\Delta t = t_2 - t_1$  prišlo do deformacij, ki imajo za posledico premik točk mreže  $\mathbf{u}$ . Ker nas zanima samo vpliv relativne spremembe geodetske datuma ( $\Delta gd$ ) glede na izmero v  $t_1$  s koordinatno rešitvijo  $\mathbf{x}_1$ , lahko na podlagi izrazov (11) zapišemo:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{x}_2^{\Delta gd} - \mathbf{x}_1 = [\mathbf{t} + s\mathbf{R}_{x'y',xy}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{u})] - \mathbf{x}_1 \quad (14)$$

Sprememba geodetskega datuma  $\Delta gd$  se izraža v podobnostni transformaciji koordinatnega vektorja  $\mathbf{x}_1$  za: translacijo  $\mathbf{t}$ , spremembo merila  $s = 1 + ds$  ter rotacijo  $\omega$  iz koordinatnega sistema  $xy$  (za  $\mathbf{x}_1$  v epohi  $t_1$ ) v koordinatni sistem  $x'y'$  (za  $\mathbf{x}_2$  v  $t_2$ ) z matriko rotacije  $\mathbf{R}_{x'y',xy}$ . Če preuredimo zapis koordinatnega vektorja  $\mathbf{x}_2^{\Delta gd} = \mathbf{x}'$  in  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}$  ter upoštevamo elemente rotacijske matrike, lahko zapišemo vektor premikov  $\tilde{\mathbf{u}}$  po posameznih koordinatnih komponentah:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{x'} &= x' - x = t_x + s[(x + u_x)\cos\omega - (y + u_y)\sin\omega] - x \\ \tilde{u}_{y'} &= y' - y = t_y + s[(y + u_y)\sin\omega - (x + u_x)\cos\omega] - y. \end{aligned} \quad (15)$$

Tenzor majhnih deformacij in tenzor majhnih zasukov se z upoštevanjem (2) v »novem« koordinatnem sistemu  $x'y'$  zapiše kot:

$$\epsilon' = \begin{bmatrix} \epsilon_{x'x'} & \epsilon_{x'y'} \\ \epsilon_{y'x'} & \epsilon_{y'y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{u}_{x'}}{\partial x'} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_{x'}}{\partial y'} + \frac{\partial \tilde{u}_{y'}}{\partial x'} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_{x'}}{\partial y'} + \frac{\partial \tilde{u}_{y'}}{\partial x'} \right) & \frac{\partial \tilde{u}_{y'}}{\partial y'} \end{bmatrix}, \quad \omega' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_{x'}}{\partial y'} - \frac{\partial \tilde{u}_{y'}}{\partial x'} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_{y'}}{\partial x'} - \frac{\partial \tilde{u}_{x'}}{\partial y'} \right) & 0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Parcialni odvodi v (16) se računajo po pravilih za transformacijo gradienta vektorskega polja (Stanek in Turk, 1998; Srpčič, 2003). Za izračun posamezne komponente tenzorja majhnih deformacij in tenzorja majhnih zasukov uporabimo verižno pravilo:

$$\frac{\partial \tilde{u}_{i'}}{\partial x_{j'}} = \frac{\partial \tilde{u}_{i'}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_{j'}} + \frac{\partial \tilde{u}_{i'}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x_{j'}}, \quad (17)$$

$i, j = x, y.$



Za izračun parcialnega odvoda potrebujemo Jacobijevo matriko transformacije iz (15):

$$\mathbf{J}_{x'y',xy} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \cos \omega (1 + \varepsilon_{xx}) - \sin \omega \frac{\partial u_y}{\partial x} & \cos \omega \frac{\partial u_x}{\partial y} - \sin \omega (1 + \varepsilon_{yy}) \\ \sin \omega (1 + \varepsilon_{xx}) + \cos \omega \frac{\partial u_y}{\partial x} & \sin \omega \frac{\partial u_x}{\partial y} + \cos \omega (1 + \varepsilon_{yy}) \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\left(\mathbf{J}_{x'y',xy}^T\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial x}{\partial y'} \\ \frac{\partial y}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial y'} \end{bmatrix} = \quad (19)$$

$$= \frac{1}{s \left( (1 + \varepsilon_{xx})(1 + \varepsilon_{yy}) - \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)} \begin{bmatrix} \sin \omega \frac{\partial u_x}{\partial y} + \cos \omega (1 + \varepsilon_{yy}) & -\cos \omega \frac{\partial u_x}{\partial y} + \sin \omega (1 + \varepsilon_{yy}) \\ -\sin \omega (1 + \varepsilon_{xx}) - \cos \omega \frac{\partial u_y}{\partial x} & \cos \omega (1 + \varepsilon_{xx}) - \sin \omega \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

Elemente tenzorja majhnih deformacij in tenzorja majhnih zasukov (16) izrazimo s komponentami tenzorja majhnih deformacij terminske izmere  $t_1$  in dobimo:

- za normalno deformacijo,

$$\varepsilon_{x'x'}(s, \omega) = 1 + \frac{-(1 + \varepsilon_{yy}) \cos \omega - \frac{\partial u_x}{\partial y} \sin \omega}{s \left( (1 + \varepsilon_{xx})(1 + \varepsilon_{yy}) - \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)}, \quad \varepsilon_{y'y'}(s, \omega) = 1 + \frac{-(1 + \varepsilon_{xx}) \cos \omega + \frac{\partial u_y}{\partial x} \sin \omega}{s \left( (1 + \varepsilon_{xx})(1 + \varepsilon_{yy}) - \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)}, \quad (20)$$

- za strižno deformacijo in rotacijo,

$$\varepsilon_{x'y'}(s, \omega) = \frac{\varepsilon_{xy} \cos \omega + \frac{1}{2} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \sin \omega}{s \left( (1 + \varepsilon_{xx})(1 + \varepsilon_{yy}) - \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)}, \quad \omega'(s, \omega) = \frac{\omega \cos \omega - \frac{1}{2} (2 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \sin \omega}{s \left( (1 + \varepsilon_{xx})(1 + \varepsilon_{yy}) - \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)} \quad (21)$$

Z izrazi (20) in (21) za normalni deformaciji v smeri osi  $x$  in  $y$ , strižno deformacijo ter rotacijo lahko zapišemo funkcijsko odvisnost matrike gradienta v spremenjenem koordinatnem sistemu  $x'y'$  od spremembe datumskih količin:

$$\mathbf{G}'(s, \omega) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{u}_{x'}}{\partial x'} & \frac{\partial \tilde{u}_{x'}}{\partial y'} \\ \frac{\partial \tilde{u}_{y'}}{\partial x'} & \frac{\partial \tilde{u}_{y'}}{\partial y'} \end{bmatrix} = \mathbf{I} - (s(\mathbf{G} + \mathbf{I}))^{-1} \mathbf{R}_{x'y',xy}^T, \text{ za } i,j = x,y, \quad (22)$$

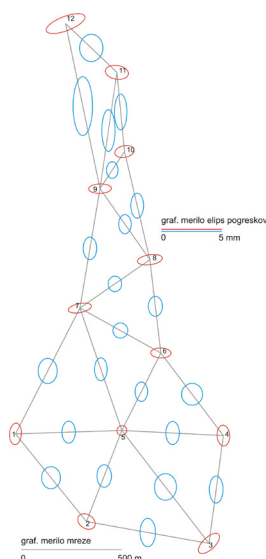
kjer je: **I** - enotska matrika dimenzije  $2 \times 2$ , **G** - matrika gradienta vektorskega polja premikov v osnovnem koordinatnem sistemu  $xy$  ter **R** - matrika rotacije med koordinatnima sistemoma.

## 4 PRAKTIČEN PRIMER

Obravnavamo ravninsko geodetsko mrežo dvanajstih točk (preglednica 1 in slika 1). Mreža je velikosti in oblike, s katero se običajno srečujemo pri nalogah spremljanja premikov vodnih pregrad, premikov zemeljskih plazov itd. Na podlagi izbranih položajev točk lahko v mreži računsko simuliramo opazovanja horizontalnih smeri in dolžin z metodo Monte Carlo (Rubinstein, 1981; Savšek-Safić, 2002) s predpostavljeno natančnostjo merjenih dolžin  $\sigma_{0,dol} = 1\text{mm}$  in smeri  $\sigma_{0,smer} = 1''$ . V simulirani mreži imamo:  $n = 86 - 43$  smeri in 43 dolžin;  $m = 12 \rightarrow 2m = 24$  koordinatnih neznank. Imamo 53 nadštevilnih opazovanj z defektom datuma  $d = 3$  (trije neznani datumski parametri - 2 translaciji in rotacija).

Epoha 1		
T	x [m]	y [m]
1	330.0325	644.3316
2	681.7345	209.2384
3	1288.8392	100.4651
4	1360.0170	635.9645
5	856.9534	661.3471
6	1050.1843	1045.9561
7	649.1559	1268.9611
8	995.9023	1508.8545
9	748.7254	1861.7558
10	870.1463	2045.8337
11	832.4640	2439.0910
12	578.2152	2681.0670

Preglednica 1: Koordinate točk v izbrani geodetski mreži.



Slika 1: Geodetska mreža 12 točk z absolutnimi in relativnimi elipsami pogreškov

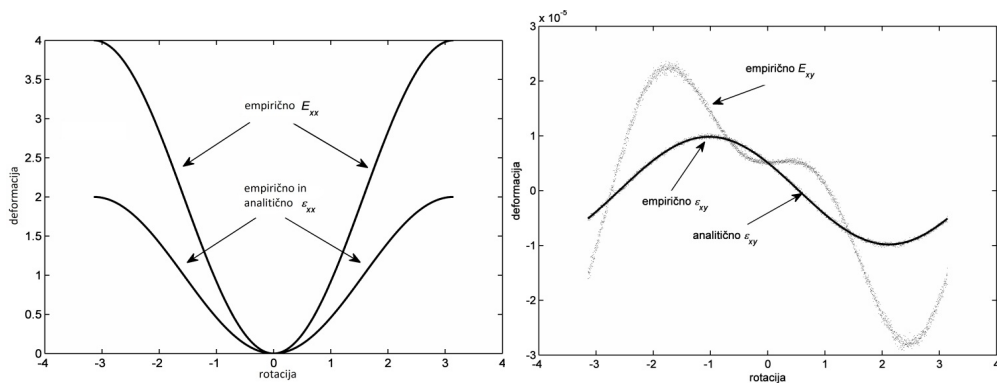
Na podlagi simuliranih opazovanj izravnamo mrežo kot prosto mrežo. Ocenjene natančnosti izravnanih koordinat točk grafično predstavimo z absolutnimi in relativnimi elipsami pogreškov (slika 1). Velikosti teh kažejo, da izbrana geodetska mreža ni homogene natančnosti. Elipse so večje v delu s slabšo geometrijo mreže. Poleg tega mreža glede natančnosti ni izotropna. Natančnost v točkah ni enaka v vseh smereh, kar opisujejo dokaj sploščene elipse pogreškov, predvsem v delu proti točki 12.

### 4.1 Analiza vpliva relativne spremembe geodetskega datuma med dvema izmerama

#### 4.1.1 Vpliv razlike v rotaciji geodetske mreže

Iz simulacij posameznih rotacij mreže v drugi izmeri in analitičnih zvez (20–21) lahko grafično

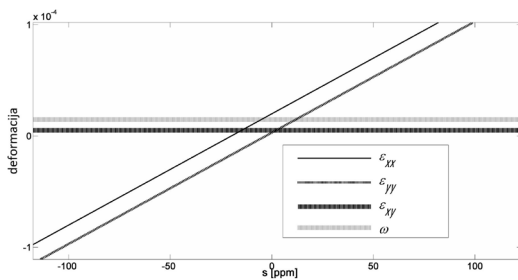
predstavimo odvisnost vrednosti elementov tenzorja malih deformacij od spremembe vrednosti rotacije koordinatnega sistema. Analitično določena (enačbi (20-21)) funkcijska odvisnost se popolnoma ujema z empirično določitvijo na intervalu  $[-\pi, +\pi]$  (slika 2). Empirično določena normalna deformacija  $E_{xx}$  iz tenzorja velikih deformacij (Stanek in Turk, 1998) se pričakovano ujema z normalno deformacijo  $\varepsilon_{xx}$  iz tenzorja malih deformacij do določenega kota rotacije (slika 2). Pri strižni deformaciji  $\varepsilon_{xy}$  na prvi pogled ne moremo ugotoviti ujemanja tenzorja malih in velikih deformacij (slika 2). Ker vrednost strižne deformacije ne presega  $2 \cdot 10^{-5}$ , lahko trdimo, da vrednost pri manjših vrednostih rotacije v primerjavi z normalno deformacijo ostaja skoraj nespremenjena.



Slika 2: Odvisnost normalne (levo)  $E_{xx}$  in  $\varepsilon_{xx}$  in strižne (desno)  $E_{xy}$  in  $\varepsilon_{xy}$  deformacije od spremembe rotacije na intervalu  $[-\pi, +\pi]$  na točki 5

### 4.1.1 Vpliv razlike v merilu geodetske mreže

Enako analiziramo vpliv relativne spremembe dolžinskega merila. Empirično, s spreminjanjem merila mreže ali pa na podlagi analitično izpeljanih izrazov na nekem izbranem intervalu, računamo deformacijske parametre v točkah geodetske mreže, ki jih lahko grafično predstavimo.



Slika 3: Odvisnost normalne in strižne deformacije ter rotacije od spremembe merila med izmerama na točki 5

Iz grafa (slika 3) je razvidno, da so deformacije in rotacije v linearni funkcijski zvezi s spremembo merila. Tako kot pri analizi vpliva rotacije vrednost strižne deformacije  $\varepsilon_{xy}$  ostaja konstantna ne glede na spremembo merila.

Na podlagi analize vplivov spremembe rotacije in merila geodetske mreže na računane deformacijske parametre v geodetski mreži lahko ugotovimo:

- Relativna sprememba rotacije in merila med terminskima izmerama praktično nima vpliva na vrednost strižne deformacije  $\varepsilon_{xy}$  v točki.
- Diferencialna rotacija v točki je pričakovano v linearni funkcijski zvezi z relativno spremembo rotacije mreže in je neodvisna od spremembe merila.
- Relativna sprememba rotacije vpliva na vrednosti normalnih deformacij v posameznih koordinatnih oseh. Oblika funkcijske zveze omogoča določitev lokalnega ekstrema.
- Vpliv spremembe merila na normalne deformacije je linearen. S povečevanjem relativne razlike dolžinskega merila med dvema izmerama se povečujejo vrednosti normalnih deformacij, kar je pričakovano glede na definicijo normalnih deformacij.

#### 4.2 Vpliv različnih definicij geodetskega datuma na računane premike, deformacije in rotacije v točkah

Obravnavamo dve terminski izmeri dolžin in horizontalnih smeri v ravninski geodetski mreži (slika 1). Predpostavimo, da se je med izmerama zgodil premik izbranih točk mreže (preglednica 1). Iz pravih premikov lahko izračunamo prave vrednosti deformacij, ki se uporabljajo za poznejšo primerjavo z obravnavanimi primeri različnih definicij geodetskega datuma.

T	Epoha 1		Vektor premikov		Epoha 2	
	x [m]	y [m]	$u_x$ [m]	$u_y$ [m]	x [m]	y [m]
1	330.0325	644.3316	- 0.0300	+ 0.0100	330.0025	644.3416
2	681.7345	209.2384	- 0.0200	0.0000	681.7145	209.2384
3	1288.8392	100.4651	- 0.0200	- 0.0100	1288.8192	100.4551
4	1360.0170	635.9645	0.0000	0.0000	1360.0170	635.9645
5	856.9534	661.3471	0.0000	0.0000	856.9534	661.3471
6	1050.1843	1045.9561	0.0000	0.0000	1050.1843	1045.9561
7	649.1559	1268.9611	0.0000	0.0000	649.1559	1268.9611
8	995.9023	1508.8545	0.0000	0.0000	995.9023	1508.8545
9	748.7254	1861.7558	- 0.0200	+ 0.0100	748.7054	1861.7658
10	870.1463	2045.8337	+ 0.0200	+ 0.0100	870.1663	2045.8437
11	832.4640	2439.0910	+ 0.0100	+ 0.0200	832.4740	2439.1110
12	578.2152	2681.0670	0.0000	0.0000	578.2152	2681.0670

Preglednica 2: Premiki med dvema terminskima izmerama.

Ker želimo preveriti vpliv definicije geodetskega datuma na računane premike in deformacije, obravnavamo različne načine izračuna koordinat točk v posamezni terminski izmeri. Koordinate točk izračunamo z:

- izravnavo proste mreže z enakimi približnimi koordinatami točk za obe terminski izmeri,
- izravnavo proste mreže za obe terminski izmeri z enakimi približnimi koordinatami točk in

izvedbo deformacijske analize po postopku Delft (Marjetič et al., 2012),

- izravnavo vpete geodetske mreže v obeh terminskih izmerah.

T	$\varepsilon_1$ [10 <sup>-6</sup> ]	$\varepsilon_2$ [10 <sup>-6</sup> ]	$\alpha_{\varepsilon_1}$ [°]	$\gamma_1$ [10 <sup>-6</sup> ]	$\alpha_{\gamma_1}$ [°]	$\omega_i$ [10 <sup>-6</sup> ]	$\varepsilon_{xx}$ [10 <sup>-6</sup> ]	$\varepsilon_{yy}$ [10 <sup>-6</sup> ]	$\varepsilon_{xy}$ [10 <sup>-6</sup> ]
1	55.38	- 0.44	46	27.91	134	21.78	55.36	-0.42	-1.14
2	22.43	7.21	36	7.61	144	18.82	22.08	7.55	2.27
3	26.05	- 3.94	169	15.00	11	23.82	5.54	16.57	13.95
4	27.20	- 3.63	178	15.41	2	9.94	10.90	12.66	15.39
5	21.39	1.65	29	9.87	151	14.90	19.94	3.10	5.15
6	0.00	0.00	0	0.00	0	0.00	0.00	0.00	0.00
7	7.76	1.29	51	3.23	129	1.62	7.68	1.37	-0.71
8	20.94	7.59	76	6.68	104	6.95	17.49	11.03	-5.85
9	168.64	6.23	41	81.20	139	22.50	167.84	7.03	11.38
10	239.80	16.98	42	111.41	138	36.61	239.18	17.60	11.73
11	99.79	- 15.15	13	57.47	167	- 37.02	67.02	17.62	51.89
12	113.62	- 30.41	15	72.01	165	- 21.48	78.02	5.19	62.13
						$\bar{\omega} = + 1.69''$			

Preglednica 3: Izračunane »prave« vrednosti deformacij in rotacij v geodetski mreži

#### 4.2.1 Izravnava proste mreže z enakimi približnimi koordinatami točk

Najprej izvedemo izravnavo simuliranih opazovanj v prosti mreži. Rezultati izravnave so podrejeni pogojem za izravnavo proste mreže, kar pomeni, da ni povprečne rotacije, spremembe merila in premika težišča mreže po izravnavi. Torej s tem ni spremembe geodetskega datuma med dvema terminskima izmerama, če v izravnavi privzamemo enake približne koordinate točk mreže v obeh izmerah. Lahko trdimo, da je taka definicija geodetskega datuma primerna za izračun deformacij, ki so se zgodile med dvema terminskima izmerama v mreži. Vrednosti deformacij so primerljive s pravimi vrednostmi deformacij (preglednica 3 in preglednica 5). Razlika je posledica slučajnih pogreškov opazovanj dolžin in kotov v geodetski mreži.

Način definicije datuma, kot ga zagotavlja prosta mreža, pa ni primeren za izračun vrednosti premikov v točkah. Vrednosti izračunanih sprememb koordinat točk ne predstavljajo vrednosti premikov točk v geodetski mreži (preglednica 4). Prav tako način obravnave proste geodetske mreže ne podaja prave rotacije v točkah. Izračunana povprečna rotacija geodetske mreže pri obravnavi proste mreže znaša - 0.37" (preglednica 5).

T	Epoha 1		Vektor premikov				Epoha 2	
	x [m]	y [m]	$u_x$ [m]	$\sigma_{u_x}$ [m]	$u_y$ [m]	$\sigma_{u_y}$ [m]	x [m]	y [m]
1	330.0328	644.3314	-0.0204	0.0022	0.0033	0.0025	330.0124	644.3347
2	681.7356	209.2406	-0.0075	0.0012	-0.0076	0.0036	681.7281	209.2330
3	1288.8396	100.4668	-0.0021	0.0019	-0.0107	0.0040	1288.8375	100.4561
4	1360.0202	635.9610	0.0079	0.0020	0.0122	0.0025	1360.0281	635.9732
5	856.9511	661.3456	0.0129	0.0006	0.0028	0.0022	856.9640	661.3484
6	1050.1830	1045.9578	0.0066	0.0011	0.0000	0.0017	1050.1896	1045.9578
7	649.1535	1268.9605	0.0074	0.0012	-0.0044	0.0016	649.1609	1268.9561
8	995.9007	1508.8554	0.0031	0.0011	-0.0049	0.0019	995.9038	1508.8505
9	748.7260	1861.7553	-0.0210	0.0008	0.0036	0.0028	748.7050	1861.7589
10	870.1483	2045.8343	0.0171	0.0007	0.0034	0.0033	870.1654	2045.8377
11	832.4641	2439.0895	0.0049	0.0012	0.0128	0.0048	832.4690	2439.1023
12	578.2150	2681.0677	-0.0089	0.0021	-0.0104	0.0058	578.2061	2681.0573

Preglednica 4: Izračunane spremembe koordinat iz rezultatov izravnave proste mreže

T	$\varepsilon_1$ [10°]	$\sigma_{\varepsilon_1}$ [10°]	$\varepsilon_2$ [10°]	$\sigma_{\varepsilon_2}$ [10°]	$\alpha_{\varepsilon_1}$ [°]	$\gamma_1$ [10°]	$\sigma_{\gamma_1}$ [10°]	$\alpha_{\gamma_1}$ [°]	$\omega_i$ [10°]	$\sigma_{\omega_i}$ [10°]	$\varepsilon_{xx}$ [10°]	$\sigma_{\varepsilon_{xx}}$ [10°]	$\varepsilon_{yy}$ [10°]	$\sigma_{\varepsilon_{yy}}$ [10°]	$\varepsilon_{xy}$ [10°]	$\sigma_{\varepsilon_{xy}}$ [10°]
1	60.36	9.09	3.30	9.72	43	28.53	6.27	137	13.67	7.02	60.26	9.58	3.41	10.25	2.42	7.02
2	36.52	12.86	17.07	12.86	9	9.72	4.17	171	10.37	12.16	29.90	17.23	23.69	17.17	9.21	12.16
3	43.36	7.62	1.52	8.13	157	20.92	4.85	23	8.24	6.21	7.48	9.19	37.39	8.36	14.63	6.21
4	35.52	20.37	-14.77	21.16	166	25.14	14.87	14	-12.18	14.50	-1.40	21.32	22.15	19.66	22.22	14.50
5	23.08	14.50	1.31	13.97	18	10.89	8.37	162	3.40	11.52	18.73	16.81	5.66	15.75	8.71	11.52
6	-8.97	3.03	-12.73	2.72	49	1.88	0.49	131	-10.02	2.84	-8.99	4.63	-12.72	3.29	-0.25	2.84
7	3.27	40.24	-4.62	33.78	54	3.94	35.00	126	-6.62	12.46	3.07	20.00	-4.42	14.86	-1.23	12.46
8	21.69	24.53	-1.99	20.61	79	11.84	14.19	101	0.89	17.66	14.35	30.22	5.35	18.27	-10.95	17.66
9	167.82	72.05	3.27	33.38	43	82.27	38.86	137	15.48	40.53	167.54	73.62	3.56	33.94	6.87	40.53
10	238.17	71.16	15.20	26.97	43	111.48	35.51	137	31.33	40.43	237.86	75.80	15.51	28.18	8.23	40.43
11	106.58	41.32	-15.96	30.29	14	61.27	23.81	166	-45.54	27.30	74.83	49.30	15.78	23.47	53.69	27.30
12	119.19	8.89	-31.61	7.40	17	75.40	5.54	163	-30.50	5.46	85.21	9.75	2.37	7.07	63.00	5.46
									$\bar{\omega} = -0.37$							

Preglednica 5: Deformacije in rotacije iz rezultatov izravnave proste mreže

#### 4.2.2 Definicija geodetskega datuma s klasičnimi metodami deformacijske analize

Koordinatne razlike izravnave proste mreže za obe terminski izmeri in pripadajoča matrika kofaktorjev so podlaga za testiranje skladnosti oblike mreže med dvema izmerama po postopku

Delft (Marjetič, 2011; Marjetič et al., 2012). Postopek izločanja domnevno premikajočih se točk in pripadajoče vrednosti testne statistike  $T_3$  (Marjetič et al., 2012) ter kritične vrednosti so podane v preglednici 6. Iz rezultatov je razvidno, da postopek poleg točk, ki so se dejansko premaknile, izloči tudi nekaj točk, ki se niso premaknile. Da postopek izloči točko 12 kot točko, ki se je statistično značilno premaknila, je predvsem posledica položaja te točke v mreži. Točka leži na območju s slabo geometrijo mreže. Bolj nenavaden je rezultat izločitve točke 4 in 5, ki jih postopek izloči kot zadnji dve. Vrednost testne statistike je blizu meje kritične vrednosti zavrnitve.

Izločena	$T_{3,\min}$	$F_{f_F, \infty, 1-\alpha/2}$	$f_F$
9	127.0656	1.5865	19
<b>12</b>	<b>103.5757</b>	<b>1.6228</b>	<b>17</b>
1	84.9098	1.6664	15
10	62.9296	1.7202	13
2	42.8769	1.7886	11
3	7.6042	1.8799	9
11	4.0790	2.0096	7
<b>4</b>	<b>2.8064</b>	<b>2.2141</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>1.6202</b>	<b>2.6049</b>	<b>3</b>

Preglednica 6: Rezultati postopka Delft

Rezultati postopka testiranja skladnosti oblike mreže med dvema izmerama določijo točke 6, 7 in 8 kot točke, za katere ne moremo trditi, da so se statistično značilno premaknile. S transformacijo S transformiramo vektor koordinatnih sprememb med dvema terminskima izmerama (preglednica 4) v datumsko pogojeno rešitev. Rešitev (preglednica 7) naj bi podajala realno oceno vektorja premikov točk mreže, ki jih uporabimo pri izračunu deformacij in rotacij v točkah geodetske mreže.

T	$u_x$ [m]	$\sigma_{u_x}$ [m]	$u_y$ [m]	$\sigma_{u_y}$ [m]
1	- 0.0302	0.0029	0.0101	0.0027
2	- 0.0207	0.0024	- 0.0035	0.0041
3	- 0.0161	0.0023	- 0.0112	0.0048
4	- 0.0020	0.0018	0.0111	0.0030
5	0.0032	0.0011	0.0056	0.0025
6	- 0.0001	0.0002	0.0013	0.0013
7	0.0024	0.0015	0.0000	0.0001
8	- 0.0001	0.0002	- 0.0032	0.0014
9	- 0.0215	0.0015	0.0072	0.0030
10	0.0180	0.0015	0.0061	0.0037
11	0.0088	0.0026	0.0158	0.0057
12	- 0.0031	0.0037	- 0.0055	0.0066

Preglednica 7: Ocenjene vrednosti premikov

Iz premikov točk mreže (Preglednica 7) izračunamo deformacije in rotacije v točkah mreže (preglednica 8). Ker s transformacijo S vektorja koordinatnih sprememb izravnave proste mreže ohranjamo identični geodetski datum v obeh izmerah, ni pričakovati spremembe vrednosti deformacij.

T	$\varepsilon_1$ [10 <sup>-6</sup> ]	$\sigma_{\varepsilon_1}$ [10 <sup>-6</sup> ]	$\varepsilon_2$ [10 <sup>-6</sup> ]	$\sigma_{\varepsilon_2}$ [10 <sup>-6</sup> ]	$\alpha_{\varepsilon_1}$ [°]	$\gamma_1$ [10 <sup>-6</sup> ]	$\sigma_{\gamma_1}$ [10 <sup>-6</sup> ]	$\alpha_{\gamma_1}$ [°]	$\omega_i$ [10 <sup>-6</sup> ]	$\sigma_{\omega_i}$ [10 <sup>-6</sup> ]	$\varepsilon_{xx}$ [10 <sup>-6</sup> ]	$\sigma_{\varepsilon_{xx}}$ [10 <sup>-6</sup> ]	$\varepsilon_{yy}$ [10 <sup>-6</sup> ]	$\sigma_{\varepsilon_{yy}}$ [10 <sup>-6</sup> ]	$\varepsilon_{xy}$ [10 <sup>-6</sup> ]	$\sigma_{\varepsilon_{xy}}$ [10 <sup>-6</sup> ]
1	60.36	9.09	3.30	9.72	43	28.53	6.27	137	21.34	7.02	60.26	9.58	3.41	10.25	2.42	7.02
2	36.52	12.86	17.07	12.86	9	9.72	4.17	171	18.05	12.16	29.90	17.23	23.69	17.17	9.21	12.16
3	43.36	7.62	1.52	8.13	157	20.92	4.85	23	15.91	6.21	7.48	9.19	37.39	8.36	14.63	6.21
4	35.52	20.37	-14.77	21.16	166	25.14	14.87	14	-4.51	14.50	-1.40	21.32	22.15	19.66	22.22	14.50
5	23.08	14.50	1.31	13.97	18	10.89	8.37	162	11.07	11.52	18.73	16.81	5.66	15.75	8.71	11.52
6	-8.97	3.03	-12.73	2.72	49	1.88	0.49	131	-2.34	2.84	-8.99	4.63	-12.72	3.29	-0.25	2.84
7	3.27	40.24	-4.62	33.78	54	3.94	35.00	126	1.05	12.46	3.07	20.00	-4.42	14.86	-1.23	12.46
8	21.69	24.53	-1.99	20.61	79	11.84	14.19	101	8.56	17.66	14.35	30.22	5.35	18.27	-10.95	17.66
9	167.82	72.05	3.27	33.38	43	82.27	38.86	137	23.15	40.53	167.54	73.62	3.56	33.94	6.87	40.53
10	238.17	71.16	15.20	26.97	43	111.48	35.51	137	39.00	40.43	237.86	75.80	15.51	28.18	8.23	40.43
11	106.58	41.32	-15.96	30.29	14	61.27	23.81	166	-37.87	27.30	74.83	49.30	15.78	23.47	53.69	27.30
12	119.19	8.95	-31.61	7.47	17	75.40	5.64	163	-22.83	5.61	85.21	9.75	2.37	7.07	63.00	5.61
									$\bar{\omega} = +1.21'$							

Preglednica 8: Deformacije in rotacije iz ocenjenih premikov po postopku Delft

Deformacije se skoraj identične tistim iz izravnave proste mreže, so pa spremembe pri rotacijah v točkah. Tako srednja vrednost rotacije znaša + 1.21 ′, kar je boljša ocena rotacije mreže med dvema izmerama kot pri izravnavi prostih mrež.

#### 4.2.3 Primer napačne definicije geodetskega datuma

Geodetsko mrežo vpneemo na točki 2 in 5 oziroma na štiri koordinatne komponente teh dveh točk. Po izravnavi vpete geodetske mreže so popravki približnih koordinat točke 2 in 5 enaki nič. Glede na pravi premik točke 2 (preglednica 2) lahko pričakujemo rotacijo in spremembo merila celotne mreže. Preden izračunamo vrednosti premikov in deformacij, lahko predvidevamo, da bo predvsem večji vpliv napake v merilu geodetske mreže. Z vpetjem mreže na dve točki (4 koordinatne komponente teh dveh točk) samodejno zanemarimo dejstvo, da je z merjenimi dolžinami merilo mreže že definirano.



T	Epoha 1		Vektor premikov				Epoha 2	
	x [m]	y [m]	$u_x$ [m]	$\sigma_{u_x}$ [m]	$u_y$ [m]	$\sigma_{u_y}$ [m]	x [m]	y [m]
1	330.0300	644.3347	-0.0142	0.0013	-0.0155	0.0014	330.0157	644.3192
2	681.7345	209.2384	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	681.7345	209.2384
3	1288.8439	100.4613	-0.0125	0.0021	0.0198	0.0015	1288.8314	100.4811
4	1360.0273	635.9604	-0.0219	0.0019	0.0261	0.0014	1360.0053	635.9865
5	856.9534	661.3471	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	856.9534	661.3471
6	1050.1886	1045.9623	-0.0252	0.0012	-0.0103	0.0017	1050.1634	1045.9520
7	649.1561	1268.9686	-0.0173	0.0018	-0.0351	0.0022	649.1388	1268.9335
8	995.9075	1508.8646	-0.0414	0.0023	-0.0332	0.0032	995.8662	1508.8314
9	748.7318	1861.7688	-0.0679	0.0032	-0.0449	0.0047	748.6639	1861.7239
10	870.1560	2045.8491	-0.0398	0.0038	-0.0477	0.0056	870.1161	2045.8014
11	832.4729	2439.1082	-0.0631	0.0052	-0.0534	0.0080	832.4098	2439.0549
12	578.2222	2681.0897	-0.0756	0.0064	-0.0931	0.0093	578.1467	2680.9967

Preglednica 9: Izračunane koord. spremembe iz rezultatov izravnave vpete mreže na točki 2 in 5

T	$\varepsilon_1$ [10°]	$\sigma_{\varepsilon_1}$ [10°]	$\varepsilon_2$ [10°]	$\sigma_{\varepsilon_2}$ [10°]	$\alpha_{\varepsilon_1}$ [°]	$\gamma_1$ [10°]	$\sigma_{\gamma_1}$ [10°]	$\alpha_{\gamma_1}$ [°]	$\omega_i$ [10°]	$\sigma_{\omega_i}$ [10°]	$\varepsilon_{xx}$ [10°]	$\sigma_{\varepsilon_{xx}}$ [10°]	$\varepsilon_{yy}$ [10°]	$\sigma_{\varepsilon_{yy}}$ [10°]	$\varepsilon_{xy}$ [10°]	$\sigma_{\varepsilon_{xy}}$ [10°]
1	25.16	48.32	-31.90	49.25	43	28.53	48.28	137	-17.81	7.02	25.06	9.58	-31.80	10.25	2.42	7.02
2	1.32	15.43	-18.13	15.42	9	9.72	9.48	171	-21.10	12.16	-5.30	17.23	-11.51	17.17	9.21	12.16
3	8.16	8.82	-33.69	9.43	157	20.92	6.69	23	-23.24	6.21	-27.72	9.19	2.19	8.36	14.63	6.21
4	0.32	17.83	-49.97	18.49	166	25.14	10.94	14	-43.66	14.50	-36.60	21.32	-13.05	19.66	22.22	14.50
5	-12.12	12.78	-33.90	12.41	18	10.89	5.10	162	-28.08	11.52	-16.48	16.81	-29.54	15.75	8.71	11.52
6	-44.17	2.88	-47.94	2.80	49	1.88	0.12	131	-41.49	2.84	-44.19	4.63	-47.92	3.29	-0.25	2.84
7	-31.93	12.90	-39.82	12.15	54	3.94	1.37	126	-38.10	12.46	-32.13	20.00	-39.62	14.86	-1.23	12.46
8	-13.51	20.40	-37.19	17.94	79	11.84	7.57	101	-30.59	17.66	-20.85	30.22	-29.85	18.27	-10.95	17.66
9	132.62	96.92	-31.93	50.07	43	82.27	65.63	137	-16.00	40.53	132.33	73.62	-31.64	33.94	6.87	40.53
10	202.96	83.91	-20.00	32.35	43	111.48	49.08	137	-0.15	40.43	202.66	75.80	-19.69	28.18	8.23	40.43
11	71.37	46.80	-51.17	34.28	14	61.27	30.62	166	-77.02	27.30	39.62	49.30	-19.42	23.47	53.69	27.30
12	83.99	10.59	-66.81	9.12	17	75.40	7.30	163	-61.98	5.93	50.01	10.53	-32.83	8.15	63.00	5.93
									$\bar{\omega} = -6,86^\circ$							

Preglednica 10: Deformacije in rotacije iz rezultatov izravnave vpete mreže na točki 2 in 5

Rezultat napačne definicije geodetskega datuma so torej močno popačene vrednosti premikov točk mreže in vrednosti glavnih normalnih deformacij v točkah geodetske mreže (preglednici 9 in 10). Največji vpliv ima napačno definirano merilo. Vpliv spremembe rotacije je skoraj zanemarljiv za tako vrednost rotacije. Vrednosti strižnih deformacij ne glede na spremembo merila in rotacije mreže ostajajo nespremenjene.

## 5 SKLEP

Deformacije v geodetski mreži smo obravnavali kot mehanske deformacije objekta, ki je opisan z geodetsko mrežo. Deformacije in rotacije smo računali iz vektorskega polja premikov točk. Zaradi specifične predstavitve objekta s točkami geodetske mreže smo deformacije in rotacije v točkah geodetske mreže obravnavali pod predpostavko, da so deformacije med točkami mreže homogene.

Zanimal nas je vpliv geodetskega datuma na računane deformacije in rotacije. Deformacijsko stanje obravnavanega objekta je neodvisno od izbire koordinatnega sistema, v katerem to stanje predstavljamo. Kljub temu izbira geodetskega datuma v dveh primerjanih terminskih izmerah ni poljubna. Geodetski datum mora biti definiran z datumskimi parametri, ki ostajajo nespremenjeni v nekem obravnavanem časovnem intervalu med dvema izmerama. Glavni razlog za to je, da spremembe koordinatnega sistema med dvema terminskima izmerama vplivajo na vrednosti deformacij in rotacij v točkah geodetske mreže. Izpeljali smo analitične izraze vpliva spremembe geodetskega datuma med dvema izmerama na vrednosti deformacij in rotacij v točkah geodetske mreže. S tem smo dokazali, da deformacije in rotacije niso datumsko neodvisne količine. Prišli smo do pomembne ugotovitve, da relativna sprememba rotacije vpliva na vrednosti normalnih deformacij ter na rotacije ter zanemarljivo vpliva na vrednost strižne deformacije v točki. Vpliv spremembe merila na normalne deformacije je linearen.

Na koncu smo na primeru različnih definicij geodetskega datuma pokazali dejanski vpliv na računane deformacije in premike točk. Rezultati kažejo, da v primeru poljubnega identičnega datuma (primer izravnave proste mreže) v obeh primerjanih terminskih izmerah ni vpliva na računane deformacije. Ne moremo pa izračunati pravih rotacij v točkah. Posledično zaradi napačne rotacije tudi ne moremo izračunati pravih premikov točk mreže. Praktično smo preverili, da problem razlike v definiciji geodetskega datuma med dvema izmerama skoraj v celoti predstavlja problem razlike rotacije geodetske mreže. Razlika v merilu po našem mnenju ni tako problematična, saj jo lahko precej enostavno ocenimo iz primerjave merjenih dolžin med dvema izmerama.

### Literatura in viri:

Marjetič, A., Zemljak, M., Ambrožič, T. (2012). *Defomacijska analiza po postopku Delft*, *Geodetski vestnik* 56, 9–26.

Ašanin, S. (1986). *Prilog obradi i analizi geodetskih merenja za odredjivanje pomeranja i deformacija objekta i tla*. *Doktorska disertacija*. Beograd, Univerzitet u Beogradu, Gradjevinski fakultet, Institut za geodeziju.

Berber, M., Dare, P., Vaniček, P. (2006). *Robustness Analysis of Two-Dimensional Networks*. *Journal of Surveying Engineering*, 132(4), 168–175.

Cai, J., Grafarend, E. (2007). *The statistical analysis of geodetic deformation (strain rate) derived from the space geodetic measurements of BIFROST project in Fennoscandia*. *Journal of Geodynamics*, 43(2), 214–238.

Caspary, W. F. (1988). *Concepts of network and deformation analysis*. Kensington, N. S. W., Avstralija, *The University of New South Wales*.

Chrzanowski, A., Chen, Y. Q., and Secord, J. M. (1983). *Analysis of the Simulated Monitoring Network Using the Fredericton Approach*. (ed. W. Welsch) *Deformationsanalysen '83, Geometrische Analyse und Interpretation von Deformationen Geodätischer Netze. Schriftenreihe, Wissenschaftlicher Studiengang Vermessungswesen. München, Hochschule der Bundeswehr München*.

Marjetič, A. (2011). Statistična analiza značilnih premikov točk v geodetskih mrežah, doktorska disertacija, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana.

Marjetič, A., Ambrožič, T., Turk, G., Sterle, O., Stopar, B. (2010). Statistical properties of Strain and Rotation Tensors in Geodetic Network, *Journal of Surveying Engineering*, 136(3), 102–110.

Marjetič, A., Stopar, B. (2007). Geodetski datum in S-transformacija. *Geodetski vestnik*, 51(3), 549–564.

Proszynski, W. (2003). Is the Minimum-Trace Datum Definition Theoretically Correct as Applied in Computing 2D and 3D Displacements?. (ed. Stiros, S. C., Pytharouli S.) 11th FIG Symposium on Deformation Measurements. Santorini, Patras University, Dept. Of Civil Engineering.

Rao, C. R., Mitra, S. K. (1972). *Generalized Inverse of Matrices and its Application*. New York, John Wiley&Sons, 256 str.

Rubinstein, R. Y. (1986). *Monte carlo optimization, simulation and sensitivity of queueing networks*. New York, John Wiley&Sons: 260 str.

Savšek Safič, S. (2002). Optimalna metoda določanja stabilnih točk v deformacijski analizi. Doktorska disertacija. Ljubljana, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo: 211 str.

Shames, I. H., Cozzarelli, F. A. (1997). *Elastic and Inelastic Stress Analysis*. Washington, Taylor&Francis, Revised Printing: 722 str.

Srpčič, S. (2003). *Mehanika trdnih teles*. Ljubljana, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo: 651 str.

Stanek, M., Turk, G. (1998). *Osnove mehanike trdnih teles*. Ljubljana, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo: 254 str.

Sterle, O. (2007). Združevanje klasičnih geodetskih in GNSS-opazovanj v geodinamičnih raziskavah. Magistrsko delo. Ljubljana, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo: 118 str.

Van Mierlo, J. (1978). A testing procedure for analyzing geodetic deformation measurements. 2nd FIG Symposium on Deformation Measurements by Geodetic Methods, Bonn.

Welsch, W., Zhang, Y. (1983). Einige Methoden zur Untersuchung kongruenter und Affiner Beziehungen in geodatischen Unterwacungsnetzen zur Ermittlung von Deformationen. "Deformationsanalysen '83, Geometrische Analyse und Interpretation von Deformationen Geodatischer Netze (ed. W. Welsch), Schriftenreihe, Wissenschaftlicher Studiengang Vermessungswesen. Muenchen, Hochschule der Bundeswehr Muenchen.

Wolf, H. (1994). *Ausgleichungs Rechnung I*. Universität Bonn, Bonn, Institut für theoretische Geodäsie, Ferd. Dümmlers Verlag.

Xu, P., Schimada, S., Fujii, Y., Tanaka, T. (2000). Invariant geodynamical information in geometric geodetic measurements. *Geophysical Journal International*, 142, 586–602.

**Prispelo v objavo: 24. januar 2013**

**Sprejeto: 3. april 2013**

asist. dr. Ales Marjetič, univ. dipl. inž. geod.

FGG - Oddelek za geodezijo, Jamova 2, SI-1000 Ljubljana

e-pošta: ales.marjetic@fgg.uni-lj.si