

Univerza  
v Ljubljani  
Fakulteta  
za gradbeništvo  
in geodezijo



Jamova 2  
1000 Ljubljana, Slovenija  
<http://www3.fgg.uni-lj.si/>

**DRUGG** – Digitalni repozitorij UL FGG  
<http://drugg.fgg.uni-lj.si/>

Ta članek je avtorjeva zadnja recenzirana različica, kot je bila sprejeta po opravljeni recenziji.

Prosimo, da se pri navajanju sklicujete na bibliografske podatke, kot je navedeno:

University  
of Ljubljana  
Faculty of  
Civil and Geodetic  
Engineering



Jamova 2  
SI – 1000 Ljubljana, Slovenia  
<http://www3.fgg.uni-lj.si/>

**DRUGG** – The Digital Repository  
<http://drugg.fgg.uni-lj.si/>

This version of the article is author's manuscript as accepted for publishing after the review process.

When citing, please refer to the publisher's bibliographic information as follows:

Dujc, J., Brank, B. 2006. Račun mejne nosilnosti armiranobetonskih plošč = Limit load analysis of reinforced concrete plates. *Gradbeni vestnik* 55, 5: 126-132.

<http://www.zveza-dgits.si/arhiv-gradbenega-vestnika>

# RAČUN MEJNE NOSILNOSTI ARMIRANOBETONSKIH PLOŠČ

## LIMIT LOAD ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE PLATES

Jaka Dujc in Boštjan Brank

### POVZETEK

Prikazana je analiza mejne nosilnosti armiranobetonskih plošč z razmeroma enostavno materialno nelinearno metodo končnih elementov. Konstitutivni model armiranobetonske plošče, ki je definiran na nivoju rezultant napetosti (t.j. upogibnih momentov in prečnih sil na dolžinsko enoto), povezuje celotne vrednosti notranjih sil s celotnimi vrednostmi pripadajočih deformacij. Takšna analiza je primerna za izračun (oceno) mejnega stanja armiranobetonskih plošč pri monotonem obremenjevanju, kar je prikazano z več numeričnimi primeri.

### SUMMARY

An efficient approach for computing the limit load of reinforced concrete plates by nonlinear finite element method is presented. The constitutive model for reinforced concrete plates is set in terms of stress resultants (bending moments and shear forces per unit length) and corresponding strains, relating their total values. The approach is suitable for analysis of limit state of reinforced concrete plates subjected to monothonic loading, as shown in several numerical examples.

# 1 UVOD

Analiza mejne nosilnosti armiranobetonskih plošč ima precejšno praktično vrednost, zato je na to temo moč najti precej strokovne literature. Inženir, ki želi izračunati mejno stanje armiranobetonske plošče, ima na voljo vsaj dve možnosti: lahko uporabi metodo plastičnih (porušnih) linij, ki je razložena v mnogih knjigah (npr. [Save, 1972], [Nielsen, 1984], [Moy, 1996], [Park, 2000], [Radosavljević, 1990]) ali pa komercialne računalniške programe za analizo konstrukcij po metodi končnih elementov, ki omogočajo materialno nelinearno modeliranje armiranega betona (npr. [Abaqus, 2002]).

Mejna nosilnost (porušna obtežba), izračunana po metodi plastičnih linij, je za mnogo standardnih primerov (npr. za pravokotne plošče pod enakomerno obtežbo, ipd.) podana v omenjenih (in drugih) knjigah. Osnovni princip te metode so predpostavljene plastične linije, ki ploščo razdelijo na posamezne toge dele, ki se lahko sučejo le okoli teh linij. Če delo, ki ga na takšnem kinematičnem mehanizmu opravijo polnoplastični momenti na mestu plastičnih linij, enačimo z delom, ki ga na istem mehanizmu opravi zunanja obtežba, pridemo do mejne nosilnosti (porušne obtežbe) armiranobetonske plošče. Omenimo naj, da z metodo plastičnih linij dobimo zgornjo oceno mejne nosilnosti.

Pri uporabi komercialnih računalniških programov se ploščo po debelini razdeli na sloje betona in armature. Za opis obnašanja sloja armature se uporabi standardni elastoplastični materialni model za jeklo, za opis obnašanja slojev betona pa so na voljo precej sofisticirani nelinearni snovni model, ki opisujejo beton v tlaku kot elastoplastičen material, za beton v nategu pa navadno uporabijo modele elastične poškodovanosti. Pri takšni nelinearni analizi plošč je potrebna uporaba končnih elementov za lupine ter poznavanje precejšnega števila parametrov, ki opisujejo obnašanje betona.

V tem delu obravnavamo tretjo možnost. Ta prav tako temelji na materialno nelinearni analizi armiranobetonske plošče z metodo končnih elementov, vendar definiramo konstitutivni model armiranobetonske plošče z resultantami napetosti, kar naredi nelinearno analizo mnogo enostavnejšo. Izognemo se sofisticiranemu snovnemu modelu betona in si omogočimo uporabo

končnih elementov za plošče, zaradi česar so računski časi analize mnogo krajši. Ideja je povzeta po [Ibrahimbegović, 1992, 1993, 1994], spremenimo jo le v toliko, da uporabimo priporočila Evrokoda 2 za opis konstitutivnega modela betona.

Z omenjenim pristopom lahko identificiramo mejno stanje armiranobetonske plošče pri monotonem povečevanju obtežbe; npr. pri obremenitvi zaradi lastne in stalne obtežbe. Če pa je obteževanje plošče takšno, da je prisotno veliko pomembnega razbremenjevanja in ponovnega obremenjevanja, se moramo omenjenemu načinu računanja mejne obtežbe odpovedati. Omeniti je potrebno, da je že pri monotonem povečevanju zelo verjetno, da bo prišlo do lokalnega razbremenjevanja zaradi lokalne spremembe togosti plošče, vendar predpostavimo, da so neelastični efekti zaradi takšnega razbremenjevanja zanemarljivi. Poleg tega predpostavimo tudi, da pomiki plošče niso tako veliki, da bi prišli do izraza membranski efekti, povezani s pojavom osnih (membranskih) sil v plošči. Takšne pojave pri analizi mejnih nosilnosti armiranobetonskih plošč lahko obravnavamo kot sekundarne in zanemarljive. Če pa jih kljub temu želimo vključiti v analizo, moramo upoštevati geometrijsko nelinearnost in končne elemente za plošče zamenjati s končnimi elementi za lupine. Omenimo naj, da membranske sile lahko znatno povečajo nosilnost plošče pri nezanemarljivih pomikih.

V nadaljevanju je članek organiziran na naslednji način: najprej opišemo določitev konstitutivnega modela na nivoju rezultant napetosti za izotropno in anizotropno armirane plošče, nato podamo algoritme, ki jih uporabljamo pri računu mejne nosilnosti, pred zaključkom pa prikažemo še numerične primere.

## **2 KONSTITUTIVNI MODEL ARMIRANEGA BETONA ZA PLOŠČE**

### **2.1 Osnovna ideja modela**

Po Reissner-Mindlinovi teoriji plošč obravnavamo ploščo kot ploskev v ravnini  $x_1x_2$ , ki ima v vsaki točki tri prostostne stopnje: pomik v smeri  $x_3$  in zasuka normale na ploskev okoli osi  $x_1$  in  $x_2$  (slika 1). Te prostostne stopnje nam omogočajo, da izrazimo vektor ukrivljenosti  $\boldsymbol{\kappa}$  in vektor strižnih deformacij  $\boldsymbol{\gamma}$  kot

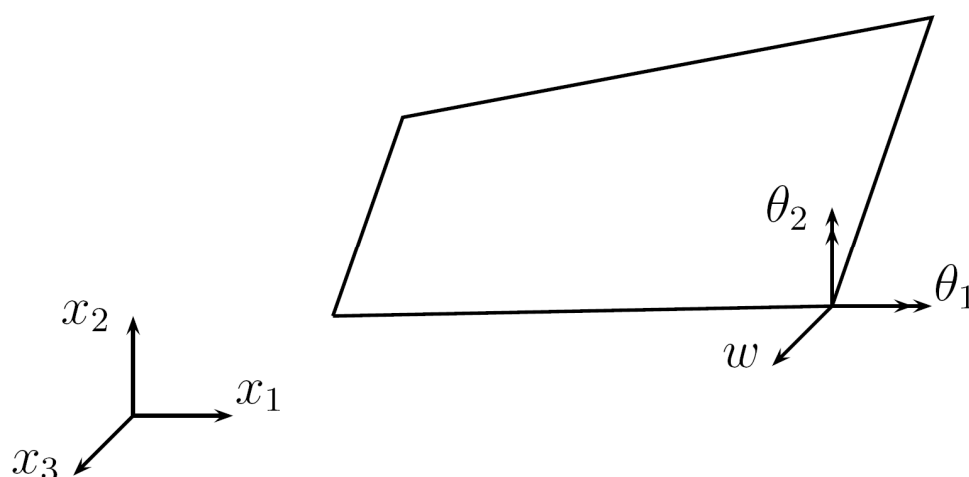
$$\boldsymbol{\kappa} = \left[ -\frac{\partial \theta_2}{\partial x_1}, \frac{\partial \theta_1}{\partial x_2}, \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \theta_2}{\partial x_2} \right]^T = [\kappa_{11}, \kappa_{22}, 2\kappa_{12}]^T, \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \left[ \frac{\partial w}{\partial x_1} + \theta_2, \frac{\partial w}{\partial x_2} - \theta_1 \right]^T. \quad (2)$$

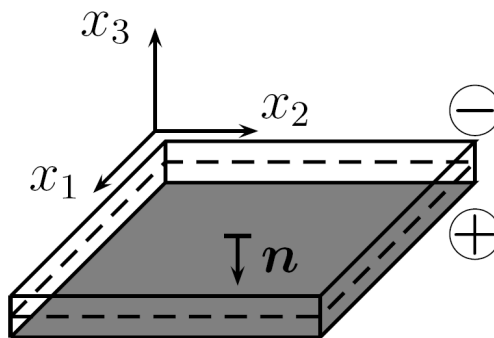
V tem delu uporabljeni konstitutivni model za armiranobetonske plošče povezuje celotne vrednosti ukrivljenosti in strižnih deformacij s celotnimi vrednostmi pripadajočih notranjih sil. Slednje zberemo v vektor upogibnih momentov na dolžinsko enoto  $\mathbf{m}$  in vektor prečnih sil na dolžinsko enoto  $\mathbf{q}$

$$\mathbf{m} = [m_{11}, m_{22}, m_{12}]^T, \quad \mathbf{q} = [q_1, q_2]^T \quad (3)$$

Glede na definicijo ukrivljenosti (1) in uporabljen konstitutivni model, so momenti pozitivni, kadar pride do nategov na spodnji strani plošče, to je na strani z normalo  $\mathbf{n}$  v  $-x_3$  smeri (slika 2).



Slika 1: Pozitivne smeri pomika in zasukov



Slika 2: Nategnjena stran plošče (potemnjena stran), ko so momenti pozitivni

Strižni in upogibni del konstitutivnega modela armiranega betona obravnavamo ločeno. Za izračun strižnih sil uporabimo standardne linearno elastične konstitutivne enačbe za izotropen material

$$\mathbf{q} = C_s \boldsymbol{\gamma}, C_s = \frac{5}{6} \frac{E_c h}{2(1+\nu_c)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

kjer je  $E_c$  elastični modul betona,  $h$  debelina plošče in  $\nu_c$  Poissonov količnik betona. Ta konstitutivni model seveda ne omogoča analize porušitve plošče zaradi preboja.

Upogibni del konstitutivnega modela armiranega betona pa razdelimo na dve stanji: na stanje *I* nerazpokanega betona ter na stanje *II*, kjer so že prisotne razpoke v betonu. Ko je beton nerazpokan, upoštevamo linearno elastično povezavo med momenti in ukrivljenostmi. Če zanemarimo prispevek armature, imamo

$$\mathbf{m} = C_B \boldsymbol{\kappa}, C_B = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu_c^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_c & 0 \\ \nu_c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_c}{2} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Stanje *II* se začne, ko eden od momentov v dveh ortogonalnih smereh (to sta lahko ali smeri glavnih ukrivljenosti ali smeri glavnih momentov ali smeri največje odpornosti plošče; več o tem bo

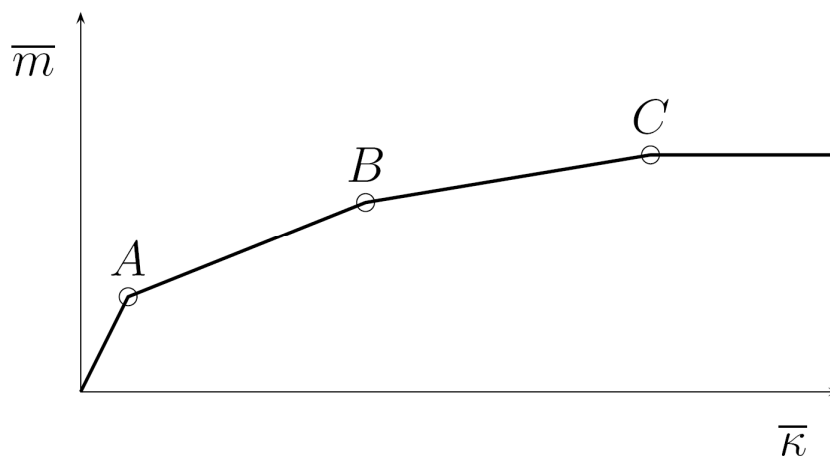
povedanega v nadaljevanju) prekorači vrednost  $m_{raz} = f_{ct} \frac{h^2}{6}$ , kjer je  $f_{ct}$  natezna trdnost betona (na

$m_{raz}$  lahko gledamo kot na moment, pri katerem pride do razpok pri ravninskem nosilcu s širino 1).

Nastanek morebitnih razpok torej kontroliramo v dveh ortogonalnih smereh. Tudi v stanju  $II$ , ko so že prisotne razpoke, kontroliramo nastanek novih razpok v dveh ortogonalnih smereh; pri čemer sta ti smeri lahko različni od tistih ob nastanku prve razpoke. V stanju  $II$  zanemarimo vpliv Poissonovega količnika in konstitutivni model armiranobetonske plošče določimo tako, da za vsako smer posebej izvednotimo diagram moment-ukrivljenost. Postopek izvednotenja diagrama moment-ukrivljenost opišemo v poglavju 2.2.

## 2.2 Diagrami moment-ukrivljenost

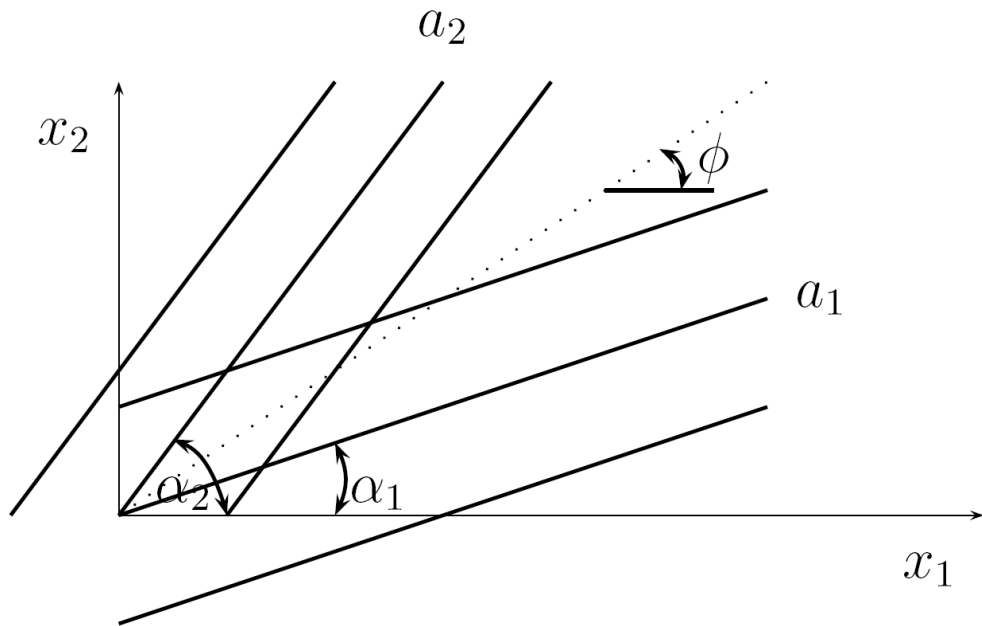
Poglejmo si, kako določimo diagram med momentom  $\bar{m}$  in pripadajočo ukrivljenostjo  $\bar{\kappa}$ , za smer, ki jo določa kot  $\phi$  (slika 4). Najprej izračunamo vrednosti  $\bar{m}$  in  $\bar{\kappa}$  za tri tipična stanja armiranobetonskega prereza (slika 3), ki so: pojav prve razpoke v betonu (točka  $A$ ,  $\bar{m} = m_{raz}$ ,  $\bar{\kappa} = \kappa_{raz}$ ), začetek plastifikacije armature (točka  $B$ ,  $\bar{m} = m_{tec}$ ,  $\bar{\kappa} = \kappa_{tec}$ ) in porušitev betona v tlaku (točka  $C$ ,  $\bar{m} = m_{kon}$ ,  $\bar{\kappa} = \kappa_{kon}$ ). Nato te točke preprosto povežemo med seboj.



Slika 3: Diagram moment ukrivljenost za glavno smer

Ključni parameter, ki določa obliko diagrama, je efektivna količina armature v smeri kota  $\phi$ , ki jo določimo po enačbi

$$a_{\phi} = \sum a_i \cos^2(\phi - \alpha_i), \quad (6)$$



Slika 4: Količine in smeri armature

kjer je  $a_i$  površina armature položene v smeri  $\alpha_i$  (slika 4).

Konstitutivne enačbe za beton in jeklo, ki jih potrebujemo za določitev točk  $A$ ,  $B$  in  $C$ , privzamemo po Evrokodu 2. Za beton v tlaku uporabimo naslednjo zvezo med napetostjo  $\sigma_c$  in deformacijo  $\varepsilon_c$

$$\sigma_c = \begin{cases} f_{ck} \left(1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}}\right)^n\right) & \text{za } 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2} \\ f_{ck} & \text{za } \varepsilon_{c2} < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu3} \end{cases} \quad (7)$$

V (7) je  $\varepsilon_{c2} = 0.002$ ,  $\varepsilon_{cu3} = 0.0035$ ,  $n = 2$  za betone  $f_{ck} \leq 50$  in  $f_{ck}$  je tlačna trdnost betona.

Natezna trdnost betona in pripadajoča deformacija sta po Evrokodu 2  $f_{ct} = f_{ct}(f_{ck})$  in  $\varepsilon_{ct} = \frac{f_{ct}}{E_c}$ . Za

armaturo privzamemo standardni diagram med deformacijami  $\varepsilon_s$  in napetostmi  $\sigma_s$

$$\sigma_s = \begin{cases} E_s \varepsilon_s & \text{za } \varepsilon_s \leq \frac{f_y}{E_s} \\ f_y & \text{za } \varepsilon_s > \frac{f_y}{E_s} \end{cases} \quad (8)$$

kjer je  $f_y$  trdnost jekla,  $E_s$  pa elastični modul jekla ( $E_s = 20000 \text{ kN/cm}^2$ ).



## 2.3 Kritični momenti in pripadajoče ukrivljenosti

Za določitev kritičnih momentov (točke  $A$ ,  $B$  in  $C$  na sliki 3) potrebujemo sledeče parametre:

trdnost jekla  $f_y$ , elastični modul jekla  $E_s$ , količino armature  $a_\phi [mm^2/m]$ , tlačno trdnost betona

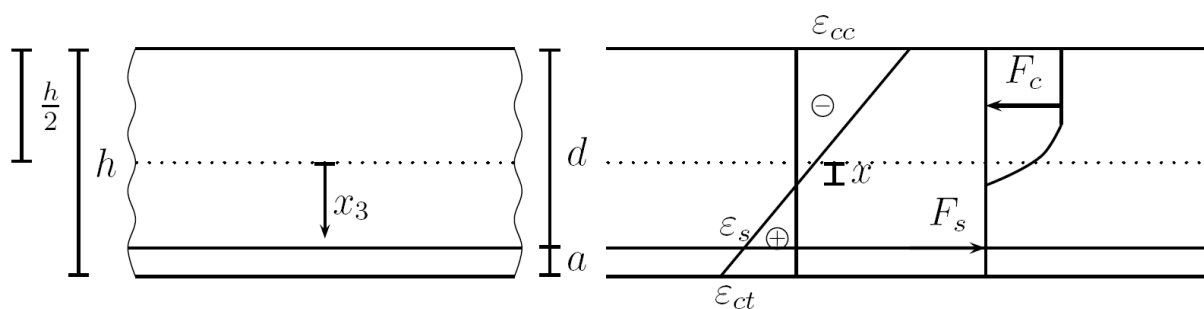
$f_{ck}$ , natezno trdnost betona  $f_{ct}$  oziroma pripadajočo deformacijo  $\varepsilon_{ct} = \frac{f_{ct}}{E_c}$ , elastični modul betona

$E_c$ ,  $h$  višino plošče,  $d$  statično višino oz. oddaljenost armature od spodnjega roba  $a = h - d$ . Na

sliki 5 je  $\varepsilon_{cc}$  robna deformacija betona na tlačni strani,  $\varepsilon_{ct}$  robna deformacija betona na natezni

strani,  $\varepsilon_s$  deformacija armature,  $F_c$  rezultanta tlačnih napetosti v betonu,  $F_s$  sila v armaturi in

$x$  razdalja nevtralne osi do težiščne linije betonskega prereza.



Slika 5: Ravnotežje v prerezu plošče

Moment in pripadajoča ukrivljenost, pri katerem pride do prve razpoke, sta

$$m_{raz} = f_{ct} \frac{h^2}{6}, \quad \kappa_{raz} = 2 \frac{\varepsilon_{ct}}{h} = 2 \frac{f_{ct}}{E_c h}. \quad (9)$$

Moment, pri katerem pride do plastifikacije armature, določimo tako, da predpišemo

deformacijo v armaturi  $\varepsilon_s = \frac{f_y}{E_s}$  ter s tem silo v armaturi  $F_s = f_y a_\phi$ . Ker je rezultanta napetosti v

betonu enaka sili v armaturi:

$$F_c = F_s, \quad F_c(x) = \int_{-\frac{h}{2}}^x \sigma_c dx_3, \quad (10)$$

lahko poiščemo lego nevtralne osi  $x$ , pri kateri je prerez v ravnotežju. Nato določimo robni deformaciji betona  $\varepsilon_{cc}(x)$  in  $\varepsilon_{ct}(x)$  (slika 5). Vrednosti momenta pri začetku plastifikacije armature in pripadajoča ukrivljenost sta torej

$$m_{tec} = \int_{\frac{h}{2}}^x \sigma_c x_3 dx_3 + \left(\frac{h}{2} - a\right) F_s, \quad \kappa_{tec} = \frac{\varepsilon_{ct} + \varepsilon_{cc}}{h}. \quad (11)$$

Vrednost momenta pri začetku rušenja betona v tlaku dobimo tako, da predpišemo vrednost robne deformacije betona  $\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{cu3}$ . Ker je armatura plastificirana, je sila  $F_s = f_y a_\phi$ . Podobno kot prej, se tudi sedaj išče lego deformacijske ravnine, veljata enačbi (10). Moment pri začetku rušenja betona in pripadajoča ukrivljenost sta

$$m_{kon} = \int_{\frac{h}{2}}^x \sigma_c x_3 dx_3 + \left(\frac{h}{2} - a\right) F_s, \quad \kappa_{kon} = \frac{\varepsilon_{ct} + \varepsilon_{cc}}{h}. \quad (12)$$

V našem modelu smo predpostavili, da armature ni preveč, tako da do porušitve prereza pride zaradi prekoračene mejne deformacije na tlačeni strani betona.

### 3 IZOTROPNO IN ANIZOTROPNO ARMIRANE PLOŠČE

V 2. poglavju smo govorili o konstitutivnem modelu armiranega betona pri ploščah, še posebej o diagramu moment-ukrivljenost, ki ga uporabimo, ko je plošča v stanju *II*. Diagram  $\bar{m}(\bar{\kappa})$  smo izpeljali za poljuben kot  $\phi$  (slika 4). V tem poglavju pa bomo pogledali možnosti, ki se nam ponujajo za konkretno izbiro kota  $\phi$  pri različno armiranih ploščah.

#### 3.1 Izotropna armatura

O izotropni armaturi govorimo, kadar je efektivna količina armature  $a_\phi$  (enačba (6)) enaka za vsak kot  $\phi$ :

$$a_\phi^{izotropna} = \sum a_i \cos^2(\phi - \alpha_i) = konst. \quad za \quad \forall \phi. \quad (13)$$

Tako stanje je, na primer, pri ortogonalni mrežni armaturi, ki ima v obeh smereh enako količino armature  $a_1$ :

$$a_\phi = a_1 \cos^2(\phi - \alpha) + a_1 \cos^2(\phi - \alpha + \frac{\pi}{2}) = a_1 \quad \text{za} \quad \forall \phi. \quad (14)$$

Zaradi izotropnosti armature izračunamo  $\bar{m}(\bar{\kappa})$  (slika 3) le enkrat in ga shranimo. Velja namreč en sam diagram  $\bar{m}(\bar{\kappa})$  za vse smeri  $\phi$ .

Algoritem, ki ga uporabimo pri numerični analizi izotropno armiranih plošč, je naslednji:

1. Pri znanih pomikih  $\hat{\mathbf{u}} = [w, \theta_1, \theta_2]^T$  določimo ukrivljenosti v koordinatnem sistemu  $x_1 x_2$

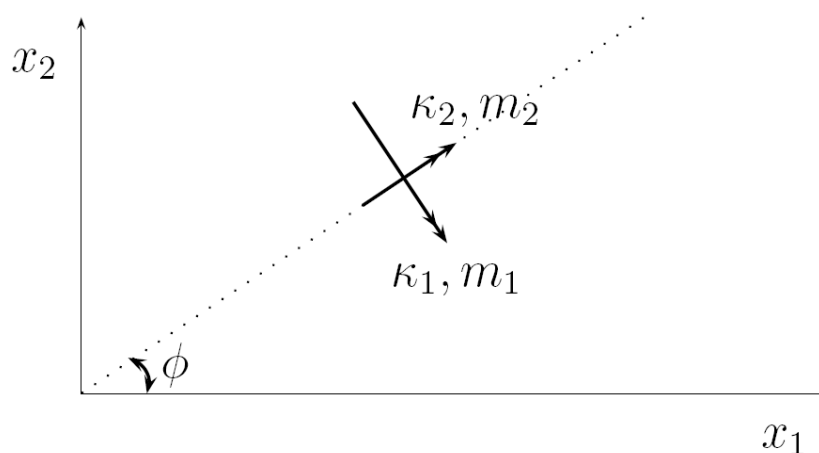
$$\mathbf{\kappa} = \mathbf{\kappa}(\hat{\mathbf{u}}) = [\kappa_{11}, \kappa_{22}, 2\kappa_{12}]^T \quad (15)$$

2. Določimo glavne ukrivljenosti

$$\kappa_{1,2} = \frac{\kappa_{11} + \kappa_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\kappa_{11} - \kappa_{22}}{2}\right)^2 + (\kappa_{12})^2} \quad (16)$$

3. Iz prej izračunanega diagrama  $\bar{m}(\bar{\kappa})$  odčitamo glavna momenta

$$m_1 = \bar{m}(\kappa_1), \quad m_2 = \bar{m}(\kappa_2) \quad (17)$$



Slika 6: Smeri glavnih ukrivljenosti in momentov

4. Določimo strižne deformacije in strižne sile v koordinatnem sistemu  $x_1 x_2 x_3$

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(\hat{\mathbf{u}}) = [\gamma_1, \gamma_2]^T, \quad \mathbf{q} = [q_1, q_2]^T = C_S \boldsymbol{\gamma} \quad (18)$$

5. Uporabimo princip virtualnega dela  $\delta\Pi$ , kot osnovo za analizo po metodi končnih elementov

$$\delta\Pi(\mathbf{u}, \delta\hat{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega} (m_1\delta\kappa_1 + m_2\delta\kappa_2 + q_1\delta\gamma_1 + q_2\delta\gamma_2) d\Omega - \int_{\Omega} p\delta w d\Omega \quad (19)$$

V (19) so  $\delta\hat{\mathbf{u}} = [\delta w, \delta\theta_1, \delta\theta_2]^T$  virtualni pomiki,  $\delta\kappa_1$  in  $\delta\kappa_2$  sta virtualni glavni ukrivljenosti,  $\delta\gamma_1$  in  $\delta\gamma_2$  sta virtualni strižni deformaciji,  $p$  površinska obtežba,  $\Omega$  pa območje v ravnini  $x_1x_2$ , ki ga zavzema središčna ploskev plošče.

## 3.2 Anizotropna armatura

Kadar je efektivni prerez armature odvisen od smeri  $\phi$ , govorimo o anizotropni armaturi:

$$a_{\phi}(\phi) \neq konst. \quad (20)$$

Tako stanje je npr., ko imamo armaturo le v eni smeri, ali pa pri ortogonalni armaturi z različnima količinama v vsaki smeri. Na razpolago imamo dva načina analize, ki ju poimenujemo fiksna razpoka (ko je smer razpoke vnaprej določena) in rotirajoča razpoka (ko se smer razpoke spreminja).

### 3.2.1 Fiksna razpoka

Nastanek razpok predpostavimo v smeri največje odpornosti plošče. Pri izbrani armaturi je tako smer razpok vnaprej določena s  $\phi = \phi_r$ , kjer je

$$\tan 2\phi_r = \frac{\sum_{i=1}^{nrl} m_{kon\ i} \sin 2\alpha_i}{\sum_{i=1}^{nrl} m_{kon\ i} \cos 2\alpha_i} \quad (21)$$

Vektor ukrivljenosti  $\kappa_r$  v koordinatnem sistemu  $nt$ , ki ga določa smer  $\phi_r$ , ima vse tri komponente različne od nič

$$\kappa_n \neq 0, \kappa_t \neq 0, \kappa_{nt} \neq 0. \quad (22)$$

Za smeri  $n$  in  $t$  izračunamo efektivni količini armature  $a_n$  in  $a_t$ , ter diagrama  $\bar{m}_n(\bar{\kappa}_n)$  in  $\bar{m}_t(\bar{\kappa}_t)$ .

Za določitev momenta  $m_{nt}$  pa uporabimo konstitutivno enačbo

$$m_{nt} = \beta(\kappa_n, \kappa_t) \frac{E_c t^3}{12 \cdot 2(1-\nu)} \kappa_{nt} \quad (23)$$

kjer je  $\beta(\kappa_n, \kappa_t)$  koeficient, ki upošteva postopno zmanjšanje strižne odpornosti zaradi nastanka razpok. Zaradi poenostavitve se večkrat upošteva, da ima koeficient  $\beta$  konstantno vrednost.

Algoritem pri modelu fiksne razpoke je sledeč:

1. Pri znanih pomikih  $\hat{\mathbf{u}} = [w, \theta_1, \theta_2]^T$  določimo ukrivljenosti v koordinatnem sistemu  $x_1 x_2$

$$\mathbf{\kappa} = \mathbf{\kappa}(\hat{\mathbf{u}}) = [\kappa_{11}, \kappa_{22}, 2\kappa_{12}]^T \quad (24)$$

2. Transformiramo ukrivljenosti v koordinatni sistem  $nt$

$$\mathbf{\kappa}_r = T_r^T \mathbf{\kappa}, \quad \mathbf{\kappa}_r = [\kappa_n, \kappa_t, \kappa_{nt}]^T \quad (25)$$

$$T_r = \begin{bmatrix} \cos^2 \phi_r & \sin^2 \phi_r & -\sin 2\phi_r \\ \sin^2 \phi_r & \cos^2 \phi_r & \sin 2\phi_r \\ \sin \phi_r \cos \phi_r & -\sin \phi_r \cos \phi_r & \cos 2\phi_r \end{bmatrix} \quad (26)$$

3. Izračunamo momente v koordinatnem sistemu  $nt$ :

$$m_n = \bar{m}_n(\kappa_n), \quad m_t = \bar{m}_t(\kappa_t), \quad m_{nt} = \beta(\kappa_n, \kappa_t) \frac{G_c t^3}{12} \kappa_{nt} \quad (27)$$

4. Določimo strižne deformacije in strižne sile v koordinatnem sistemu  $x_1 x_2 x_3$

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(\hat{\mathbf{u}}) = [\gamma_1, \gamma_2]^T, \quad \mathbf{q} = [q_1, q_2]^T = C_S \boldsymbol{\gamma} \quad (28)$$

5. Uporabimo princip virtualnega dela  $\delta\Pi$ , kot osnovo za analizo po metodi končnih elementov

$$\delta\Pi(\mathbf{u}, \delta\hat{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega} (m_n \delta\kappa_n + m_t \delta\kappa_t + m_{nt} \delta\kappa_{nt} + q_1 \delta\gamma_1 + q_2 \delta\gamma_2) d\Omega - \int_{\Omega} p \delta w d\Omega \quad (29)$$

V (29) so  $\delta\hat{\mathbf{u}} = [\delta w, \delta\theta_1, \delta\theta_2]^T$  virtualni pomiki,  $\delta\kappa_n$ ,  $\delta\kappa_t$ ,  $\delta\kappa_{nt}$  so virtualne ukrivljenosti,  $\delta\gamma_1$  in  $\delta\gamma_2$  sta virtualni strižni deformaciji,  $p$  površinska obtežba,  $\Omega$  pa območje v ravnini  $x_1 x_2$ , ki ga zavzema središčna ploskev plošče.

### 3.3 Rotirajoča razpoka

Nastanek razpok predpostavimo v smereh glavnih ukrivljenosti, ki se lahko skozi analizo seveda spreminajo.

Algoritem pri modelu rotirajoče razpoke je sledeč:

1. Pri znanih pomikih  $\hat{\mathbf{u}} = [w, \theta_1, \theta_2]^T$  določimo ukrivljenosti v koordinatnem sistemu  $x_1, x_2$

$$\mathbf{\kappa} = \mathbf{\kappa}(\hat{\mathbf{u}}) = [\kappa_{11}, \kappa_{22}, 2\kappa_{12}]^T \quad (30)$$

2. Določimo glavne ukrivljenosti

$$\kappa_{1,2} = \frac{\kappa_{11} + \kappa_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\kappa_{11} - \kappa_{22}}{2}\right)^2 + (\kappa_{12})^2} \quad (31)$$

3. Določimo smer glavnih ukrivljenosti

$$\phi = 1/2 \arctan\left(\frac{2\kappa_{12}}{\kappa_{11} - \kappa_{22}}\right) + k \frac{\pi}{2}, \quad k = \begin{cases} 1 & \text{za } \kappa_{11} - \kappa_{22} < 0 \\ 0 & \text{sicer} \end{cases} \quad (32)$$

4. Določimo efektivno količino armature, ki pripada glavnim smerem

$$a_1 = a_\phi = \sum a_i \cos^2(\phi - \alpha_i), \quad a_2 = a_{\phi+\pi/2} = \sum a_i \cos^2(\phi + \frac{\pi}{2} - \alpha_i) \quad (33)$$

5. Določimo diagrama  $\bar{m}_1(\bar{\kappa}_1)$  in  $\bar{m}_2(\bar{\kappa}_2)$

6. Odčitamo momente v smereh glavnih ukrivljenosti

$$m_1 = \bar{m}_1(\kappa_1), \quad m_2 = \bar{m}_2(\kappa_2) \quad (34)$$

7. Določimo strižne deformacije in strižne sile v koordinatnem sistemu  $x_1, x_2, x_3$

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(\hat{\mathbf{u}}) = [\gamma_1, \gamma_2]^T, \quad \mathbf{q} = [q_1, q_2]^T = C_s \boldsymbol{\gamma} \quad (35)$$

8. Uporabimo princip virtualnega dela  $\delta\Pi$ , kot osnovo za analizo po metodi končnih elementov

$$\delta\Pi(\mathbf{u}, \delta\hat{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega} (m_1 \delta\kappa_1 + m_2 \delta\kappa_2 + q_1 \delta\gamma_1 + q_2 \delta\gamma_2) d\Omega - \int_{\Omega} p \delta w d\Omega \quad (36)$$

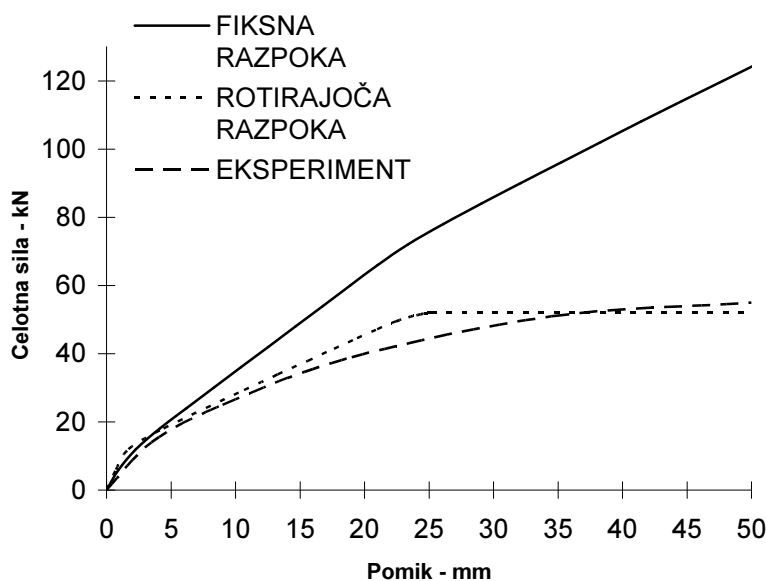
## 4 NUMERIČNI PRIMERI

Predstavljeni konstitutivni model in pripadajoči algoritmi so bili vgrajeni v 4-vozliščni končni element za plošče s kvadratično interpolacijo pomika  $w$  in linearno interpolacijo zasukov  $\theta_1$  in  $\theta_2$ , ki je predstavljen v [Bohinc, 2005]. Za generacijo programske kode smo uporabili programsko okolje AceGen [Korelc, 2002, 2005]. Prav tako so bile tudi vse analize izvedene v okolju AceGen, saj ima vgrajen modul za analizo po metodi končnih elementov (CDriver).

Pri vseh primerih z izotropno armiranimi ploščami so rezultati dobljeni z izotropnim modelom identični rezultatom dobljenim z anizotropnim modelom z rotirajočo razpoko. Edina razlika je le v tem, da je čas računa nekoliko krajši pri izotropnem modelu, saj je za izračun potrebnih manj operacij.

## 4.1 Anizotropna pravokotna prostoležeča plošča

Obravnavamo prostoležečo pravokotno ploščo pod ploskovno obtežbo z debelino  $h = 80$  mm, dolžino  $l = 3000$  mm in širino  $b = 2000$  mm. Plošča je ortogonalno armirana z  $a_1 = 251$  mm<sup>2</sup>/m v eni smeri in  $a_2 = 559$  mm<sup>2</sup>/m v drugi smeri. Položaj armature je  $c_1 = c_2 = 14$  mm od spodnjega roba plošče. Materialne karakteristike so:  $E_c = 24$  GPa,  $f_{ck} = 26.5$  MPa,  $f_{ct} = 2.5$  MPa,  $E_s = 205$  GPa in  $f_y = 460$  MPa.



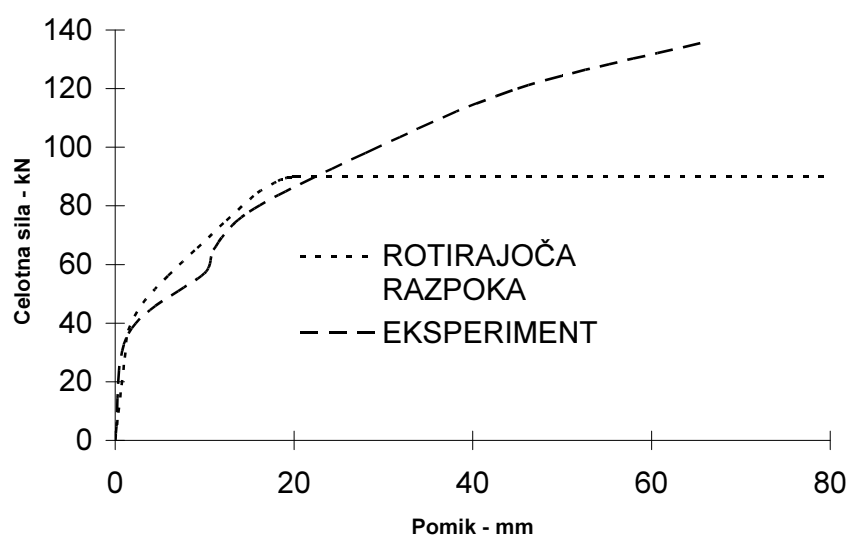
Slika 7: Pravokotna anizotropno armirana plošča pod vplivom ploskovne obtežbe

Numerična analiza je bila izvedena z mrežo  $8 \times 8$  končnih elementov. Uporabili smo dva prej omenjena modela za določitev mejne nosilnosti; model s fiksno in model z rotirajočo razpoko. Na sliki 7 so primerjani rezultati (vertikalni pomik središča plošče v odvisnosti od obtežbe) obeh modelov z rezultati eksperimentalne analize (ti so povzeti po [Ibrahimbegović, 1994]). Iz slike 7 je

razvidno, da model rotirajoče razpoke s primerno natančnostjo oceni mejno nosilnost plošče, med tem ko model fiksne razpoke zelo preceni dejansko nosilnost plošče. Razlog za takšno razhajanje je dejstvo, da se smeri glavnih obremenitev ne ujemajo s smerjo glavnih odpornosti. Model fiksne razpoke bi dal primerne rezultate le v primeru, ko bi se ti dve smeri ujeli, to je pri optimalno dimenzionirani plošči. Ker pri ostalih primerih ta model zelo preceni dejansko nosilnost plošče, ni primeren za uporabo pri numerični analizi.

## 4.2 Anizotropna kvadratna prostoležeča plošča

Drugi primer obravnava prostoležečo kvadratno ploščo pod ploskovno obtežbo. Plošča je debeline  $h = 51 \text{ mm}$ , stranica plošče pa je  $a = 1830 \text{ mm}$ . Plošča ima ortogonalno armaturo, in sicer  $a_1 = 281 \text{ mm}^2 / \text{m}$  v smeri prve stranice ter  $a_2 = 235 \text{ mm}^2 / \text{m}$  v smeri druge stranice plošče. Položaj armature je  $d_1 = 39 \text{ mm}$  za prvo smer ter  $d_2 = 44 \text{ mm}$  za drugo smer, kjer je  $d_i$  razdalja do zgornjega roba plošče. Materialne karakteristike za beton in jeklo so:  $E_c = 32.42 \text{ GPa}$ ,  $f_{ck} = 35 \text{ MPa}$ ,  $f_{ct} = 3.79 \text{ MPa}$ ,  $\nu_c = 0.18$ ,  $E_s = 206.91 \text{ GPa}$  in  $f_y = 375.9 \text{ MPa}$ .



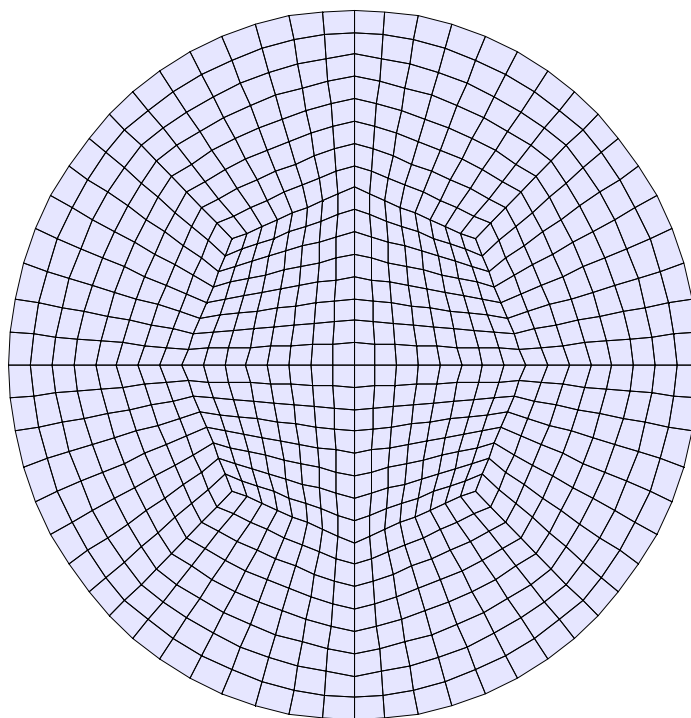
Slika 8: Kvadratna anizotropno armirana plošča pod vplivom ploskovne obtežbe



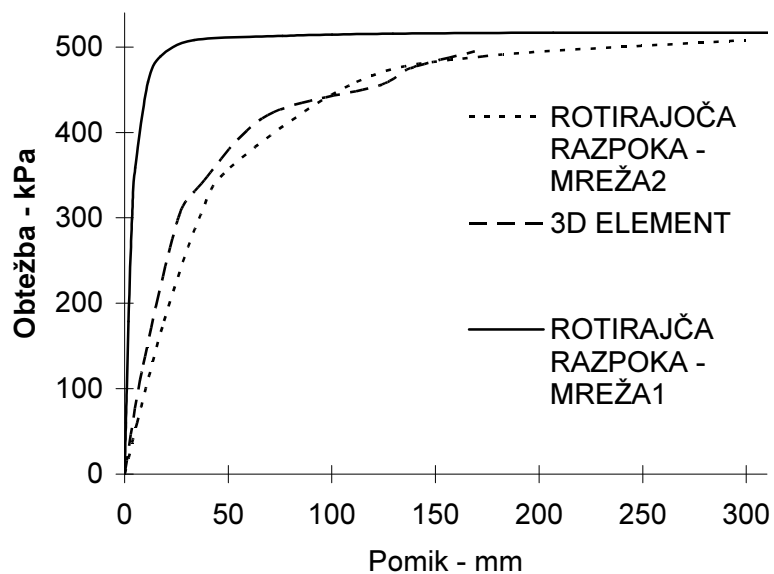
Numerična analiza je bila izvedena z mrežo  $8 \times 8$  končnih elementov. Pri računu smo privzeli, da sta armaturi v obeh smereh položeni na isti razdalji od zgornjega roba plošče:  $\bar{a} = (a_1 + a_2) \cdot 0.5 = 42 \text{ mm}$ . V vogalnih vozliščih je bil dovoljen vertikalni pomik, s čimer smo simulirali robne pogoje iz eksperimenta ([Ibrahimbegović, 1992]). Na sliki 8 je prikazan vertikalni pomik sredine plošče v odvisnosti od obtežbe. Razvidno je, da se rezultati zelo dobro ujemajo v območju majhnih pomikov. Pri večjih pomikih se v plošči pojavijo membranske sile, ki znatno povečajo dejansko nosilnost, v naši analizi pa jih nismo upoštevali.

### 4.3 Izotropna krožna vpeta plošča

Krožna izotropno armirana plošča je debeline  $h = 1000 \text{ mm}$ , njen radij pa  $R = 10000 \text{ mm}$ . Karakteristike betona so:  $E_c = 20 \text{ GPa}$ ,  $f_{ck} = 35 \text{ MPa}$ ,  $f_{ct} = 5.6 \text{ MPa}$ ,  $\nu_c = 0.16$ , jekla pa:  $E_s = 210 \text{ GPa}$  in  $f_y = 460 \text{ MPa}$ . Plošča ima izotropno armaturo  $\mu = 1\%$  v vsaki smeri, položeno  $a = 30 \text{ mm}$  od spodnjega roba plošče. Enaka količina armature je bila uporabljena tudi na zgornji strani:  $\mu' = 1\%$  in  $a' = 30 \text{ mm}$ .



Slika 9: Krožna plošča - MREŽA1

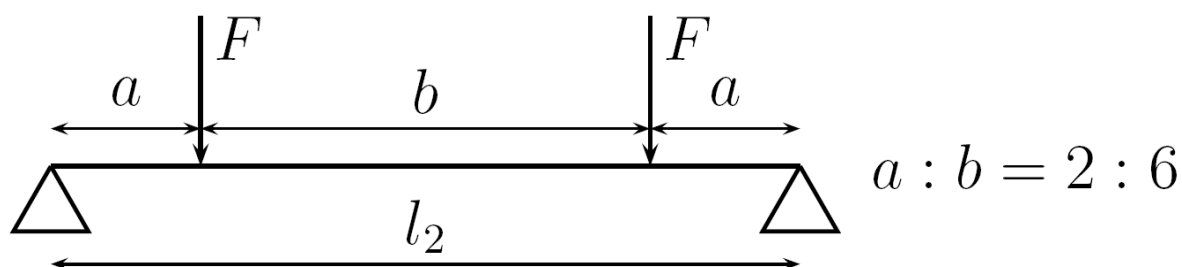


Slika 10: Krožna izotropno armirana plošča pod vplivom ploskovne obtežbe

Mreža končnih elementov je prikazana na sliki 9. V robnih vozliščih je plošča vpeta ( $w = \theta_1 = \theta_2 = 0$ ). Na sliki 10 je prikazan vertikalni pomik sredine plošče v odvisnosti od obtežbe. Poleg naše analize je prikazana tudi analiza, ki je bila izvedena s 3-D končnimi elementi (po [Ibrahimbegović, 1992]). Z uporabo mreže iz slike 9 smo dokaj natančno ocenili mejno nosilnost plošče, če pa uporabimo  $1 \times$  bolj gosto mrežo (MREŽA2 slika 10), dobimo tudi dobre informacije o pomikih. Iz slike 10 je razvidno, da se naša analiza, kljub svoji robustnosti, zelo dobro ujema z bolj sofisticiranim pristopom.

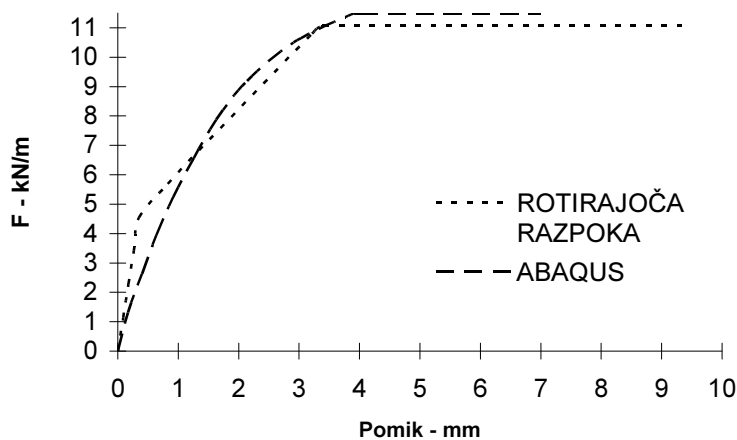
## 4.4 Plošča z dvema prostima robovoma

V četrtem primeru smo primerjali rezultate, dobljene s komercialnim programom [Abaqus, 2002], z rezultati dobljenimi z opisanim pristopom. Modelirali smo prostoležečo pravokotno ploščo, ki je na dveh robovih podprta, dva robova sta prosta.



Slika 11: Obtežba plošče z dvema prostima robovoma

Uporabili smo mrežo  $10 \times 10$ . Plošča je obremenjena z linijsko obtežbo  $F$  (slika 11). Armirana je le v smeri, ki je pravokotna na smer podprtih robov, in sicer z armaturo  $a_1 = 274 \text{ mm}^2 / \text{m}$ . Karakteristike plošče so: dolžina podprtih robov  $l_1 = 457 \text{ mm}$ , dolžina nepodprtih robov  $l_2 = 762 \text{ mm}$ , debelina  $h = 38 \text{ mm}$ , statična višina  $d = 31 \text{ mm}$ . Materialne karakteristike so:  $E_c = 29 \text{ GPa}$ ,  $f_{ck} = 32 \text{ MPa}$ ,  $f_{ct} = 2 \text{ MPa}$ ,  $\nu_C = 0.18$ ,  $E_s = 200 \text{ GPa}$  ter  $f_y = 220 \text{ MPa}$ .



Slika 12: Anizotropno armirana prostoležeča plošča z dvema prostima robovoma

Čeprav je v Abaqusu uporabljen zelo sofisticiran materialni model za armirani beton, se ocena mejne nosilnosti bistveno ne razlikuje od ocene dobljene s prikazanim pristopom (slika 12).

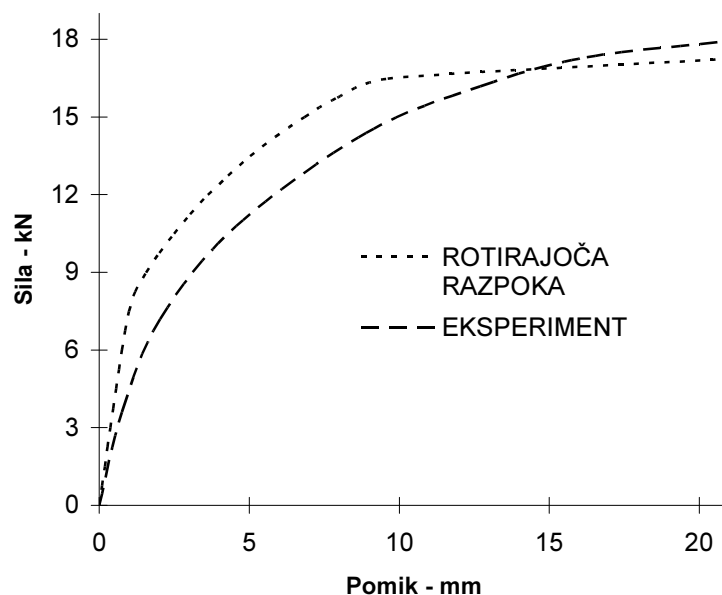
## 4.5 Izotropna kvadratna točkovno podprta plošča

Kvadratna plošča, podprta na štirih vogalih, je obremenjena s koncentrirano silo v središču plošče.

Karakteristike plošče so: debelina  $h = 44 \text{ mm}$ , dolžine stranic  $a = 914 \text{ mm}$ , izotropna armatura

$\mu = 0.85\%$  in statična višina  $d = 33 \text{ mm}$ . Karakteristike materiala so:  $f_{ck} = 38 \text{ MPa}$ ,

$E_c = 36 \text{ GPa}$ ,  $\nu_c = 0.15$ ,  $f_{ct} = 5.3 \text{ MPa}$ ,  $E_s = 200 \text{ GPa}$  in  $f_y = 345 \text{ MPa}$ .



Slika 13: Izotropno armirana točkovno podprta kvadratna plošča

Pri numerični analizi je bila uporabljena mreža  $20 \times 20$ . Na sliki 13 je prikazan vertikalni pomik

točke, ki je za  $\frac{a}{10}$  oddaljena od središča plošče v smeri osi  $x_1$ . Tudi v tem primeru se izkaže, da so

dobljeni rezultati bistveno ne razlikujejo od eksperimentalno dobljenih rezultatov (glej [Zahlten, 1993]).

## 5 SKLEP

Rezultati uporabljenega pristopa za račun mejne obtežbe armiranobetonskih plošč se dobro ujemajo z razpoložljivimi eksperimentalnimi rezultati (ki so na voljo v strokovni literaturi) za tiste plošče, kjer se je obtežba monotono povečevala vse do porušitve. Bistvo uporabljene analize je, da upošteva postopno degradacijo armiranega betona zaradi razpokanja betona in zaradi plastifikacije armature. Analiza je robustna in razmeroma preprosta. Prednost uporabljenega pristopa glede na teorijo plastičnih linij je informacija o pomikih, ki je lahko zanimiva za študij mejnega stanja uporabnosti.

## LITERATURA

- [1] M. A. Save, C. E. Massonet, Plastic analysis and design of plates, shells and disks, North-Holland, 1972.
- [2] M. P. Nielsen, Limit analysis and concrete plasticity, Prentice-Hall, 1984.
- [3] S. J. Moy, Plastic methods for steel and concrete structures, MacMillan, 1996.
- [4] R. Park, W. L. Gamble, Reinforced concrete slabs, Wiley, 2000.
- [5] ž. Radosavljević, D. Bajić, Armirani beton, knjiga 3, Elementi armiranobetonskih konstrukcija, Graevinska knjiga, 1990.
- [6] Abaqus 6.3., Hibbit, Karlsson & Sorensen Inc., 2002.
- [7] A. Ibrahimbegović, F. Frey, J.L. Sarf, Limit load analysis of plates with particular reference to steel and reinforced concrete, Engineering Modeling, 5, 3-4, 75-82, 1992.
- [8] A. Ibrahimbegović, F. Frey, Stress resultant finite element analysis of reinforced concrete plates, Engineering Computations, 10, 15-30, 1993.
- [9] A. Ibrahimbegović, F. Frey, An efficient approach to serviceability analysis and ultimate load design of reinforced concrete plates, v Computational modelling of concrete structures (H. Mang, N. Bićanić, R. de Borst, uredniki), Pineridge Press, 875-884, 1994.

- [10] U. Bohinc, A. Ibrahimbegović, Robustni končni elementi za plošče, Zbornik Kuhljevi dnevi 2005, 33-40, 2005.
- [11] J. Korelc, Multi-language and multi-environment generation of nonlinear finite element codes, Engineering with computers, 18(4), 312-327, 2002.
- [12] J. Korelc, <http://www.fgg.uni-lj.si/Symech>, 2005.
- [13] W. Zahlten, A contribution to the Physically and Geometrically Nonlinear Computer Analysis of General Reinforced Concrete Shells, Ruhr - Universitaet Bochrum, 212 - 215, 1993.