

Univerza
v Ljubljani

Fakulteta
za gradbeništvo
in geodezijo



Jamova cesta 2
1000 Ljubljana, Slovenija
<http://www3.fgg.uni-lj.si/>

DRUGG – Digitalni repozitorij UL FGG
<http://drugg.fgg.uni-lj.si/>

To je izvirna različica zaključnega dela.

Prosimo, da se pri navajanju sklicujete na bibliografske podatke, kot je navedeno:

Kragelj, A., 2013. Palične lupinaste konstrukcije. Diplomaska naloga. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo. (mentor Brank, B.): 35 str.

University
of Ljubljana

Faculty of
Civil and Geodetic
Engineering



Jamova cesta 2
SI – 1000 Ljubljana, Slovenia
<http://www3.fgg.uni-lj.si/en/>

DRUGG – The Digital Repository
<http://drugg.fgg.uni-lj.si/>

This is original version of final thesis.

When citing, please refer to the publisher's bibliographic information as follows:

Kragelj, A., 2013. Palične lupinaste konstrukcije. B.Sc. Thesis. Ljubljana, University of Ljubljana, Faculty of civil and geodetic engineering. (supervisor Brank, B.): 35 pp.

Univerza
v Ljubljani

Fakulteta za
*gradbeništvo in
geodezijo*



Jamova 2
1000 Ljubljana, Slovenija
telefon (01) 47 68 500
faks (01) 42 50 681
fgg@fgg.uni-lj.si

UNIVERZITETNI ŠTUDIJ
PRVE STOPNJE
GRADBENIŠTVA

MODUL KONSTRUKCIJE

Kandidatka:

ANA KRAGELJ

PALIČNE LUPINASTE KONSTRUKCIJE

Diplomska naloga št.: 31/B-GR

LATTICE SHELL STRUCTURES

Graduation thesis No.: 31/B-GR

Mentor:
prof. dr. Boštjan Brank

Predsednik komisije:
izr. prof. dr. Janko Logar

Ljubljana, 12. 09. 2013

STRAN ZA POPRAVKE, ERRATA

Stran z napako

Vrstica z napako

Namesto

Naj bo

IZJAVE

Podpisana **Ana Kragelj** izjavljam, da sem avtorica diplomske naloge z naslovom »**Palične lupinaste konstrukcije**«.

Izjavljam, da je elektronska različica v vsem enaka tiskani različici.

Izjavljam, da dovoljujem objavo elektronske različice v repozitoriju UL FGG.

Ljubljana, 30.8.2013

(podpis)

BIBLIOGRAFSKO – DOKUMENTACIJSKA STRAN IN IZVLEČEK

UDK: 624.074.5(043.2)
Avtor: Ana Kragelj
Mentor: prof. dr. Boštjan Brank, univ. dipl. inž. grad.
Naslov: Palične lupinaste konstrukcije
Tip dokumenta: diplomsko naloga – univerzitetni študij
Obseg in oprema: 35 str., 14 pregl., 71 sl.
Ključne besede: geodezične kupole, poljubno oblikovane palične kupole, palični oboki, račun palične kupole

Izvleček

V diplomski nalogi so obravnavane palične lupinaste konstrukcije. Kot poseben primer paličnih lupinastih konstrukcij najprej pogledamo geodezične kupole. Pokažemo, kako se določi geometrijo geodezičnih kupol, ki nastanejo iz oktaedra in ikozaedra, pri različnih načinih projekcije na plašč krogle. Za različne delitve stranic poliedra so izračunane dolžine palic ter število potrebnih palic. Predstavljena je rešitev izvedbe stikov za jeklene palice z uporabo prefabriciranih elementov. Opisani postopki določitve geometrije ter stikovanj palic so ilustrirani na primeru, kjer so predlagane tudi poenostavitve, ki jih lahko uporabimo pri načrtovanju. Opisano je, kako se nariše geodezične sfere in izračuna koordinate njihovih vozlišč s pomočjo programa Mathematica. V nadaljevanju naloge pogledamo še druge tipe paličnih lupinastih konstrukcij: geodezično kupolo, ki se jo dobi s projiciranjem na elipsoid, poljubno oblikovane sferične palične kupole in palične oboke. Na koncu izvedemo računsko analizo palične kupole pri obtežbah lastne teže in snega. Za izbrano jekleno palično kupolo naredimo z metodo končnih elementov linearno statično analizo, uklonsko analizo, geometrijsko nelinearno analizo in modalno analizo (v ta namen uporabimo program SAP2000) ter osnovne kontrole po standardu.

BIBLIOGRAPHIC – DOCUMENTALISTIC INFORMATION AND ABSTRACT

UDC: 624.074.5(043.2)
Author: Ana Kragelj
Supervisor: Prof. Boštjan Brank, Ph.D.
Title: Lattice shell structures
Document type: Graduation Thesis – University studies
Scope and tools: 35 p., 14 tab., 71 fig.
Keywords: geodesic domes, free form lattice shell structures, grid shell, analysis of lattice shell structures

Abstract

Graduation thesis examines different kinds of lattice shell structures. First we discuss geodesic domes, which are special case of lattice shell structures. For different types of projection onto sphere surface, geometry of geodesic domes is defined, using octahedron or icosahedron as a basic polyhedron. Bar's length and number of bars needed for structure are calculated for different divisions of polyhedron's sides. Solution for joints of metal geodesic dome is presented by using prefabricated elements. Described methods are used for calculation of bar's length for one case of geodesic dome. Some simplifications are also suggested for that case. How to draw geodesic domes and calculate vertex's coordinates in program Mathematica is described. Some kinds of different free form lattice shell structures are shown. Thesis also presents geometrical design of free form sphere dome, grid shell and geodesic dome which is projected onto ellipsoid's surface. In the end lattice shell structure is analyzed for two load cases: snow load and dead load. Using finite element method linear static analysis, buckling analysis, geometrical nonlinear analysis and modal analysis (structure analysis software SAP2000 is used for analyses) are made. Some basic standardized controls are also made.

ZAHVALA

Za pomoč in podporo pri nastajanju diplomskega dela se zahvaljujem mentorju prof. dr. Boštjanu Branku.

KAZALO VSEBINE

Stran za popravke	I
Izjave	II
Bibliografsko – dokumentacijska stran in izvleček	III
Bibliographic – documentalistic information and abstract	IV
Zahvala	V
1 UVOD	1
1.1 Motivacija za obravnavo izbrane teme	1
1.2 Kratek opis paličnih lupinastih konstrukcij	1
1.2.1 Mrežaste lupine	1
1.2.2 Geodezične kupole	1
1.2.3 Poljubno oblikovane palične lupine	1
1.3 Materiali, iz katerih so narejene palice	2
1.3.1 Les	2
1.3.2 Jeklo	2
2 GEODEZIČNE KUPOLE	3
2.1 Definicija geodezične kupole	3
2.2 Določitev števila palic geodezične kupole in njihovih dolžin [4]	4
2.3 Projekcija oglišč trikotnikov na kroglo [4]	8
2.4 Geodezične kupole iz oktaedra	9
2.5 Geodezične kupole iz ikozaedra [4]	11
2.6 Stikovanje palic	14
2.7 Primer določitve elementov geodezične kupole	16
2.8 Izris geodezičnih sfer v programu Mathematica	16
2.9 Znane geodezične kupole	18
3 OSTALE PALIČNE KUPOLE IN PALIČNI OBOKI	20
3.1 Različne oblike paličnih kupol	20
3.2 Projekcija na elipsoid [4]	20
3.3 Poljubne (sferične) kupole	22
3.4 Palični oboki	24

4 RAČUN PALIČNE LUPINE	25
4.1 Opis modela za analizo	25
4.1.1 Določitev vplivov na konstrukcijo	25
4.1.1.1 Veter	26
4.1.1.2 Sneg	27
4.1.1.3 Modeliranje obtežbe v programu SAP2000	27
4.2 Rezultati analize	28
4.2.1 Linearna statična analiza na mejno stanje nosilnosti	28
4.2.2 Uklonska analiza	30
4.2.3 Geometrijsko nelinearna analiza	31
4.2.4 Modalna analiza	32
4.3 Interpretacija rezultatov analiz	33
5 ZAKLJUČEK	35
Viri	36

KAZALO PREGLEDNIC

Preglednica 1:	Odstopanje geodezične kupole nastale iz oktaedra od krogle	3
Preglednica 2:	Odstopanje geodezične kupole nastale iz ikozaedra od krogle	4
Preglednica 3:	Palice geodezične kupole pri prvem načinu projiciranja	8
Preglednica 4:	Palice geodezične kupole oktaedra [4 deli]	9
Preglednica 5:	Palice geodezične kupole oktaedra [5 delov]	10
Preglednica 6:	Palice geodezične kupole ikozaedra [2 dela]	12
Preglednica 7:	Palice geodezične kupole ikozaedra [3 deli]	12
Preglednica 8:	Palice geodezične kupole ikozaedra [4 deli]	13
Preglednica 9:	Palice geodezične kupole ikozaedra [5 delov]	13
Preglednica 10:	Število potrebnih povezovalnih elementov za geodezično kupolo oktaedra	15
Preglednica 11:	Število potrebnih povezovalnih elementov za geodezično kupolo ikozaedra	15
Preglednica 12:	Palice elipsoida, ki nastane iz oktaedra [4 deli]	21
Preglednica 13:	Polmeri posameznih koncentričnih krogov v palični lupini s slike 48	22
Preglednica 14:	Dolžine palic palične kupole	23

KAZALO SLIK

Slika 1:	Ikozaeder	3
Slika 2:	Prerez kupole skozi njeno spodnjo ploskev	3
Slika 3:	Preslikava oktaedrove ploskve na plašč krogle: trikotniki pred in po preslikavi	4
Slika 4:	Preslikava oktaedrove ploskve na plašč krogle: dolžine nekaterih stranic	5
Slika 5:	Preslikava oktaedrove ploskve na plašč krogle: dolžine ostalih stranic	5
Slika 6:	Dolžine stranic geodezične kupole – oktaeder [2 dela]	5
Slika 7:	Geodezična sfera oktaedra [2 dela]	5
Slika 8:	Sferični koordinatni sistem	6
Slika 9:	Pomoč pri označevanju oglišč geodezične kupole	6
Slika 10:	Del geodezične kupole	7
Slika 11:	Prvi način projiciranja – oktaeder [3 deli]	8
Slika 12:	Dolžine palic pri prvem načinu projiciranja	8
Slika 13:	Geodezična sfera oktaedra [3deli]	8
Slika 14:	Drugi način projiciranja	9
Slika 15:	Dolžine palic pri drugem načinu projiciranja	9
Slika 16:	Dolžine palic geodezične kupole oktaedra [4 deli]	9
Slika 17:	Geodezična sfera oktaedra [4 deli]	10
Slika 18:	Dolžine palic geodezične kupole oktaedra [5 delov]	10
Slika 19:	Geodezična sfera oktaedra [5delov]	10
Slika 20:	Simetrični trikotniki ploskve poliedra	11
Slika 21:	Lega središča sfere očrtane ikozaedru	11
Slika 22:	Dolžine palic geodezične kupole ikozaedra [2 dela]	12
Slika 23:	Geodezična sfera ikozaedra [2 dela]	12
Slika 24:	Dolžine palic geodezične kupole ikozaedra [3 deli]	12
Slika 25:	Geodezična sfera ikozaedra [3 deli]	12
Slika 26:	Dolžine palic geodezične kupole ikozaedra [4 deli]	13
Slika 27:	Geodezična sfera ikozaedra [4 deli]	13
Slika 28:	Dolžine palic geodezične kupole ikozaedra [5 delov]	13
Slika 29:	Geodezična sfera ikozaedra [5 delov]	14
Slika 30:	Primer povezovalnega elementa	15
Slika 31:	Primer stikovanja	15
Slika 32:	Primer izrisa geodezične kupole z uporabo programa Mathematica: oktaeder [2 dela]	16

Slika 33:	Primer izrisa geodezične kupole z uporabo programa Mathematica: oktaeder [3 deli]	16
Slika 34:	Primer izrisa geodezične kupole z uporabo programa Mathematica: ikozaeder [2 dela]	17
Slika 35:	Primer izrisa geodezične kupole z uporabo programa Mathematica: ikozaeder [3 deli]	17
Slika 36:	Primer izpisa koordinat geodezične kupole pri uporabi programa Mathematica: ikozaeder, $R=1$	17
Slika 37:	Zeiss planetarium (uporabnik Wikipedie, 2006) [3]	18
Slika 38:	Ameriški paviljon (Stanton, 1997) [4]	18
Slika 39:	Fukuoka Dome (Final Gear forum, 2011) [5]	19
Slika 40:	Geodezična kupola v Tivoliju v Ljubljani	19
Slika 41:	Geodezične kupole na Velenjskem jezeru (Petrašević, 2012) [6]	19
Slika 42:	Primer poljubne razdelitve ploskve poliedra (Geodesics unlimited) [7]	20
Slika 43:	Primer poljubne razdelitve ploskve poliedra (Geodesics unlimited) [7]	20
Slika 44:	Koordinate točk na plašču elipse	20
Slika 45:	Dimenzije palic elipsoida, ki nastane iz oktaedra [4 dele]	21
Slika 46:	Palična lupina oblike elipsoida (Geodesics unlimited) [7]	21
Slika 47:	Palična lupina oblike stožca (Geodesics unlimited) [7]	21
Slika 48:	Perez palične kupole v obliki polkrogle	22
Slika 49:	Koncentrični krog palične lupine	22
Slika 50:	Tloris palične kupole	23
Slika 51:	Primeri paličnih kupol (University of Surrey) [8]	23
Slika 52:	Primer paličnega oboka iz četverkotnikov	24
Slika 53:	Primer paličnega oboka	24
Slika 54:	Primer paličnega oboka iz trikotnikov	24
Slika 55:	Palični obok	24
Slika 56:	Geometrija palične lupine	25
Slika 57:	Geometrija palične lupine v tlorisu	25
Slika 58:	Obtežba vetra na kupolo (slika 7.12 iz [13])	26
Slika 59:	Vplivna območja za račun obremenitve	27
Slika 60:	Deformirana oblika kupole zaradi obtežbe za mejno stanje nosilnosti	28
Slika 61:	Osne sile v palični kupoli	29
Slika 62:	Prva uklonska oblika	30
Slika 63:	Druga uklonska oblika	30
Slika 64:	Tretja uklonska oblika	31

Slika 65:	Graf odvisnosti obtežnega faktorja od karakterističnega pomika	31
Slika 66:	Deformirana oblika kupole pri nelinearni analizi: obtežni faktor je 0,758738	32
Slika 67:	Prva nihajna oblika	32
Slika 68:	Druga nihajna oblika	32
Slika 69:	Tretja nihajna oblika	33
Slika 70:	Prva uklonska oblika pri ponovni analizi	34
Slika 71:	Deformirana oblika kupole pri nelinearni analizi: obtežni faktor je 2,24346	34

1 UVOD

1.1 Motivacija za obravnavo izbrane teme

Palične lupine so konstrukcijska oblika, ki dopušča veliko svobode pri zasnovi in optimalno izkorišča material in geometrijo pri prenašanju obtežbe. Za obravnavo paličnih lupin sem se odločila predvsem zaradi njihovega atraktivnega videza. Ker niso zelo razširjene, jim na fakulteti nismo posvečali posebne pozornosti. Zato sem se odločila, da jih preučim v svoji diplomski nalogi. Pri njihovi obravnavi sem lahko uporabila znanje, ki sem ga pridobila pri različnih predmetih skozi vsa leta študija.

1.2 Kratek opis paličnih lupinastih konstrukcij

Palične lupinaste konstrukcije so narejene iz palic, ki so med seboj stikovane tako, da opišejo ukrivljeno ploskev. Palice se največkrat stikujejo v trikotnike ali štirikotnike, redkeje pa se oblikuje drugačne like. Uporabljajo se za različne objekte: npr. kot strehe športnih in kulturnih objektov, za planetarije in rastlinjake, ... včasih pa jih razstavljajo tudi kot ekspanate. Palične konstrukcije dopuščajo veliko svobode pri oblikovanju in doseganju različnih učinkov v prostoru. Ker so že na pogled izjemno lahke v primerjavi s klasičnimi strehami in monolitnimi lupinami, dajejo učinek prostornosti. Prostor med palicami lahko zapolnimo s prosojnimi materiali in tako dobimo naravno osvetljenost prostora. To sicer lahko vodi k pomanjkljivi toplotni izolaciji, saj navadno konstrukcije ne želimo prekriti z dodatnimi izolacijskimi plastmi.

1.2.1 Mrežaste lupine

Mrežaste lupine so posebna oblika paličnih lupin, ki nastanejo z enojnim ali dvojnimi ukrivljanjem začetno ravne 2D mreže palic, kot to definira Paoli [1]. Ravna mreža palic pred transformiranjem je navadno iz pravokotnih celic. Pri enojnem ukrivljanju se nasprotna robova mreže potiska skupaj. Oblikuje se obok brez, ne da bi morali mrežo dodatno podpreti. Mrežasta palična konstrukcija lahko razvije podobne mehanizme prenašanja obtežbe kot lok in lupina. Posamezne palice so bodisi v tlaku bodisi v nategu, strižno togost konstrukcije pa zagotavljajo končne trikotne oblike celic.

1.2.2 Geodezične kupole

Geodezične kupole so posebna oblika paličnih lupin. Nastanejo tako, da geometrijskemu telesu poliedru razdelimo ploskve na manjše trikotnike, njihova oglišča pa preslikamo na sfero. Dobljena vozlišča so stikališča palic. S tem dobimo aproksimacijo kupole.

1.2.3 Poljubno oblikovane palične lupine

Poljubno oblikovane palične lupine nastanejo s sestavljanjem različnih likov (celic) iz palic tako, da opišejo neko poljubno (vendar vnaprej predpisano) ukrivljeno ploskev. Lahko nastanejo tudi na podoben način kot geodezične kupole, če preslikamo poljubno mrežo na poljubno ukrivljeno ploskev. Če je zelena oblika zahtevnejša, je težje tudi geometrijsko modeliranje.

1.3 Materiali, iz katerih so narejene palice

Pri paličnih lupinah se porabi manj materiala kot sicer pri lupinah, saj je nosilni material razporejen po določeni mreži in ne več po celotni površini lupine. Po površnem razmisleku bi lahko sklepali, da bi bile lahko palične lupine zgrajene iz skoraj vsakega materiala. Vendar pa je potrebno upoštevati, da morajo biti posamezni elementi dovolj fleksibilni, da omogočajo deformacije med gradnjo, ko se ustvarja predvidena oblika. Težave pri določenih materialih bi se pojavile tudi pri tehnologiji vgradnje; na primer pri betonu bi bilo opaževanje zelo težavno, zato armirani beton ni primeren material za palične lupine. Izjemoma bi se lahko uporabilo prefabricirane armirane betonske elemente, vendar bi morali biti pri tem zelo pozorni na morebitne pojave nategov v elementih in to upoštevati pri dimenzioniranju. Za palične lupine sta se tako najbolj uveljavil jeklo in les.

1.3.1 Les

Les je ugoden material za palične lupine predvsem zaradi svojega nizkega elastičnega modula, ki omogoča dovolj fleksibilnosti med samo gradnjo. Pomisleki pri tem materialu se pojavljajo predvsem zaradi trajnosti in časovnega razvoja deformacij: oboje lahko negativno vpliva na odpornost lesa. Les zaradi svoje izpostavljenosti atmosferskim vplivom potrebuje stalno nego (lakiranje,...). V primerjavi z drugimi materiali (npr. jeklo) ima les tudi nižjo trdnost: posledično je razpon lesenih paličnih lupin omejen. Pozitivna lastnost lesa, kot materiala za palične lupine, je njegova cena in lahka vgradnja, saj se stike posameznih palic relativno lahko izvede. Les se tako uporablja predvsem za manjše konstrukcije in sonaravne konstrukcije.

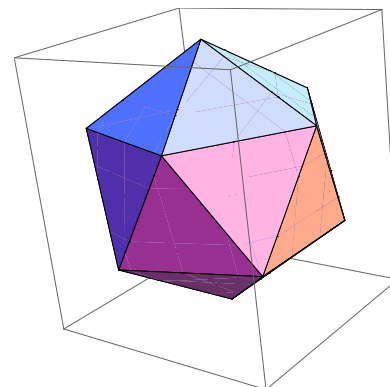
1.3.2 Jeklo

Jeklo je material, ki ga uporabimo za palične lupinaste konstrukcije z velikim razponom, kjer je potrebna velika trdnost materiala. Dobimo manjše prereze palic, v primerjavi z drugimi materiali, vendar moramo paziti na uklon. Če smo pri načrtovanju pozorni, lahko uporabimo veliko število palic enakih dimenzij, kar zniža stroške gradnje. Prav tako moramo pri jeklu posvetiti posebno pozornost stikovanju in poiskati optimalen način izvedbe stikov (vijačenje, varjenje). Če se palice stikujejo pod enakimi koti, lahko za stike uporabimo posebne elemente na katere palice privijačimo (uporaba večjega števila enakih elementov gradnjo zelo poceni, poleg tega pa za izvedbo potrebujemo manj izurjeno delovno skupino). Varjenje bi uporabili, če se stiki razlikujejo tako po številu stikovanih palic kot po kotih stikovanja. Takšne konstrukcije so precej dražje: tako zaradi dražje delovne sile kot tudi zaradi bolj zapletene izvedbe.

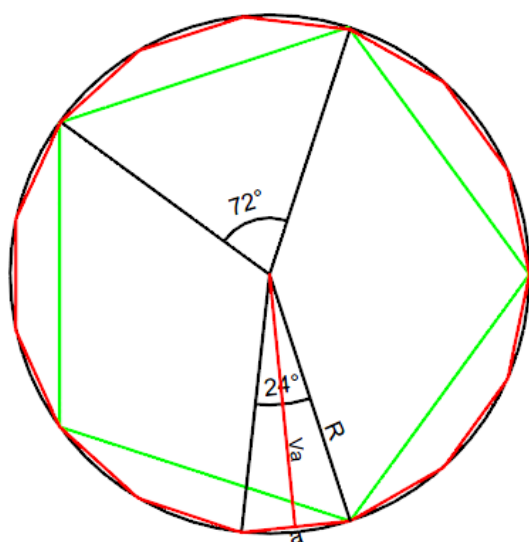
2 GEODEZIČNE KUPOLE

2.1 Definicija geodezične kupole

Geodezična kupola nastane iz geometrijskega telesa poliedra: navadno iz oktaedra -ali ikozaedra (slika 1). Trikotne ploskve oktaedrovega ali ikozaedrovega plašča razdelimo na manjše trikotnike. Nato oglišča trikotnikov projiciramo na plašč krogle, katero določajo oglišča izbranega poliedra (kroglo očrtamo izbranemu telesu). Geodezična kupola se prilega krogli tem bolj čim bolj so stranice izbranega poliedra razdeljene na manjše dele. Če želimo, da vsa oglišča trikotnikov ležijo natančno na plašču krogle, so stranice geodezične kupole različno dolge.



Slika 1: Ikozaeder



Slika 2: Prerez kupole skozi njeno spodnjo ploskev

K načrtovanju geodezične kupole lahko pristopimo na različne načine, ki bodo opisani v nadaljevanju. Najprej pa se moramo odločiti, kako natančno se želimo s konstrukcijo (geodezično kupolo) približati očrtani krogli s polmerom R . Kot kriterij lahko upoštevamo največji odmik stranic kupole od plašča krogle. V ta namen izračunamo razmerje med polmerom krogle in višino na trikotnik (v_a), ki vsebuje središče spodnje ploskve kupole ter eno stranico kupole. Večje kot je razmerje v_a / R (slika 2), bolj se geodezična kupola prilega plašču krogle. Razmerje v_a / R je odvisno od tega, na koliko delov razdelimo stranice oktaedra oz. ikozaedra (glej preglednici 1 in 2):

Preglednica 1: Odstopanje geodezične kupole nastale iz oktaedra od krogle

razdelitev stranice oktaedra [št. enakih delov]	razmerje v_a / R (slika 2)	središčni kot α [°]
2	0,92388	45
3	0,965926	30
4	0,980785	22,5
5	0,987688	18
6	0,991445	15
7	0,993712	12,85714
8	0,995185	11,25

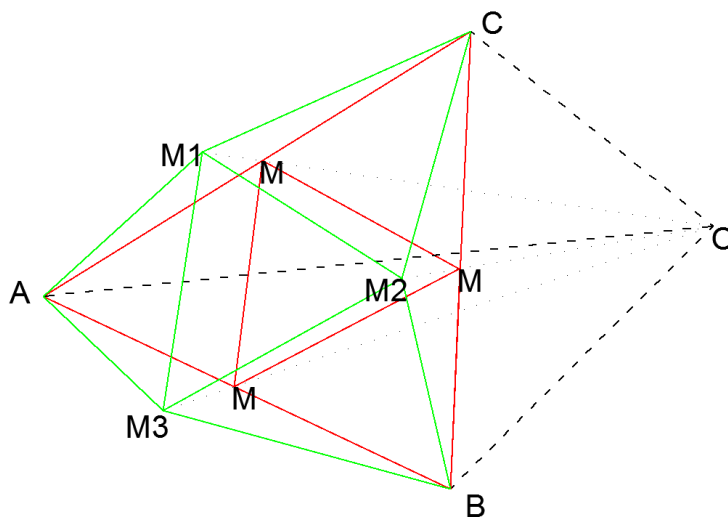
Preglednica 2: Odstopanje geodezične kupole nastale iz ikozaedra od krogle

razdelitev stranice ikozaedra [št. enakih delov]	razmerje v_a / R (slika 2)	središčni kot α [°]
2	0,951057	36
3	0,978148	24
4	0,987688	18
5	0,992115	14,4
6	0,994522	12
7	0,995963	10,3
8	0,996917	9

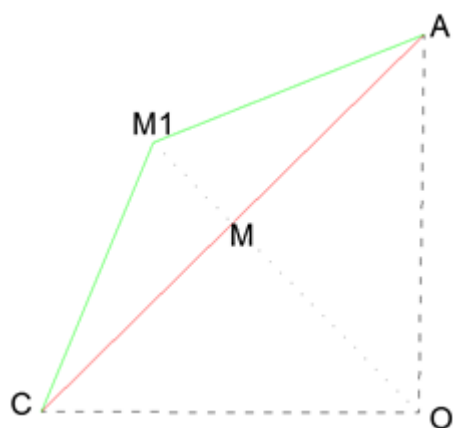
2.2 Določitev števila palic geodezične kupole in njihovih dolžin [2]

Ko se odločimo za izhodiščni polieder in število- delitev njegovih stranic, lahko izračunamo število potrebnih palic za izvedbo kupole ter njihove dolžine. K izračunu dolžin posameznih palic geodezične kupole lahko pristopamo na več načinov. Lahko si pomagamo s podobnimi trikotniki in trigonometričnimi funkcijami.

Vzamemo primer oktaedra, kateremu stranico razdelimo na 2 dela (slika 3). Rdeči trikotniki na sliki 3 predstavljajo eno ploskev oktaedra pred projekcijo na plašč krogle, zeleni trikotniki pa predstavljajo situacijo po projekciji oglišč rdečih trikotnikov na plašč krogle. Vzamemo, da ima kroglja polmer 1 enoto, ter izračunamo dimenzije ostalih elementov (sliki 4 in 5).

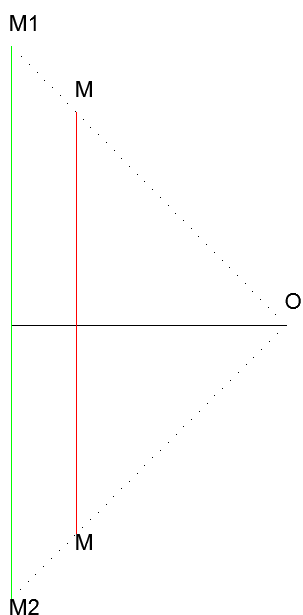


Slika 3: Preslikava oktaedrove ploskve na plašč krogle: trikotniki pred in po preslikavi



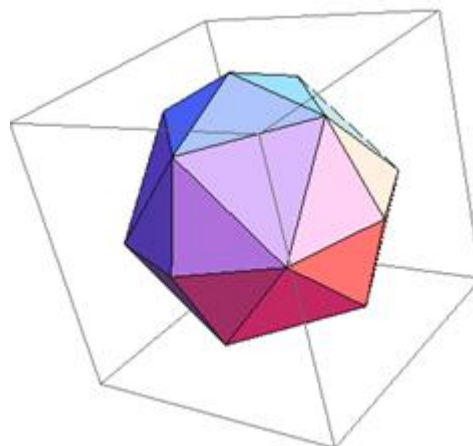
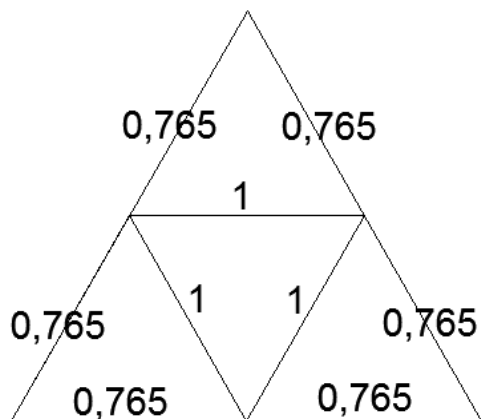
$$\begin{aligned}
 |AO| &= |CO| = |M_1O| = 1 \\
 |AC| &= \sqrt{2} \\
 |AM| &= |MO| = \sqrt{2}/2 \\
 |M_1M| &= |M_1O| - |MO| = 1 - \sqrt{2}/2 \\
 |AM_1| &= \sqrt{|M_1M|^2 + |AM|^2} = 0,765367
 \end{aligned}$$

Slika 4: Preslikava oktaedrove ploskve na plašč krogle: dolžine nekaterih stranic



$$\begin{aligned}
 |MM| &= |OM| = \sqrt{2}/2 \\
 |MM_1| &= 1 \\
 |M_1M_2|/|MM| &= |OM_1|/|OM| \\
 |M_1M_2| &= 1 * \frac{\sqrt{2}}{2} / \frac{\sqrt{2}}{2} = 1
 \end{aligned}$$

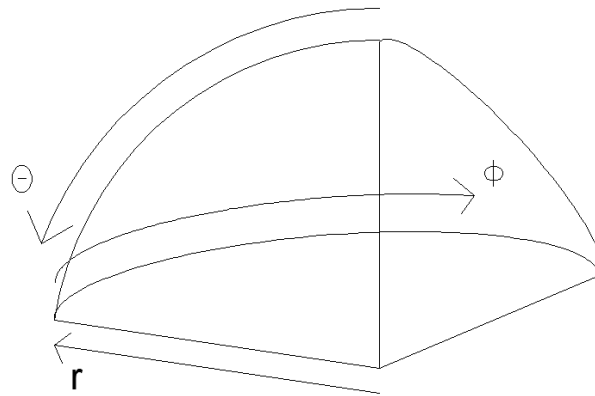
Slika 5: Preslikava oktaedrove ploskve na plašč krogle: dolžine ostalih stranic



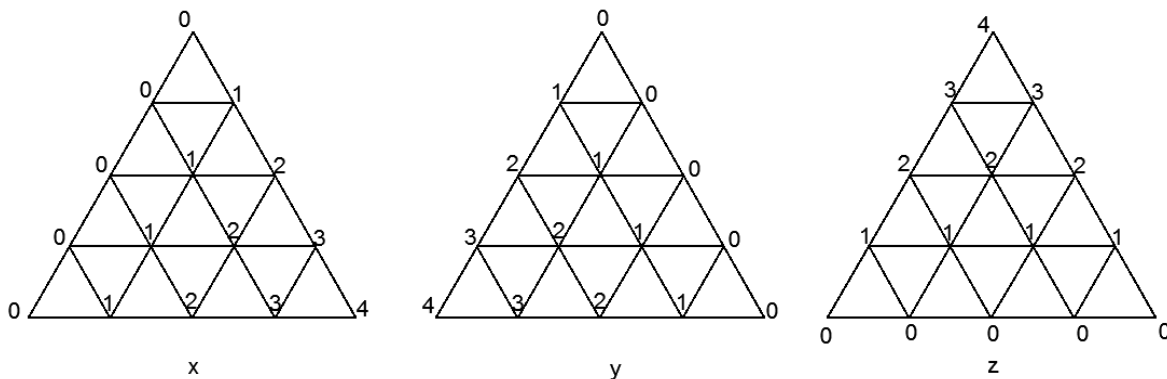
Slika 6: Dolžine stranic geodezične kupole – oktaeder [2 dela] Slika 7: Geodezična sfera oktaedra [2 dela]

Tako smo dobili dolžine palic (slika 6) za geodezične kupole, ki nastanejo iz oktaedra, kateremu stranice razdelimo na dva enaka dela (na sliki 7 je geodezična sfera). Takšna geodezična kupola se zelo slabo prilega plašču krogle, kar je razvidno iz slike 7.

Na zgoraj opisani način izračunamo dolžine stranic v enostavnih geodezičnih kupolah. Bolj kot stranice poliedra delimo, zahtevnejši postane račun. Zato si pomagamo z vpeljavo sferičnega koordinatnega sistema (r, ϕ, Θ), slika 8, ki nam račun dolžine stranic poenostavi. Za določitev sferičnih koordinat posameznih oglišč trikotnikov po preslikavi na plašč krogle, si lahko pomagamo z enostavnim postopkom, ki ga je predstavil Kenner [2]. Posamezno ploskev izhodiščnega telesa razdelimo na želeno število trikotnikov in dobljenim ogliščjem pripišemo vrednosti x, y in z na način, kot je prikazano na sliki 9.



Slika 8: Sferični koordinatni sistem



Slika 9: Pomoč pri označevanju oglišč geodezične kupole

Za oktaeder lahko koordinati ϕ in Θ za vsako oglišče določimo po formuli [2]:

$$\phi = \tan^{-1}(x/y) \quad (1)$$

$$\Theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \quad (2)$$

Za ikozaeder koordinati ϕ in Θ izračunamo na podoben način. Najprej faktorje x, y, z modificiramo, in sicer [2]:

$$x_1 = x * \sin 72^\circ$$

$$y_1 = y + x * \cos 72^\circ$$

$$z_1 = f/2 + z/2 * \cos 36^\circ \quad ; \quad f \dots \text{število delov razdeljene stranice ikozaedra}$$

nato pa jih vstavimo v enačbi (1) in (2).

Ko poznamo koordinate točk (t.j. oglišč geodezične kupole), lahko izračunamo njihove medsebojne razdalje. Razdalja med točkama A in B , $A(r_1, \phi_1, \Theta_1)$ in $B(r_2, \phi_2, \Theta_2)$, se izračuna kot:

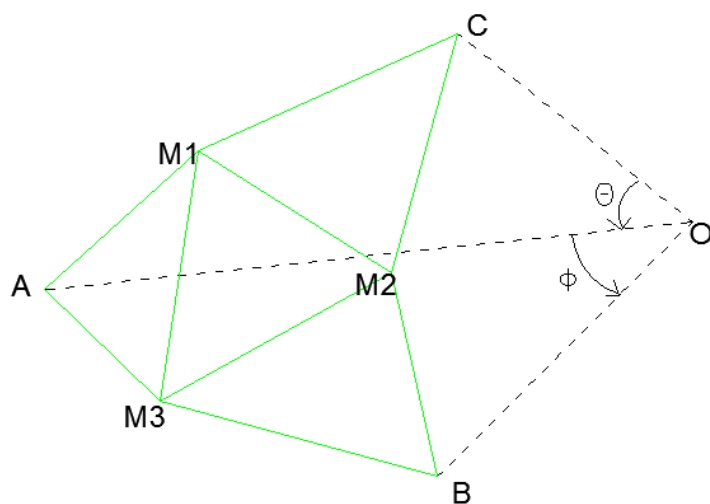
$$d = |AB| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2 * r_1 * r_2 * (\cos \Theta_1 \cos \Theta_2 + \cos(\phi_1 - \phi_2) * \sin \Theta_1 \sin \Theta_2)}$$

Če upoštevamo, da so vsa stikališča palic na geodezični kupoli enako oddaljena od središča, se pravi imajo enako koordinato $r = R$, lahko dolžine med temi stikališči normiramo z dolžino polmera kupole. Tako dobimo vse dolžine palic izražene z deležem polmera. Formula za račun razdalje med dvema točkama (t.j. stikališčema palic), se tako poenostavi, npr. za $r_1 = r_2 = R = 1$ velja

$$d = |AB| = \sqrt{2 - 2 * (\cos \Theta_1 \cos \Theta_2 + \cos(\phi_1 - \phi_2) * \sin \Theta_1 \sin \Theta_2)} \quad (3)$$

Dolžino posamezne palice v geodezični kupoli lahko enostavno izračunamo tako, da dolžino, dobljeno s pomočjo formule (3), pomnožimo z načrtovanim polmerom kupole. Če imamo dolžine palic izračunane na ta način za različne delitve stranic poliedra, lahko k dimenzioniranju pristopimo tudi drugače: omejimo dolžino najdaljšega elementa, in se tako odločimo za potrebno delitev stranic poliedra. Več delitev pomeni krajše elemente, a tudi več različnih elementov.

Zdaj lahko lego oglišč geodezične kupole, nastale iz oktaedra, kateremu smo stranice razdelili na 2 dela (slika 3), izrazimo s koordinatama ϕ in Θ . Koordinate oglišč so izražene v stopinjah na sliki 10.



$T(\phi, \Theta)$

- $A(0, 90)$
- $B(90, 90)$
- $C(0, 0)$
- $M_1(0, 45)$
- $M_2(90, 45)$
- $M_3(45, 90)$

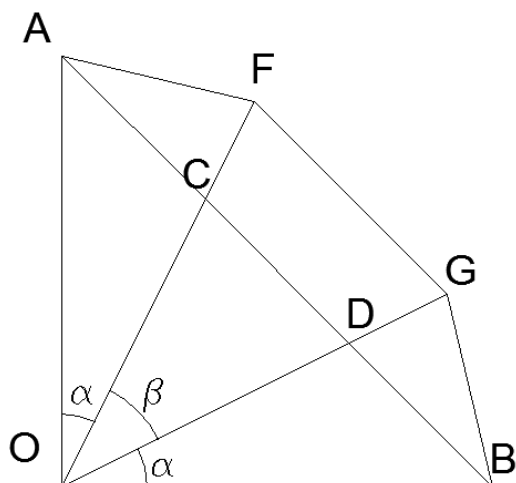
Po formuli (3) dobimo dolžini palic $|AM_1| = 0,765367$ in $|M_1M_2|=1$, torej enako kot po prejšnjem postopku (glej slike 4 do 6).

Slika 10: Del geodezične kupole

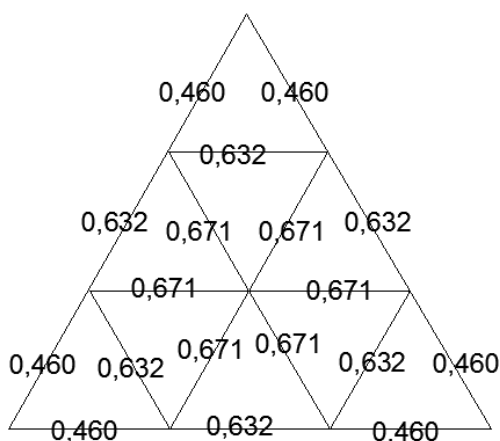
2.3 Projekcija oglišč trikotnikov na kroglo [2]

Poleg različnih načinov računa dolžin palic poznamo tudi različne načine projiciranja oglišč trikotnikov poliedra na plašč krogle. Če za zgled vzamemo oktaeder, s stranico razdeljeno na 3 dele, lahko pokažemo 2 možna pristopa projiciranja na plašč krogle, ki nam dasta različne dolžine palic.

Prvi način je, da stranice oktaedra razdelimo na tri enake dele ($|AC|=|CD|=|DB|$, slika 11) in nato projiciramo oglišča trikotnikov na plašč krogle po premicah, ki gredo skozi izhodišče krogle O , kot je prikazano na sliki 11. Če točke zapišemo s sferičnimi koordinatami in izračunamo razdalje med njimi, dobimo s tem načinom projekcije situacijo, prikazano na sliki 12, preglednici 3 in sliki 13.



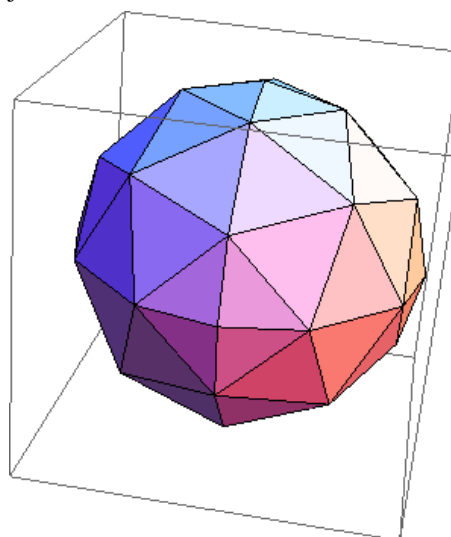
Slika 11: Prvi način projiciranja – oktaeder [3 deli]



Slika 12: Dolžine palic pri prvem načinu projiciranja

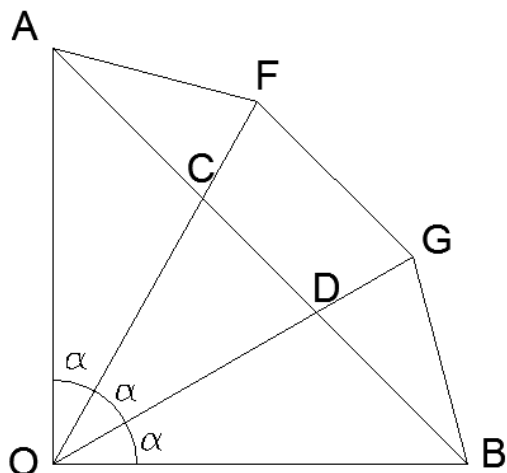
Preglednica 3: Palice geodezične kupole pri prvem načinu projiciranja

palica	normirana dolžina	št. potrebnih palic za polovico geodezične sfere
a	0,46	16
b	0,632	20
c	0,671	24

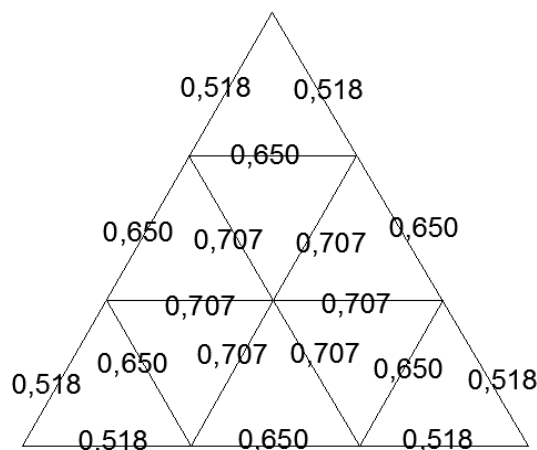


Slika 13: Geodezična sfera oktaedra [3deli]

Pri drugem načinu projiciranja predpostavimo enake vrednosti središnjih kotov (slika 14). Ponovno izračunamo dolžine posameznih elementov. Pri tem moramo vedeti, da prej opisan postopek za izračun sferičnih koordinat za ta način projiciranja ne velja. Vendar pa za tako enostaven primer lahko koordinate uganemo
 Dobimo situacijo, prikazano na sliki 15.



Slika 14: Drugi način projiciranja

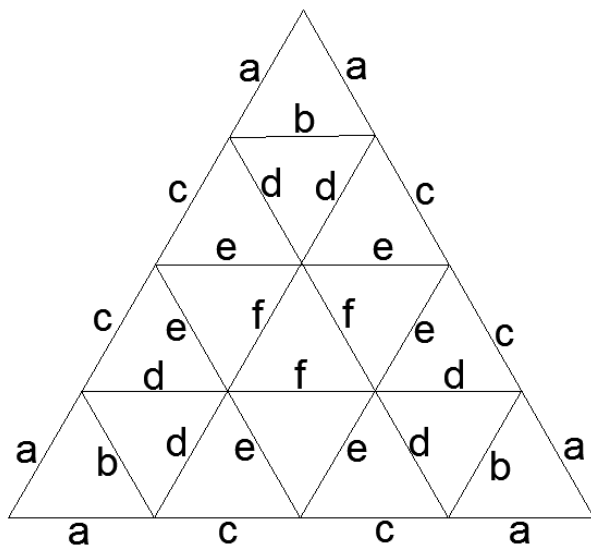


Slika 15: Dolžine palic pri drugem načinu projiciranja

Kot vidimo iz primerjave slik 12 in 15, se vrednosti dolžin palic nekoliko razlikujejo. V praksi se je bolj uveljavil prvi način projiciranja, saj z njim dobimo krajše palice, kar je bolj ekonomično z vidika porabe materiala in stabilnosti (manjša nevarnost uklona).

2.4 Geodezične kupole iz oktaedra

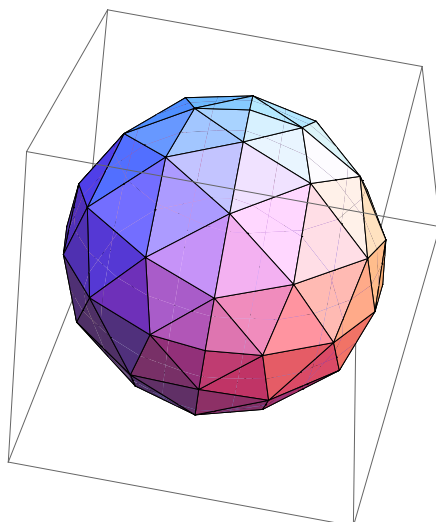
Pri načrtovanju geodezične kupole torej najprej izračunamo dolžine posameznih sestavnih delov kupole. Za oktaeder, kateremu stranice razdelimo na 4 enake dele, dobimo rezultate, ki so prikazani na sliki 16, preglednici 4 in sliki 17. Za oktaeder, kateremu stranice razdelimo na 5 delov, pa dobimo naslednje rezultate, prikazane na sliki 18, preglednici 5 in sliki 19.



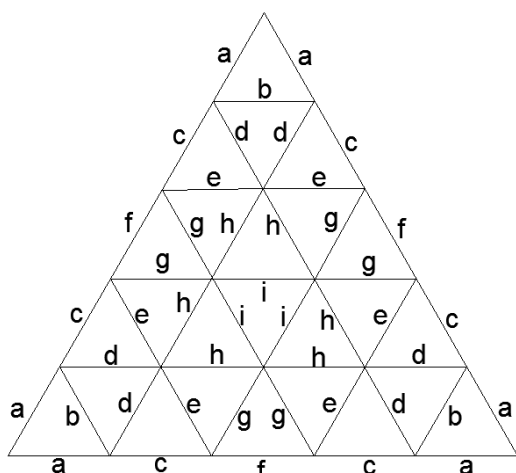
Slika 16: Dolžine palic geodezične kupole oktaedra [4 deli]

Preglednica 4: Palice geodezične kupole oktaedra [4deli]

palica	normirana dolžina	št. potrebnih palic za polovico sfere
a	0,320365	16
b	0,447215	12
c	0,459505	16
d	0,438865	24
e	0,517638	24
f	0,577354	12



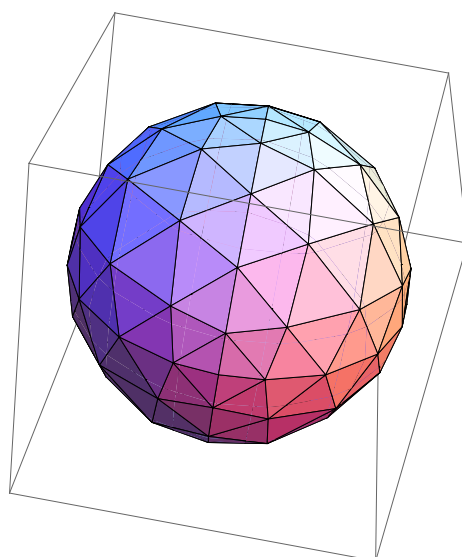
Slika 17: Geodezična sfera oktaedra [4 deli]



Slika 18: Dolžine palic geodezične kupole oktaedra [5 delov]

Preglednica 5: Palice geodezične kupole oktaedra
[5 delov]

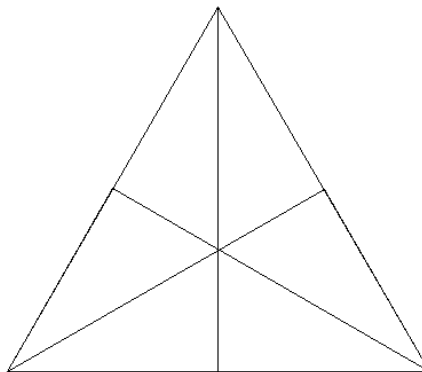
palica	normirana dolžina	št. potrebnih palic za polovico sfere
a	0,244362	16
b	0,342991	12
c	0,341348	16
d	0,314153	24
e	0,400334	24
f	0,392233	24
g	0,388587	24
h	0,436958	24
i	0,471406	12



Slika 19: Geodezična sfera oktaedra [5delov]

Podobno lahko prikažemo rezultate za poljubno geodezično kupolo nastalo iz oktaedra.

Pri tem je priročno vedeti, da lahko izračunamo dolžine palic samo znotraj trikotnika, ki ga omejujejo višine trikotnika ploskve poliedra, vse ostale dolžine pa določimo s preslikavo preko višine trikotnika. Vsaka ploskev osnovnega telesa je namreč sestavljena iz 6 simetričnih trikotnikov (slika 20). Poleg tega opazimo, da poteka najkrajša palica zmeraj iz oglišča osnovnega poliedra, najdaljša palica pa je tista, ki je najbližja središču ploskve osnovnega poliedra. Kar nam služi kot kontrola pri računu dolžin.

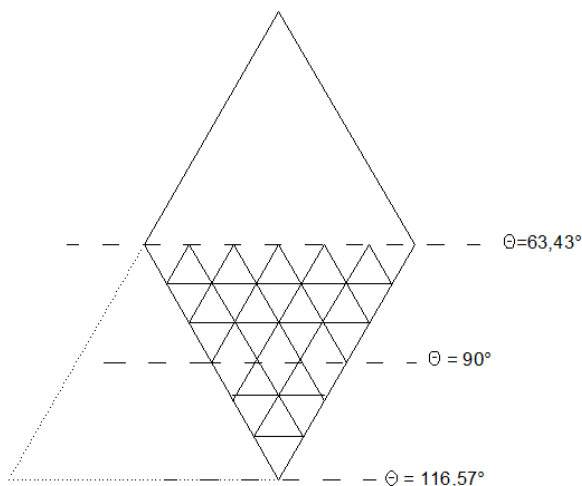


Slika 20: Simetrični trikotniki ploskve poliedra

2.5 Geodezične kupole iz ikozaedra [2]

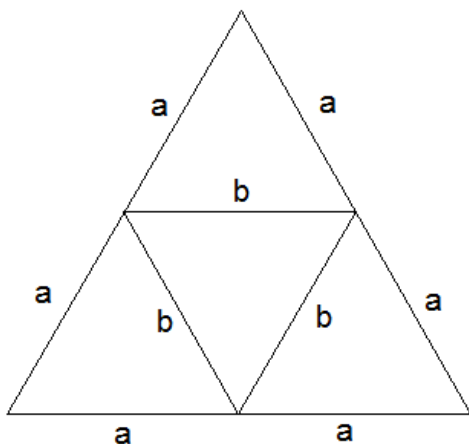
Z večjim številom delitev stranice oktaedra, dobimo geodezično kupolo, ki se bolje približa plašču krogle, njene palice pa se krajšajo. Vendar pa se moramo zavedati, da s tem narašča zahtevnost izvedbe. Z vsako večjo delitvijo namreč dobimo dodatne različne dolžine palic. To zahteva večjo pozornost pri izgradnji, hkrati pa se draži tudi proizvodnja elementov. Tem problemom se lahko izognemo, če za izhodiščno telo namesto oktaedra vzamemo ikozaeder. Pri ikozaedru namreč že z delitvijo stranice na 2 oz. 3 dele dosežemo zelo dobro aproksimacijo krogle.

Za geodezične kupole, ki nastanejo iz oktaedra, projiciramo na plašč krogle polovico oktaedra. Pri tem imajo vsa vozlišča, ki ležijo na prerezni ploskvi oktaedra, sferično koordinato Θ enako 90° . Pri ikozaedru pa vidimo, da ga ne moremo razpoloviti preko njegovih stranic. Zato vzamemo nekoliko manjši oziroma večji del ikozaedra. Če projiciramo samo zgornji del ikozaedra (5 ploskev), imajo oglišča na prerezni ploskvi sferično koordinato Θ enako $63,43^\circ$ (slika 21). Če pa projiciramo večji del ikozaedra (15 ploskev), imajo oglišča na prerezni ploskvi sferično koordinato Θ enako $116,57^\circ$ (slika 21). V nadaljevanju sem se omejila na geodezične kupole iz večjega dela ikozaedra.



Slika 21: Sferična koordinata Θ za različne deleže ikozaedra

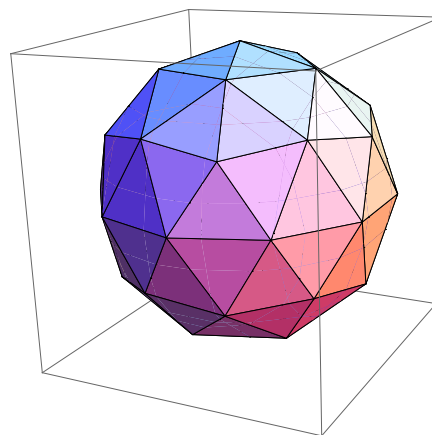
Za ikozaeder, ki mu stranice razdelimo na 2 dela dobimo naslednje rezultate, ki so prikazani na sliki 22, preglednici 6 in sliki 23. Za ikozaeder, ki mu stranice razdelimo na 3 dele, so rezultati prikazani na sliki 24, preglednici 7 in sliki 25. Za ikozaeder, ki mu stranice razdelimo na 4 dele, dobimo rezultate, ki so prikazani na sliki 26, preglednici 8 in sliki 27. Ikozaedru, ki mu stranice razdelimo na 5 delov, pripadajo rezultati na slikah 28, 29 in preglednici 9.



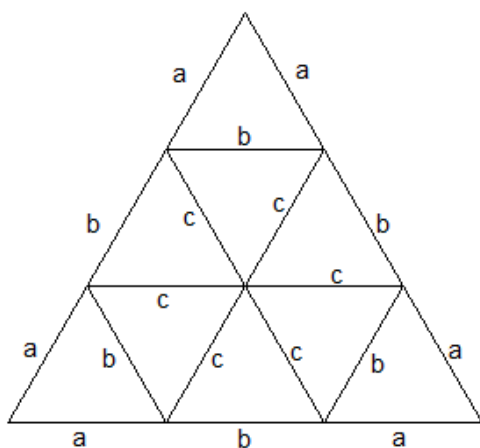
Slika 22: Dolžine palic geodezične kupole ikozaedra [2 dela]

Preglednica 6: Palice geodezične kupole ikozaedra [2 dela]

palica	normirana dolžina	št. potrebnih palic za celotno kupolo
a	0,546575	50
b	0,618078	45



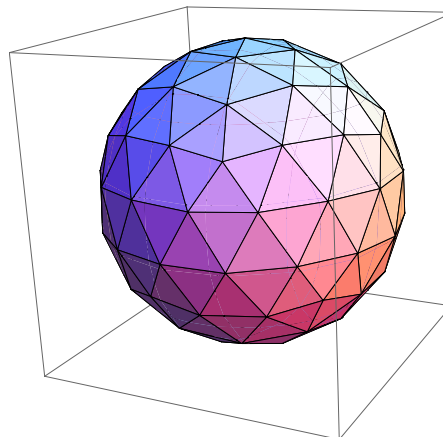
Slika 23: Geodezična sfera ikozaedra [2 dela]



Slika 24: Dolžine palic geodezične kupole ikozaedra [3 deli]

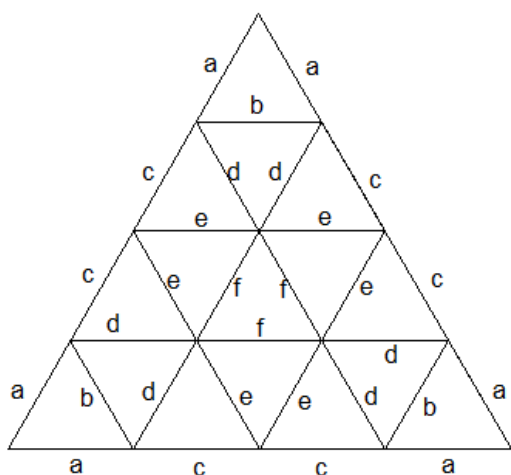
Preglednica 7: Palice geodezične kupole ikozaedra [3 deli]

palica	normirana dolžina	št. potrebnih palic za celotno kupolo
a	0,3486	50
b	0,40355	70
c	0,4124	90



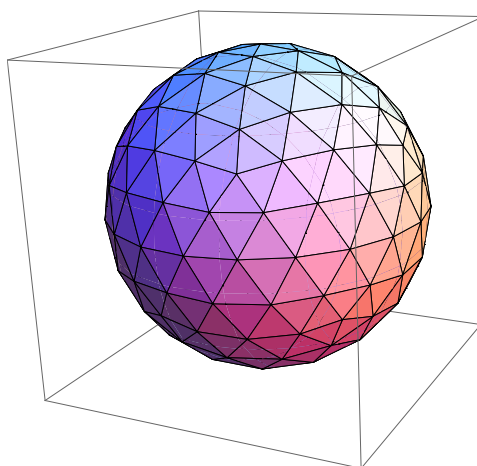
Slika 25: Geodezična sfera ikozaedra [3 deli]

Preglednica 8: Palice geodezične kupole ikozaedra [4 deli]



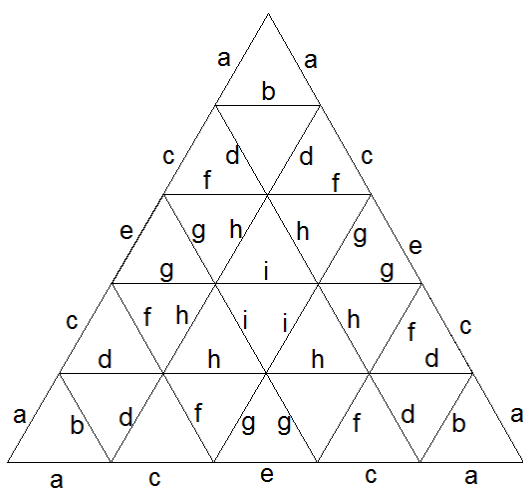
palica	normirana dolžina	št. potrebnih palic za celotno kupolo
a	0,253185	50
b	0,295242	45
c	0,298588	50
d	0,294531	90
e	0,312869	90
f	0,32492	45

Slika 26: Dolžine palic geodezične kupole ikozaedra [4 deli]



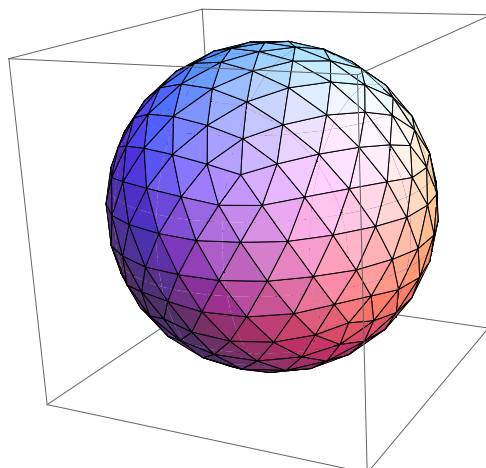
Slika 27: Geodezična sfera ikozaedra [4 deli]

Preglednica 9: Palice geodezične kupole ikozaedra [5 delov]



palica	normirana dolžina	št. potrebnih palic za celotno kupolo
a	0,198147	50
b	0,23179	45
c	0,231	50
d	0,225686	90
e	0,245346	25
f	0,247243	90
g	0,245086	90
h	0,255167	90
i	0,261598	45

Slika 28: Dolžine palic geodezične kupole ikozaedra [5 delov]



Slika 29: Geodezična sfera ikozaedra [5 delov]

2.6 Stikovanje palic

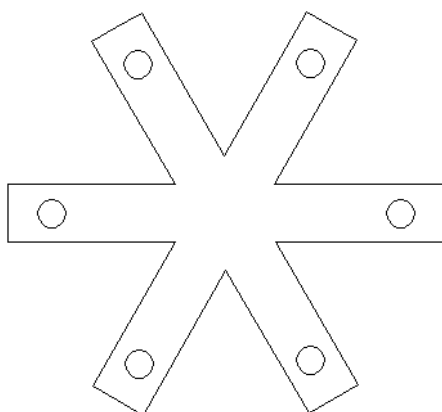
Poleg dolžin palic nas pri dimenzioniranju geodezičnih kupol zanimajo tudi stikovanja. Predvsem nas zanima število stikovanih palic v posameznih ogliščih in koti med posameznimi palicami. Pozitivna lastnost geodezičnih kupol je, da se geometrija stikov med palicami ponavlja po celotni kupoli. Ta lastnost nam lahko zelo poceni proizvodnjo, saj lahko uporabimo prefabricirane elemente na katere privijačimo palice.

Pri geodezičnih kupolah nas pri geometriji stikov zanimajo predvsem koti, ki jih posamezni elementi oklepajo med seboj in s središčem kupole. Za določitev kotov, ki jih elementi oklepajo med seboj si preprosto pomagamo s kosinusnim izrekom.

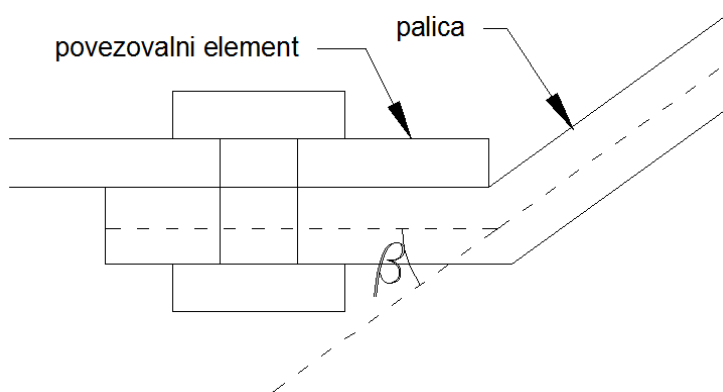
$$\alpha = \cos^{-1} \left[\frac{(b^2 + c^2 - a^2)}{(2 * b * c)} \right];$$

a, b, c so stranice posameznega trikotnika in α kot med b in c

Če izračunamo vse kote okoli enega vozlišča ugotovimo, da je vsota kotov manjša od 360° . Prav ta lastnost omogoča ukrivljenost kupole. Poleg tega pa nas zanimajo še koti, ki jih palice oklepajo z središčem kupole. Če uporabimo trigonometrične funkcije, ta kot enostavno izračunamo kot $\beta = \sin^{-1}(a/2)$; a ...dolžina palice. Ta kot ima veliko uporabno vrednost, če stikujemo palice s 6-, 5-, 4- in 3- kraki povezovalnimi elementi (slika 30). Želimo vedeti še števila potrebnih povezovalnih elementov za izvedbo kupole, ki so podana v preglednicah 10 in 11.



Slika 30: Primer povezovalnega elementa



Slika 31: Primer stikovanja

Preglednica 10: Število potrebnih povezovalnih elementov za geodezično kupolo oktaedra

Oktaeder razdelitev stranice [n = št delov]	število povezovalnih elementov		
	3-kraki	4-kraki	6-kraki
2	4	5	4
3	4	9	12
4	4	13	24
5	4	17	40

Formule za izračun potrebnih povezovalnih elementov:

3-kraki: vedno 4

4-kraki: $1 + 4 * (n - 1)$

6-kraki: $4 * (n - 1) + 4 * \sum_{i=1}^{n-2} i$

Preglednica 11: Število potrebnih povezovalnih elementov za geodezično kupolo ikozaedra

Ikozaeder razdelitev stranice [n = št delov]	število povezovalnih elementov		
	4-kraki	5-kraki	6-kraki
2	10	6	20
3	15	6	55
4	20	6	105
5	25	6	170

4-kraki: $5 + 5 * (n - 1)$

5-kraki: vedno 6

6-kraki:

$$20 * (n - 1) + 15 * \sum_{i=1}^{n-2} i$$

Pri geodezični kupoli, nastali iz oktaedra, se 3-kraki povezovalni elementi nahajajo na dnu kupole, v ogliščih izhodiščnega oktaedra, in 4-kraki elementi, na ogliščih na spodnjih robovih izhodiščnega oktaedra ter na vrhu kupole. Vsa ostala oglišča so 6-kraka. Pri geodezični kupoli, nastali iz ikozaedra, se 5-kraki povezovalni elementi nahajajo v ogliščih izhodiščnega ikozaedra, 4-kraki elementi na spodnjih robovih izhodiščnega ikozaedra, vsa ostala oglišča so 6-kraka.

2.7 Primer določitve elementov geodezične kupole

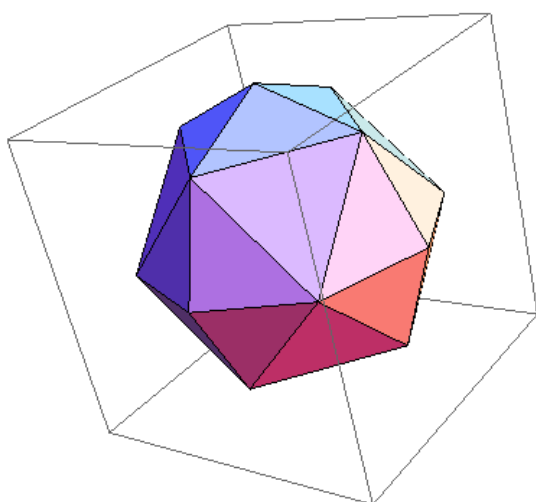
Želimo pokriti prostor premera 20 m z geodezično kupolo, ki bo aproksimirala polovico sfere. Najdaljši element omejimo na 3 m. Če izhajamo iz ikozaedra, ugotovimo, da pogoju najdaljšega elementa zadostimo z delitvijo stranice ikozaedra na 5 delov. To ugotovimo tako, da polmer želene kupole (10 m) pomnožimo z največjo normirano dolžino elementa (0,261598). V našem primeru to znese: $10 \text{ m} \cdot 0,261598 = 2,616 \text{ m}$. Za izvedbo celotne kupole bi tako potrebovali naslednje elemente: 50x 198,2cm ; 45x 231,8cm ; 50x 231,0cm ; 90x 225,7cm ; 25x 245,35cm ; 90x 247,2cm ; 90x 245,1cm ; 90x 255,2cm ; 45x 261,6cm. Kot vidimo, so si nekatere dolžine zelo podobne, tako da lahko kupolo nekoliko posplošimo in vzamemo elemente enakih dimenzij, npr. namesto 45x 231,8cm in 50x 231,0cm lahko vzamemo 95x231,0cm; namesto 25x 245,35cm, 90x 247,2cm in 90x 245,1cm vzamemo 205x246cm. Ta posplošitev nam geometrije kupole ne pokvari preveč, vendar pa zelo vpliva na pocenitev izvedbe. Če si pogledamo še geometrijo stikov. Za celotno kupolo potrebujemo 25x 4-krakih, 6x 5-krakih in 170x 6-krakih elementov. Robove palic pa ukrivimo za 6-7°. V tem primeru ni potrebna prevelika natančnost, saj so palice kratke in nam napaka kota 1° ne predstavlja velike napake in težav pri vgradnji.

2.8 Izris geodezičnih sfer v programu Mathematica

Če želimo narisati različne geodezične sfere v programu Mathematica[3] moramo najprej poklicati knjižnico `PolyhedronOperations``. Nato pa z ukazom `Geodesate` narišemo sfere, ki izhajajo iz različnih teles. Pri tem definiramo še število delov na katere Mathematica razdeli stranice telesa.

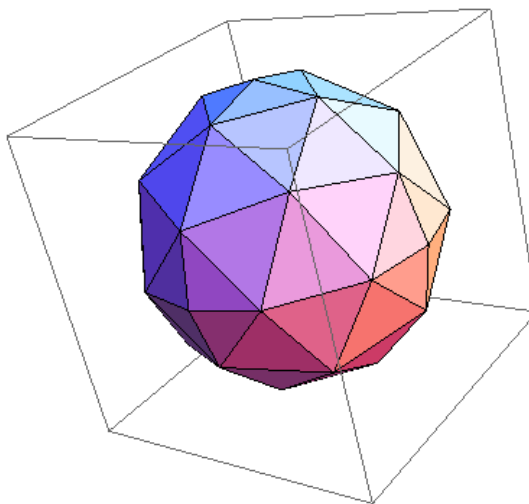
Geodezični sferi, ki izhajata iz oktaedra, sta prikazani na slikah 32 in 33. Geodezični sferi, ki izhajata iz ikozaedra, sta prikazani na slikah 34 in 35. Z Mathematico so narisane tudi geodezične sfere na slikah 7, 13, 17, 19, 23, 25, 27 in 29. Poleg tega nam Mathematica s podobnim ukazom izpiše tudi koordinate stičišč palic (slika 36).

`Geodesate [PolyhedronData ["Octahedron", "Image"], 2, {0, 0, 0}]`



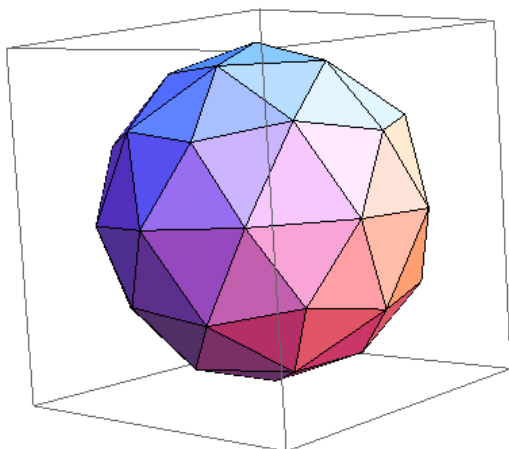
Slika 32: Primer izrisa geodezične kupole z uporabo programa Mathematica: oktaeder [2 dela]

`Geodesate [PolyhedronData ["Octahedron", "Image"], 3, {0, 0, 0}]`

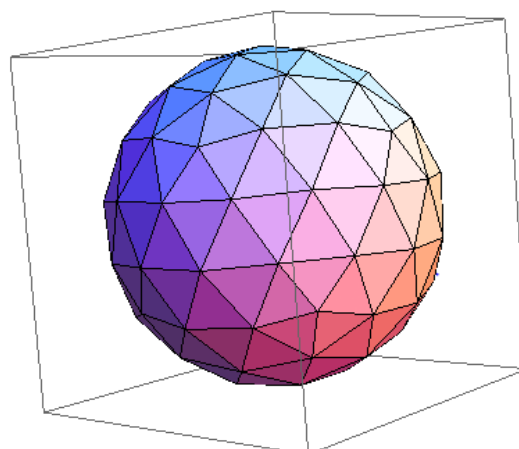


Slika 33: Primer izrisa geodezične kupole z uporabo programa Mathematica: oktaeder [3 deli]

`Geodesate [PolyhedronData ["Icosahedron", "Image"], 2, {0, 0, 0}]` `Geodesate [PolyhedronData ["Icosahedron", "Image"], 3, {0, 0, 0}]`



Slika 34: Primer izrisa geodezične kupole z uporabo programa Mathematica: ikozaeder [2 dela]



Slika 35: Primer izrisa geodezične kupole z uporabo programa Mathematica: ikozaeder [3 deli]

`Geodesate [PolyhedronData ["Icosahedron", "VertexCoordinates"], 1, {0, 0, 0}]`

$$\left\{ \left\{ 0, 0, -\frac{5}{\sqrt{50-10\sqrt{5}}} \right\}, \left\{ 0, 0, \frac{5}{\sqrt{50-10\sqrt{5}}} \right\}, \left\{ -\sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}}, 0, \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \right\}, \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \right\}, \left\{ -\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ -\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \right\}, \left\{ -\frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}, -\frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ -\frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}, -\frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}, -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}, \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}}, \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \right\} \right\}$$

Slika 36: Primer izpisa koordinat geodezične kupole pri uporabi programa Mathematica: ikozaeder, R=1

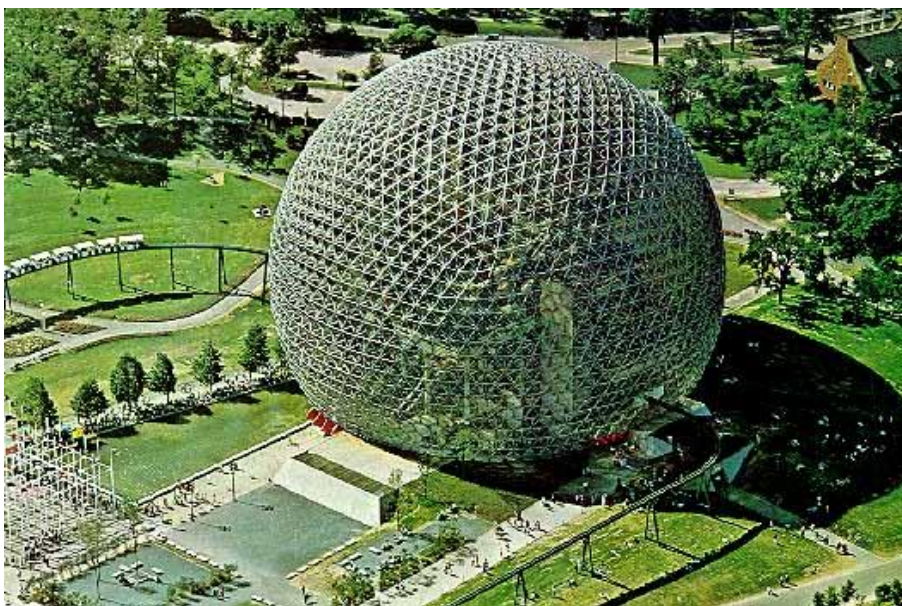
2.9 Znane geodezične kupole

Geodezična kupola na sliki 37 prikazuje Zeiss-Planetarium v Jeni, Nemčija. Zgrajena je bila 1926, arhitekt je bil Walther Bauersfeld.



Slika 37: Zeiss planetarium (Uporabnik Wikipedie, 2006) [4]

Zelo znana geodezična kupola je Ameriški paviljon za Expo 67 v Montrealu, Kanada (slika 38). Postavljena leta 1967 po načrtih Buckminster Fullerja.



Slika 38: Ameriški paviljon (Stanton, 1997) [5]

Geodezična kupola z največjim premerom (216 m), Fukuoka Dome (slika 39), stoji v Fukuoki na Japonskem od leta 1993.



:

Slika 39: Fukuoka Dome (Final Gear forum, 2011) [6]

Geodezične kupole so tudi v Sloveniji: na sliki 40 je prikazana geodezična kupola v Tivoliju v Ljubljani, na sliki 41 pa so geodezične kupole na Velenjskem jezeru.



Slika40: Geodezična kupola v Tivoliju v Ljubljani

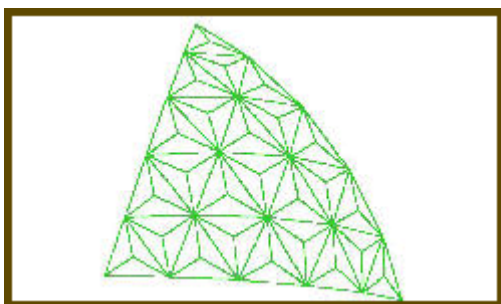


Slika 41: Geodezične kupole na Velenjskem jezeru (Petrašević, 2012) [7]

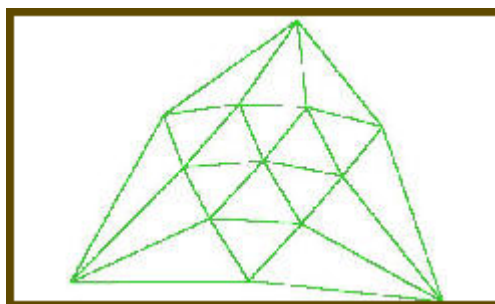
3 OSTALE PALIČNE KUPOLE IN PALIČNI OBOKI

3.1 Različne oblike paličnih kupol

Palične kupole lahko oblikujemo še na veliko drugačnih načinov od tistih, ki so bili prikazani v poglavju 2. Izbiramo lahko like (celice) iz katerih sestavimo kupolo, npr. različne trikotnike, štirikotnike, petkotnike... Lahko jih med seboj tudi kombiniramo in tako ustvarjamo različne vzorce. To lahko storimo podobno kot pri geodezičnih kupolah, le da ploskve poliedra razdelimo na poljuben način (glej slike 42 in 43). Dolžine posameznih elementov se pri tem bolj razlikujejo.



Slika 42: Primer poljubne razdelitve ploskve poliedra (Geodesics unlimited) [8]



Slika 43: Primer poljubne razdelitve ploskve poliedra (Geodesics unlimited) [8]

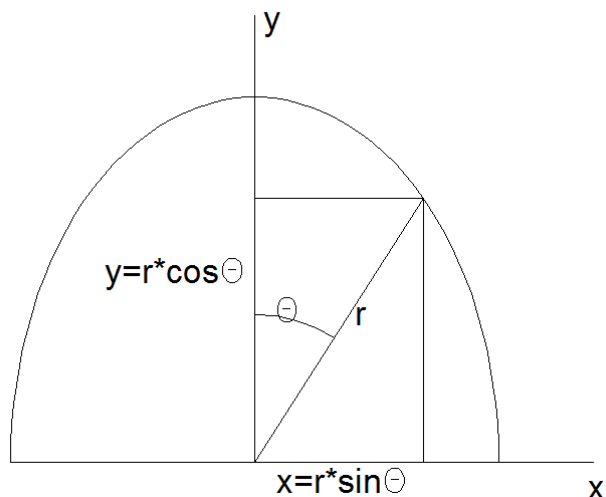
Prav tako lahko poljubno izberemo telo na katerega projiciramo izbrano mrežo. Običajno je to krogla, lahko pa je tudi paraboloid, elipsoid (slika 45), stožec (slika 46) ... K računu geometrije lahko pristopimo podobno kot pri geodezičnih kupolah. Lahko si pomagamo z uvedbo sferičnega koordinatnega sistema. Za razliko od projiciranja na kroglo, se pri projekcijah na druga telesa spreminja tudi koordinata r . Če znamo določimo koordinate stičišč palic (v nadaljevanju jim bomo rekli tudi točke), lahko določimo tudi vse ostale parametre, ki jih potrebujemo za določitev geometrije celotne palične konstrukcije.

3.2 Projekcija na elipsoid [2]

Za projekcijo na elipsoid uporabimo formulo za elipso: $-x^2 + y^2/b^2 = 1$.

Koordinati x in y izrazimo z sferičnima koordinatama r in Θ . Ko tako dobljeno enačbo uredimo,

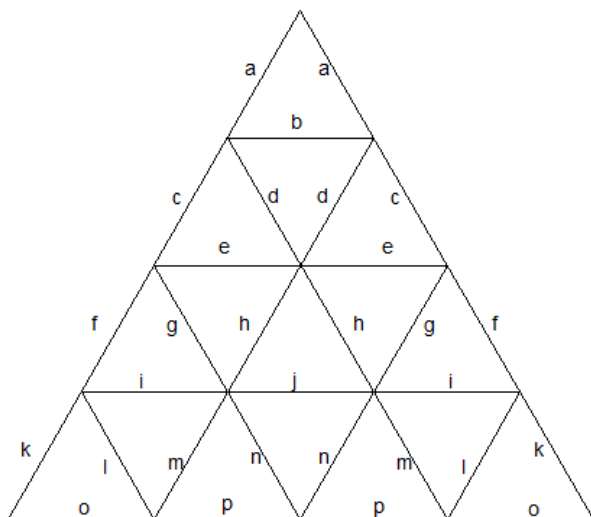
dobimo formulo za izračun koordinate r v odvisnosti od kota Θ : $r = \sqrt{b^2 / (b^2 * \sin^2 \Theta + \cos^2 \Theta)}$.



Slika 44: Koordinate točke na plašču elipse

Kot pri geodezičnih kupolah nato izračunamo kota Φ in Θ ter koordinato r . Ko imamo znane koordinate točk (slika 44) lahko izračunamo dolžine posameznih elementov kupole. Koeficient b pomeni razmerje med višino kupole in polmerom tlorisa kupole. Če je $b > 1$ pomeni da bo kupola povišana, če je $b < 1$ pa bo kupola znižana. V primeru, da je $b = 1$ dobimo geodezično kupolo.

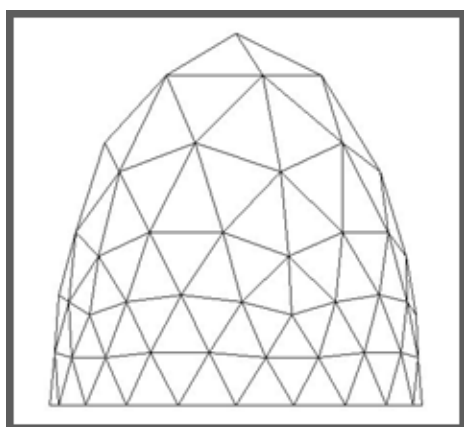
Za elipsoid, ki nastane iz oktaedra, kateremu stranico razdelimo na 4 dele, tako dobimo rezultate, ki so podani na sliki 45 in preglednici 12. Pri takšnih projekcijah se izgubi del simetrije, tako da dobimo večje število različnih palic. Prav tako se elementi proti vrhu kupole daljšajo (slika 46) zato lahko koordinate točk modificiramo, da dobimo elemente bolj podobnih dimenzij.



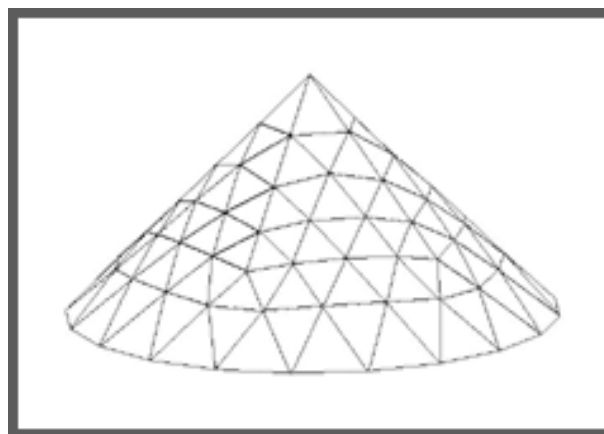
Slika 45: Dimenzije palic elipsoida, ki nastane iz oktaedra [4deli]

Preglednica 12: Palice elipsoida, ki nastane iz oktaedra [4 deli]

palica	normirana dolžina	število potrebnih palic za polovico elipsoida
a	0,474423	4
b	0,632456	4
c	0,638578	4
d	0,605791	8
e	0,635872	8
f	0,526758	4
g	0,58915	8
h	0,696631	8
i	0,456607	8
j	0,606092	4
k	0,326266	4
l	0,454575	8
m	0,452409	8
n	0,532697	8
o	0,320364	8
p	0,459506	8



Slika 46: Palična lupina oblike elipsoida (Geodesics unlimited) [8]

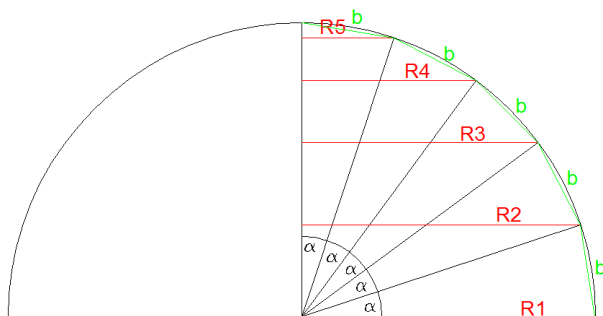


Slika 47: Palična lupina oblike stožca (Geodesics unlimited) [8]

3.3 Poljubne (sferične) kupole

Seveda pa lahko kupolo oblikujemo tudi na drugačne načine. Lahko izhajamo tudi iz krogle na kateri določimo točke, ki jih nato povežemo z palicami. Lahko na primer tloris kupole razdelimo na več koncentričnih krogov, iz katerih napravimo pravilne večkotnike. Oglišča nastalih večkotnikov povežemo in dobimo aproksimacijo (dela) krogle.

Če uporabimo tak način je najbolj optimalno, da koncentrični krogi skupaj z središčem oklepajo enake kote (slika 48).



Najprej si izberemo število koncentričnih krogov i . Središčni kot α dobimo kot:

$$\alpha = 90^\circ / i$$

Ko imamo znan središčni kot lahko izračunamo radije vseh koncentričnih krogov:

$$R_n = \cos((n - 1) * \alpha)$$

Iz slike 48 lahko razberemo še dolžino palice b : $b = 2 * \sin(\alpha/2)$.

Slika 48: Perez palične kupole v obliki polkrogle

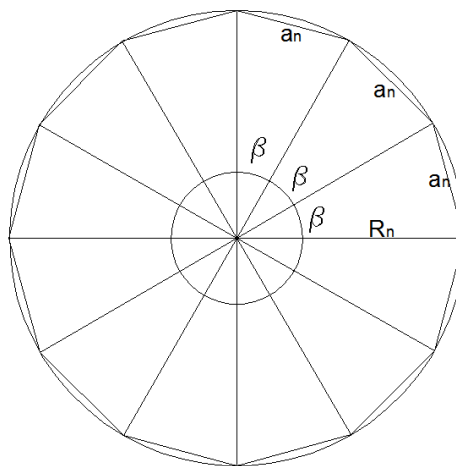
Če se odločimo za 5 koncentričnih krogov (slika 48), dobimo njihove polmere iz preglednice 13 in normirano dolžino palice b : $b = 0,312869$. Ob poznanih polmerih posameznih koncentričnih krogov lahko izračunamo še dolžine ostalih palic. Posamezen koncentrični krog aproksimiramo z izbranim j -kotnikom (slika 49), ter izračunamo pripadajoči središčni kot β : $\beta = 360^\circ / j$, dolžino elementa a_n s slike 49 pa kot:

$$a_n = 2 * R_n * \sin(\beta/2)$$

Če torej za izračunanih 5 koncentričnih krogov s slike 48 izračunamo še pripadajoče dolžine palic za $j=12$, dobimo dolžine zbrane v preglednici 14. Tako smo na enostaven način dobili normirane dimenzije vseh potrebnih elementov za izvedbo sferične palične kupole prikazane na sliki 50.

Preglednica 13: Polmeri posameznih koncentričnih krogov v palični lupini s slike 48

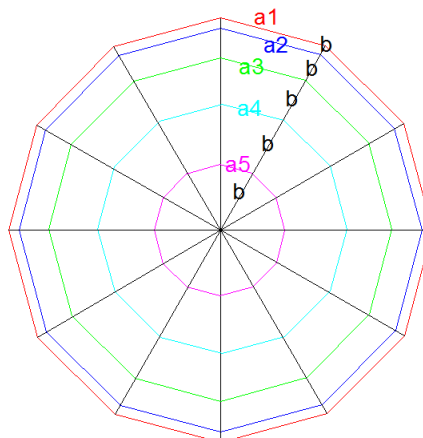
polmer	normirana dolžina
R_1	1
R_2	0,951057
R_3	0,809017
R_4	0,587785
R_5	0,309017



Slika 49: Koncentrični krog palične lupine

Preglednica 14: Dolžine palic palične kupole

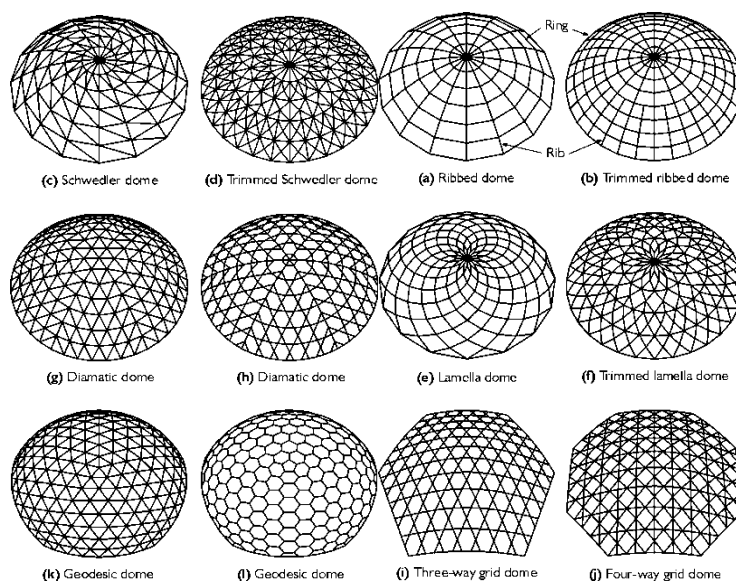
palica	normirana dolžina
a1	0,517638
a2	0,492303
a3	0,418778
a4	0,30426
a5	0,159959



Slika 50: Tloris palične kupole

Kot vidimo je kupola na sliki 50, razen na vrhu, sestavljena iz štirikotnikov. Ker vemo, da so trikotniki bolj stabilna oblika od štirikotnikov, lahko v štirikotnike namestimo diagonale in jih na ta način utrdimo. V primerjavi z geodezičnimi kupolami vidimo, da dimenzije posameznih palic zelo varirajo. To je lahko moteče, ker ponavadi kupole sestavljamo iz palic z enakim prerezom. V takšnem primeru postanejo krajše palice predimenzionirane.

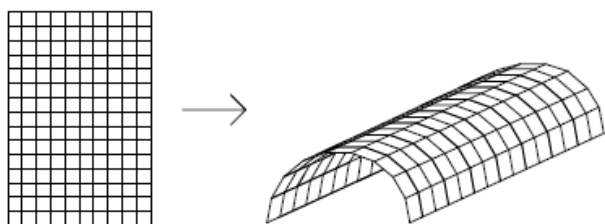
Tip kupole s slike 50 je prikazan tudi na sliki 51 (prva vrsta, tretji stolpec), kjer so podane pogoste geometrične razporeditve palic v sferičnih lupinastih kupolah. Če štirikotnikom s slike 50 dodamo diagonale, dobimo kupolo iz prve vrste in prvega stolpca na sliki 50. Če j pri kupoli s slike 50 ni enak za vsak koncentrični krog, dobimo kupolo iz prve vrste in četrtega stolpca na sliki 50. Če štirikotnikom takšne kupole dodamo diagonale v obeh smereh, dobimo kupolo iz prve vrste in 2 stolpca na sliki 50. Z modifikacijo omenjenih tipov, lahko dobimo še ostale geometrijske vzorce iz druge vrste s slike 50. Prvi dve kupoli v tretji vrsti s slike 50 sta geodezični, pri čemer so pri drugi kupoli (glej tudi sliko 37) projicirana oglišča trikotnikov povezana na drugačen način kot pri prvi in sicer tako, da tvorijo šestkotnike.



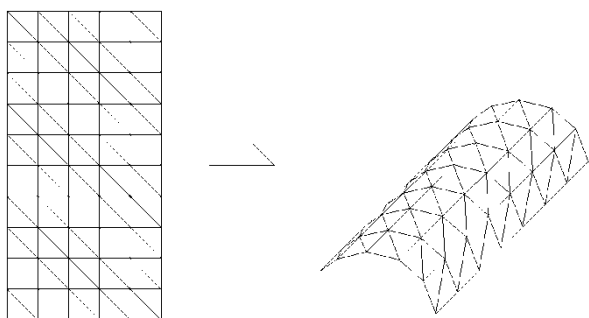
Slika 51: Primeri paličnih kupol (University of Surrey) [9]

3.4 Palični oboki

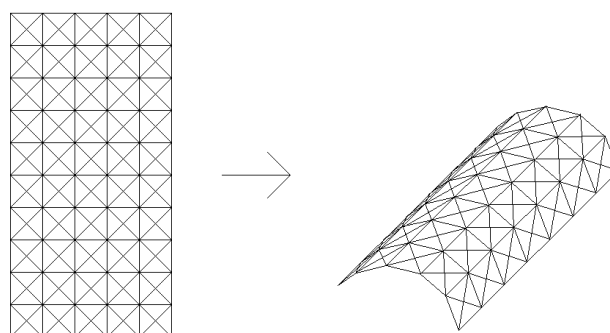
Palični oboki so poseben primer paličnih lupin. Lahko jih obravnavamo kot mrežaste lupine, kar pomeni, da jih oblikujemo iz začetne ravne mreže palic s potiskanjem in raztegovanjem. Najprej se odločimo za obliko ravne mreže, nato pa to mrežo v eni smeri ukrivimo, da dobimo palični obok. Začetna mreža je lahko ravna mreža kvadratov ali/in pravokotnikov (slika 52), lahko pa je tudi mreža trikotnikov (sliki 53 in 54). Obliko mreže si načeloma izbiramo poljubno, vendar se moramo pri tem zavedati, da je mreža sestavljena iz trikotnikov bolj stabilna kot mreža sestavljena iz štirikotnikov. V praksi se pojavlja tudi oblika dvojnega oboka. To pomeni dve mreži, ki sta ena nad drugo in sta med seboj povezani (primer takšne geodezične kupole je na sliki 38). To nam zagotavlja večjo togost konstrukcije.



Slika 52: Primer paličnega oboka iz četverkotnikov



Slika 53: Primer paličnega oboka



Slika 54: Primer paličnega oboka iz trikotnikov

Geometrije paličnega oboka ni težko izračunati. Če vzamemo, na primer, mrežo trikotnikov prikazano na sliki 53, pristopimo k računu dolžin palic na naslednji način. Najprej si izberemo, s koliko palicami želimo opisati obok. Več palic ko uporabimo, bolj okrogel je obok. Izračunamo kot α (glej sliko 55):

$\alpha = 180^\circ/n$ (n je število palic dolžine a s katerimi opišemo obok).

Potem lahko izračunamo dolžino palice a :

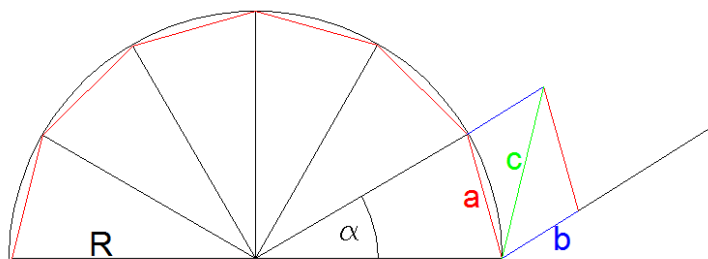
$$a = R * \sin(\alpha/2)$$

Dolžina palice b je poljubna, oziroma je odvisna od želene dolžine oboka L :

$$L = m * b; \text{ (} m \text{ je celo število)}$$

Dolžino palice c dobimo s Pitagorovim izrekom:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$



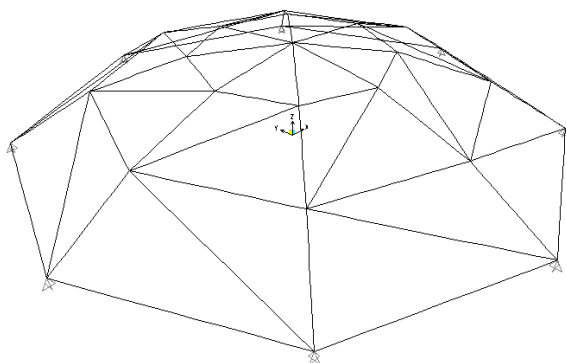
Slika 55: Palični obok

Tudi za drugače oblikovane mreže lahko pristopimo k računu geometrije na podoben način in brez večjih težav izračunamo vse podatke, ki jih potrebujemo za geometrijski opis konstrukcije.

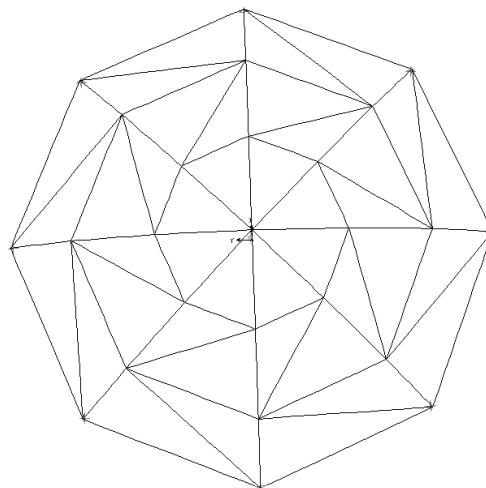
4 RAČUN PALIČNE LUPINE

4.1 Opis modela za analizo

Za analizo sem izbrala palično kupolo tlorisnega polmera 12.86 m in višine 4.68 m, katere geometrija je vidna na slikah 56 in 57.



Slika 56: Geometrija palične lupine



Slika 57: Geometrija palične lupine v tlorisu

Modeliranja sem se lotila v programu SAP2000[10]. Za risanje geometrije paličja sem uporabila funkcijo Shells in nato še podfunkcijo Spherical Dome. Program od nas zahteva določitev premera krogle iz katere kupola izhaja in velikost kota, ki ga opiše kupola. Izbrala sem polmer 20 m in velikost kota 40° . Nazadnje sem določila še število končnih elementov na katere program razdeli lupino. Za modele kupol program uporablja polarni koordinatni sistem r, φ, z . V programu tako določiš število končnih elementov v smeri koordinate φ (ki teče od 0 do 2π v ravnini, pravokotni na os kupole) in v smeri koordinate z (ki teče v smeri osi kupole). Izbrala sem razdelitev na 8 končnih elementov v smeri φ in na 3 končne elemente v smeri z . Program mi je nato izrisal mrežo lupinastih (ploskovnih) končnih elementov. Ploskovne končne elemente sem nato izbrisala, ostala pa mi je mreža oglišč na krogli, ki sem jih povezala z linijskimi končnimi elementi in tako dobila model palične lupine, ki je viden na slikah 56 in 57.

Linijskim končnim elementom sem nato določila prerez. Izbrala sem jeklene palice kvalitete S235 s škatlastim profilom 70x70x5mm. Za karakteristike jekla sem izbrala naslednje vrednosti: prostorninska teža $\gamma=78\text{kN/m}^3$, elastični modul $E=2,1*10^8\text{kN/m}^2$ in Poissonov količnik $\nu=0,3$. Posamezne končne elemente sem nato razdelila na 10 končnih elementov. Čim večje število končnih elementov imamo, bolj točne rezultate dobimo kasneje pri nelinearni analizi, uklonski analizi in modalni analizi. Pri linearni analizi dobimo točno rešitev že, če vzamemo najmanjše možno število končnih elementov.

4.1.1 Določitev vplivov na konstrukcijo

Za določitev vplivov (obtežb) na konstrukcijo sem si pomagala s standardi SIST EN 1991-1-3 (obtežba snega) [11] in SIST EN 1991-1-4 (vplivi vetra) [12].

4.1.1.1 Veter

Najprej izračunamo osnovno hitrost vetra po formuli: $v_b = c_{dir} * c_{season} * v_{b,0}$

Za vrednosti koeficientov c_{dir} in c_{season} [13] priporoča vrednost 1,0, vrednost $v_{b,0}$ pa odčitamo iz preglednice nacionalnega dodatka. Za cono 1, v kateri je večina Slovenije, in nadmorsko višino pod 800 m, je ta vrednost $v_{b,0} = 20$ m/s [10], iz česar sledi:

$$v_b = 1,0 * 1,0 * 20 \text{ m/s} = 20 \text{ m/s}$$

Izračunati moramo tudi povprečno hitrost vetra: $v_{m(z)} = c_{r(z)} * c_{o(z)} * v_b$

Za faktor hribovitosti $c_{o(z)}$, [13] priporoča vrednost 1,0.

Faktor hrpavosti $c_{r(z)}$ pa izračunamo po formuli: $c_{r(z)} = k_r * \ln(z/0,05)$, kjer je

$$k_r = 0,19 * (z_0/z_{0,II})^{0,07} = 0,19$$

kjer smo izbrali kategorijo terena II, za katero imamo v [10] podane vrednosti $z_0 = 0,05$ m, $z_{0,II} = 0,05$ m in $z_{min} = 2$. Povprečna hitrost vetra je torej:

$$v_{m(z)} = 1,0 * 0,19 * \ln(z/0,05) * 20 \text{ m/s} \quad (4)$$

Intenziteto turbulence izračunamo po naslednjem izrazu:

$$l_v(z) = \frac{k_l}{(c_{o(z)} * \ln(z/z_0))} \quad (5)$$

Priporočena vrednost turbolenčnega faktorja k_l in faktorja hribovitosti $c_{o(z)}$ je v [10] 1,0, iz česar sledi

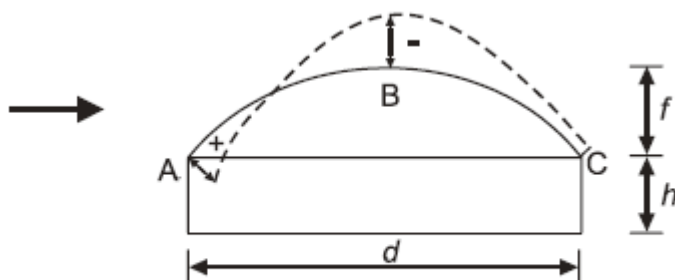
$$l_v(z) = 1/\ln(z/0,05) \quad (6)$$

Tlak pri največji hitrosti sunkov vetra se izračuna kot:

$$q_p = (1 + 7 * l_v(z)) * 0,5 * \rho * v_{m(z)}^2$$

Za gostoto zraka se upošteva vrednost $\rho = 1,25$ kg/m³. V enačbah (4), (5) in (6) z pomeni oddaljenost točke na konstrukciji od tal. Če predpostavim, da je kupola na 2 m visokem zidu okroglega tlorisa, dobim vrednost tlaka na spodnjem robu kupole $q_{p(z=2m)} = 0,356$ kN/m² in na vrhu kupole $q_{p(z=6.68m)} = 0,53$ kN/m².

Nazadnje potrebujemo za določitev obtežbe vetra še koeficient razporeditve tlakov $c_{pe,10}$. Za kupole je ta koeficient v [10] določen v 3 točkah (A, B, C, slika 58). V ravninah pravokotnih na smer vetra, je obtežba vetra konstantna. Za $c_{pe,10}$ sem za svojo kupolo odčitala iz diagrama 7.12 v [10] naslednje vrednosti: v točki A je $c_{pe,10} = 0,02$, v točki B je $c_{pe,10} = -0,64$ in v točki C je $c_{pe,10} = -0,08$. Obtežbo vetra se nato izračuna v vsaki od omenjenih treh točk kot: $w_e = q_{p(z)} * c_{pe,10}$, vmesne vrednosti pa dobimo z interpolacijo.



Slika 58: Obtežba vetra na kupolo (slika 7.12 iz [12])

4.1.1.2 Sneg

Obtežbo snega na konstrukcijo se po [11] izračuna po naslednji formuli: $s = \mu_i * c_e * c_t * s_k$, kjer je μ_i koeficient razporeditve snega (ki je v mojem primeru konstanten po celotni strehi in ima po [11] vrednost 0,8).

Koeficienta c_e in c_t upoštevata vpliv izpostavljenosti in temperaturne vplive, njuna priporočena vrednost je 1,0.

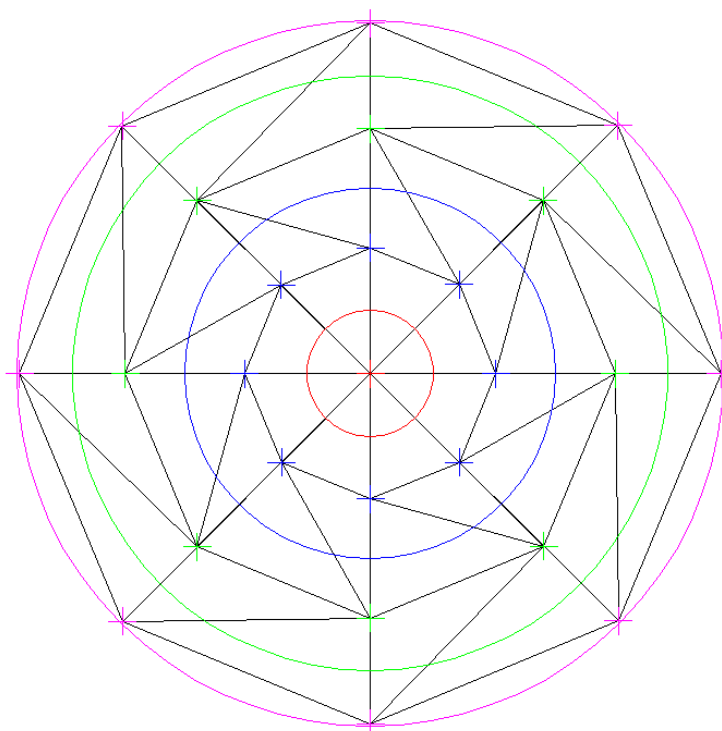
Koeficient s_k določa obtežbo snega na tleh (obtežbo na tlorisno površino) in je odvisen od cone in nadmorske višine. Predpostavim cono A2, ki predstavlja večino Slovenije, in nadmorsko višino 500m: v tem primeru uporabim formulo

$$s_k = 1,293 * (1 + (500/728)^2) = 1,90 \text{ kN/m}^2$$

Celotna obtežba snega je tako: $s = 0,8 * 1,0 * 1,0 * 1,90 = 1,52 \text{ kN/m}^2$.

4.1.1.3 Modeliranje obtežbe v programu SAP2000

Zaradi zapletenega podajanja obtežbe vetra, sem si nalogo poenostavila in pri analizi upoštevala samo obtežbo snega. Obtežbo snega sem preko vplivnih območij razporedila na posamezna vozlišča palične kupole. Vplivna območja vozlišč so vidna na sliki 59.



Slika 59: Vplivna območja za račun obremenitve

Prvo vplivno območje je omejeno z rdečim krogom na sliki 59, katerega radij je 2.3 m. Njegova površina je $A_1 = 16.7 \text{ m}^2$ in iz česar sledi, da je sila, ki odpade na središčno oglišče $F_1 = s * A_1 = 25.37 \text{ kN}$.

Drugo vplivno območje predstavlja kolobar na sliki 59 med modro in rdečo krožnico. Njegova površina je $A_2 = 128.4 \text{ m}^2$. Sila, ki odpade na to območje je $\Sigma F_2 = s * A_2 = 195.11 \text{ kN}$. Posamezna sila na vsako izmed osmih vozlišč v tem območju pa je tako $F_2 = 24.39 \text{ kN}$.

Tretje vplivno območje predstavlja kolobar med zeleno in modro krožnico na sliki 59. Njegova površina je $A_3 = 229.6 \text{ m}^2$. Sila, ki odpade na to območje je $\Sigma F_3 = s \cdot A_3 = 348.95 \text{ kN}$. Posamezna sila na vsako izmed osmih vozlišč v tem območju pa je tako $F_3 = 43.62 \text{ kN}$.

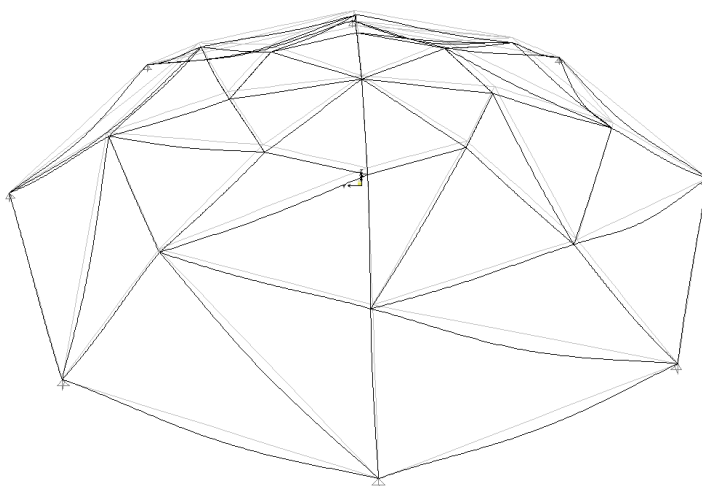
Četrto vplivno območje predstavlja kolobar med vijolično in zeleno krožnico na sliki 59. Njegova površina je $A_4 = 144.9 \text{ m}^2$. Sila, ki odpade na to območje je $\Sigma F_4 = s \cdot A_4 = 220.3 \text{ kN}$. Posamezna sila na vsako izmed osmih vozlišč v tem območju pa je tako $F_4 = 27.54 \text{ kN}$.

V programu sem nato definirala obtežni primer za sneg in na vozlišča postavila obtežbo v obliki sil v smeri gravitacije. Lastno težo konstrukcije program upošteva že sam (stalne obtežbe, npr. kritine, pri računu nisem upoštevala). Nato sem definirala še obtežne kombinacije za naslednje analize: linearna statična analiza za obtežbo pri mejnem stanju nosilnosti (MSN), uklonska analiza, modalna analiza in geometrijsko nelinearna statična analiza.

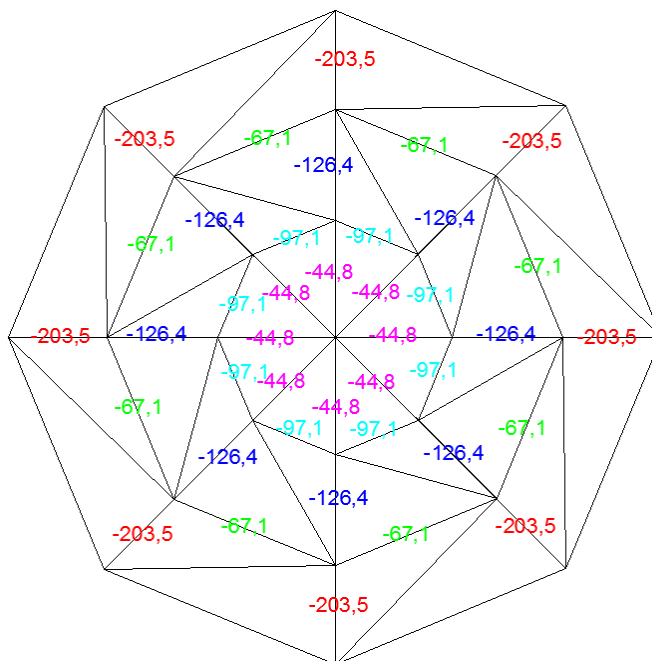
4.2 Rezultati analize

4.2.1 Linearna statična analiza na mejno stanje nosilnosti

Obtežno kombinacijo za mejno stanje nosilnosti sem definirala kot: $1,35 \cdot \text{lastna teža} + 1,5 \cdot \text{obtežba snega}$. SAP2000 mi je kot rezultat podal velikosti vozliščnih pomikov in vrednosti notranjih sil. Deformirana oblika kupole je prikazana na sliki 60. Največji pomik je na sredini spodnjih diagonalnih palic in sicer znaša 3,1 cm. Čeprav konstrukcije nisem modelirala kot paličja (stike med palicami sem podala kot toge, ne kot členkaste) se iz rezultatov vidi, da se konstrukcija obnaša kot paličje. To pomeni, da se v posameznih končnih elementih kupole pojavijo praktično samo osne sile. Program izračuna tudi vrednosti ostalih notranjih sil v končnih elementih, vendar so te zanemarljivo majhne v primerjavi z osnimi silami.



Slika 60: Deformirana oblika kupole zaradi obtežbe za mejno stanje nosilnosti



Slika 61: Osne sile v palični kupoli

Zaradi lastne teže in obtežbe snega je celotna kupola v tlaku. Najbolj obremenjena je palica ob podpori in sicer z 203,5kN (slika 61). Ta palica je najbolj kritična v naši kupoli, saj je najdaljša in najbolj obremenjena, tako, da zanjo opravimo potrebne kontrole.

Geometrija prereza:

-ploščina: $-A = 7 * 7 - 6,5 * 6,5 = 13cm^2$

-vztrajnostni moment: $-I = 7^4/12 - 6,5^4/12 = 92,1cm^4$

-vztrajnostni polmer: $-i = \sqrt{92,1/12} = 2,66cm$

Račun kompaktnosti prereza:

-dolžin notranjega tlačenege dela: $c=6cm$

-debelina stene prereza: $t=0,5cm$

$c/t=12 < 33 * \epsilon=33 \rightarrow$ prerez je v 1. razredu kompaktnosti

Kontrola nosilnosti prereza (napetost na meji tečenja $f_y=235$ MPa, varnostni faktor $\gamma_{M0}=1,0$):

$N_{Ed} = 203,5kN < N_{pl,Rd} = A * f_y / \gamma_{M0} = 305,5 kN$ ✓

Kontrola uklona po [13]:

-relativna vitkost: $\lambda = l_u / (i * \lambda_1) = \frac{464}{2,66 * 93,9} = 1,86$; $l_u=464$ cm ... uklonska dolžina
 $\lambda_1=93,9$... koeficient kvalitete materiala

$-\phi = 0,5 * (1 + \alpha * (\lambda - 0,2) + \lambda^2) = 2,404$; $\alpha=0,21$... faktor nepopolnosti

-redukcijski faktor: $\chi = 1 / (\phi + \sqrt{\phi^2 - \lambda^2}) = 0,255$

-kontrola uklona (delni varnostni faktor odpornosti pri kontroli uklona $\gamma_{M,1}=1,0$):

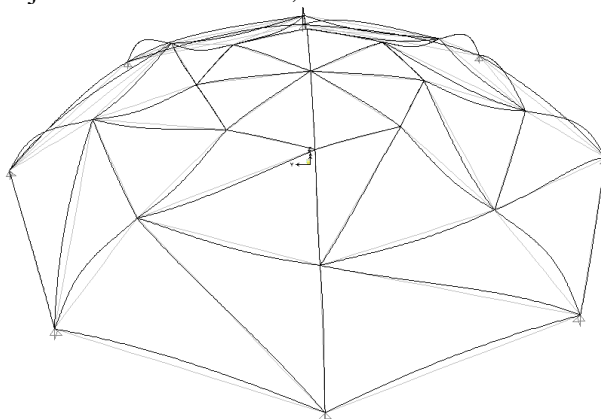
$$N_{Ed} = 203,5kN < N_{b,Rd} = \chi * A * \frac{f_y}{\gamma_{M1}} = 0,255 * 13 * \frac{23,5}{1,0} = 77,90kN \quad \mathbf{X} \text{ (kontrola se ne izide)}$$

4.2.2 Uklonska analiza

Uklonsko analizo v programu SAP2000 izvedemo, če kot opcijo analize izberemo Buckling. Program nam kot rezultat takšne analize poda kritično uklonsko obliko, ki je 1. uklonska oblika, ter faktor s katerim moramo pomnožiti obtežno kombinacijo, da pride do uklona (t.j. faktor pri 1. uklonski obliki), slika 62. Poda nam tudi višje uklonske oblike in pripadajoče faktorje (sliki 63 in 64), ki pa niso kritični, ker so vsi večji od tistega pri 1. uklonski obliki.

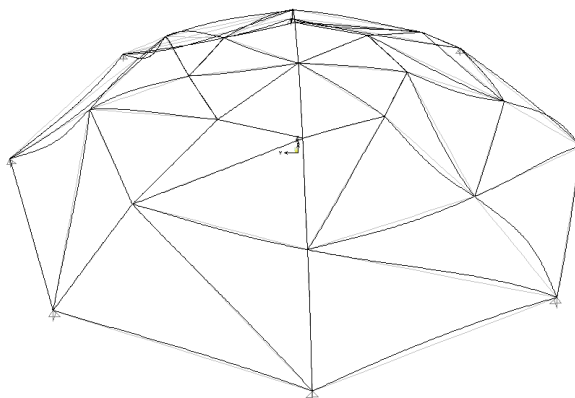
Iz uklonske analize zaključimo, da bi prišlo do uklona pri $0,76197 * (1,35 * \text{lastna teža} + 1,5 * \text{obtežba snega})$. Znova lahko zaključimo, da konstrukcija ne more prenesti projektne obtežbe.

1. uklonska oblika: -pripadajoči uklonski faktor: 0,76197



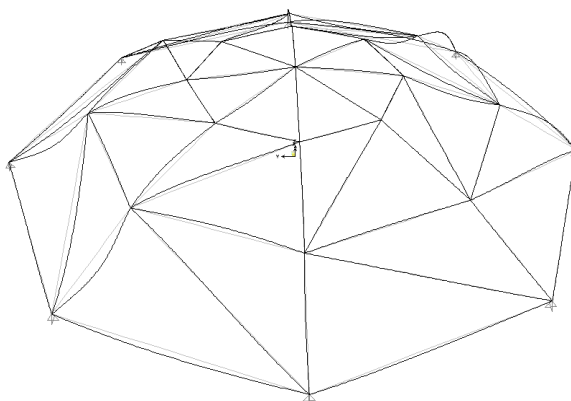
Slika 62: Prva uklonska oblika

2. uklonska oblika: -pripadajoči uklonski faktor: 0,78096



Slika 63: Druga uklonska oblika

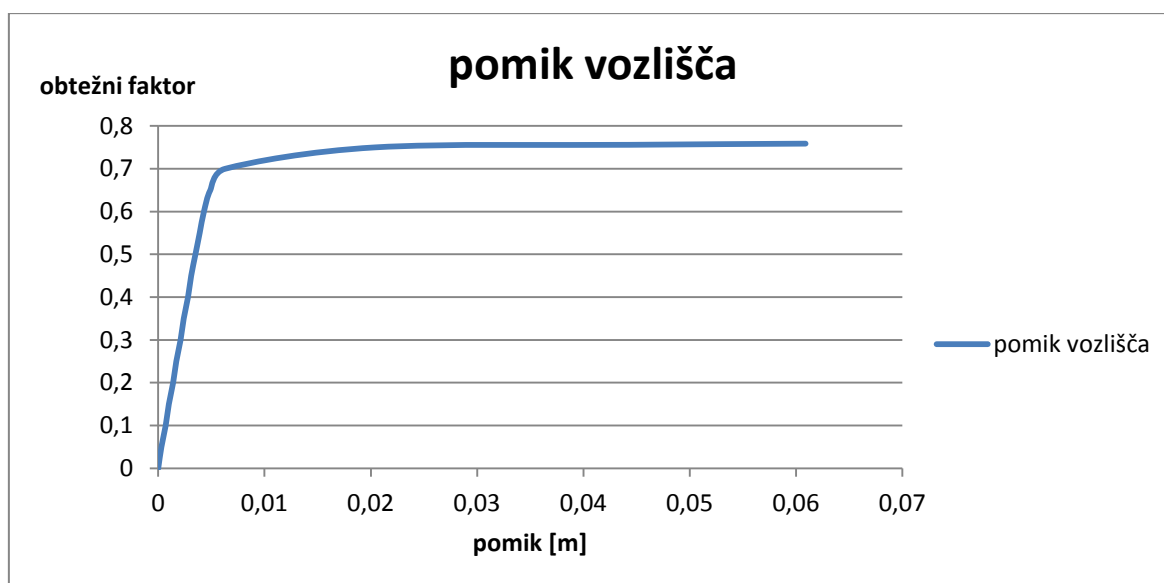
3.uklonska oblika: -pripadajoči uklonski faktor: 0,78096



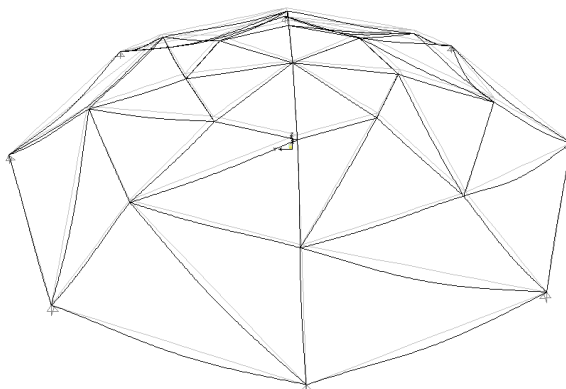
Slika 64: Tretja uklonska oblika

4.2.3 Geometrijsko nelinearna analiza

Geometrijsko nelinearna uklonska analiza upošteva, da se konstrukcija med prevzemanjem obtežbe deformira in zato spreminja svojo togost. Narejena je bila geometrijsko nelinearna analiza za projektno obtežbo za mejno stanje nosilnosti. Kot rezultat analize dobimo krivuljo, ki prikazuje obtežni faktor v odvisnosti od karakterističnega pomika (pomik vrha kupole). Odvisnost prikazuje slika 65. Program ne more poiskati rešitve (deformirane oblike konstrukcije) pri obtežnem faktorju, ki je večji od tistega, ki določa mejno obtežbo, ki jo konstrukcija še lahko prenese. Rezultat analize nam pove, da je mejna obtežba, ki jo konstrukcija še lahko prenese, preden bi prišlo do uklona $0,758738 \cdot (1,35 \cdot \text{lastna teža} + 1,5 \cdot \text{obtežba snega})$, slika 66, kar je skoraj natančno toliko, kolikor smo dobili z uklonsko analizo. To pomeni, da je v tem primeru enostavnejša uklonska analiza dovolj točna, saj z njo dobimo skoraj isti rezultat kot z bolj natančno (in bolj kompleksno) geometrijsko nelinearno analizo. Tudi na podlagi geometrijsko nelinearne analize lahko zaključimo, da konstrukcija ne more prenesti projektne obtežbe.



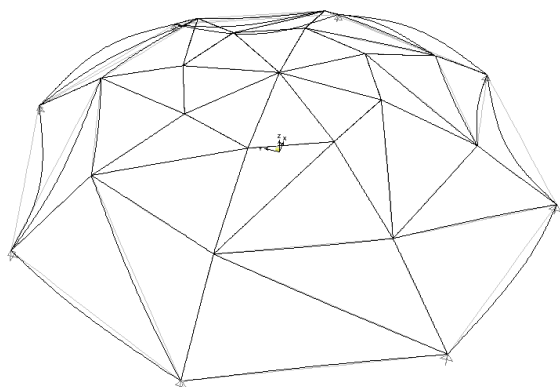
Slika 65: Obtežni faktor v odvisnosti od karakterističnega pomika



Slika 66: Deformirana oblika kupole pri nelinearni analizi: obtežni faktor je 0,758738

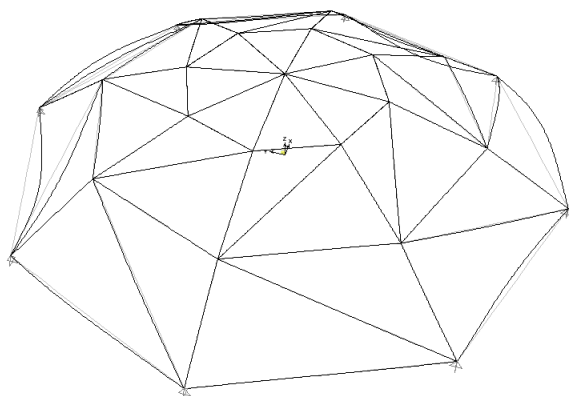
4.2.4 Modalna analiza

Kot rezultat modalne analize nam program poda nihajne oblike, nihajne čase in frekvence. Prve tri nihajne oblike, s pripadajočimi nihajnimi časi, so podane na slikah 67 do 69. Vidimo, da so si nihajne oblike podobne: nihajo spodnje horizontalne palice.



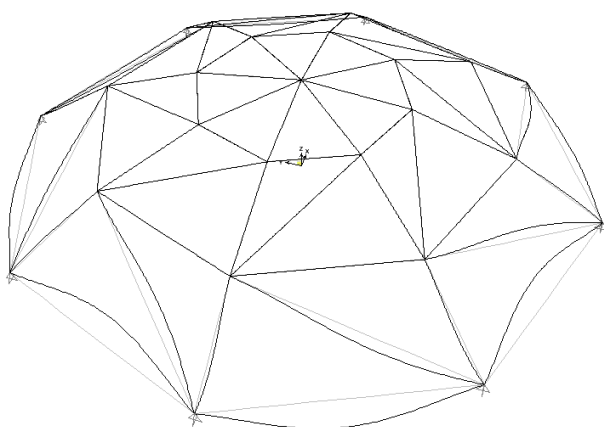
nihajni čas: 0,38679s
frekvenca: 2,58540 Hz

Slika 67: Prva nihajna oblika



nihajni čas: 0,35034s
frekvenca: 2,85436 Hz

Slika 68: Druga nihajna oblika



nihajni čas: 0,29385s
frekvenca: 3,40305 Hz

Slika 69: Tretja nihajna oblika

4.3 Interpretacija rezultatov analiz

Po izvedenih uklonskih analizah (kontroli po [13], linearni uklonski analizi in geometrijsko nelinearni analizi) vidimo, da bi se konstrukcija pod podano obtežbo uklonila. Najstrožji pogoj postavlja kontrola uklona po [13], vendar je to deloma posledica poenostavitvev, ki sem jih uporabila pri računu, saj sem za uklonsko dolžino uporabila kar dolžino elementa, ki pa je v resnici nekoliko krajša. Poleg tega pa sem element obravnavala ločeno od ostale konstrukcije, kar je tudi na varni strani.

Uklon je v konstrukcijah nezaželen pojav in ga moramo preprečiti. Za rešitev problema lahko uporabimo palice s prerezom večjih dimenzij ali pa konstrukcijo dodatno uklonsko zavarujemo. V tem primeru bi se odločili za drugačen prerez elementov, saj bi dodatna uklonska zavarovanja kvarila izgled konstrukcije.

Če na primer uporabimo element s prerezom 100x100x5mm in ponovimo analize dobimo naslednje rezultate:

-Linearna statična analiza: Ker se nam spremeni lastna teža konstrukcije, moramo največjo silo v elementu izračunati ponovno. Največja tlačna sila se nam pojavi v istih elementih in sedaj znaša: 207,5kN.

Ponovimo kontrolo po [13]:

-prerez je v prvem razredu kompaktnosti

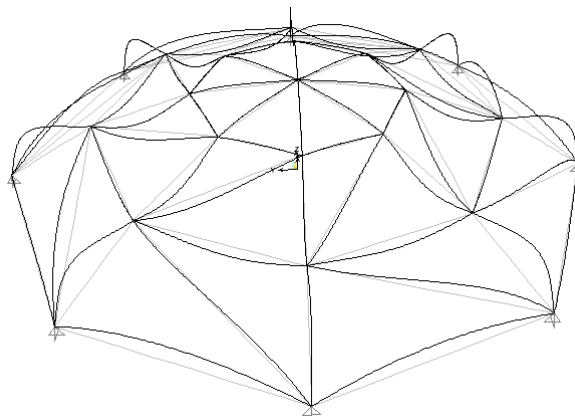
$$\lambda = l_u / (i * \lambda_1) = \frac{464}{3,87 * 93,9} = 1,277$$

$$\phi = 0,5 * (1 + \alpha * (\lambda - 0,2) + \lambda^2) = 1,428$$

$$\chi = 1 / (\phi + \sqrt{\phi^2 - \lambda^2}) = 0,484$$

$$N_{Ed} = 207,5kN < N_{b,Rd} = \chi * A * \frac{f_y}{\gamma_{M1}} = 0,484 * 18,8 * \frac{23,5}{1,0} = 213,8kN \checkmark$$

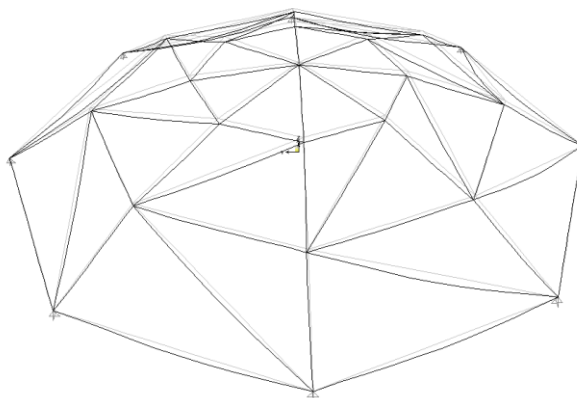
-Uklonska analiza: uklonski faktor pri 1. uklonski obliki je: 2,30812 (slika 70)



Slika 70: Prva uklonska oblika pri ponovni analizi

-Geometrijsko nelinearna analiza:

Rezultat analize nam pove, da je mejna obtežba, ki jo konstrukcija še lahko prenese, preden bi prišlo do uklona $2,24346 \cdot (1,35 \cdot \text{lastna teža} + 1,5 \cdot \text{obtežba snega})$. Rezultat je ponovno zelo podoben tistemu iz uklonske analize. Deformirana oblika kupole je vidna na sliki 71.



Slika 71: Deformirana oblika kupole pri nelinearni analizi: obtežni faktor je 2,24346

Vidimo, da z novim prečnim prerezem palic zadostimo kontroli uklona po [13]. Tudi kritični uklonski faktor pri uklonski analizi je večji od 1. Tu je treba omeniti, da pri analizah niso bile upoštevane začetne imperfektnosti konstrukcije (razen pri kontroli po [13], kjer pa so bile uporabljene notranje sile, izračunane po linearni teoriji). Te gotovo obstajajo in bi drastično znižale uklonsko odpornost konstrukcije. Če bi palično konstrukcijo resnično projektirala, bi zahtevala, da je kritični uklonski faktor, izračunan z uklonsko analizo, slika 68, mnogo večji od 1, npr. 5.

Pri izvedenih analizah sem upoštevala samo obtežbo snega (konstantno po tlorisu) ter lastno težo. Če bi konstrukcijo dejansko projektirala pa bi upoštevala tudi obtežbo vetra, stalno obtežbo, temperature vplive, potresno obtežbo ter ostale morebitne obtežbe. Pri dimenzioniranju bi nato morali preveriti še mejna stanja uporabnosti, nezgodna stanja potresa in požara, različne faze gradnje ... Tega nismo naredili, ker je bil namen tega poglavja prikazati in izvesti vse vrste analiz, ki jih je potrebno narediti pri analiziranju in projektiranju lupinastih paličnih konstrukcij.

5 ZAKLJUČEK

V svoji diplomski nalogi sem raziskala oblikovanje geometrije različnih paličnih lupin. Pri lupinah pravih oblik (krogla, elipsoid, stožec...), ta ni težko določljiva z dovolj enostavnimi postopki. Za palične lupine, ki nastanejo iz poliedra, kateremu ploskve razdelimo na manjše trikotnike, ter nato njihova vozlišča projiciramo na plašč krogle, se je uveljavilo poimenovanje geodezična kupola. To je tudi najbolj optimalna oblika paličnih lupin, saj dobimo veliko število palic enakih dimenzij, ki se pojavljajo po celotni kupoli. Pri načrtovanju takšnih paličnih lupin lahko še dodatno poenostavimo dolžine palic, ki so si podobnih dimenzij, in na ta način dodatno optimiziramo konstrukcijo. Pri načrtovanju namreč poskušamo doseči čim bolj optimalno obliko s čim več enakimi palicami, s čimer dosežemo nižje stroške izgradnje. Pri projekcijah na plašče ostalih teles se izgublja del simetrije, ki je prisotna pri projekciji na plašč krogle. Na ta način dobimo več različnih dimenzij palic in s tem dražjo konstrukcijo. Pri načrtovanju geometrije geodezičnih kupol se najprej odločimo kako natančno se želimo s konstrukcijo približati plašču krogle ali pa omejimo dolžino najdaljše palice v konstrukciji, nato pa poiščemo projekcijo poliedra, ki ustreza danim pogojem. Pri poljubnih oblikah postane postopek določitve geometrije seveda zahtevnejši. Za načrtovanje geometrije le teh lahko uporabimo različne postopke. Podobno kot pri geodezičnih kupolah, to lahko storimo s projekcijami poljubno oblikovanih mrež na ukrivljeno ploskev. Lahko pa izhajamo iz ukrivljene ploskve na kateri določimo točke, ki jih nato povežemo s palicami, in na ta način določimo želeno geometrijo palične konstrukcije. Pri poljubno oblikovanih paličnih lupinastih konstrukcijah, celice niso nujno trikotnih oblik. Takšne konstrukcije imajo manjšo togost in se posledično lažje deformirajo, zato moramo biti na to še dodatno pozorni. Togost takšnih konstrukcij zagotavljamo z ustrezno velikimi prečnimi prerezi palic, pojavlja pa se tudi oblika dvojne kupole. To pomeni da sta izvedeni dve kupoli ena nad drugo, ki sta med seboj povezani. Posledično se togost konstrukcije zelo poveča.

Pri načrtovanju in analizi paličnih lupin naletimo še na druge probleme: določiti je treba, na primer, prenos stalne in koristne obtežbe s plašča lupine na palično konstrukcijo. V svoji diplomski nalogi sem pri analiziranju palične lupine to naredila le za obtežbo snega. Bolj zapleteno je podajanje vplivov vetra na konstrukcijo, ki ga pri analizi nisem upoštevala. Z različnimi analizami sem dobila različne, čeprav dokaj podobne, vrednosti faktorjev, s katerimi se množi projektno obtežbo in se na ta način pride do odstotka projektne obtežbe, ki jo je konstrukcija sposobna prenesti. Te vrednosti so odvisne od natančnosti vrste analize in od uporabljenih poenostavitev. Pri uklonski analizi in geometrijsko nelinearni analizi, ki sta bili opravljene s programom SAP2000, sta bili ti vrednosti skoraj enaki. Do večjih razlik bi prišli, če bi pri geometrijsko nelinearni analizi upoštevali še začetne imperfektnosti. Pri paličnih lupinastih konstrukcijah, dodatna uklonska zavarovanja niso zaželeni, zato se v primeru neuspešnih kontrol stabilnosti konstrukcije, največkrat uporabi palice z večjim prečnim presekom.

Zaključim lahko, da so palične lupine zanimiva konstrukcijska oblika, ki optimalno izkorišča material in razvije podobne mehanizme prenašanja obtežbe kot monolitne lupine. Zaradi svojega izgleda so primerne predvsem za razne javne objekte.

VIRI

- [1] Paoli, C. 2007. Past and future of grid shell structures. Magistrska naloga. Massachusetts, Massachusetts institute of technology, Oddelek za gradbeništvo: str. 11-20.
- [2] Kenner, H. 1976. Geodesic math and how to use it. Berkeley , Los Angeles. University of California Press: str. 47-123.
- [3] Wolfram Mathematica 8.0. 2010. Wolfram Research, Inc.
- [4] Uporabnik Wikipedie. 2006. Zeiss Major Planetarium.
http://en.wikipedia.org/wiki/Zeiss_Major_Planetarium (Pridobljeno 10. 4. 2013.)
- [5] Stanton, J. 1997. United States Pavilion.
<http://britton.disted.camosun.bc.ca/expo67/unitedstates.html> (Pridobljeno 10. 4. 2013.)
- [6] Final Gear forum. 2011. Favourite stadiums: str. 2.
<http://forums.finalgear.com/sports/favorite-stadiums-48894/page-2/> (Pridobljeno 10. 4. 2013.)
- [7] Petraševič, G. 2012. Geodezične kupole na velenjskem jezeru.
<http://www.rtvslo.si/kultura/evropska-prestolnica-kulture/geodezicne-kupole-na-velenjskem-jezeru/289707> (Pridobljeno 10. 4. 2013.)
- [8] Geodesics unlimited. Geodesic domes by Geodesic unlimited.
<http://www.geodesics-unlimited.com/index.htm> (Pridobljeno 11. 3. 2013.)
- [9] University of Surrey. Lattice shell structures.
<http://www3.surrey.ac.uk/eng/research/ems/ssrc/intro.htm> (Pridobljeno 11. 3. 2013.)
- [10] SAP2000 Ulitimate 15.1.0. 2011. Berkeley, Computers and Structures, Inc.
- [11] SIST EN 1991-1-3: 2004. Evrokod 1: Vplivi na konstrukcije – 1-3. Del: Splošni vplivi - obtežba snega
- [12] SIST EN 1991 1-4: 2005. Evrokod 1: Vplivi na konstrukcije – 1-4.del: Splošni vplivi - vplivi vetra
- [13] Beg, D. (ur.), Pogačnik, A.(ur.) 2011. Priročnik za projektiranje gradbenih konstrukcij po evrokod standardih. Ljubljana, Inženirska Zbornica Slovenije: str. 3-22 – 3-45.

Ostali viri

Dimič, M. 2011. Structural optimization of grid shells based on generic algorithms. Doktorska disertacija. Stuttgart, Univerza Stuttgart, Inštitut za gradbene konstrukcije in načrtovanje konstrukcij: 218 str.