

Univerza
v Ljubljani

Fakulteta
za gradbeništvo
in geodezijo



Jamova cesta 2
1000 Ljubljana, Slovenija
<http://www3.fgg.uni-lj.si/>

DRUGG – Digitalni repozitorij UL FGG
<http://drugg.fgg.uni-lj.si/>

To je izvirna različica zaključnega dela.

Prosimo, da se pri navajanju sklicujete na bibliografske podatke, kot je navedeno:

Stanić, A. 2013. Optimizacija jeklenih vitkih elementov z odprtinami. Diplomaska naloga. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo. (mentor Korelc, J., somentorica Melink, T.): 65 str.

University
of Ljubljana

Faculty of
Civil and Geodetic
Engineering



Jamova cesta 2
SI – 1000 Ljubljana, Slovenia
<http://www3.fgg.uni-lj.si/en/>

DRUGG – The Digital Repository
<http://drugg.fgg.uni-lj.si/>

This is original version of final thesis.

When citing, please refer to the publisher's bibliographic information as follows:

Stanić, A. 2013. Optimizacija jeklenih vitkih elementov z odprtinami. B.Sc. Thesis. Ljubljana, University of Ljubljana, Faculty of civil and geodetic engineering. (supervisor Korelc, J., co-supervisor Melink, T.): 65 pp.

Univerza
v Ljubljani

Fakulteta za
*gradbeništvo in
geodezijo*



Jamova 2
1000 Ljubljana, Slovenija
telefon (01) 47 68 500
faks (01) 42 50 681
fgg@fgg.uni-lj.si

UNIVERZITETNI ŠTUDIJ
GRADBENIŠTVA
KONSTRUKCIJSKA SMER

Kandidatka:

ANDJELKA STANIĆ

**OPTIMIZACIJA JEKLENIH VITKIH ELEMENTOV Z
ODPRTINAMI**

Diplomska naloga št.: 3294/KS

**OPTIMISATION OF SLENDER STEEL MEMBERS
WITH WEB OPENINGS**

Graduation thesis No.: 3294/KS

Mentor:

prof. dr. Jože Korelc

Predsednik komisije:

izr. prof. dr. Janko Logar

Somentorica:

Teja Melink

Član komisije:

doc. dr. Vlado Stankovski

doc. dr. Iztok Peruš

doc. dr. Alojzij Juvanc

asist. mag. Robert Rijavec

Ljubljana, 25. 04. 2013

STRAN ZA POPRAVKE

Stran z napako

Vrstica z napako

Namesto

Naj bo

IZJAVE

Podpisana **ANDJELKA STANIĆ** izjavljam, da sem avtorica diplomske naloge z naslovom
»OPTIMIZACIJA JEKLENIH VITKIH ELEMENTOV Z ODPRTINAMI«.

Izjavljam, da je elektronska različica v vsem enaka tiskani različici.

Izjavljam, da dovoljujem objavo elektronske različice v repozitoriju UL FGG.

Ljubljana, 12. april 2013

Andjelka Stanić

IZJAVE O PREGLEDU NALOGE

Nalogo so si ogledali:

BIBLIOGRAFSKO – DOKUMENTACIJSKA STRAN IN IZVLEČEK

UDK:	519.63:624.014.2:624.07(043.2)
Avtor:	Andjelka Stanić
Mentor:	prof. dr. Jože Korelc
Somentor:	Teja Melink, univ.dipl.inž.gr.
Naslov:	Optimizacija jeklenih vitkih elementov z odprtiniami
Tip dokumenta:	Diplomska naloga – univerzitetni študij
Obseg in oprema:	65 str., 18 pregl., 58 sl., 40 en., 1 pril.
Ključne besede:	Optimizacija, jeklene konstrukcije, nosilci z odprtiniami v stojini, gradientna metoda

Izvleček

Osrednja tema diplomske naloge je optimizacija jeklenih nosilcev z odprtiniami v stojini. V prvem, teoretičnem delu so predstavljeni dosedanja teoretični vidiki nosilcev s perforirano stojino. Podrobno je razložen tudi postopek gradientne metode optimizacije. V drugem delu diplomske naloge, so prikazani rezultati treh primerov optimizacij konstrukcijskih elementov. Obravnavana sta medetažni prostoležeči nosilec in konzolni nosilec za nadstrešek. V tretjem primeru pa smo iskali optimalno obliko odprtine glede na položaj v stojini prostoležečega nosilca. Optimizacija se je izvajala v programskem okolju za analizo modelov po metodi končnih elementov AceFEM, ki med drugim omogoča reševanje simbolno izraženih problemov različnih kompleksnosti. Pri modeliranju primerov so upoštevani materialna in geometrijska nelinearnost ter začetna nadomestna nepopolnost.

BIBLIOGRAPHIC – DOCUMENTALISTIC INFORMATION AND ABSTRACT

UDC: 519.63:624.014.2:624.07(043.2)
Author: Andjelka Stanić
Supervisor: Prof. Jože Korelc, Ph.D.
Cosupervisor: Teja Melink, B.Sc.
Title: Optimisation of slender steel members with web openings
Document type: Graduation Thesis – University studies
Scope and tools: 65 p., 18 tab., 58 fig., 40 en., 1 ann.
Key words: Optimization, steel construction, beam with web openings, gradient method

Abstract

Optimisation of steel beams with web openings is main subject of thesis. In the teoretical part, general features and failure mechanism of perforated beam are represented. Procedure of gradient method of optimisation is also explained. In the second part of thesis, the results for three practical examples of optimisation of constructional elements are showed. Optimisation was performed for interfloor beam and console for canopy. In the third example optimal form of opening was sought depending on its location. The finite element programme AceFEM was used, which support solving symbolically expressed problems with respect to their complexity. Numerical models included geometrical and material nonlinearities and initial equivalent geometric imperfection.

ZAHVALA

Mentorju prof. dr. Jožetu Korelcu se zahvaljujem za strokovno pomoč pri uporabi programa AceFEM in pri pisanju diplomske naloge. Hvala somentorici Teji Melink za pomoč pri računanju datotek in predvsem za zavzeto podporo pri ustvarjanju naloge.

Hvala sestrici Valentini za pozitivno delovno vzdušje. Posebno zahvalo pa namenjam mojim staršem, Mariji in Ivanu, za vajino brezpogojno podporo na poti do cilja.

Hvala!

KAZALO VSEBINE

1	UVOD.....	1
2	NOSILCI Z ODPRTINAMI V STOJINI.....	2
2.1	Splošno.....	2
2.2	Značilni načini porušitev jeklenih nosilcev z odprtini v stojini.....	4
2.2.1	Vierendeel mehanizem.....	4
2.2.2	Izbočitev polnega dela stojine.....	6
2.2.3	Pretrg po zvaru v stojini.....	7
2.2.4	Upogibni uklon nosilca.....	7
2.2.5	Bočna zvrnitev in bočni distorzijski uklon.....	8
2.3	Projektiranje nosilcev z odprtini v stojini.....	10
3	OPTIMIZACIJSKI ALGORITEM.....	11
3.1	Splošno.....	11
3.2	Algoritem optimizacije.....	12
3.2.1	Vhodni podatki in modeliranje.....	13
3.2.1.1	Končni element.....	13
3.2.1.2	Geometrija, projektni parametri in parametrizacija.....	14
3.2.1.3	Robni pogoji in obremenitev.....	15
3.2.1.4	Material.....	15
3.2.1.5	Nadomestna začetna nepopolnost.....	16
3.2.2	Gradientna metoda optimizacije.....	19
3.2.2.1	Namenska funkcija in pogoji optimizacije.....	19
3.2.2.2	Polje začetnih občutljivosti.....	21
3.2.2.3	Direktna analiza in mejno stanje.....	22
3.2.2.4	Občutljivostna analiza.....	23
3.2.2.5	Optimizacija.....	24
3.2.3	Rezultati optimizacije.....	25
4	OPTIMIZACIJA.....	26
4.1	Medetažni nosilec.....	26
4.1.1	Projektni parametri in geometrija nosilne konstrukcije.....	27
4.1.2	Namenska funkcija.....	30
4.1.3	Rezultati optimizacije.....	31
4.2	Konzolni nosilec za nadstrešek.....	36

4.2.1	Projektni parametri in geometrija nosilne konstrukcije	37
4.2.2	Namenska funkcija	40
4.2.3	Rezultati optimizacije	41
4.3	Optimizacija oblike odprtine	48
4.3.1	Projektni parametri in geometrija	49
4.3.2	Namenska funkcija	52
4.3.3	Plastičen prečni prerez in rezultati optimizacije	53
4.3.4	Semikompakten prečni prerez in rezultati optimizacije	58
5	ZAKLJUČEK	61
VIRI	62

KAZALO PREGLEDNIC

Preglednica 1: Primerjava med satastimi nosilci in nosilci z odprtinami v stojini.....	3
Preglednica 2: Potek optimizacije nosilca z odprtinami v stojini.....	12
Preglednica 3: Skupine in lastnosti projektnih parametrov pri optimizaciji	28
Preglednica 4: Dopustne vrednosti projektnih parametrov ϕ_i	29
Preglednica 5: Rezultati optimizacije medetažnega nosilca z odprtinami v stojini	33
Preglednica 6: Primeri optimizacij in pripadajoči projektni parametri ϕ_i	38
Preglednica 7: Numerični modeli konzolnih nosilcev z začetnimi vrednostmi projektnih parametrov ϕ_i	38
Preglednica 8: Dopustne vrednosti projektnih parametrov ϕ_i	39
Preglednica 9: Rezultati optimizacije različnih primerov konzolnih nosilcev z odprtinami v stojini...	41
Preglednica 10: Grafični prikaz rezultatov optimizacije za posamezne primere	42
Preglednica 11: Primerjava optimaliziranih modelov konzol s 4 in 9 odprtinami v stojini	43
Preglednica 12: Grafični prikaz rezultatov optimizacije za posamezne primere	44
Preglednica 13: Opis ter začetne in mejne vrednosti projektnih parametrov pri optimizaciji nosilca z eno odprtino v stojini	51
Preglednica 14: Lokacije odprtin glede na oddaljenost od leve podpore in začetni modeli nosilcev ...	51
Preglednica 15: Povzetek rezultatov optimizacij nosilcev z eno odprtino v stojini	54
Preglednica 16: Grafični prikaz deformirane oblike za posamezen optimizacijski primer v mejnem stanju nosilnosti	55
Preglednica 17: Povzetek rezultatov optimizacij nosilcev z eno odprtino v stojini – elastičen prerez .	58
Preglednica 18: Grafični prikaz deformirane oblike za posamezen optimizacijski primer v mejnem stanju nosilnosti	60

KAZALO SLIK

Slika 1: Terminal 1, mednarodno letališče O'Hare, Chicago	2
Slika 2: Gradnja jeklene nosilne konstrukcije večnamenske stavbe St James' Gate, Newcastle upon Tyne	2
Slika 3: Posebna območja v nosilcu z odprtini v stojini	4
Slika 4: Primarni globalni upogibni moment $M_{o,Ed}$ in globalna prečna sila $V_{o,Ed}$ v okolici odprtine	5
Slika 5: Lokalne notranje sile, ki delujejo na konceh T območij nad in pod odprtino. Sekundarni upogibni moment M_T , prečna sila V_T in osna sila N_T	5
Slika 6: Vierendeel mehanizem	6
Slika 7: Tipično obnašanje polnega dela stojine med odprtinama (Tsavdaridis in D'Mello, 2011b)	7
Slika 8: Predlagani model za analizo izbočitve stojine – zgornja polovica polnega dela stojine med odprtinama (Redwood in Demirdjian, 1998)	7
Slika 9: Strižna obremenitev zvara	7
Slika 10: Plastifikacija v upogibu (Tsavdaridis in D'Mello, 2012)	8
Slika 11: Deformacija polnega dela stojine v I-profilu, ko nastopi: a) bočna zvrnitev ali b) bočni distorzijski uklon (Kalkan in Buyukkaragoz, 2012).	9
Slika 12: Optimizacija nosilne konstrukcije	11
Slika 13: Preslikava 9-vozliščnega lupinastega končnega elementa iz referenčnega koordinatnega sistema (ξ, η) v globalni koordinatni sistem (x, y, z)	13
Slika 14: Grafični prikaz metode računa obtežne poti preko vodnega pomika – za vsak pomik w_i se izračuna pripadajoči faktor obtežbe λ_i	14
Slika 15: Diagram napetost tečenja σ_y v odvisnosti od akumulirane plastične deformacije ϵ_{eq}	16
Slika 16: Uklonske oblike in numerični model z začetno nadomestno nepopolnostjo za primer prostoležečega nosilca.....	18
Slika 17: Graf kazenske funkcije $B1\mathbf{x} = B1(5, x1, \mu, \epsilon)$	21
Slika 18: Definicija mejnega stanja nosilnosti konstrukcije v diagramu faktor obtežbe v odvisnosti od deformacije (SIST EN 1993-1-6, Slika 8.6).....	22
Slika 19: Ukazne vrstice za iskanje optimalnega minimuma.	24
Slika 20: Ukazni stavek ter grafični prikaz napetosti po Von Misesu na deformiranem numeričnem modelu.....	25
Slika 21: Računski model medetažnega jeklenega nosilca.....	26
Slika 22: Pozicije in skupine odprtini v stojini nosilca ter začetna geometrija nosilca pred optimizacijo (v mm).....	27
Slika 23: Prečni prerez nosilca	27
Slika 24: Shematični prikaz projektnih parametrov iz skupine 1 (elipsa) in skupine 3 (pravokotnik)..	28
Slika 25: Numerični model nosilca z začetnimi vrednostmi projektnih parametrov.....	28

Slika 26: Numerični model nosilca z začetnimi vrednostmi projektnih parametrov v narisu, $h_{init} = 1000$ mm.	29
Slika 27: Numerični model nosilca z minimalnimi dopustnimi vrednostmi projektnih parametrov, $h_{min} = 820$ mm.	29
Slika 28: Numerični model nosilca z maksimalnimi dopustnimi vrednostmi projektnih parametrov, $h_{max} = 1300$ mm.	29
Slika 29: Kazenska funkcija Φ_2	30
Slika 30: Povzetek procesa optimizacije medetažnega nosilca z odprtini v stojini.....	31
Slika 31: Spreminjanje vrednosti razširjene namenske funkcije Φ med optimizacijo (201 iteracija) ..	32
Slika 32: Graf spreminjanja vrednosti člena Φ_1 (volumen) med optimizacijo.....	32
Slika 33: Graf spreminjanja vrednosti člena Φ_3 (minimalne dopustna meja projektnih parametrov) med optimizacijo	32
Slika 34: Graf spreminjanja vrednosti člena Φ_4 (maksimalna dopustna meja projektnih parametrov) med optimizacijo)	32
Slika 35: Optimaliziran medetažni nosilec z odprtini v stojini.	33
Slika 36: Porazdelitev napetosti po Von Misesu v optimaliziranem nosilcu z odprtini v stojini	34
Slika 37: Deformirana oblika optimaliziranega nosilca v narisu (pomiki so 10-krat povečani) in porazdelitev napetosti po von Misesu.....	34
Slika 38: Deformirana oblika optimaliziranega nosilca (pomiki so 10-krat povečani) in porazdelitev napetosti po von Misesu.	35
Slika 39: Računski model jeklene konzole.....	36
Slika 40: Geometrija konzole s 7 odprtini v stojini in projektni parametri	37
Slika 41: Prečni prerez nosilca.....	37
Slika 42: Numerični model konzole s 7 odprtini z minimalnimi vrednostmi projektnih parametrov, $h_{min} = 100$ mm.	39
Slika 43: Numerični model konzole s 7 odprtini z maksimalnimi vrednostmi projektnih parametrov, $h_{max} = 700$ mm.	39
Slika 44: Deformirana oblika numeričnega modela konzole z 8 odprtini v mejnem stanju (pomiki so 10-krat povečani) in porazdelitev napetosti po von Misesu v narisu.....	45
Slika 45: Deformirana oblika numeričnega modela konzole z 8 odprtini (pomiki so 10-krat povečani) in porazdelitev napetosti po von Misesu v mejnem stanju.....	45
Slika 46: Grafični prikaz občutljivosti vertikalnega pomika w na previsu konzole glede na spremembo projektnega parametra:	47
Slika 47: Računski model medetažnega jeklenega nosilca	48
Slika 48: Prostoležeči nosilec z odprtino v stojini	49
Slika 49: Možne oblike krivulj, ki jih generira enačba superelipse	50
Slika 50: Parametrizacija odprtine	50

Slika 51: Graf funkcije Φ_1	52
Slika 52: Graf kazenske funkcije Φ_2	52
Slika 53: Prečni prerez nosilca	53
Slika 54: Graf razširjene namenske funkcije za primer nosilca z odprtino v sredini razpona.....	56
Slika 55: Graf spreminjanja vrednosti projektnih parametrov med procesom optimizacije nosilca z odprtino v sredini razpona.....	57
Slika 56: Graf spreminjanja vrednosti projektnih parametrov med procesom optimizacije nosilca z odprtino v sredini razpona.....	57
Slika 57: Nosilec v 262. iteraciji optimizacije (površina odprtine je pod zahtevano vrednostjo)	57
Slika 58: Prečni prerez nosilca	58

1 UVOD

Optimizacija je danes prisotna vsepovsod. Tehnolog proizvodnje išče način, kako najhitreje in najceneje proizvesti izdelek. Uporabnik izbira izdelek, ki bo kvaliteten in ekonomsko upravičen. Potnik s pomočjo zemljevida načrtuje pot, po kateri bo najlažje in najhitreje prišel do cilja. Medtem inženirji projektirajo konstrukcije, ki bodo v predvideni življenjski dobi služile svojemu namenu, seveda, pod ekonomskimi pogoji investitorja. Vsem je skupno, da iščejo rešitev, ki izpolnjuje določene pogoje in je v vseh pogledih najboljša, optimalna.

Osrednja tema diplomske naloge je optimizacija jeklenih nosilcev z odprtinami v stojini na mejno obtežbo konstrukcije. V sodobni gradnji se jekleni nosilci z odprtinami uporabljajo pri gradnji nosilnih konstrukcij kot samostojen nosilni element ali kot sestavni del sovprežnih prerezov, pri čemer se lahko po potrebi izvedejo dodatne ojačitve odprtin. V nalogi so obravnavani samostojni jekleni nosilci z odprtinami v stojini brez ojačitev in so obremenjeni z vertikalno linijsko obtežbo.

Veliko raziskav v obliki laboratorijskih preizkusov in parametričnih študij je bilo izvedenih za boljše razumevanje obnašanja elementov z odprtinami v stojini. Kljub temu pa je zelo malo poročil o numeričnih preiskavah, ki so poleg geometrijske in materialne nelinearnosti upoštevale še nepopolnost nosilnega elementa. Tudi z vidika optimizacije tovrstnih nosilcev z odprtinami v stojini obstaja zelo malo poročil, eden izmed vzrokov je, da raziskovalci nimajo primerne programske opreme. Primere nosilnih elementov smo optimalizirali v specializiranem programskem okolju *AceFEM*¹ za analizo numeričnih modelov po metodi končnih elementov. *AceFEM* je dodatna aplikacija k programskemu paketu *Mathematica*², ki med drugim omogoča reševanje simbolno izraženih problemov različnih kompleksnosti.

Pristop k problemu optimizacije nosilcev z odprtinami v stojini je razdeljen na dva dela. V teoretičnem delu so na splošno predstavljeni jekleni nosilci z odprtinami v stojini in njihovi značilni porušni mehanizmi. Nato sledi podroben opis algoritma izvedbe optimizacije z gradientno metodo iskanja minimuma namenske funkcije v programu *AceFEM*. V drugem delu so predstavljeni rezultati treh primerov optimizacij. Prva dva primera sta praktične narave, kjer gre za optimizacijo medetažnega prostoležečega nosilca in za konzolni nosilec za nadstrešek. V tretjem primeru pa se je izvajala optimizacija oblike izolirane odprtine v stojini prostoležečega nosilca. Pri modeliranju nosilnih elementov so v vseh primerih upoštevani materialna in geometrijska nelinearnost ter nadomestna začetna nepopolnost.

¹ <http://www.fgg.uni-lj.si/symech/>

² *Wolfram Mathematica*, <http://www.wolfram.com/>

2 NOSILCI Z ODPRTINAMI V STOJINI

2.1 Splošno

Jekleni nosilci s perforirano stojino predstavljajo napredno rešitev za gradnjo večetažnih poslovnih objektov, industrijskih objektov, hotelov, bolnic, parkirnih hiš in stadionov. V medetažnem konstrukcijskem sklopu pripomorejo k zmanjšanju medetažne višine, kajti odprtine v stojini nosilca omogočajo nemoten prehod strojnih in električnih inštalacij. Prav tako so zanimivi z estetskega vidika, saj ponujajo neomejene možnosti oblikovanja nosilca in odprtin v stojini. Sicer pa imajo perforirani nosilci manjšo lastno težo, posledično tudi dobro razmerje med (upogibno) nosilnostjo in lastno težo, kar omogoča gradnjo lažje in bolj ekonomične nosilne konstrukcije.



Slika 1: Terminal 1, mednarodno letališče O'Hare, Chicago³



Slika 2: Gradnja jeklene nosilne konstrukcije večnamenske stavbe St James' Gate, Newcastle upon Tyne⁴

Poznamo dve vrsti jeklenih nosilcev s perforirano stojino:

- satasti nosilci in
- nosilci z odprtini v stojini.

³ <http://www.liska.com/thoughts/clients> (Pridobljeno 09. 02. 2013.)

⁴ <http://www.taylor-boyd.co.uk/portfolio.php?page=9&project=99§or=&value> (Pridobljeno 09. 02. 2013.)

V začetku 20. stoletja so se začeli uporabljati satasti nosilci, kasneje, ko so se razvile nove tehnologije obdelave jekel (avtomatizacija), pa so prišli v ospredje nosilci z odprtinami v stojini. Trenutno se v jeklarski industriji uporabljajo tri metode za proizvodnjo nosilcev s perforirano stojino (Design of composite..., 2011). Prva metoda je primerna za nosilce z izoliranimi odprtinami, kjer se vsaka odprtina posebej izreže iz stojine v vročevaljanem prerezu. Po drugi metodi izdelujejo sataste nosilce tako, da se polnostenski vročevaljani nosilec razreže vzdolžno po stojini, nato se en del nosilca odmakne in pomakne translatorno naprej tako, da se izbočeni deli stojin stikujejo med seboj. Izbočeni deli stojin se na stičišču zavarijo. Dobljeni satasti nosilec ima v primerjavi z začetnim profilom večjo višino in posledično tudi večji vztrajnostni moment okoli močne osi. Zato imajo satasti nosilci večjo upogibno nosilnost, čeprav odpornost na bočno zvrnitev ostane skoraj nespremenjena glede na karakteristike izhodiščnega nosilca.

Nosilci z odprtinami se lahko naredijo tudi kot sestavljeni varjeni prerezi, kjer se najprej z avtomatskim plamenskim rezanjem izrežejo odprtine v pločevini za stojino, nato se na perforirano stojino z avtomatskim kontinuiranim varjenjem privarijo pasnice (Bake Mohamadi, 2010).

Preglednica 1: Primerjava med satastimi nosilci in nosilci z odprtinami v stojini.

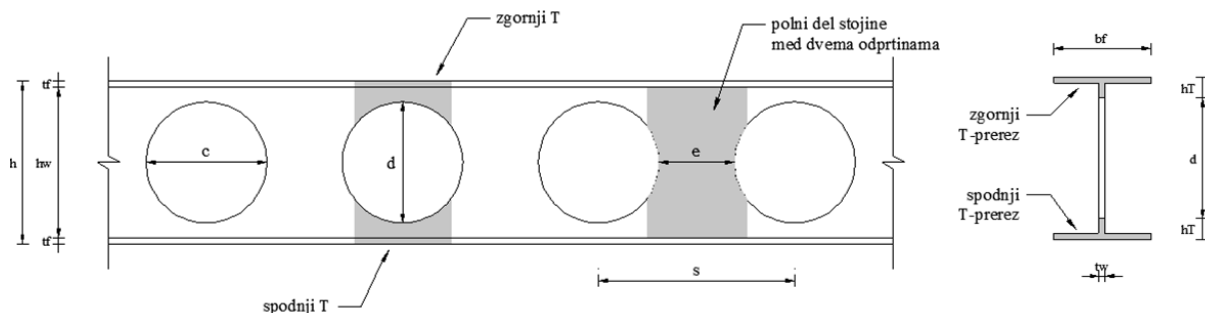
	SATASTI NOSILCI	NOSILCI Z ODPRTINAMI
Lokacija odprtin in razdalja med njimi	Odprtine so enakomerno razporejene vzdolž razpona nosilca.	Odprtine lahko poljubno razvrščamo po stojini nosilca.
Geometrijske lastnosti odprtin	Vse odprtine imajo enako velikost in obliko. Odprtine so običajno regularnih oblik (npr. krog, šestkotnik, pravokotnik ipd.).	Odprtine so lahko različnih oblik in velikosti. Oblika odprtin je neomejena.
Območje koncentriranih obremenitev (točkovna sila, priključki sekundarnih nosilcev, podpore)	Odprtino je potrebno naknadno zapolniti.	Na tistih mestih se odprtine ne naredi.

2.2 Značilni načini porušitev jeklenih nosilcev z odprtinami v stojini

Na odziv perforiranega jeklenega nosilca vplivajo številni parametri, kot so geometrija nosilca, oblika in velikost odprtin, razdalja med odprtinami, vitkost stojine, vrsta in velikost obtežbe, kvaliteta varjenja ter robni pogoji nosilca (Ellobody, 2012). Večji delež raziskav, ki so se do danes izvedle, raziskujejo obnašanje satastih nosilcev, kar je povsem razumljivo, saj se tovrstni nosilci najpogosteje uporabljajo. Zadnje čase prihajajo v ospredje nosilci z odprtinami v stojini, ki za razliko od satastih nosilcev ponujajo širši spekter končnih oblik nosilnega elementa, to pa raziskovalcem omogoča individualne študije posameznih načinov porušitve. Pri preizkušanju nosilnih elementov z eno odprtino v stojini lahko preverjamo vpliv velikosti in oblike odprtine na odziv nosilca. Ko je v stojini več odprtin, je pomemben vpliv razdalje med sosednjima odprtinama, ki nam pove, kako odprtine vplivajo na velikost in razporeditev notranjih sil v okolici sosednje odprtine. Prav tako lahko za spremenljive parametre uporabimo geometrijo prečnega prereza, razpon nosilca ali robne pogoje in način obremenjevanja ipd. Dosedanje študije so pokazale, da so jekleni nosilci z odprtinami v stojini občutljivi na (Bake Mohamadi, 2010):

- Vierendeel mehanizem,
- izbočitev polnega dela stojine,
- upogibni uklon,
- porušitev po zvaru (satasti nosilci) in
- bočno zvrnitev.

V nadaljevanju poglavja sledi kratek pregled porušnih mehanizmov značilnih za perforirane nosilce.

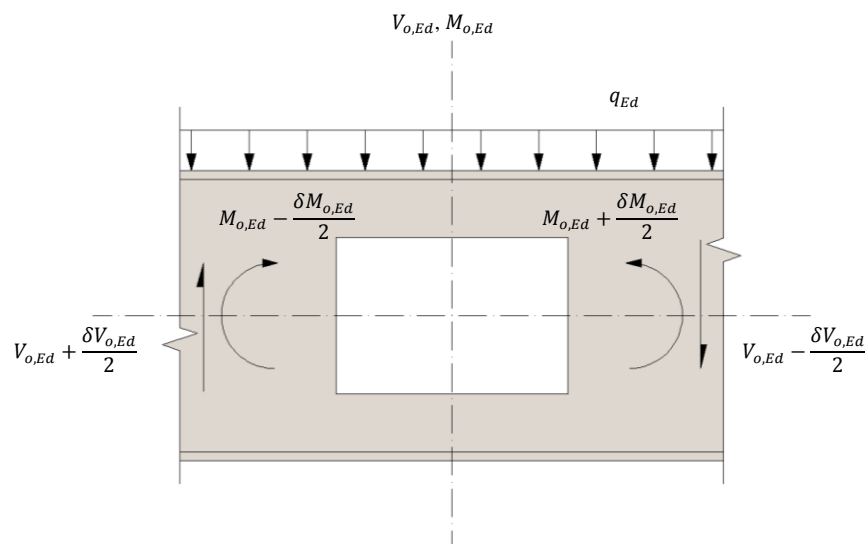


Slika 3: Posebna območja v nosilcu z odprtinami v stojini

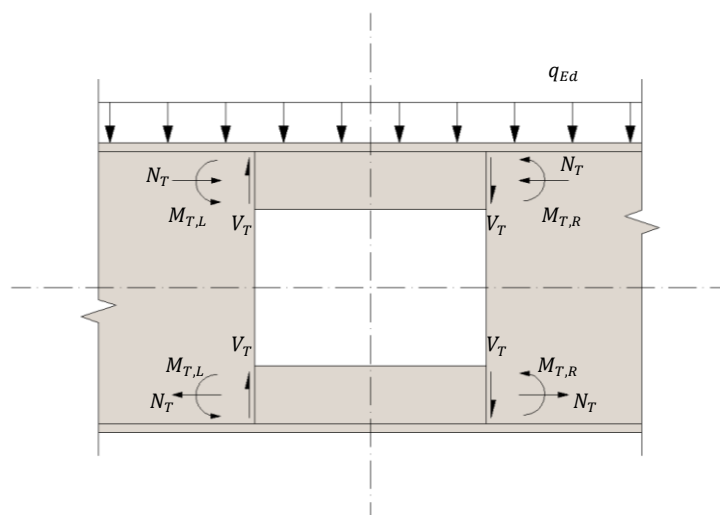
2.2.1 Vierendeel mehanizem

Vierendeel ali strižni mehanizem je posledica prenosa strižnih sil preko odprtine, zaradi katerih se formirajo štirje plastični členki v T-prerezih nad in pod odprtinami (Chung in sod, 2001). Ko je nosilec z odprtinami v stojini obremenjen s strigom, morajo T-prerezi nad in pod odprtinami prenesti globalno

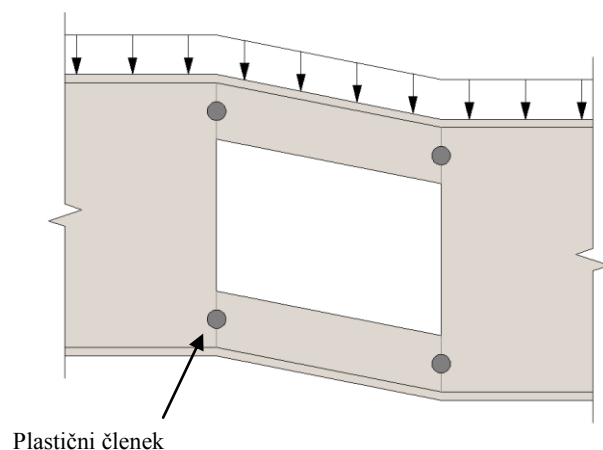
strižno obremenitev, pa tudi primarne in sekundarne momente (Dermidjan, 1999). Primarni moment je globalni upogibni moment, ki deluje v prečnem prerezu upogibnega nosilca in povzroča osne obremenitve v T-prerezih. Zaradi prenosa strižnih sil preko odprtine nastanejo sekundarni momenti v T-prerezih. Velikost sekundarnega momenta je odvisen od dolžine odprtine - krajša odprtina, manjši sekundarni moment.



Slika 4: Primarni globalni upogibni moment $M_{o,Ed}$ in globalna prečna sila $V_{o,Ed}$ v okolici odprtine



Slika 5: Lokalne notranje sile, ki delujejo na koncih T območij nad in pod odprtino. Sekundarni upogibni moment M_T , prečna sila V_T in osna sila N_T .



Slika 6: Vierendeel mehanizem

2.2.2 Izbočitev polnega dela stojine

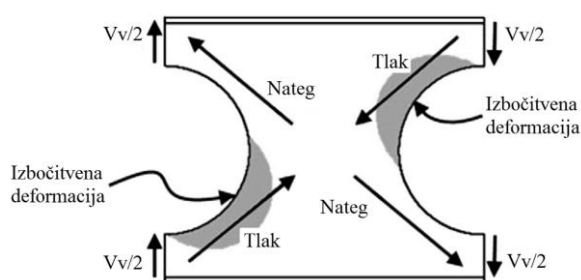
Izbočitev polnega dela stojine je eden bolj pogostih porušnih mehanizmov perforiranih nosilcev in je odvisna od številnih parametrov, med katerimi najbolj izstopata vitkost stojine in razdalja med odprtinami (Tsavdaridis in D'Mello, 2011a). V primeru, ko ima nosilec samo eno odprtino ali več odprtin v stojini, ki so si precej narazen, rečemo, da so odprtine izolirane. V okolici izoliranih odprtin se stojina izboči zaradi svoje vitkosti ali prevelike lokalne vertikalne obremenitve.

V splošnem so bolj pogosti nosilci z večjim številom odprtin, pri katerih je izbočitev polnega dela stojine med dvema odprtinama rezultat kompleksnega porušnega mehanizma, v katerem hkrati nastopajo:

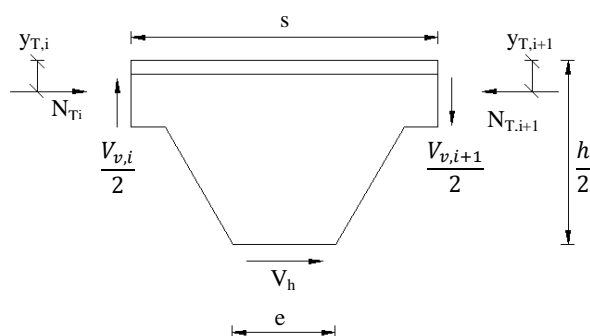
- osna sila zaradi globalnega momenta,
- strižne sile zaradi globalne prečne sile in
- lokalni Vierendeel moment zaradi prenosa strižne sile preko dolžine odprtine,

in sicer v kombinaciji z lokalnimi akcijami sosednjih odprtin (Tsavdaridis in D'Mello, 2011a).

Zaradi razlike osnih sil v T-prerezih se v sredini polnega dela stojine razvijejo horizontalne strižne sile (Erdal in Saka, 2013). Notranje prečne sile povzročijo, da se v polnem delu stojine v diagonalnih smereh ustvarita tlačeni pas, pravokotno nanj pa natezni pas. Stojina se bo zaradi prevelikih tlačnih napetosti izbočila okoli natezne diagonale. Horizontalne strižne sile pa bodo povzročile, da se bo v tlaku izbočena stojina dodatno zasukala okoli natezne diagonale. Velikost zasuka je odvisna od dolžine stojine med dvema odprtinama – daljša je stojina, manjši bo zasuk v trenutku izbočitve. Tako bo en izbočen rob odprtine v nategu, nasprotni rob pa v tlaku (Demirdjian, 1999). V primeru prekratke dolžine stojine med dvema odprtinama, se lahko zaradi horizontalnih strižnih sil stojina tudi pretrga.



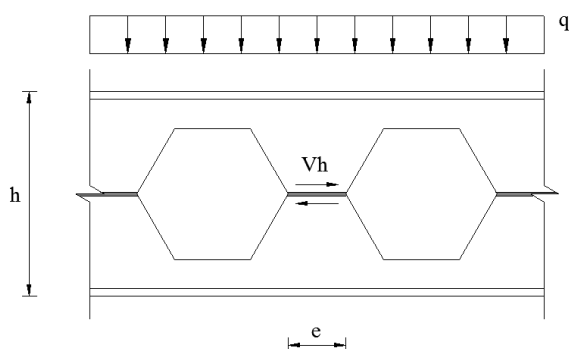
Slika 7: Tipično obnašanje polnega dela stojine med odprtinama (Tsavdaridis in D'Mello, 2011b)



Slika 8: Predlagani model za analizo izbočitve stojine – zgornja polovica polnega dela stojine med odprtinama (Redwood in Demirdjian, 1998)

2.2.3 Pretrg po zvaru v stojini

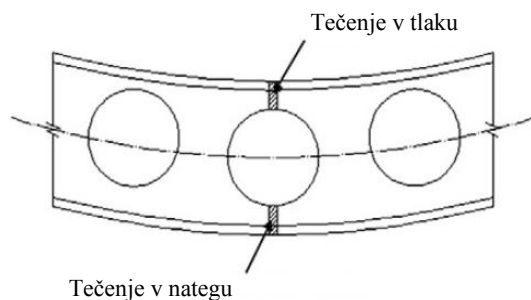
Pri satatih nosilcih se lahko zgodi porušitev po zvarjenem spoju v polnem delu stojine, ko je dolžina polnega dela stojine oz. dolžina zvara prekratka (Wakchaure in sod, 2012). Tovrstno porušitev povzročijo prevelike horizontalne strižne sile v polnem delu stojine iz poglavja 2.2.2.



Slika 9: Strižna obremenitev zvara

2.2.4 Upogibni uklon nosilca

Nosilec z odprtinami v stojini se upogibno ukloni, ko je prečni prerez izpostavljen prevelikemu upogibnemu momentu. Če je prerez lokalno kompakten, se T-prerezi nad in pod odprtino plastificirajo v tlaku in nategu. Prečni prerez z odprtino ima manjšo razpoložljivo površino kakor prečni prerez brez odprtine, zato se perforirani prečni prerez hitreje plastificira. V primeru podolgovate odprtine (npr. pravokotne odprtine), obstaja nevarnost lokalnega uklona T-prereza v tlaku.



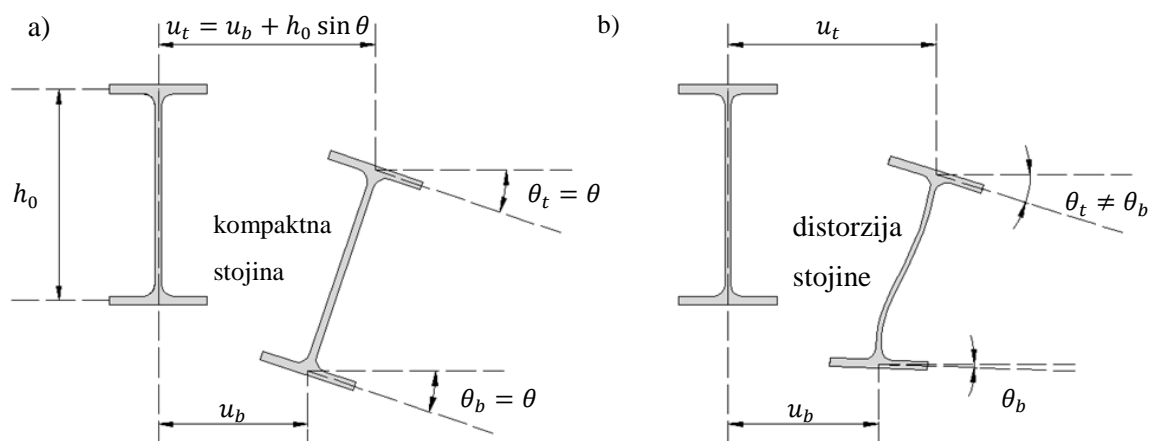
Slika 10: Plastifikacija v upogibu (Tsavdaridis in D'Mello, 2012)

2.2.5 Bočna zvrnitev in bočni distorzijski uklon

Jekleni polnostenski nosilci, ki niso zadostno bočno podprti in so obremenjeni z vertikalno obtežbo, so občutljivi na bočno zvrnitev in/ali lokalno izbočitev. Slednja pojava sta odvisna od vitkosti nosilca kot elementa in vitkosti sestavnih delov prečnega prereza nosilca. Bočna zvrnitev je stabilnostni fenomen, v katerem se prečni prerez bočno translatorsno premakne in se zasuka kot togo telo. Bočna zvrnitev je tako značilna za dolge ali kratke nosilce (Kalkan in Buyukkaragoz, 2012). V primeru srednje dolgih nosilcev s kompaktnima pasnicama in vitko stojino pa lahko pride do vzdolžne bočne deformacije nosilca v kombinaciji z distorzijo stojine, takšen pojav imenujemo bočni distorzijski uklon (ang. lateral distortional buckling) (Kalkan in Buyukkaragoz, 2012). Zaradi distorzije stojine, se pasnice bočno uklonijo z različnima kotoma zasuka, zmanjša se efektivna torzijska odpornost elementa in posledično se zmanjša odpornost na uklon (Zirakian in Showkati, 2006). Pri projektiranju po standardih kontrola bočnega distorzijskega uklona ni predvidena, vendar Evrokod 3 podaja precej konzervativne ocene za kritični uklonski moment za različne vitkosti v primeru bočne zvrnitve, kar omogoča, da z upoštevanjem distorzije še vedno ostanemo na varni strani (Kalkan in Buyukkaragoz, 2012).

Pri perforiranih nosilci je pojav bočnega distorzijskega uklona še dokaj neraziskano področje. Zirakian in Showkati sta objavila poročilo o laboratorijskih testih šestih srednje dolgih satastih nosilcih s šestkotnimi odprtini in so bili obremenjeni s točkovno prečno silo na sredini razpona (Zirakian in Showkati, 2006). Nosilec je bil bočno podprt na mestu podpiranja in v točki obremenjevanja je bila samo zgornja pasnica bočno podprta. V fazi obremenjevanja so se merili bočni pomiki in deformacije v treh točkah višine prereza (zgornja pasnica, sredina stojine in spodnja pasnica), in sicer na polovici razpona nosilca in v sredinah razdalj med sredino razpona nosilca in podporo. Rezultati preiskav so bili prikazani v obliki diagramov obtežba v odvisnosti od pomikov in obtežba v odvisnosti od deformacije za posamezna merilna mesta. Dobljeni točkovni rezultati so se nato razporedili in ekstrapolirali po višini prečnega prereza nosilca. Diagrami, ki kažejo razporeditev bočnih upogibkov

po višini stojine, so nazorno pokazali, da je v vseh primerih prišlo do bočne zvrnitve v kombinaciji z distorzijo stojine, s čimer se je potrdilo, da se tudi perforirani nosilci lahko porušijo zaradi bočnega distorzijskega uklona. Avtorja dodajata še, da v nobenem primeru ni prišlo do izbočitve polnega dela stojine (poglavje 2.2.2).



Slika 11: Deformacija polnega dela stojine v I-profilu, ko nastopi: a) bočna zvrnitev ali b) bočni distorzijski uklon (Kalkan in Buyukkaragoz, 2012).

Če povzamemo dosedanje študije, lahko zaključimo, da odprtine zelo vplivajo na odziv nosilca. V prvi vrsti je pomembna vitkost posameznih delov prečnega prereza in nosilca kot celota. Če nosilec ni zadostno bočno podprt, bo prišlo do bočne zvrnitve ali v primeru vitke stojine do bočnega distorzijskega uklona. Pri strižno obremenjenem nosilcu, ki je ustrezno bočno podprt, vendar je stojina vitka ali pa so odprtine precej blizu, pride do izbočitve polnega dela stojin. Če pa bi imel slednji nosilec kompakten prečni prerez, potem bi se razvil Vierendeel mehanizem.

Pri načrtovanju oblike odprtin, je dobro, če so vogali (oglate oblike odprtin) zaobljeni, da se izognemo koncentracijam napetosti. Znano je, da višina odprtine v stojini zmanjšuje strižno in upogibno nosilnost prečnega prereza, medtem ko dolžina odprtine vpliva na nastanek Vierendeel mehanizma (Tsavdaridis in D'Mello, 2012). Odprtina zmanjša površino strižnega prereza, zato je priporočljivo, da naj bodo odprtine izven območij prevelikih strižnih sil, pri prevzemu upogiba pa je bolj učinkovito povečati višino prereza (z odprtino ali brez).

2.3 Projektiranje nosilcev z odprtinami v stojini

Edini urejen projektni pristop je bil predstavljen v Nacionalnem dodatku N k predstandardu ENV 1993-1-1:1993/A2:1998, ki je zajemal jeklene nosilce z velikimi odprtinami v stojini. Dodatek N kasneje ni bil sprejet, zaradi nezanesljivosti metod pri preverjanju odpornosti nosilnega elementa predvsem na izbočitev polnega dela stojine in nastanek Vierendeel mehanizma (Bake Mohamadi, 2010). Predlagani dodatek je obravnaval nosilce z odprtinami v stojini z ojačitvami ali brez, oblike odprtini pa so bile krog, šestkotnik in pravokotnik.

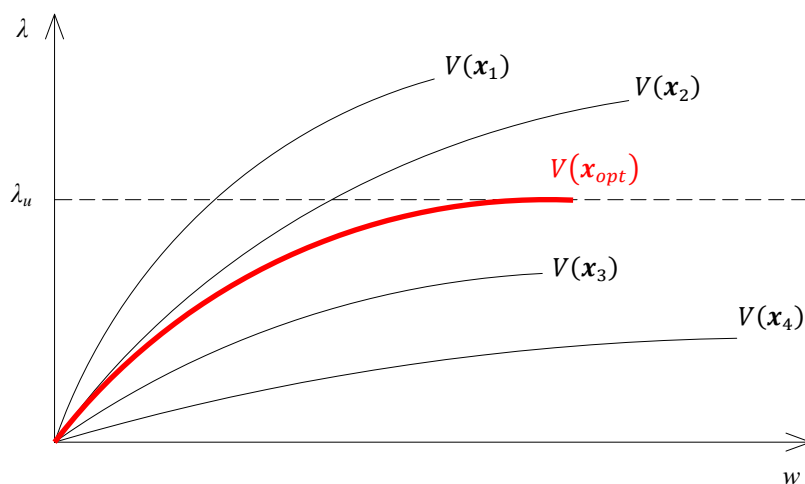
Druga priznana navodila za projektiranje nosilcev z odprtinami v stojini lahko najdemo v ameriškem vodiču⁵, ki pa pokriva samo nosilce z izoliranimi pravokotnimi odprtinami z ali brez ojačitev (Design of composite ..., 2011). Sicer podjetja, ki proizvajajo tovrstne nosilce, veliko vlagajo v raziskovanje in razvoj nosilcev z odprtinami v stojini. Tako imajo interne priročnike in posebej prilagojeno programsko opremo za projektiranje svojih izdelkov.

⁵ Darwin, D. Design of steel and composite beams with web openings. Steel Design Guide Series 2, American Institute of Steel Construction, 1990.

3 OPTIMIZACIJSKI ALGORITEM

3.1 Splošno

Optimizacija je proces iskanja optimalne rešitve problema glede na dane pogoje. Na Sliki 12 so prikazani grafi ravnotežnih poti za isti nosilni element pri petih različnih vrednostih projektnih parametrov x_i . Poleg geometrijskih pogojev mora element izpolnjevati glavno zahtevo glede nosilnosti izražene s faktorjem obtežbe λ in mejnim obtežnim faktorjem λ_u , to je $\lambda \geq \lambda_u$. V poštev pridejo rešitve, katerih grafi se končajo nad mejo λ_u . Drugi pogoj zahteva, da naj bo poraba materiala minimalna, zato mora biti volumen elementa $V(\mathbf{x})$ čim manjši. Tako se množica rešitev skrči na eno, optimalno rešitev, ki je na Sliki 12 obarvana z rdečo barvo. Pri optimizaciji je zelo pomembno, kako je problem formuliran in s katero metodo ga rešujemo. V diplomski nalogi iščemo optimalne dimenzije nosilca z odprtiniami, pri katerem so cilji in pogoji optimizacije izraženi pretežno z nelinearnimi funkcijami. Zato uporabimo gradientno metodo, ki je razvita »za numerično reševanje nelinearnih optimizacijskih problemov« (Bronštejn in sod, 1997, str. 428). Gradientna metoda je iterativna metoda iskanja minimuma funkcije, ki najprej izračuna naklon funkcije (gradient) in se premakne v smeri proti minimumu, to je v smeri negativnega gradienta. Postopek gradientne metode se ponavlja, dokler se ne izračuna minimum oz. optimum funkcije.



Slika 12: Optimizacija nosilne konstrukcije

Numerično analizo nosilnih elementov z odprtiniami po metodi končnih elementov izvajamo v specializiranem programskem okolju *AceFEM*. To je posebna sistemska aplikacija v komercialnem programu *Mathematica*⁶, ki omogoča simbolno obdelavo enačb in numerično računanje, kot tudi

⁶ Wolfram Mathematica, <http://www.wolfram.com/>

grafično vrednotenje rezultatov. *AceFEM* vsebuje še paket *AceGen*, ki služi za simbolno generacijo kode novih končnih elementov, in knjižnico končnih elementov *AceShare*. V nadaljevanju poglavja je podrobneje opisana procedura matematične optimizacije v programu *AceFEM*.

3.2 Algoritem optimizacije

Nosilni elementi se bodo med optimizacijo analizirali po metodi končnih elementov v programskem okolju *AceFEM*, pri čemer se bo upoštevala geometrijska in materialna nelinearnost elementov. Celoten algoritem je sestavljen iz treh poglavij:

- priprava numeričnega modela,
- optimizacija in
- rezultati optimizacije.

Preglednica 2: Potek optimizacije nosilca z odprtini v stojini

FAZA	KORAKI FAZE	ZNAČILNI UKAZI ⁷
Modeliranje	Izbira projektnih parametrov, Geometrija, Materialni model, Tip končnega elementa, Gostota mreže končnih elementov, Robni pogoji, Obtežba, Začetna nepopolnost	SMTInput [] SMTAddDomain [] SMTMesh [] SMTAddEssentialBoundary [] SMTData [] SMTAddSensitivity [] SMTAnalysis []
Optimizacija	Razširjena namenska funkcija, Polje začetnih občutljivosti, Direktna in občutljivostna analiza, Minimizacija namenske funkcije	FindMinimum [] SMTNewtonIteration [] SMTNode [] D []
Rezultati optimizacije	Numerični in grafični prikaz rezultatov optimizacije	SMTShowMesh [] Plot [] Print []

⁷ Ukazi, ki imajo predpono »SMT«, so iz programa *AceFEM*. Preostali ukazi so iz programa *Mathematica*.

3.2.1 Vhodni podatki in modeliranje

Prvi korak analize po metodi končnih elementov je priprava numeričnega modela obravnavane konstrukcije. Pred modeliranjem je potrebno poznati geometrijske in materialne lastnosti konstrukcije, robne pogoje, vrsto in velikost obremenitve, v primeru optimizacije tudi projektne parametre.

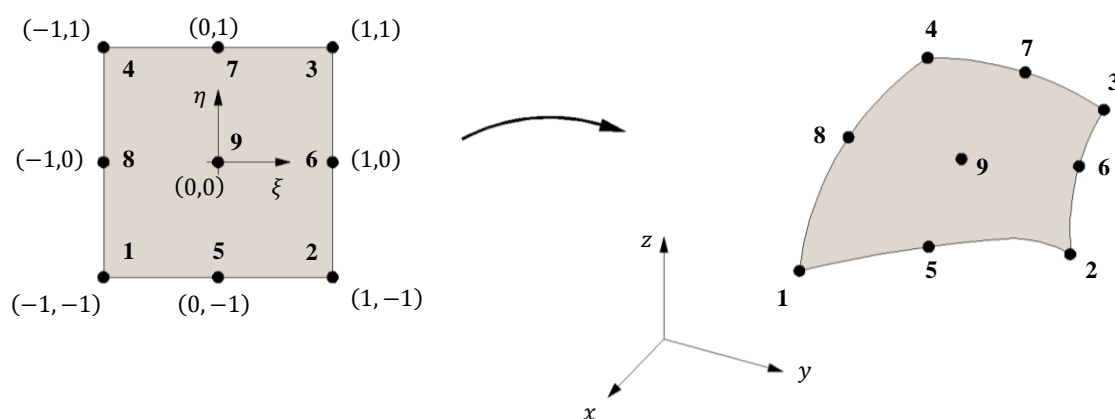
3.2.1.1 Končni element

Za modeliranje pasnice in stojine nosilca so uporabljeni 9-vozlliščni lupinasti končni elementi, ki omogočajo velike deformacije (Slika 13). Izbrani končni elementi imajo v vsakem vozllišču 6 prostostnih stopenj – 3 pomike in 3 zasuke. Vrednosti pomikov in zasukov v točkah med vozllišči se določijo z Lagrangevo kvadratično interpolacijo. Interpolacijski polinom $P(\xi, \eta)$ izračunamo po izrazih (1) – (3), kjer so (ξ_0, η_0) , (ξ_1, η_1) in (ξ_2, η_2) znane vrednosti v vozlliščih končnega elementa, $N_i(\xi)$ in $N_j(\eta)$ oblikovni funkciji in p_{ij} vrednosti fizikalne količine v vozlliščih končnega elementa v referenčnem koordinatnem sistemu (ξ, η) .

$$N_i(\xi) = \prod_{\substack{s=0 \\ s \neq i}}^2 \frac{(\xi - \xi_s)}{(\xi_i - \xi_s)} \quad (1)$$

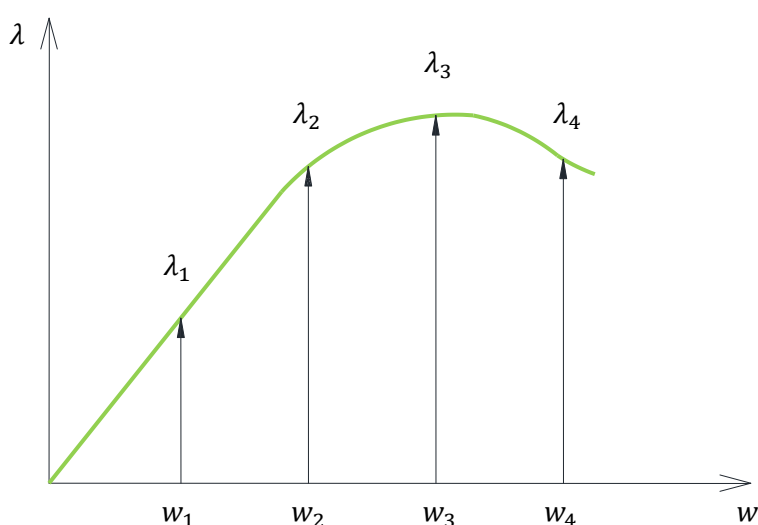
$$N_j(\eta) = \prod_{\substack{s=0 \\ s \neq j}}^2 \frac{(\eta - \eta_s)}{(\eta_j - \eta_s)} \quad (2)$$

$$P(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 N_i(\xi) \cdot N_j(\eta) \cdot p_{ij} \quad (3)$$



Slika 13: Preslikava 9-vozlliščnega lupinastega končnega elementa iz referenčnega koordinatnega sistema (ξ, η) v globalni koordinatni sistem (x, y, z)

Za optimizacijo so bili uporabljeni končni elementi, ki omogočajo plastifikacijo materiala, katere začetek je določena z von Misesovim pogojem tečenja. Za izračun imperfektnosti so bili uporabljeni končni elementi s hiperelastičnim materialnim modelom. Izbrana tipa končnih elementov sta izbrana iz knjižnice *AceShare* in upoštevata Reissner-Mindlinovo teorijo plošč. Pri optimizaciji se bo izvajala nelinearna analiza z metodo predpisanih pomikov, zato sta v dodatku *AceGen* posebej generirana končni element za vertikalno linijsko obtežbo in končni element za predpisan pomik. Pri tej metodi se za predpisan pomik v izbrani točki konstrukcije z nelinearno analizo poišče tak obtežni faktor, ki bo povzročil dani predpisan pomik. Metoda omogoča sledenje obtežni poti tudi preko mejne obtežbe.



Slika 14: Grafični prikaz metode računa obtežne poti preko vodenega pomika – za vsak pomik w_i se izračuna pripadajoči faktor obtežbe λ_i .

3.2.1.2 Geometrija, projektni parametri in parametrizacija

Pri optimizaciji vnaprej definiramo, po katerih parametrih želimo optimalizirati nosilni element. To so lahko geometrijski parametri (višina stojine, debelina pasnice, polmer krožne odprtine, prostornina...), materialni parametri (modul elastičnosti, gostota materiala...) ali celo robni pogoji (pomik). Izbranim neznanim parametrom oz. spremenljivkam podamo simbolno oznako ϕ_i in jih imenujemo projektni parametri. V nalogi bodo projektni parametri dimenzije odprtini in višina nosilca.

Vse projektne parametre zapišimo v vektor:

$$\mathbf{x} = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) \in \mathbb{R}^n \quad (4)$$

Potem, ko smo vnesli preostale podatke, ki se med optimizacijo ne bodo spreminjali, pripravimo mrežo končnih elementov. Z ukazom `SMTAddDomain[]` vpeljemo domene (pasnici, stojina, končni element za pomik in končni element za obtežbo), ki tvorijo mrežo končnih elementov. Z ukazom `SMTMesh[]` opišemo strukturo mreže končnih elementov, kjer sta zajeti razporeditev končnih elementov in gostota mreže. Ker vhodni podatki za mrežo končnih elementov vsebujejo tudi projektne parametre, rečemo, da je mreža končnih elementov parametrizirana.

Vektorsko polje vozlišč mreže končnih elementov idealnega nosilca označimo s \mathbf{X}_0 .

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_0(\mathbf{x}) \quad (5)$$

3.2.1.3 Robni pogoji in obremenitev

Z robnimi pogoji opišemo podpore in predpisane pomike. V aplikaciji *AceFEM* to storimo z ukazom `SMTAddEssentialBoundary[]`. Med optimizacijo se bo izvajala elasto-plastična analiza in če želimo izkoristiti plastično nosilnost materiala, moramo zagotoviti lokalno in globalno duktilnost konstrukcije (Beg in Pogačnik, 2009). Lokalno duktilnost nosilnega elementa zagotavljamo s kompaktnim prečnim prerezom in z uporabo duktilnega materiala (konstrukcijsko jeklo). Globalno duktilnost pa dosežemo s preprečitvijo globalne nestabilnosti (uklon, bočna zvrnitev) – na primer, pri upogibnih nosilcih preprečimo bočno zvrnitev z zadostnim bočnim podpiranjem tlačene pasnice.

Pod robne pogoje sicer štejemo tudi obtežbo, vendar je ta v našem primeru opisana s posebnim končnim elementom. Obravnavani nosilci z odprtiniami v stojini so obremenjeni s projektno vertikalno linijsko obtežbo, ki ima prijemališče v težiščnici zgornje pasnice in deluje v smeri sile teže. Velikost obtežbe je za posamezen računski primer izračunana za mejno stanje nosilnosti v skladu z določili standardov SIST EN 1990 in SIST EN 1991.

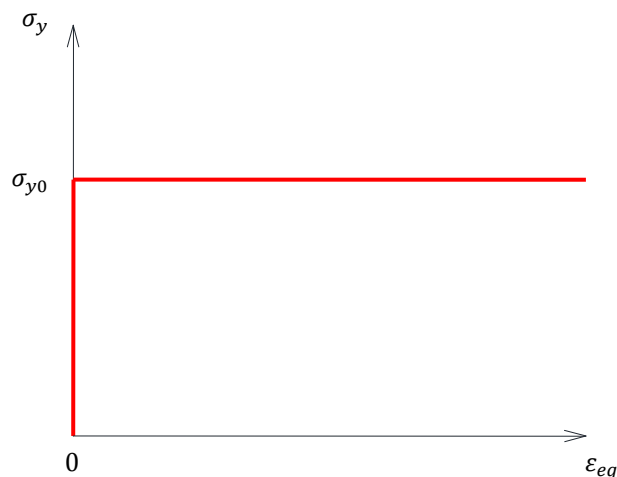
3.2.1.4 Material

Nosilci z odprtiniami v stojini so iz standardnega konstrukcijskega jekla, ki ima modul elastičnosti $E = 210000 \text{ N/mm}^2$ in Poissonov količnik $\nu = 0.3$. Za optimizacijo so bili uporabljeni končni elementi z nelinearnim elasto-plastičnim materialnim modelom. V elastičnem območju se jeklo obnaša kot hiperelastičen material, v plastičnem območju pa je zveza med napetostjo na meji tečenja σ_y in akumulirano plastično deformacijo ε_{eq} opisana z izrazom (6):

$$\sigma_y = \sigma_{y0} + K \cdot \varepsilon_{eq} + R_{inf} \cdot (1 - e^{-\delta \cdot \varepsilon_{eq}}) \quad (6)$$

V izrazu (6) K pomeni koeficient linearnega utrjevanja, R_{inf} je mejna vrednost nelinearnega utrjevanja in δ določa hitrost nelinearnega utrjevanja. V diplomski nalogi sta koeficienta K in R_{inf} enaka nič, zato je materialni model v plastičnem območju idealno plastičen (Slika 15).

$$\sigma_y = \sigma_{y0} \quad (7)$$



Slika 15: Diagram napetost tečenja σ_y v odvisnosti od akumulirane plastične deformacije ϵ_{eq} .

3.2.1.5 Nadomestna začetna nepopolnost

Realni nosilec kot končni produkt, ni nikoli idealno raven, ker so vedno prisotne geometrijske in materialne nepravilnosti, ki so s standardom sprejemljive. Po samem procesu proizvodnje (vroče valjanje, plamensko rezanje, varjenje jekla) ostanejo v jeklenem elementu zaostale napetosti. Prav tako lahko nastanejo manjše deviacije v geometriji in obliki posameznih delov prereza v primerjavi z idealno obliko elementa. Pri namestitvi nosilnega elementa (spoji) ali obremenjevanju, se lahko pojavijo manjše naključne ekscentričnosti v vozliščih. Takšne nepopolnosti se odražajo v zmanjšanju nosilnosti, kar še posebej velja za tankostenske nosilce.

V standardu SIST EN 1993-1-1, poglavje 5.5, je priporočilo, da se pri globalni analizi elementa upoštevajo nadomestne začetne nepopolnosti, ki zajemajo geometrijske in materialne nepopolnosti. Vrednost amplitude nadomestne geometrijske nepopolnosti je tabelirana v preglednici 5.1 (SIST EN 1993-1-1), kjer je izbira amplitude e_0 odvisna od tipa uklonske krivulje in vrste analize konstrukcije. Trenutno veljavni evropski standard za projektiranje jeklenih konstrukcij ne obravnava nosilcev z odprtini, zato tudi ni povsem jasno, katero uklonsko krivuljo lahko pripišemo obravnavani

konstrukciji. Odločili smo se, da izberemo najnižjo, to je uklonsko krivuljo d . Tako je projektna vrednost amplitude pri plastični analizi enaka:

$$\frac{e_0}{L} = \frac{1}{100} \quad (8)$$

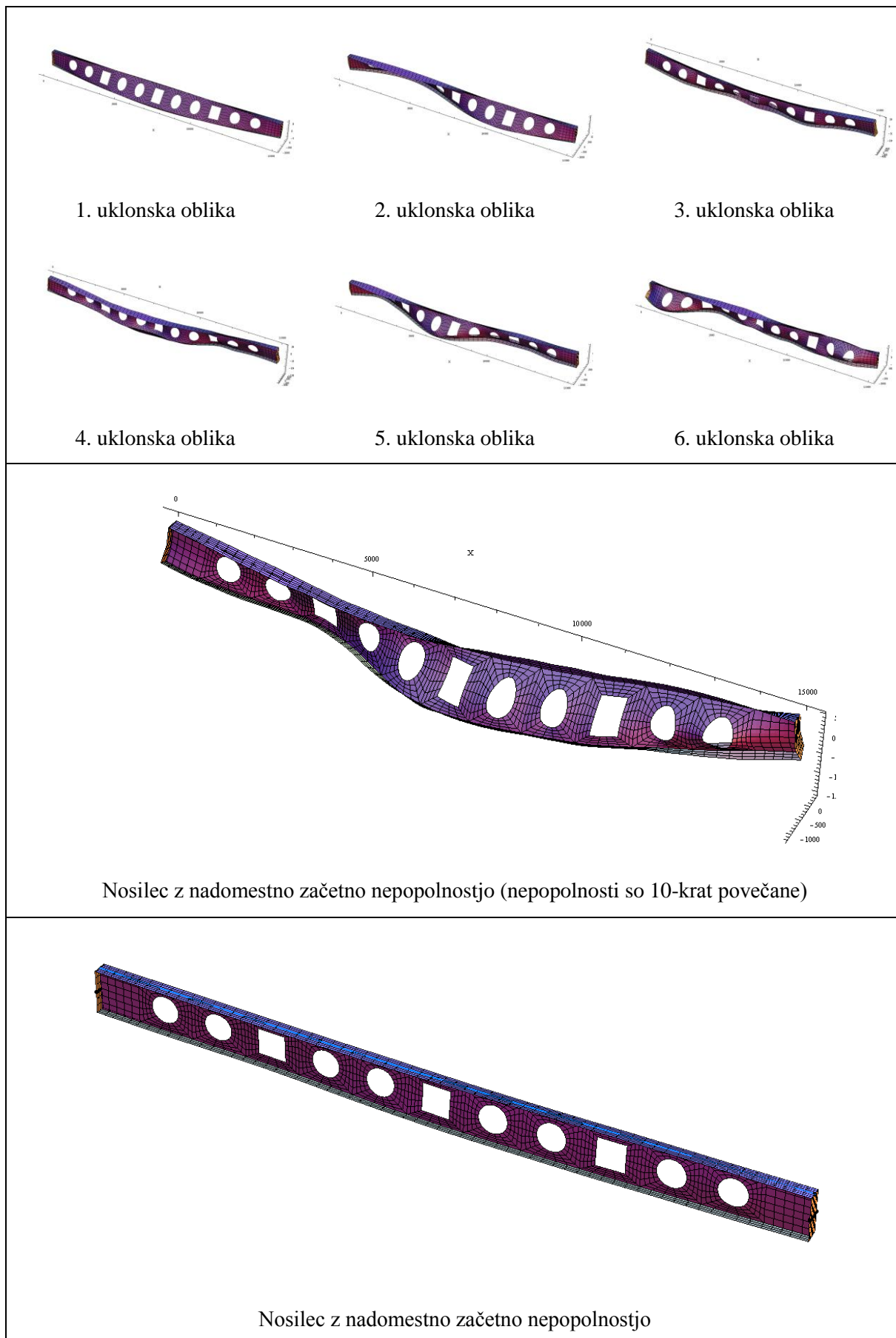
Nadomestno začetno nepopolnost pri numeričnem modelu elementa upoštevamo kot vsoto prispevkov uklonskih oblik. Uklonske oblike izračunamo z uklonsko analizo numeričnega modela, kateremu smo podali izhodiščne vrednosti projektnih parametrov. Seštejemo vektorska polja prvih šest uklonskih oblik numeričnega modela, tako, da v celoti upoštevamo prvo kritično uklonsko obliko modela $\mathbf{X}_{bs1}(\mathbf{x})$, prispevek preostalih uklonskih oblik $\mathbf{X}_{bsi}(\mathbf{x})$ pa je 70% (Commentary and worked ..., 2007).

$$\mathbf{X}_{bs}(\mathbf{x}) = 1.0 \cdot \mathbf{X}_{bs1}(\mathbf{x}) + 0.7 \cdot \sum_{i=2}^6 \mathbf{X}_{bsi}(\mathbf{x}) \quad (9)$$

Superpozicijo uklonskih oblik normiramo na amplitudo nadomestne geometrijske nepopolnosti e_0 . Nato normirano vektorsko polje zaradi »imperfektnosti« prištejemo h koordinatam vozlišč parametrizirane mreže končnih elementov idealnega nosilca:

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{X}_{imp} \quad (10)$$

Numerični model jeklenega nosilca z odprtini v stojini je tako pripravljen za optimizacijo.



Slika 16: Uklonske oblike in numerični model z začetno nadomestno nepopolnostjo za primer prostoležečega nosilca

3.2.2 Gradientna metoda optimizacije

Nelinearni optimizacijski problem na splošno formuliramo kot:

Poišči tak vektor

$$\mathbf{x} = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) \in \mathbb{R}^n,$$

v katerem bo namenska funkcija $f(\mathbf{x})$ imela čim manjšo vrednost, pri pogojih:

$$g_j(\mathbf{x}) < 0, \quad j \in P = \{1, \dots, p\} \text{ in} \quad (11)$$

$$h_k(\mathbf{x}) > 0, \quad k \in Q = \{1, \dots, q\}. \quad (12)$$

Funkcije f , g_j in h_k so zvezne in zvezno odvedljive ter velja, da je vsaj ena izmed njih nelinearna.

Množico dopustnih rešitev označimo z M :

$$M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: g_j(\mathbf{x}) < 0, j \in P, h_k(\mathbf{x}) > 0, k \in Q\}. \quad (13)$$

Vektor \mathbf{x} predstavlja n – terico spremenljivk oz. projektnih parametrov ϕ_i .

Jeklene elemente z odprtiniami v stojini smo optimalizirali s t. i. modificirano gradientno metodo optimizacije, pri kateri smo z modifikacijo namenske funkcije problem optimizacije z omejitvami prevedli v problem optimizacije brez omejitev. Velja, da je ob primerni konstrukciji modificirane namenske funkcije vsako stekališče zaporedja rešitvenih točk nadomestnega problema tudi rešitev prvotnega problema (Bronštejn in sod, 1997). V nadaljevanju metode izračunamo gradient, s katerim iterativno poiščemo minimum modificirane namenske funkcije $F(\mathbf{x})$. Gradient funkcije F v točki \mathbf{x} predstavlja naklon funkcije in določa smer iskanja stacionarne točke, kjer je gradient ničeln. Minimum je dosežen, ko je Hessejeva matrika v stacionarni točki pozitivno definitna. Optimizacija je iterativni proces, kjer se v vsakem koraku za trenutni rešitveni vektor \mathbf{x} , preverja, ali je minimum razširjene namenske funkcije (znotraj izbrane natančnosti) dosežen. V kolikor ni, se za smer izbire naslednjih približkov izbere smer negativnega gradienta, t.j. smer največjega spusta razširjene namenske funkcije $F(\mathbf{x})$.

3.2.2.1 Namenska funkcija in pogoji optimizacije

Kot je bilo omenjeno, uporabljena je posebna gradientna metoda optimizacije, kjer smo z modifikacijo namenske funkcije po t.i. »interior point« metodi prevedli problem z omejitvami na problem brez omejitev.

Modificirana namenska funkcija ima naslednjo obliko:

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x}) \quad (14)$$

Funkcijo $f(\mathbf{x})$ imenujemo namenska funkcija, ker določa namen oz. cilj optimizacije. To je lahko npr. minimalni volumen nosilca (min V), seveda ob pogojih, da ima zadostno nosilnost in da ne presega geometrijskih omejitev konstrukcije nosilca. Pogoji so zajeti v členu $B(\mathbf{x})$, ki preprečuje, da bi pri iskanju minimuma funkcije (14) zapustili dopustno območje rešitev M (izraz (13)). Namreč, funkcija $B(\mathbf{x})$ povzroči, da razširjena namenska funkcija $F(\mathbf{x})$ raste čez vse meje, če zapustimo območje sprejemljivih rešitev M. Na ta način »kaznujemo« razširjeno namensko funkcijo in zato členu $B(\mathbf{x})$ rečemo tudi kazenska funkcija (ang. penalty function).

Funkcija $B(\mathbf{x})$ je zvezna in zvezno odvedljiva vsota funkcij, ki opisujejo pogoje optimizacije:

$$B(\mathbf{x}) = B_1(\mathbf{x}) + B_2(\mathbf{x}) + \dots + B_l(\mathbf{x}), \quad l \in C = \{1, \dots, c\}, \quad (15)$$

c je število pogojev.

Posamezen člen kazenske funkcije ima obliko:

$$B_l(\mathbf{x}) = B_l(v, b, \mu, \varepsilon) = \begin{cases} -\mu \ln(v - b), & v - b > \varepsilon; \\ \mu \frac{b^2 - 2bv + v^2 + 4b\varepsilon - 4v\varepsilon + 3\varepsilon^2 - 2\varepsilon^2 \ln(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}, & v - b \leq \varepsilon; \end{cases} \quad (16)$$

Če poljuben pogoj optimizacije izrazimo kot:

$$v > b, \quad (17)$$

simboli v izrazu (16) pomenijo:

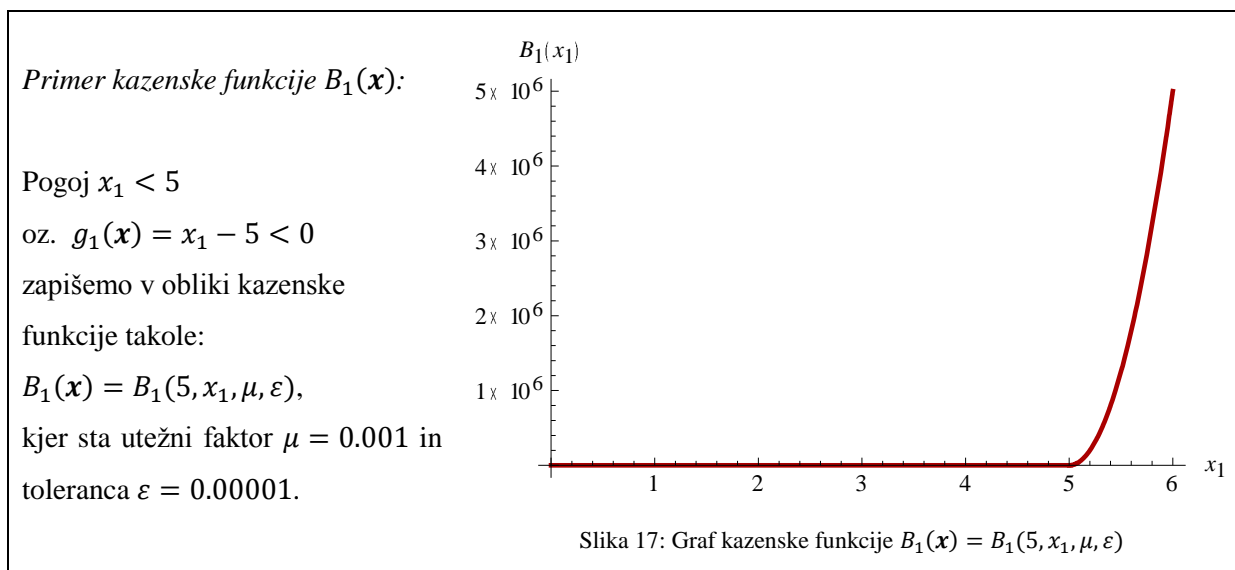
v ... vrednost ali funkcija, ki je v izrazu za pogoj (17) na strani »je večje«

b ... vrednost ali funkcija, ki je v izrazu za pogoj (17) na strani »je manjše«

μ ... utežni faktor

ε ... Izbrana natančnost, pri kateri je pogoj (17) izpolnjen. Velja $\varepsilon \geq 0$.

Na Sliki 16 je predstavljen primer grafa kazenske funkcije $B_1(\mathbf{x})$. Opazimo, da kazenska funkcija $B_1(\mathbf{x})$ močno narašča na območju, kjer dani pogoj ni izpolnjen. V izrazu (16) nastopa naravni logaritem, zaradi katere kazenska funkcija v točki, kjer je $v - b = \varepsilon$, dramatično spremeni hitrost naraščanja. Na naklon kazenske funkcije izven območja dopustnih rešitev vplivata parametra μ in ε , in sicer funkcijske vrednosti so premosorazmerne s faktorjem μ ter obratnosorazmerno z vrednostjo ε .



V računskem delu diplomske naloge smo za razširjeno namensko funkcijo uporabili naslednje izraze - in oznake:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \dots, \quad (18)$$

- Φ ... Razširjena namenska funkcija $F(\mathbf{x})$
- Φ_1 ... Osnovna ciljna funkcija optimizacije $f(\mathbf{x})$
- $\Phi_2, \Phi_3, \Phi_4 \dots$... Kazenske funkcije $B_l(\mathbf{x})$

3.2.2.2 Polje začetnih občutljivosti

V prvi fazi numeričnega algoritma smo pripravili parametrizirano mrežo končnih elementov, kjer so koordinate vozlišč končnih elementov izražene v odvisnosti od projektnih parametrov ϕ_i . Polje začetnih občutljivosti izraža občutljivost koordinat vozlišč glede na spremembo izbranega projektnega parametra ϕ_i . Polje začetnih občutljivosti izračunamo tako, da koordinate vozlišč mreže končnih elementov odvajamo po projektnih parametrih (Kristanič, 2008):

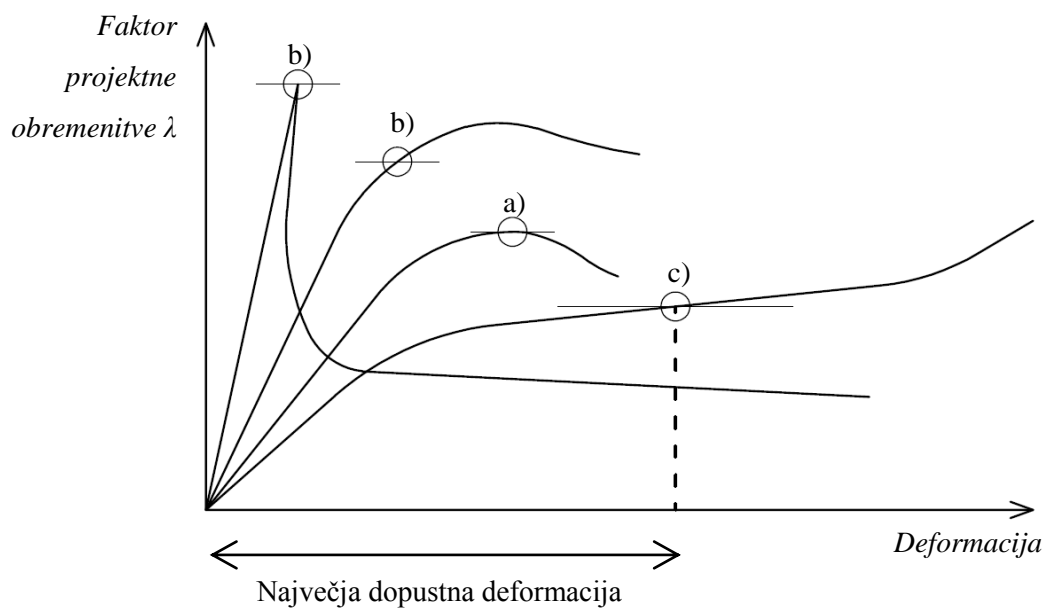
$$\frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{x})}{\partial \phi_i} = \frac{\partial (\mathbf{X}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{X}_{imp})}{\partial \phi_i} = \frac{\partial \mathbf{X}_0(\mathbf{x})}{\partial \phi_i} \quad (19)$$

Opazimo, da začetna nadomestna nepopolnost nima vpliva na izračun polja začetnih občutljivosti. `Table[D[Xn, LLOφ[[i]]], {i, LLONφ}]` je ukaz, s katerim v programu AceFEM izračunamo polje začetnih občutljivosti. X_n predstavlja vektorsko polje vozlišč $\mathbf{X}(\mathbf{x})$, `LLONφ` je

skupno število projektnih parametrov ϕ_i , $D[f(x), x]$ pa je ukaz za odvajanje simbolnih izrazov v Mathematici.

3.2.2.3 Direktna analiza in mejno stanje

Direktna analiza numeričnega modela je elastoplastična analiza konstrukcije pri trenutnem vektorju projektnih parametrov x^k . Pri tem upoštevamo geometrijsko in materialno nelinearnost ter imperfektnost konstrukcije. Odziv takšne konstrukcije je nelinearen, zato smo za račun obtežne poti uporabili Newton-Raphsonovo metodo. Rezultat direktne analize je mejni obtežni faktor λ_u v mejnem stanju nosilnosti in pripadajoči pomiki vozlišč numeričnega modela.



Slika 18: Definicija mejnega stanja nosilnosti konstrukcije v diagramu faktor obtežbe v odvisnosti od deformacije (SIST EN 1993-1-6, Slika 8.6)

Po standardu SIST EN 1993-1-6, poglavje 8.7.2(7), mejno nosilnost elementa določajo naslednji kriteriji (Slika 18):

- Maksimalni obtežni faktor λ_a je določen z limitno točko ravnotežne poti (diagram obtežni faktor λ v odvisnosti od deformacije).
- Vrednost obtežnega faktorja λ_b v trenutku, ko se pojavi bifurkacijska točka, še preden je dosežena limita ravnotežne poti. Ker imamo imperfektno konstrukcijo, bifurkacijskih točk ni.

c) Dosežena je največja dopustna deformacija (λ_c).

Mejno stanje nosilnosti elementa je določeno z najmanjšo vrednostjo faktorja projektne obtežbe izmed vseh faktorjev, ki jih dobimo po zgornjih kriterijih.

$$\lambda_u = \min \{\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c\} \quad (20)$$

Pri direktni analizi numeričnih modelov po metodi končnih elementov se z Newton-Raphsonovo metodo izračuna graf ravnotežne poti, t.j. obtežni faktor λ v odvisnosti od pomika w . Maksimum grafa $\lambda(w)$ predstavlja največjo obtežbo, ki jo numerični model prenese (kriterij a). Če med numerično analizo nastopi prvi negativni pivot v tangentski matriki, rečemo da je konstrukcija nestabilna. V vsakem koraku Newton-Raphsonove metode se preverjajo deformacije modela pri trenutnem prirastku robnih pogojev, dokler ni dosežena inženirska mejna vrednosti akumulirane plastične deformacije $\varepsilon_{max} = 0.05$ (kriterij c). Med direktno analizo konstrukcij se hkrati preverjajo vsi kriteriji, ki definirajo mejno stanje nosilnosti konstrukcije. Model je v mejnem stanju nosilnosti, čim je izpolnjen eden izmed zgornjih kriterijev.

3.2.2.4 Občutljivostna analiza

Občutljivostna analiza sledi direktni analizi, in sicer se izvrši na koncu vsakega obtežnega koraka. Z upoštevanjem polja začetnih občuljivosti občutljivostna analiza natančno izračuna gradient, ki nam opiše občutljivost razširjene namenske funkcije $F(\mathbf{x})$ na spremembo vrednosti projektnih parametrov ϕ_i .

Rezultat občutljivostne analize je gradientni vektor, ki ga sestavljajo parcialni odvodi razširjene namenske funkcije $F(\mathbf{x})$ po projektnem parametru ϕ_i in ukazuje, kako naj se trenutne vrednosti posameznih projektnih parametrov ϕ_i spremenijo (zmanjšajo ali povečajo). V programu AceFEM za izračun gradienta uporabimo ukaz `Table[D[LL0Φ, LLOφ[[i]]], {i, LLON0φ}]`, kjer sta `LL0Φ` razširjena namenska funkcija $F(\mathbf{x})$ in `LLON0φ` skupno število projektnih parametrov ϕ_i .

3.2.2.5 Optimizacija

Cilj optimizacije je poiskati minimum razširjene namenske funkcije $F(\mathbf{x})$. V ta namen uporabimo ukaz `FindMinimum[]`.

```
{ϕmin, φmin} = FindMinimum[
  LLOPrimalAndSensitivityAnalysis["Primal", φs, LLOμInit / 100, "Debug" → False]
, {φs, If[ArrayQ[φlast], φlast, LLOφInit]}
, MaxIterations → 500, AccuracyGoal → 4
, Gradient → LLOPrimalAndSensitivityAnalysis["Sensitivity", φs, LLOμInit / 100, "Debug" → False]
, "Method" → {"QuasiNewton", "StepControl" → "LineSearch"}
, StepMonitor := Print["FindMinimum update:", φlast = φs]
];
```

Slika 19: Ukazne vrstice za iskanje optimalnega minimuma.

Če je $\mathbf{x}^k \in \mathbb{R}^n$ začetna vrednost vektorja projektnih parametrov, se naslednji približki računajo po formuli:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{d}^k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (21)$$

kjer je $\alpha_k \in \mathbb{R}$ parameter in $\mathbf{d}^k \in \mathbb{R}^n$ smer lokalno najstrmejšega spusta v točki \mathbf{x}^k :

$$\mathbf{d}^k = -\nabla F(\mathbf{x}^k). \quad (22)$$

Simbol ∇ označuje operator nabra. Vektor \mathbf{d}^k je gradient razširjene namenske funkcije, ki ga dobimo kot rezultat občutljivostne analize. Sledi:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \alpha_k \nabla F(\mathbf{x}^k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (23)$$

Iskanje optimalizirane rešitve poteka iterativno in velja, da je vrednost funkcije $F(\mathbf{x})$ v vsakem naslednjem koraku manjša:

$$F(\mathbf{x}^{k+1}) < F(\mathbf{x}^k) \quad (24)$$

Optimizacija se ustavi, ko razširjena namenska funkcija zasede svoj minimum znotraj predpisane natančnosti E :

$$\| \min F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{x}^*) \| < E \quad (25)$$

Vektor \mathbf{x}^* imenujemo vektor optimaliziranih projektnih parametrov.

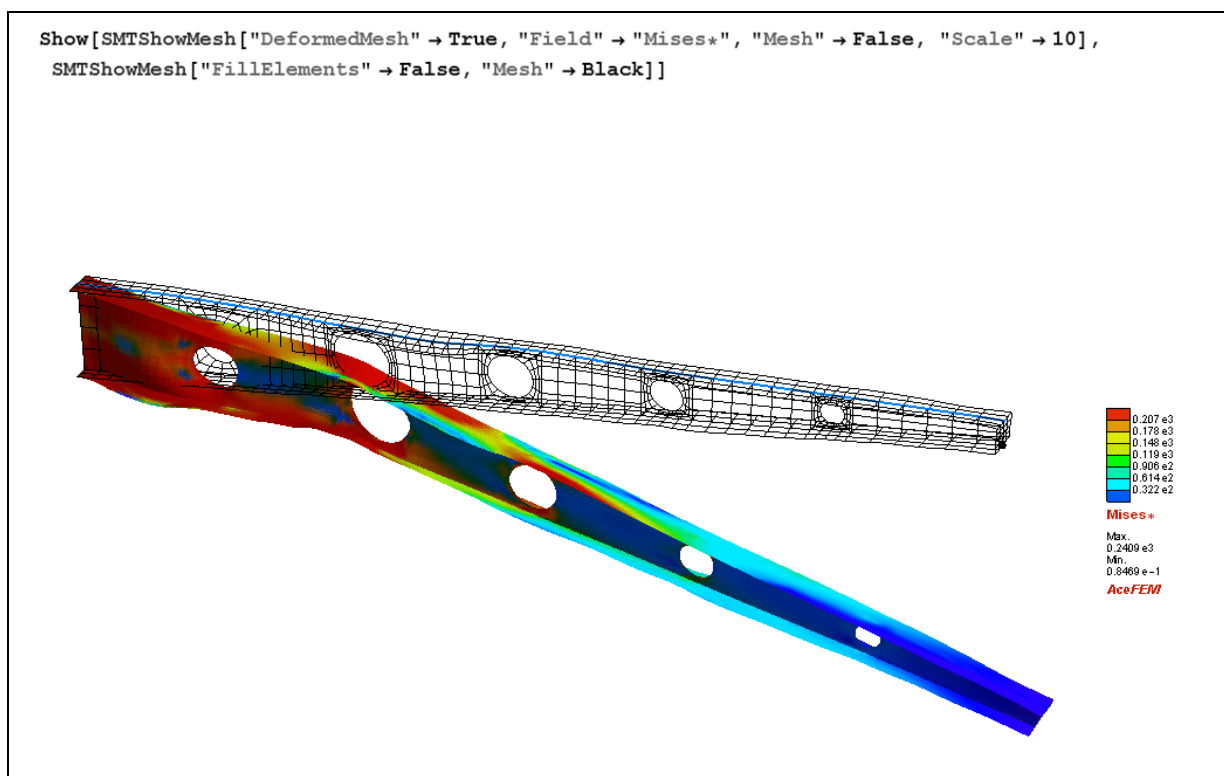
Program Mathematica ponuja različne metode za numerično reševanje problema minimuma funkcije. Mi smo uporabili kvazi-Newtonovo metodo, ki potrebuje le gradient funkcije v dani točki, preostali parametri, kot je npr. Hessova matrika, pa se izračunajo samodejno, aproksimativno znotraj metode.

Gradient iz občutljivostne analize določa smer iskanja stacionarne točke, za katero ne moremo vedeti ali je globalna ali lokalna. Da bi našli globalni minimum, bi morali izvesti optimizacijo za različne

začetne vrednosti projektnih parametrov in med optimaliziranimi rešitvami izbrati tisto, ki da najmanjšo vrednost razširjene namenske funkcije $F(\mathbf{x})$.

3.2.3 Rezultati optimizacije

Program *AceFEM* ponuja široko paleto možnosti za prikaz rezultatov direktne in občutljivostne analize numeričnega modela. Znotraj ukaza `SMTShowMesh[]` navedemo, katere lastnosti modela bodo prikazane – npr. porazdelitev napetosti po modelu, deformacije, legenda, izgled mreže...



Slika 20: Ukazni stavek ter grafični prikaz napetosti po Von Misesu na deformiranem numeričnem modelu.

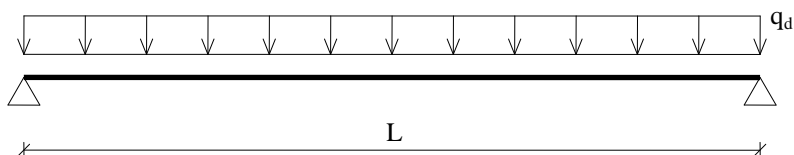
4 OPTIMIZACIJA

V diplomski nalogi se ukvarjamo z dimenzijsko optimizacijo nosilnih elementov z odprtini v stojini. Obravnavali smo tri različne primere: medetažni nosilec, konzolni nosilec in nosilec z izolirano odprtino. Prva dva primera sta optimalizirana na mejno obtežbo nosilnega elementa. V zadnjem primeru pa smo iskali optimalno obliko odprtine glede na lego v stojini prostoležečega nosilca pri pogoju velikosti površine. V vseh treh primerih so bili numerični modeli pripravljene po postopku, ki je podrobno predstavljen v predhodnem poglavju.

V fazi priprave numeričnega modela so se upoštevale materialne nelinearnosti (plastifikacija) in geometrijske nelinearnosti (stabilnost), prav tako se je z uklonsko analizo izračunalo polje začetne nadomestne nepopolnosti. Nato je sledila optimizacija primerov z gradientno metodo.

4.1 Medetažni nosilec

Večnadstropna poslovna stavba ima jekleno nosilno konstrukcijo. V medetažnem konstrukcijskem sklopu, nad katerim so prostori za pisarne, je potrebno dimenzionirati nosilec z razponom $L = 15$ m. Načrtovalci objekta so predvideli, da se v stojini nosilca izvedejo odprtine za nemoten prehod inštalacij.



Slika 21: Računski model medetažnega jeklenega nosilca

Nosilec dimenzioniramo na projektno obtežbo za mejno stanje nosilnosti:

$$q_d = q_{MSN} = 1.35 G + 1.5 Q = 150 \text{ kN/m} \quad (26)$$

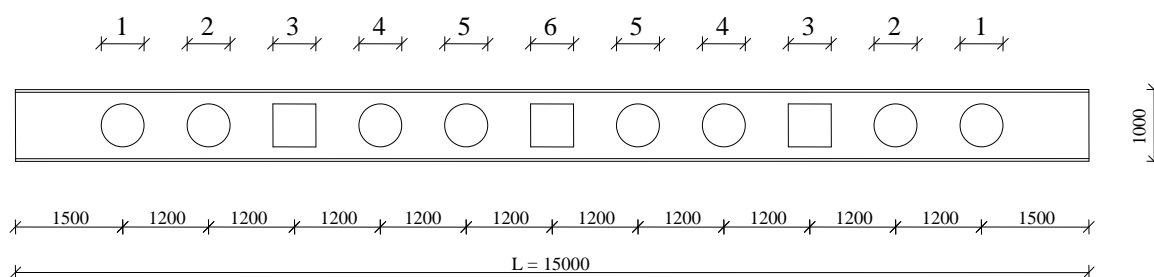
Material: S275

Robni pogoji:

- Nosilec je na obeh koncih podprt s členkasto podporo v sredini višine stojine.
- 7 bočnih podpor podpira zgornjo pasnico in so razporejene enakomerno po dolžini nosilca. Medsebojna razdalja med podporami je 250 cm.

4.1.1 Projektni parametri in geometrija nosilne konstrukcije

Predvideno je, da se v stojini naredi 11 odprtin, ki so enakomerno razporejene vzdolž razpona nosilca. Za prostoležeči nosilec, ki je obremenjen z enakomerno linijsko obtežbo, velja da so notranje sile (upogibni moment, prečne sile) razporejene simetrično glede na sredino razpona. Zato je določeno, da naj bo tudi geometrija odprtin simetrična glede na sredino nosilca. Tako 11 odprtin razvrstimo v šest skupin, kot je to prikazano na Sliki 22.



Slika 22: Pozicije in skupine odprtin v stojini nosilca ter začetna geometrija nosilca pred optimizacijo (v mm).

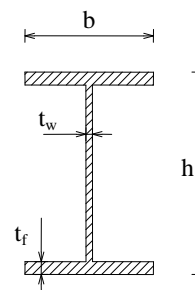
Izberemo začetni prerez z dimenzijami:

$$h = 1000 \text{ mm}$$

$$b = 300 \text{ mm}$$

$$t_f = 36 \text{ mm}$$

$$t_w = 19 \text{ mm}$$



Slika 23: Prečni prerez nosilca

Pri optimizaciji nosilca iščemo optimalne dimenzije odprtin v stojini in optimalno višino prečnega prereza nosilca. Skupno število projektnih parametrov, ki sodelujejo pri optimizaciji nosilca je 13 in so predstavljeni v Preglednici 3. Vsi projektni parametri, ki opisujejo odprtine, imajo enako začetno vrednost 300 mm, medtem ko ima projektni parameter za višino ϕ_1 začetno vrednost 1000 mm.

Preglednica 3: Skupine in lastnosti projektnih parametrov pri optimizaciji

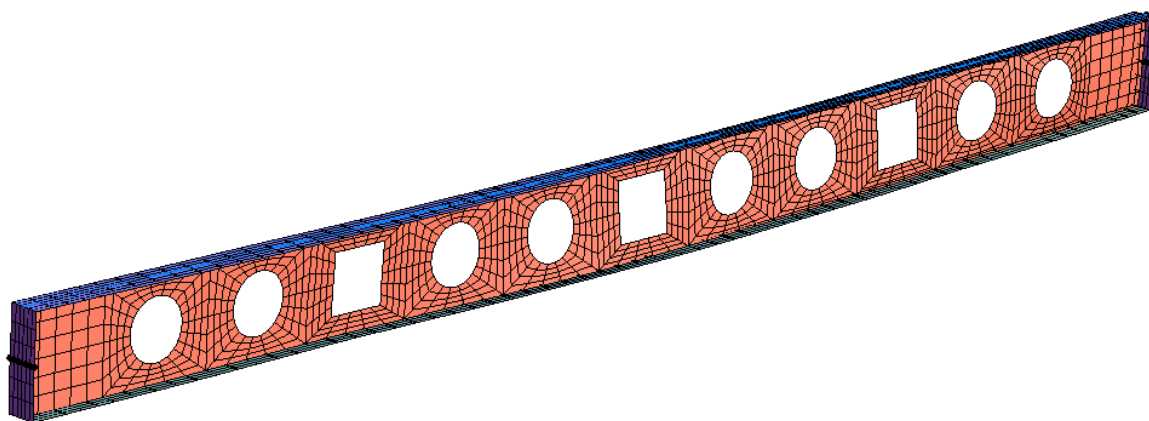
Skupina	Oblika odprtine	Projektni parametri	Oznaka	Začetna vrednost
-	-	Višina prečnega prereza	ϕ_1	1000 mm
1	Elipsa	Dolžina horizontalne polosi, dolžina vertikalne polosi	ϕ_2, ϕ_3	300 mm, 300 mm
2	Elipsa		ϕ_4, ϕ_5	
3	Pravokotnik		ϕ_6, ϕ_7	
4	Elipsa		ϕ_8, ϕ_9	
5	Elipsa		ϕ_{10}, ϕ_{11}	
6	Pravokotnik		ϕ_{12}, ϕ_{13}	

Pri medetažnem nosilcu izvedemo dve različni obliki odprtin, elipsoidno in pravokotno, in jih razporedimo vzdolž stojine nosilca tako kot na Sliki 22. Projektni parametri za dimenzije odprtin opisujejo dolžine polosi (Slika 24). Središče oblike odprtine je fiksno na sredini višine stojine.

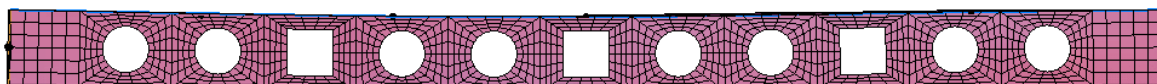


Slika 24: Shematični prikaz projektnih parametrov iz skupine 1 (elipsa) in skupine 3 (pravokotnik)

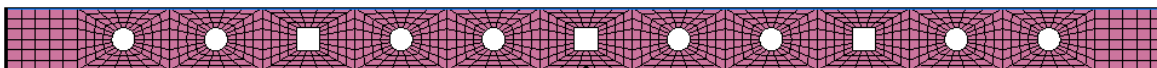
Slika 25 prikazuje začetno stanje numeričnega modela medetažnega nosilca z začetno nepopolnostjo, ki smo jo izračunali kot vsoto prvih šest uklonskih oblik (Slika 16).



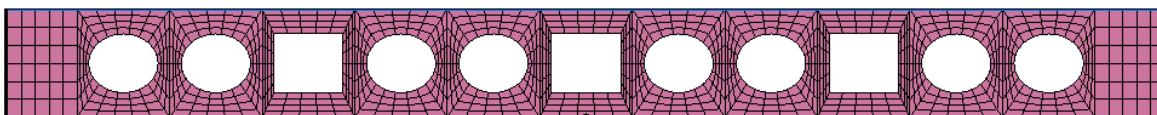
Slika 25: Numerični model nosilca z začetnimi vrednostmi projektnih parametrov



Slika 26: Numerični model nosilca z začetnimi vrednostmi projektnih parametrov v narisu, $h_{\text{init}} = 1000$ mm.



Slika 27: Numerični model nosilca z minimalnimi dopustnimi vrednostmi projektnih parametrov, $h_{\text{min}} = 820$ mm.



Slika 28: Numerični model nosilca z maksimalnimi dopustnimi vrednostmi projektnih parametrov, $h_{\text{max}} = 1300$ mm.

Preglednica 4: Dopustne vrednosti projektnih parametrov ϕ_i

Projektni parameter	Minimalna vrednost	Maksimalna vrednost
ϕ_1	820 mm	1300 mm
$\phi_2, \phi_4, \phi_6, \phi_8, \phi_{10}, \phi_{12}$	180 mm	350 mm
$\phi_3, \phi_5, \phi_7, \phi_9, \phi_{11}, \phi_{13}$	180 mm	525 mm

4.1.2 Namenska funkcija

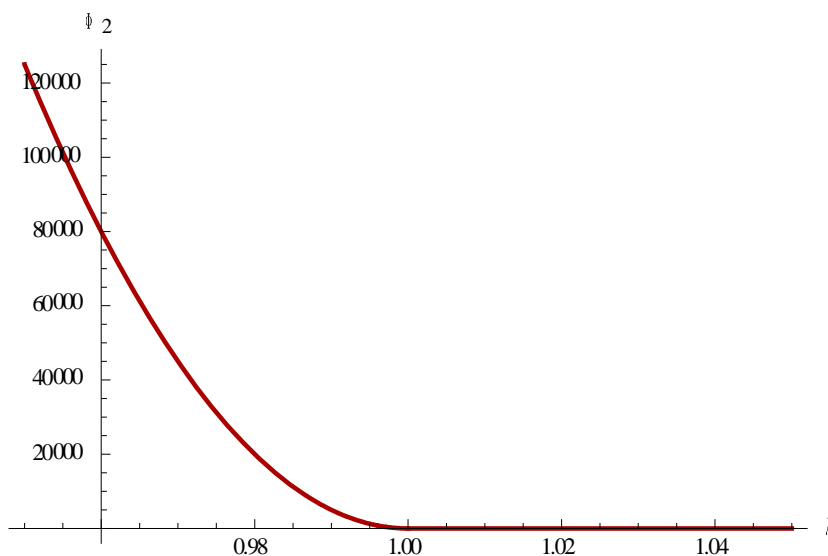
Glavni cilj dimenzijske optimizacije medetažnega nosilca je zmanjšati volumen nosilca pri pogoju zadostne nosilnosti. Zato je vodilni člen namenske funkcije pravzaprav funkcija volumna konstrukcije v odvisnosti od vrednosti projektnih parametrov:

$$\Phi_1 = 10^{-5} \cdot \text{volumen}(x_i) \quad (27)$$

Volumen konstrukcije pri trenutnem vektorju projektnih parametrov x_i je pomnožen z vrednostjo 10^{-5} z namenom, da so prispevki projektnih parametrov k gradientu namenske funkcije istega velikostnega razreda.

Drugi del namenske funkcije pa tvorijo kazenske funkcije (glej poglavje 3.2.2.1). Prva kazenska funkcija se nanaša na nosilnost, ki jo mora nosilec z odprtini v stojini zagotavljati. Nosilnost nosilca je izražena s faktorjem obtežbe λ in mora izpolnjevati pogoj:

$$\Phi_2 : \lambda(x_i) \geq \lambda_u, \lambda_u = 1.0 \quad (28)$$



Slika 29: Kazenska funkcija Φ_2

Potrebno je izraziti še geometrijske zahteve glede vrednosti projektnih parametrov. V prvi vrsti so to dopustne minimalne in maksimalne vrednosti za projektne parametre:

$$\Phi_3 : \phi_i \geq \phi_{min} \quad (29)$$

$$\Phi_4 : \phi_i \leq \phi_{max} \quad (30)$$

Dodatni pogoj opisuje oblikovno zahtevo, da je razdalja med težiščnico pasnice in najbližjo točko na robu odprtine večja ali enaka 50 mm.

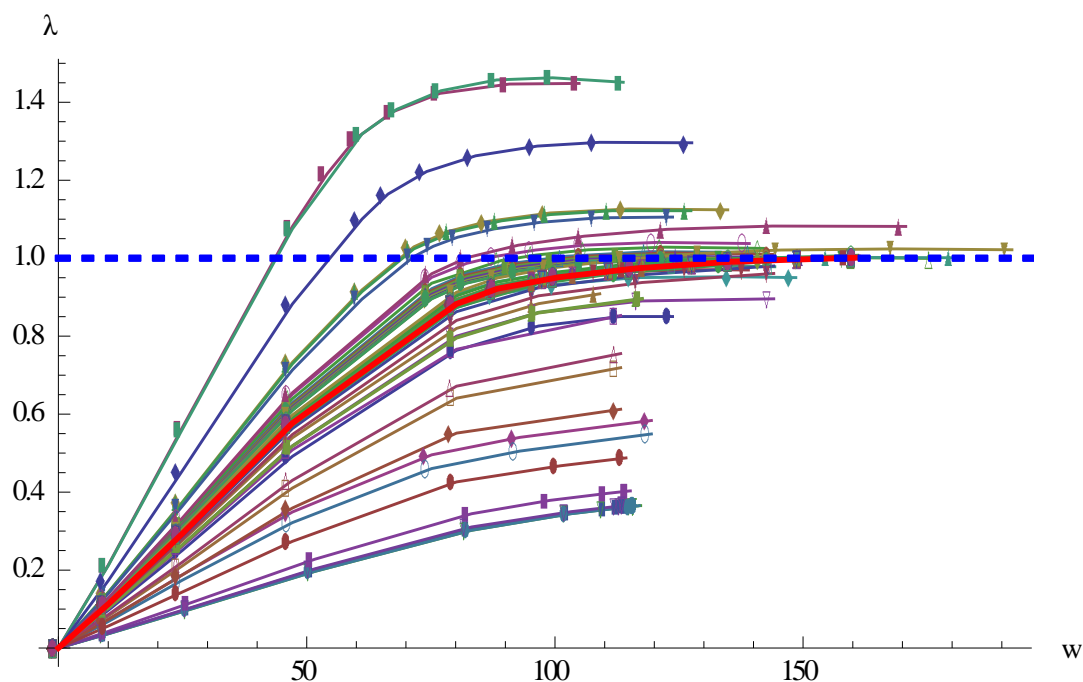
$$\Phi_5 : \phi_i \leq 0.5 (h - t_f) - 50 \text{ mm}, \text{ za } i = \{3, 5, 7, 9, 11, 13\} \quad (31)$$

Pri optimizaciji medetažnega nosilca tako iščemo minimum namenske funkcije Φ :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5 \quad (32)$$

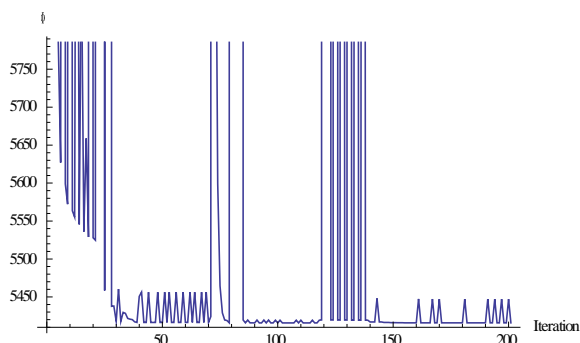
4.1.3 Rezultati optimizacije

Proces iskanja minimuma je po 201 koraku računanja izračunal optimalni vektor projektnih parametrov \mathbf{x}^* . Znotraj posamezne iteracije optimizacije sta se izvedli direktna in občutljivostna analiza numeričnega modela pri trenutnem vektorju projektnih parametrov \mathbf{x}^k . Na Sliki 30 je prikazan diagram, ki prikazuje povzetek procesa optimizacije medetažnega nosilca z odprtinami v stojini. Vsak graf predstavlja ravnotežno pot modela za en vektor projektnih parametrov \mathbf{x}^k . Med procesom optimizacije je algoritem preverjal različne vektorje projektnih parametrov, dokler ni izračunal optimalno rešitev, katere graf ravnotežne poti je izrisan z odebeljeno rdečo črto. Mejna nosilnost optimaliziranega prostoležečega nosilca je določena s kriterijem maksimalne dopustne deformacije.

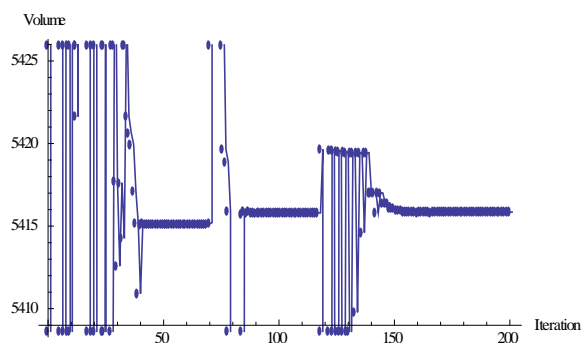


Slika 30: Povzetek procesa optimizacije medetažnega nosilca z odprtinami v stojini

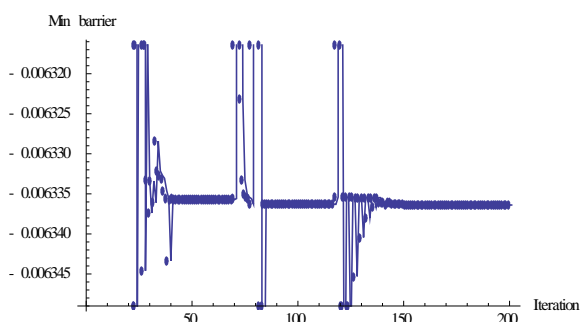
Med rezultate optimizacije sodijo tudi diagrami, ki prikazujejo, kako so se spreminjale vrednosti med procesom optimizacije (Slika 31 – Slika 34). Na mestih, kjer so grafi nezvezni, pomeni, da so vrednosti funkcij zelo velike (reda 10^{12}). Graf razširjene namenske funkcije Φ se intenzivno spreminja v prvih 30 iteracijah, kjer so se vrednosti projektnih parametrov spreminjale okoli minimalne dopustne meje, temu primerno je sledilo naraščanje vrednosti kazenske funkcije Φ_3 . Tudi prostornina konstrukcije je bila zelo velika – očitno je, da so se v prvih iteracijah zmanjšale površine odprtin in povečala višina prečnega prereza. Na intervalu od 30. do 70. iteracije je gradientna metoda iskala optimalno rešitev znotraj območja dopustnih rešitev. Med 70. in 85. korakom optimizacije so vrednosti razširjene namenske funkcije ponovno narastli in se do 120. iteracije umirili okoli vrednosti 5400. Od 120. iteracije do 140. iteracije so se zopet spreminjale vrednosti projektnih parametrov izven dopustnih meja, nato se graf razširjene namenske funkcije umiri vse do konca optimizacije, kar nakazuje, da je gradientna metoda blizu stacionarne točke in išče rešitveni vektor projektnih parametrov znotraj predpisane natančnosti \mathbf{x}^* .



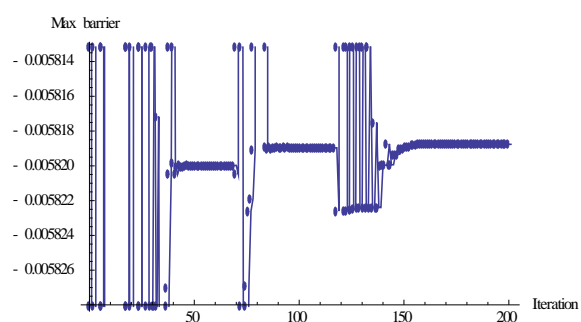
Slika 31: Spreminjanje vrednosti razširjene namenske funkcije Φ med optimizacijo (201 iteracija)



Slika 32: Graf spreminjanja vrednosti člena Φ_1 (volumen) med optimizacijo



Slika 33: Graf spreminjanja vrednosti člena Φ_3 (minimalna dopustna meja projektnih parametrov) med optimizacijo

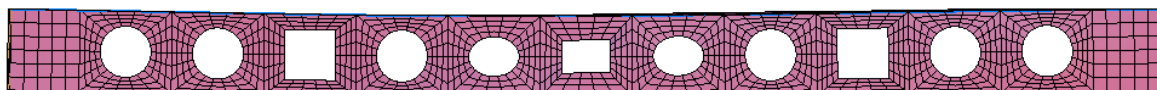


Slika 34: Graf spreminjanja vrednosti člena Φ_4 (maksimalna dopustna meja projektnih parametrov) med optimizacijo

Začetne in optimalizirane vrednosti projektnih parametrov so predstavljene v Preglednici 5. Prostoležeči nosilec z začetnimi vrednostmi projektnih parametrov ϕ_i dosega približno 85% zahtevane nosilnosti. V primerjavi z začetnimi vrednostmi sta se zmanjšala projektna parametra ϕ_{11} in ϕ_{13} , ki sta dolžini vertikalnih polosi v odprtinah v sredini razpona nosilca (skupina 5 in 6). Preostale projektne vrednosti pa so se povečale. Prvi dve odprtini sta ohranili krožno obliko. Pravokotnik iz skupine 3 ima manjšo višino, vendar nudi večjo prosto površino, v primerjavi s sosednjima odprtinama iz skupin 2 in 4. Nadalje, višina odprtin se zmanjšuje proporcionalno s približevanjem sredini razpona nosilca, kar nakazuje, da se je razvil upogibni porušni mehanizem.

Preglednica 5: Rezultati optimizacije medetažnega nosilca z odprtini v stojini

Skupina	Projektni parameter	Začetna vrednost [mm]	Optimalizirana vrednost [mm]	Površina odprtine [cm ²]
-	ϕ_1	1000	1086.23	-
1	ϕ_2	300	332.64	3475.10
	ϕ_3	300	332.54	
2	ϕ_4	300	332.59	3472.70
	ϕ_5	300	332.36	
3	ϕ_6	300	334.35	4356.05
	ϕ_7	300	325.71	
4	ϕ_8	300	333.49	3522.33
	ϕ_9	300	336.20	
5	ϕ_{10}	300	329.79	2650.15
	ϕ_{11}	300	255.79	
6	ϕ_{12}	300	313.62	2664.27
	ϕ_{13}	300	212.38	

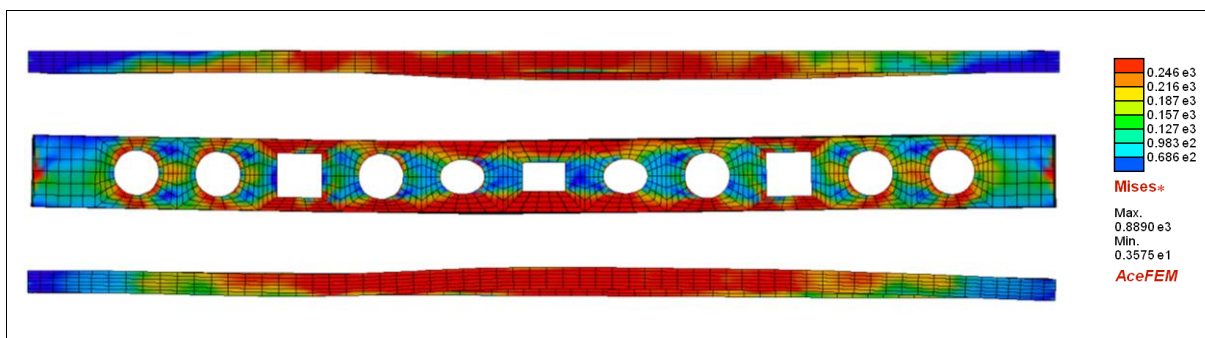


Slika 35: Optimaliziran medetažni nosilec z odprtini v stojini.

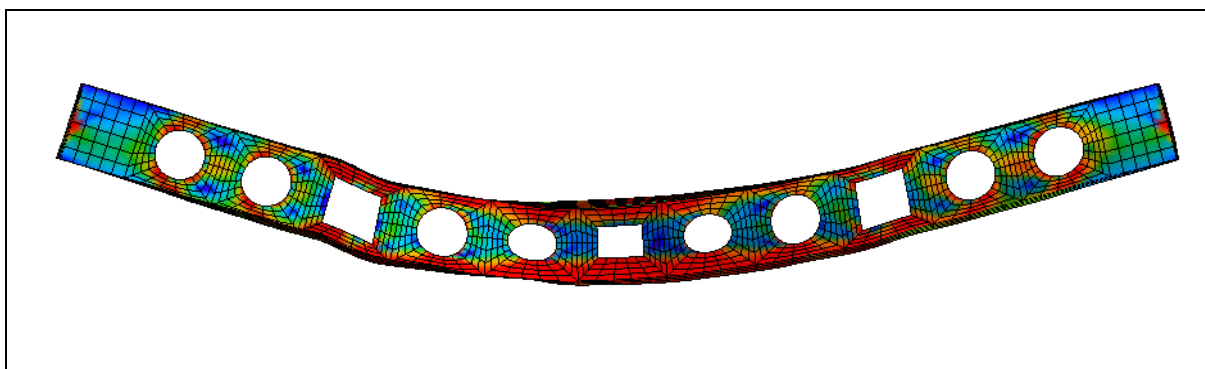
Pri navadnem prostoležečem nosilcu s kompaktnim prečnim prerezom se v mejnem stanju v sredini razpona razvije plastični členek. Podobno se zgodi tudi pri optimaliziranem medetažnem nosilcu z odprtini v stojini. Torej, višine odprtin so se spreminjale v skladu z upogibnim porušnim

mehanizmom. Bolj kot dolžina odprtine je bila pomembna višina odprtine oz. površina T-prerezov nad in pod odprtino, saj je v sredini razpona upogibni moment največji.

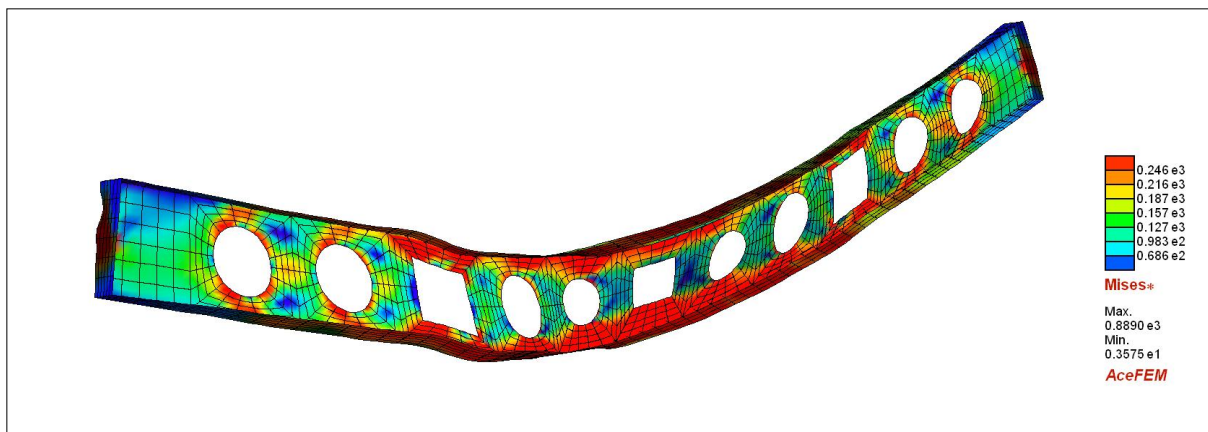
Razporeditev napetosti po von Misesu v optimaliziranem nosilcu (Slika 36) in deformacijska oblika (Sliki 37 in 38) dokazujeta, da se je konstrukcija porušila zaradi formiranja plastičnega členka. Spodnji rob (T-prerezi pod odprtino) srednjega dela nosilca je v celoti plastificiran do spodnjega roba odprtin (plastifikacija natezne cone). V tlačni coni istega območja razpona pa so se plastificirali zgornja pasnica in en del stojine v T-prerezu. V okolici pravokotnih odprtin, ki so bližje podporam, lahko opazimo, da so se razvili plastični členki značilni za Vierendeel mehanizem. To lahko pripišemo strižnim silam, ki so tik nad podporo največje in se s približevanjem sredini razpona zmanjšujejo.



Slika 36: Porazdelitev napetosti po Von Misesu v optimaliziranem nosilcu z odprtinami v stojini (ZGORAJ: zgornja pasnica, V SREDINI: stojina, SPODAJ: spodnja pasnica)



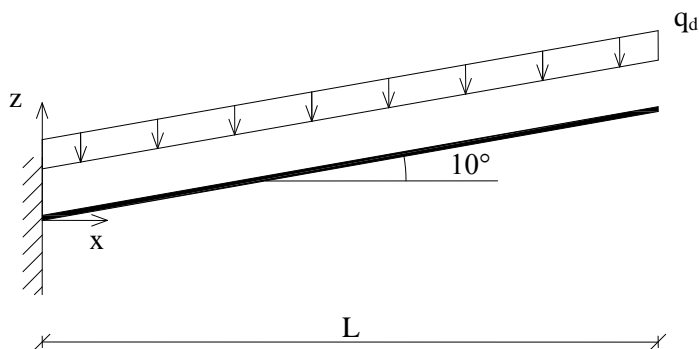
Slika 37: Deformirana oblika optimaliziranega nosilca v narisu (pomiki so 10-krat povečani) in porazdelitev napetosti po von Misesu.



Slika 38: Deformirana oblika optimaliziranega nosilca (pomiki so 10-krat povečani) in porazdelitev napetosti po von Misesu.

4.2 Konzolni nosilec za nadstrešek

Na parkirišču je predvidena izvedba nadstreška, ki ga podpirajo jekleni konzolni nosilci. Nadstrešek s tlorisno dolžino $L = 6$ m ima naklon 10° . Zato mora imeti tudi zgornja površina konzolnega nosilca enak naklon. Načrtovalci so tudi predvideli, da naj se zaradi večje estetske vrednosti izvedejo odprtine v stojini konzole. Vprašanje je, koliko odprtin naj se naredi, da bo poraba materiala čim manjša. Odprtine naj imajo obliko kroga.



Slika 39: Računski model jeklene konzole

Konzolni nosilec dimenzioniramo na projektno obtežbo za mejno stanje nosilnosti, kjer je sneg prevladujoča koristna obtežba:

$$q_d = q_{MSN} = 1.35 G + 1.5 S_k = 30 \text{ kN/m} \quad (33)$$

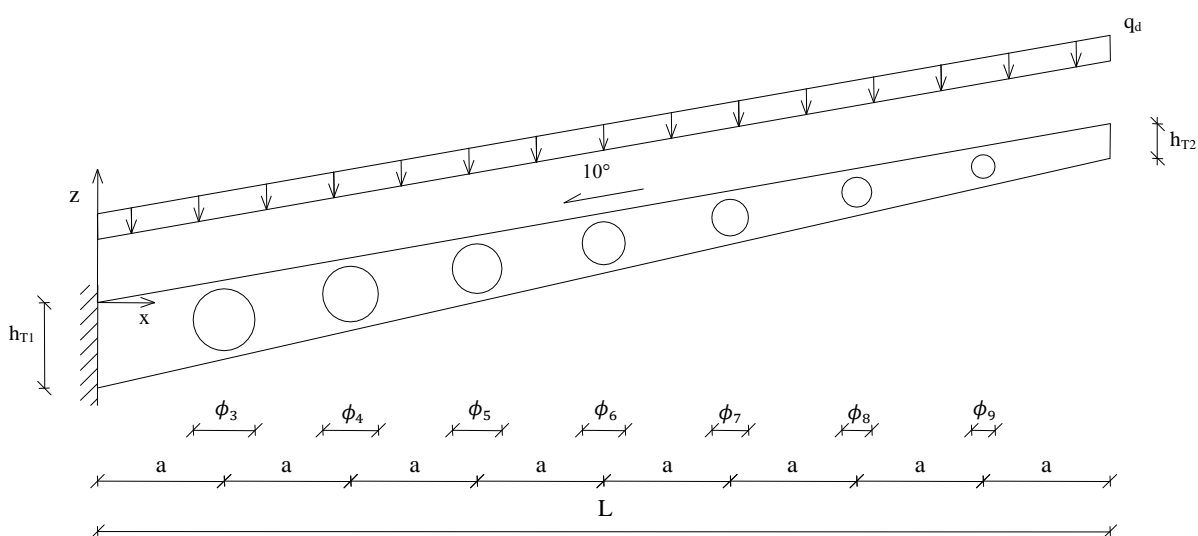
Material: S235

Robni pogoji:

- Polno vpetje na začetku nosilca.
- 5 bočnih podpor, na medsebojni razdalji 150 cm, podpira zgornjo in spodnjo pasnico.

4.2.1 Projektni parametri in geometrija nosilne konstrukcije

Optimalizirali so se konzolni nosilci z različnim številom krožnih odprtin v stojini. Odprtine so enakomerno razporejene vzdolž nosilca in velja, da težišče odprtine sovpada s središčem višine stojine. Obravnavamo primere s 4, 5, 6, 7, 8 in 9 odprtini. Vsaka odprtina je določena s posebnim projektnim parametrom, ki opisuje premer kroga. Dodatno vpeljemo dva dodatna projektna parametra ϕ_1 in ϕ_2 . To sta višina prečnega prereza ob vpetju konzole h_{T1} in višina prečnega prereza na previsnem koncu h_{T2} . V Preglednici 6 so podrobneje opisani uporabljeni projektni parametri za posamezen primer konzole in izhodiščne vrednosti le-teh.



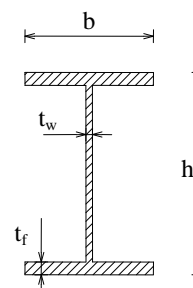
Slika 40: Geometrija konzole s 7 odprtini v stojini in projektni parametri

Izberemo začetni prerez z dimenzijami:

$$b = 180 \text{ mm}$$

$$t_f = 13.5 \text{ mm}$$

$$t_w = 8.6 \text{ mm}$$

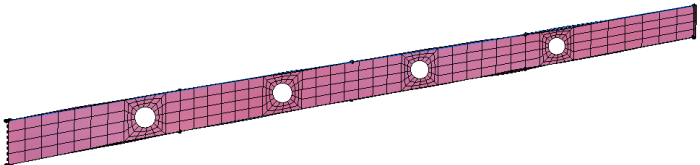
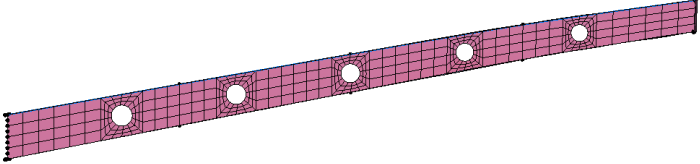
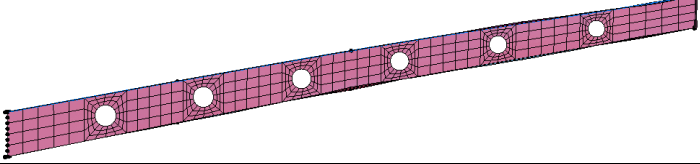
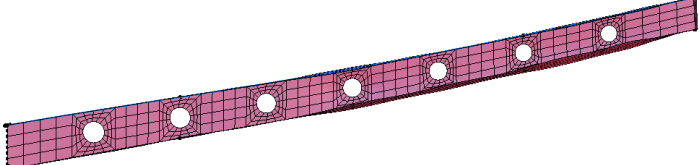
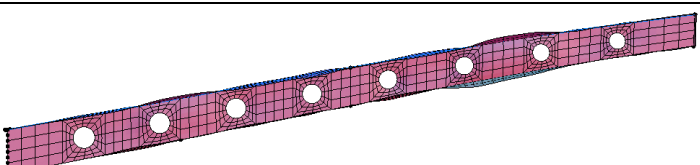
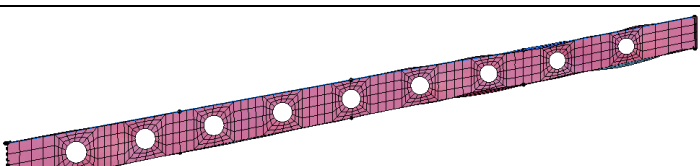


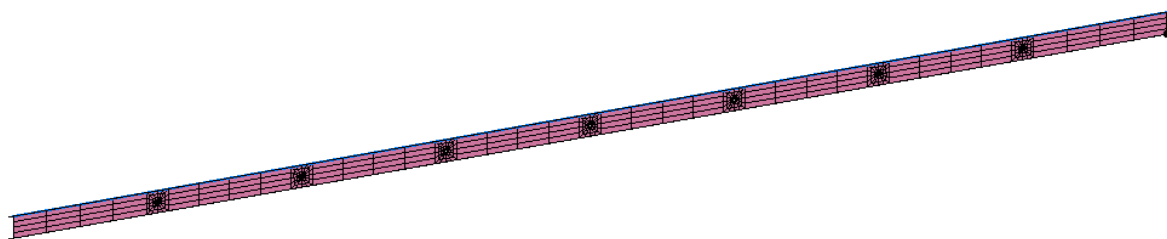
Slika 41: Prečni prerez nosilca

Preglednica 6: Primeri optimizacij in pripadajoči projektni parametri ϕ_i
Prva dva projektna parametra ϕ_1 in ϕ_2 sta rezervirana za višini h_{T1} in h_{T2}

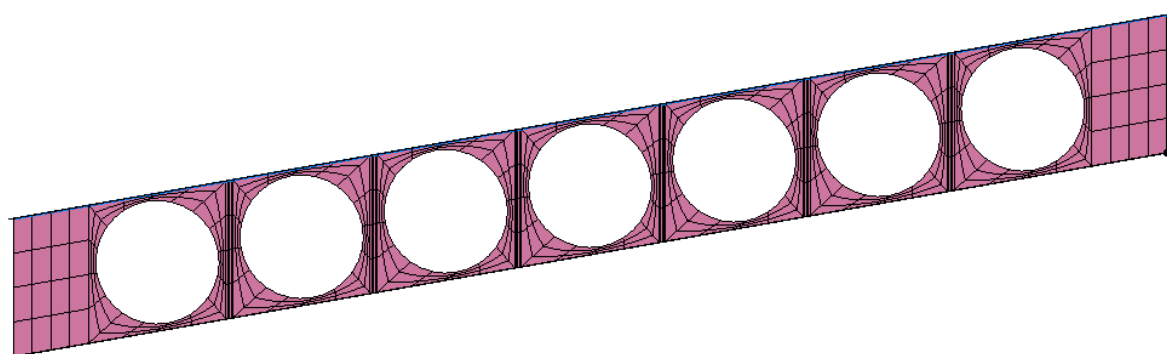
Primer	Število odprtin	Projektni parametri	Oznake	Začetne vrednosti [mm]
-	-	h_{T1}	ϕ_1	400
-	-	h_{T2}	ϕ_2	280
1	4	premeri odprtin	$\phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6$	158.5
2	5		$\phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6, \phi_7$	
3	6		$\phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6, \phi_7, \phi_8$	
4	7		$\phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6, \phi_7, \phi_8, \phi_9$	
5	8		$\phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6, \phi_7, \phi_8, \phi_9, \phi_{10}$	
6	9		$\phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6, \phi_7, \phi_8, \phi_9, \phi_{10}, \phi_{11}$	

Preglednica 7: Numerični modeli konzolnih nosilcev z začetnimi vrednostmi projektnih parametrov ϕ_i

Št. odprtin	Numerični model	Razdalja med središči odprtin a
4		1200 mm
5		1000 mm
6		857 mm
7		750 mm
8		667 mm
9		600 mm



Slika 42: Numerični model konzole s 7 odprtinami z minimalnimi vrednostmi projektnih parametrov, $h_{\min} = 100$ mm.



Slika 43: Numerični model konzole s 7 odprtinami z maksimalnimi vrednostmi projektnih parametrov, $h_{\max} = 700$ mm.

Vrednosti projektnih parametrov omejimo s t.i. minimalnimi in maksimalnimi dopustnimi vrednostmi, ki jih upoštevamo pri formaciji kazenskih funkcij za optimizacijo. Ker sta višini na začetku in koncu konzole variabilni, so premeri odprtin izraženi v obliki deleža višine prečnega prereza h_{Ti} na mestu središča odprtine. Višina prečnega prereza je razdalja med težiščnicama zgornje in spodnje pasnice.

Preglednica 8: Dopustne vrednosti projektnih parametrov ϕ_i

Projektni parameter	Minimalna vrednost	Maksimalna vrednost
ϕ_1	100 mm	700 mm
ϕ_2	100 mm	700 mm
$\phi_3 - \phi_{11}$	$0.2 h_{Ti}$	$0.85 h_{Ti}$

4.2.2 Namenska funkcija

Konzolne nosilce optimaliziramo tako, da želimo doseči čim manjši volumen nosilca pri pogoju zadostne nosilnosti. Prvi člen namenske funkcije je funkcija volumna konstrukcije v odvisnosti od vrednosti projektnih parametrov:

$$\Phi_1 = 10^{-5} \cdot \text{volumen}(\mathbf{x}_i)$$

Volumen konstrukcije pri trenutnem vektorju projektnih parametrov \mathbf{x}_i je pomnožen z vrednostjo 10^{-5} z namenom, da so prispevki projektnih parametrov k gradientu namenske funkcije istega velikostnega razreda.

Pogoj zahtevane nosilnosti, ki jo morajo obravnavani konzolni nosilci izpolniti, zapišemo v obliki kazenske funkcije (glej poglavje 3.2.2.1), v kateri je nosilnost perforirane konzole izražena s faktorjem obtežbe λ :

$$\Phi_2 : \lambda(\mathbf{x}_i) \geq \lambda_u, \lambda_u = 1.0$$

Graf kazenske funkcije Φ_2 je prikazan na Sliki 29.

Dodatni kazenski funkciji opisujeta območje dopustnih vrednosti, znotraj katerih se lahko spreminjajo vrednosti projektnih parametrov:

$$\Phi_3 : \phi_i \geq \phi_{min}$$

$$\Phi_4 : \phi_i \leq \phi_{max}$$

Pri optimizaciji posameznega konzolnega nosilca z gradientno metodo rešujemo problem minimuma namenske funkcije Φ :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 \tag{34}$$

4.2.3 Rezultati optimizacije

Izvedli smo optimizacijo na mejno obtežbo šest različnih konzol, ki se razlikujejo v številu odprtin. Rezultati optimizacij so predstavljeni v Preglednici 9 in grafično prikazani v Preglednici 10. Vsi začetni primeri konzol imajo nosilnost okoli 55% zahtevane nosilnosti, zato je bilo pričakovati, da se bodo vsaj višine prečnih prerezov povečale.

Glede na rezultate v Preglednici 9 so se v vseh primerih povečale višine prečnega prereza ob vpetju konzole, na previsnem koncu pa se je višina prečnega prereza zmanjšala na najmanjšo dovoljeno vrednost, to je 150 mm, kar je povsem pričakovano, saj so na previsnem koncu notranje sile najmanjše.

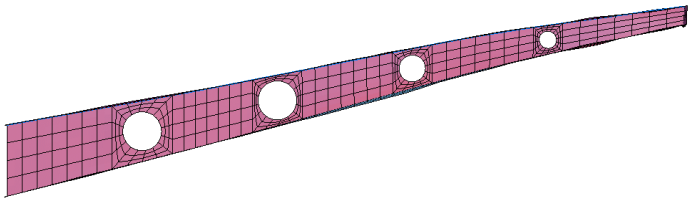
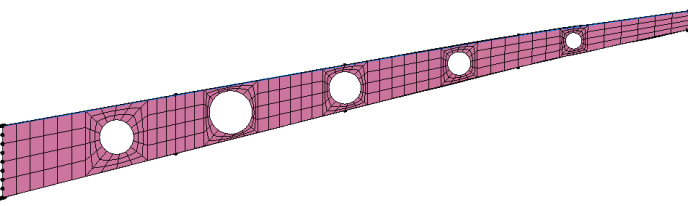
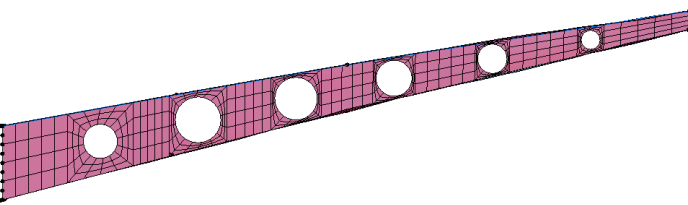
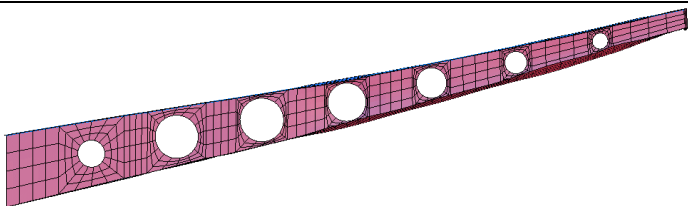
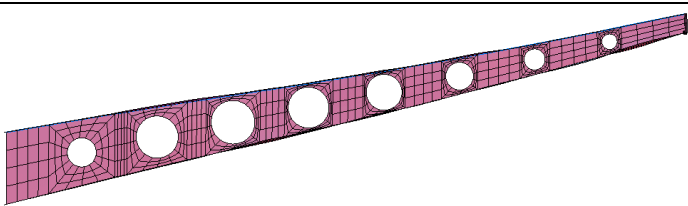
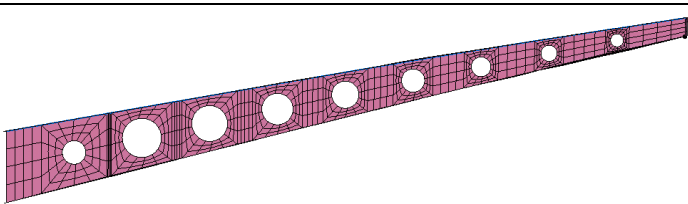
Preglednica 9: Rezultati optimizacije različnih primerov konzolnih nosilcev z odprtini v stojini

Primer	1	2	3	4	5	6
Št. odprtin	4	5	6	7	8	9
Razmak [mm]	1200	1000	857	750	667	600
ϕ_1 [mm]	615.2	610.3	631.4	620.1	622.2	615.8
ϕ_2 [mm]	150.0	150.0	150.0	150.0	150.0	150.0
ϕ_3	0.64	0.55	0.52	0.41	0.44	0.36
ϕ_4	0.78	0.80	0.79	0.74	0.70	0.65
ϕ_5	0.67	0.71	0.85	0.84	0.81	0.65
ϕ_6	0.60	0.64	0.85	0.85	0.85	0.63
ϕ_7	-	0.59	0.85	0.79	0.85	0.61
ϕ_8	-	-	0.71	0.70	0.77	0.59
ϕ_9	-	-	-	0.63	0.69	0.57
ϕ_{10}	-	-	-	-	0.64	0.56
ϕ_{11}	-	-	-	-	-	0.55
V_{opt} [dm ³]	48.04	32.72	32.18	31.69	31.10	31.93
w_{ult} [mm]	121.6	133.1	102.9	117.2	116.7	126.8
Št. korakov	370	481	452	524	417	285

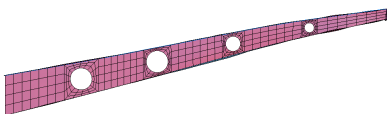
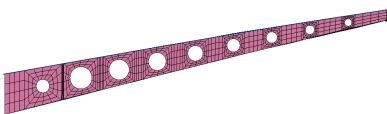
Če podrobneje pogledamo velikosti krožnih odprtin v stojini nosilnega elementa, lahko opazimo, da se odprtine v določenih primerih ne zmanjšujejo enakomerno proti previsu konzole. V 1. primeru se odprtine zmanjšujejo premosorazmerno z višino stojine. V 2. primeru pa je velikost odprtine pri vpetju manjša od sosednje odprtine. To je še toliko bolj izrazito v preostalih primerih, kjer je prva odprtina manjša od druge odprtine po vrsti, vse nadaljne odprtine pa se zmanjšujejo premosorazmerno z višino stojine. V 3. in 5. primeru odprtine, ki so locirane v območju sredine razpona, zavzemajo maksimalne

dopustne vrednosti (t.j. 85% višine stojine). Če odmislimo prve odprtine, ki so blizu vpetja, imajo preostale odprtine v prvih petih primerih premer nad 60% višine stojine. V primeru z 9 odprtinami premeri odprtin dosegajo velikosti od 55% do 65% višine stojine, kar kaže na to, da odprtine vplivajo ena na drugo in da je optimalno število odprtin omejeno.

Preglednica 10: Grafični prikaz rezultatov optimizacije za posamezne primere

Št. odprtin	Optimaliziran model
4	
5	
6	
7	
8	
9	

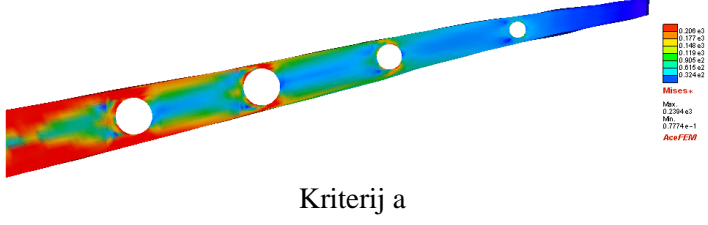
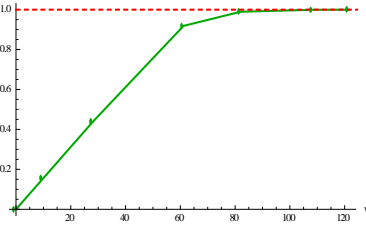
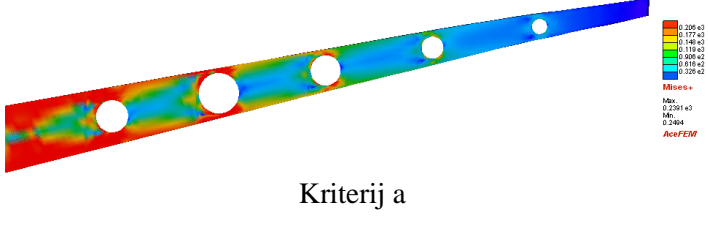
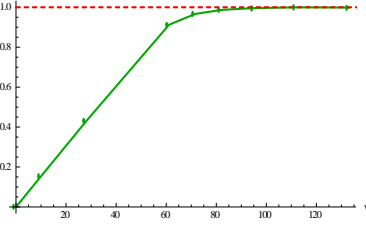
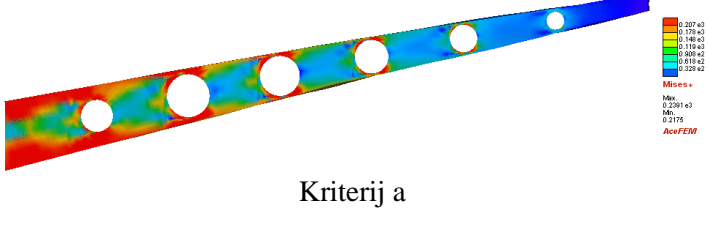
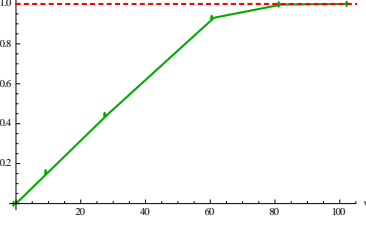
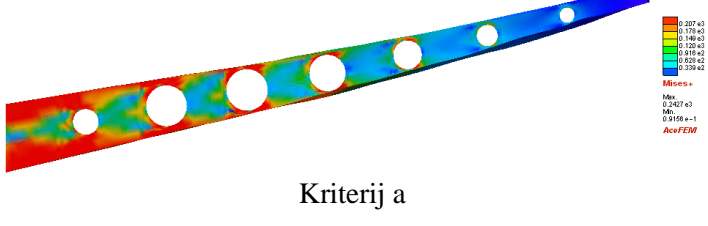
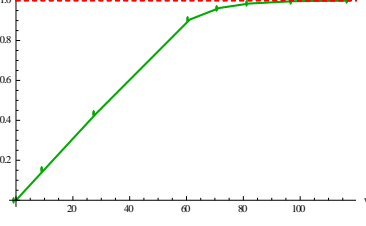
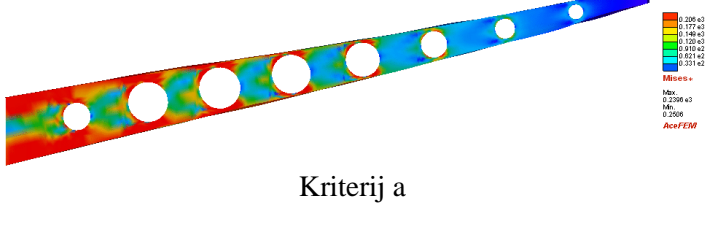
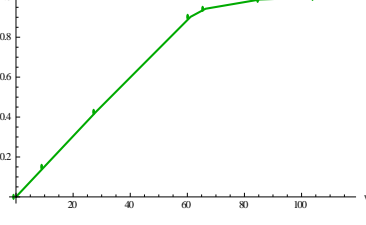
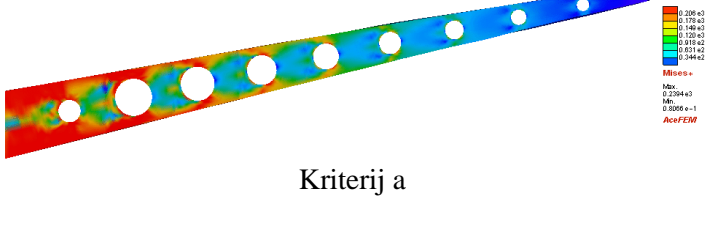
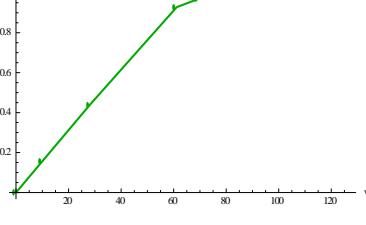
Preglednica 11: Primerjava optimaliziranih modelov konzol s 4 in 9 odprtinami v stojini

Primer				
Št. odprtin	4		9	
Razmak [mm]	1200		600	
h_{T1} [mm]	615.2		615.8	
h_{T2} [mm]	150.0		150.0	
Lokacija odprtine ⁸ [mm]	Delež višine stojine	Optimaliziran premer	Delež višine stojine	Optimaliziran premer
600	-		0.36	203.6
1200	0.64	334.1	0.65	338.1
1800	-		0.65	308.5
2400	0.78	333.3	0.63	268.9
3000	-		0.61	232.1
3600	0.67	225.8	0.59	197.8
4200	-		0.57	165.8
4800	0.60	145.0	0.56	135.7
5400	-		0.55	107.3
V_{opt} [dm ³]	48.04		31.93	

Zanimiva sta modela konzol s 4 in 9 odprtinami v stojini, ker imata 4 odprtine na isti lokaciji. Obe optimalizirani konzoli imata podobni velikosti višin ob vpetju in na previsnem koncu. Nosilec z 9 odprtinami ima za 34% manjšo prostornino, kakor konzola s 4 odprtinami. Primerjava velikosti odprtin, ki so v obeh primerih enako oddaljene od vpetja konzole, pokaže, da so odprtine v primeru z 9 odprtinami manjše, kakor v primeru s 4 odprtinami. Največja razlika 15 % je pri odprtini, ki je 2400 mm oddaljena od vpete podpore. Pri konzoli z več odprtinami je dolžina polnega dela dvakrat manjša, zato je vpliv sosednjih odprtin toliko večji na nosilnost konstrukcije oz. velikost sosednjih odprtin.

⁸ Lokacija odprtine glede na oddaljenost od vpete podpore.

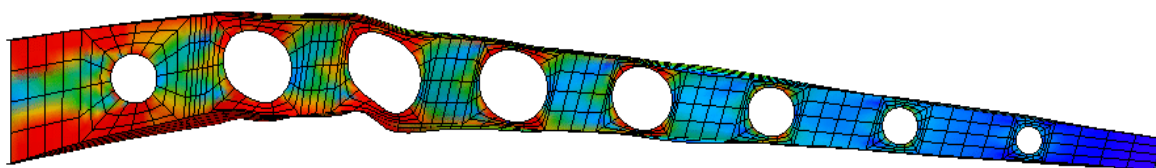
Preglednica 12: Grafični prikaz rezultatov optimizacije za posamezne primere

št. od	Optimaliziran model	Diagram obtežba-pomik
4	 <p style="text-align: center;">Kriterij a</p>	
5	 <p style="text-align: center;">Kriterij a</p>	
6	 <p style="text-align: center;">Kriterij a</p>	
7	 <p style="text-align: center;">Kriterij a</p>	
8	 <p style="text-align: center;">Kriterij a</p>	
9	 <p style="text-align: center;">Kriterij a</p>	

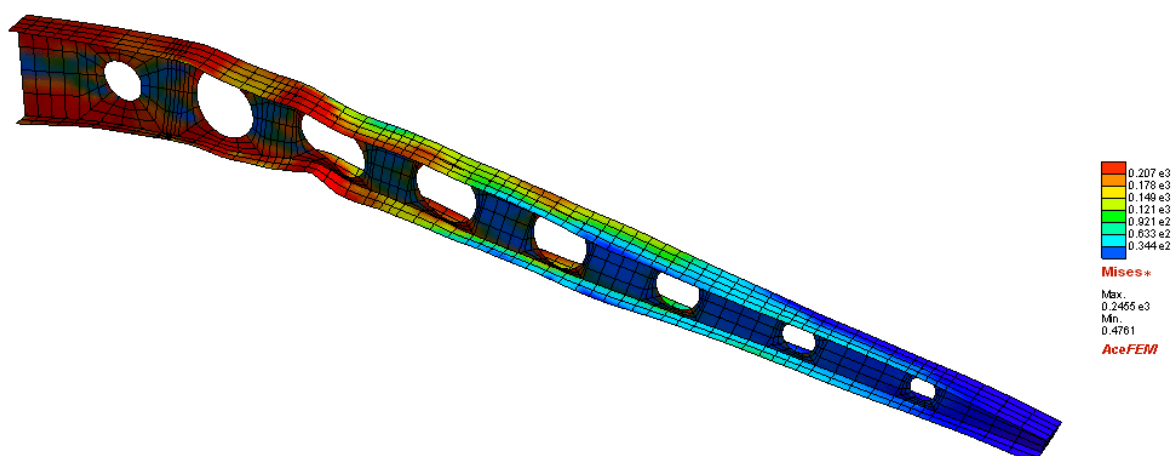
Porazdelitev notranjih sil (Preglednica 12) v nosilni konstrukciji potrjuje, da so največje napetosti v območju ob podpori. Prečni prerez v območju vpetja ni v celoti plastificiran, kot bi to želeli, ampak se med vpetjem in prvo odprtino, ustvari območje zmanjšanih napetosti v pasu v višini odprtine. V okolici odprtin, ki so locirane v prvi polovici razpona, je prišlo do značilne plastifikacije na koncih T-območij nad in pod odprtino, kar pomeni, da se je na tistih mestih razvil Vierendeel mehanizem.

V vseh primerih je mejno stanje modela določeno s prvim kriterijem mejne nosilnosti, to je z limitno točko ravnotežne poti (kriterij a).

Pričakovati je, da se bo premosorazmerno z večanjem števila odprtin manjšal tudi volumen nosilnega elementa. Po rezultatih sodeč temu ni čisto tako. Volumen nosilca (Preglednica 9) se z večanjem števila odprtin sicer zmanjšuje, vendar se zaporedje ustavi pri primeru z 9 odprtini, kjer je vpliv sosednjih odprtin zaradi krajše dolžine polnega dela stojine precej večji, kot v preostalih primerih. Odgovor na uvodno vprašanje, kateri optimalizirani primer porabi najmanj materiala, je konzolni nosilec z 8 odprtini, ki ima prostornino 31.10 dm^3 .



Slika 44: Deformirana oblika numeričnega modela konzole z 8 odprtini v mejnem stanju (pomiki so 10-krat povečani) in porazdelitev napetosti po von Misesu v narisu.



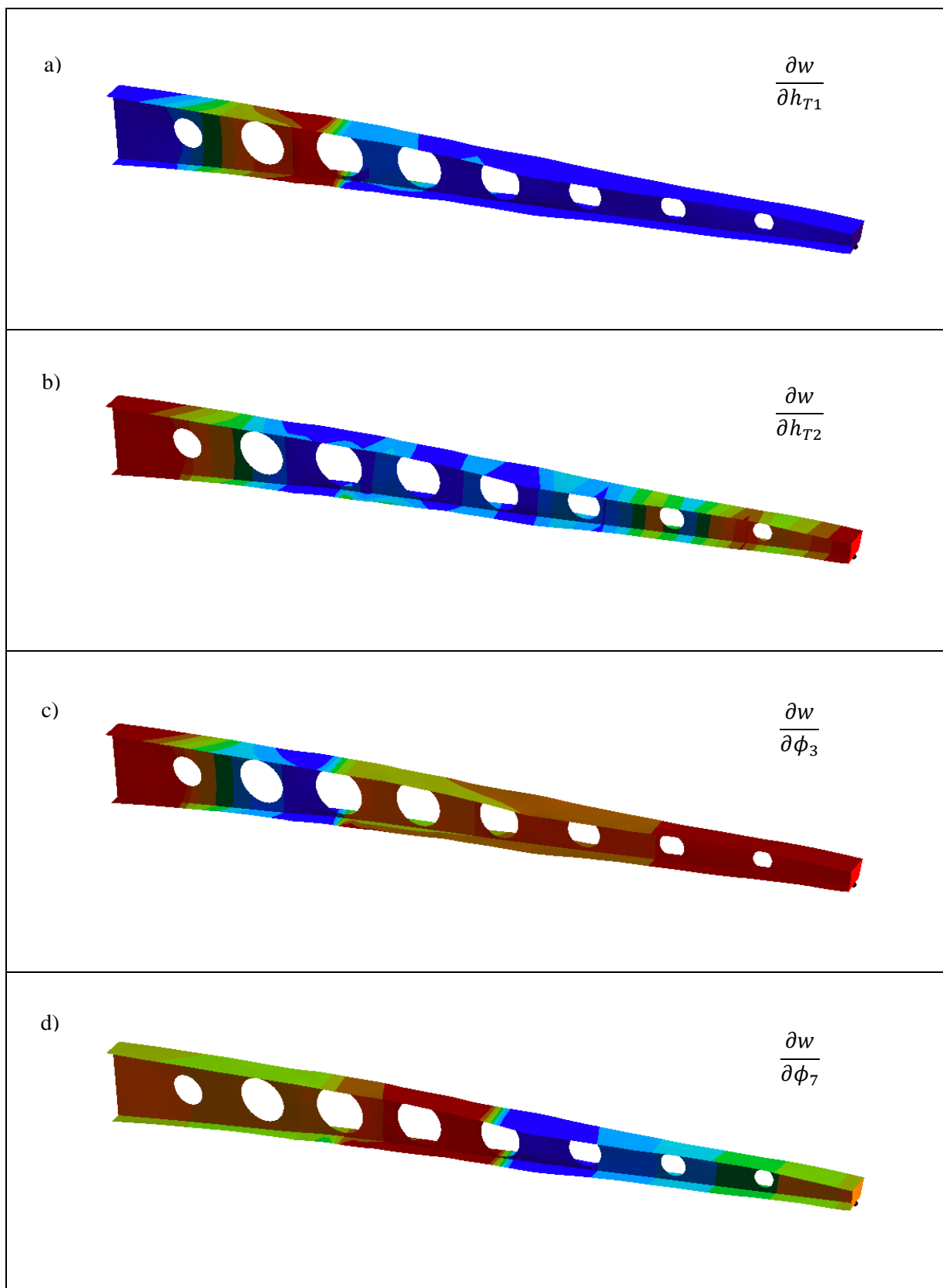
Slika 45: Deformirana oblika numeričnega modela konzole z 8 odprtini (pomiki so 10-krat povečani) in porazdelitev napetosti po von Misesu v mejnem stanju.

Na Sliki 44 je grafičen prikaz deformacije konzole z 8 odprtinami v stojini. Med vpetjem in prvo odprtino prevladujejo napetosti zaradi upogibnega momenta ob vpetju, nato se med prvo in drugo odprtino vidno spremeni smer poteka težiščne osi konzolnega nosilca, kjer se konzola zasuka. Na tem mestu so se razvile velike strižne deformacije, ki so posledica Vierendeel mehanizma okoli druge in tretje odprtine. Spodnja pasnica na območju prvih treh odprtin se zaradi velikih tlačnih napetosti deformira.

Lahko zaključimo, da na velikost odprtin močno vplivajo velikost in razporeditev notranjih sil v elementu. V konzoli so notranje sile najbolj intenzivne v bližini vpete podpore, kjer so prisotne tako strižne sile kot upogibni moment in zaradi naklona tudi manjša osna sila. Zaradi večje izkoriščenosti konstrukcije, je dobro, da so odprtine čim bolj oddaljene od podpor, v primeru konzole vsaj za dve višini prečnega prereza ob vpetju.

Sicer je vsak optimizacijski problem primer zase – različno začetno stanje in posledično drugačna porazdelitev nepopolnosti po konstrukciji ter sama narava gradientne metode optimizacije, vplivajo na to, da so rezultati optimizacije individualni in včasih tudi neprimerljivi med seboj, npr. velikosti vertikalnih pomikov w_{ult} v mejnem stanju.

Na Sliki 46 so grafično predstavljeni rezultati občutljivostne analize optimalizirane konzole s 7 odprtinami v stojini, in sicer gre za občutljivost vertikalnega pomika w točke v težišču spodnje pasnice na koncu previsa. Bolj tople so barve (rdeča), večji je vpliv spremembe izbranega projektnega parametra ϕ_i na vrednost pomika w . In hladnejše so barve (temno modra), manjši je vpliv spremembe izbranega projektnega parametra ϕ_i na vertikalni pomik w .

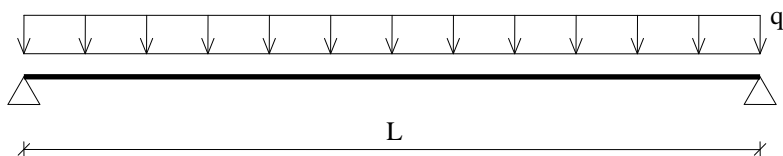


Slika 46: Grafični prikaz občutljivosti vertikalnega pomika w na previsu konzole glede na spremembo projektne parametra:

a) višina ob vpetju h_{T1} , b) višina na previsnem koncu h_{T2} , c) premer prve odprtine ϕ_3 in d) premer pete odprtine ϕ_7 .

4.3 Optimizacija oblike odprtine

V praksi se najbolj pogosto perforirani nosilci s krožno, pravokotno ali šestkotno obliko odprtin. Zanima nas, katera je pravzaprav optimalna oblika odprtin. V ta namen smo pripravili 6 različnih modelov prostoležečih nosilcev z dolžino $L = 4$ m, ki imajo eno odprtino v stojini. Ciljna funkcija optimizacije je sestavljena iz pogojev, da mora biti nosilnost nosilca z izolirano odprtino čim večja in površina odprtine ne sme biti manjša od vnaprej določene konstante. Nosilci so obremenjeni z vertikalno linijsko obtežbo q . Opazujemo oblike optimaliziranih odprtin in odziv nosilca pri različnih lokacijah odprtine vzdolž razpona.



Slika 47: Računski model medetažnega jeklenega nosilca

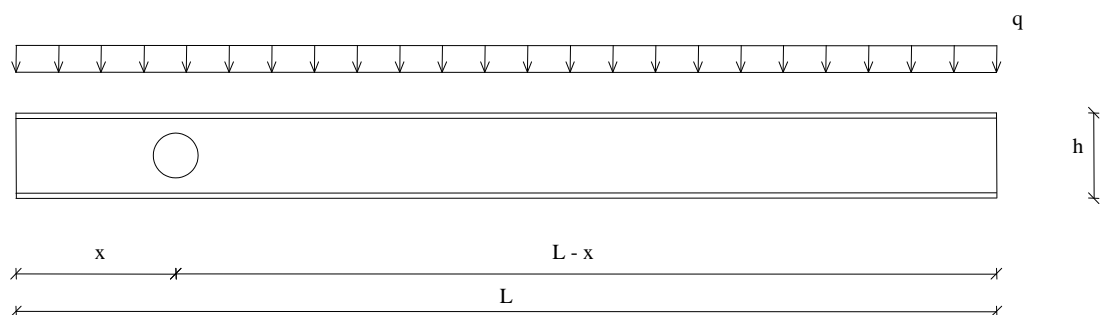
Material: S235

Robni pogoji:

- Nosilec je na obeh koncih podprt s členkasto podporo.
- 9 bočnih podpor razporejenih enakomerno po dolžini nosilca podpira zgornjo pasnico. Medsebojna razdalja med podporami je 40 cm.

V 2. poglavju so predstavljeni porušni mehanizmi značilni za perforirane nosilce. Eden izmed vplivnih faktorjev na odziv perforiranega elementa je tudi vitkost prečnega prereza, zato smo izvedli optimizacijo oblike odprtin za dva sklopa primerov nosilcev z izolirano odprtino, in sicer sklop nosilcev s kompaktnim prečnim prerezom in sklop primerov nosilcev s prečnim prerezom iz 3. razreda kompaktnosti.

4.3.1 Projektni parametri in geometrija



Slika 48: Prostoležeči nosilec z odprtino v stojini

Optimiziramo 6 različnih nosilcev, ki se razlikujejo v poziciji odprtin. S projektnimi parametri opišemo dimenzije odprtine, saj se bo samo ta spreminjala tekom procesa optimizacije. Obliko odprtine opišemo s parametrično enačbo superelipse.

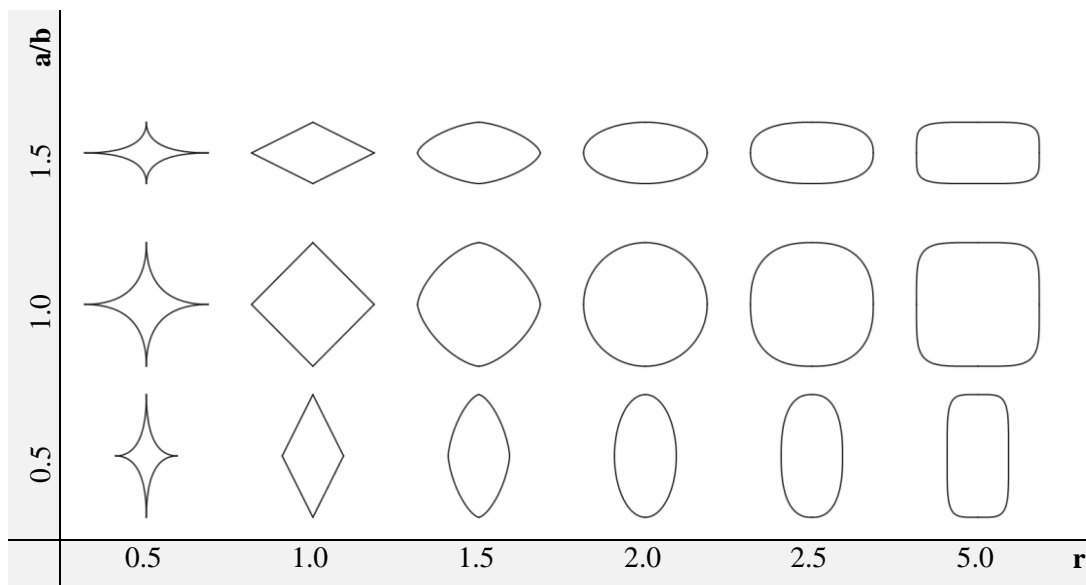
Superelipsa je posebna družina ravninskih sklenjenih krivulj (Slika 49), iz katere so najbolj znane krog, elipsa, astroida, tudi kvadrat lahko opišemo z enačbo superelipse. Pri modeliranju mreže končnih elementov konturo odprtine opišemo s parametrizirano obliko enačbe. Splošna parametrizirana enačba superelipse je:

$$x(t) = a (\sin t)^{\frac{2}{r}} \text{ in} \quad (35)$$

$$y(t) = b (\cos t)^{\frac{2}{r}} \quad (36)$$

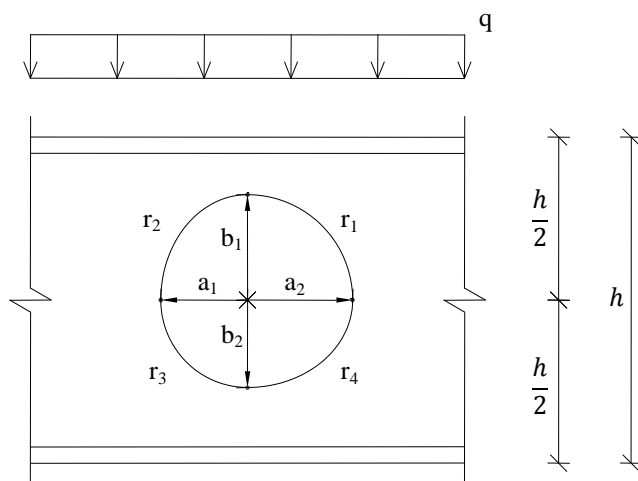
$$\text{za } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ in } r > 0. \quad (37)$$

Ko je $r = 2$, potem izraza (35) in (36) opisujeta navadno elipso. Če poleg $r = 2$, velja tudi $a = b$, potem iz enačbe superelipse dobimo parametrizirano enačbo kroga. Faktorja a in b predstavljata dolžino horizontalne in vertikalne polosi v superelipsi. Parameter r , ki nastopa v eksponentu v izrazih (35) in (36), vpliva na obliko sklenjene krivulje – manjši je r , bolj vbočene bodo stranice lika, ki ga opisuje enačba superelipse in obratno, z naraščanjem parametra r , superelipsa postaja vse bolj podobna pravokotniku z zaobljenimi oglišči. Parameter r je načeloma omejen samo s spodnjo mejo (izraz (37)), navzgor pa je neomejen. Manjša simulacija enačbe superelipse, v kateri spreminjamo parameter r , pokaže, da je že pri $r = 20$ superelipsa zelo podobna pravokotniku.



Slika 49: Možne oblike krivulj, ki jih generira enačba superelipse

Odprtino razdelimo na štiri kvadrante in temu ustrezno tudi izberemo projektne parametre. S štirimi projektnimi parametri označimo dolžine polosi (t.j. razdalja od sredine odprtine do roba odprtine). V skladu s kvadrantom označimo projektni parameter za parameter r , ki nastopa v parametrični enačbi superelipse. Tako v procesu optimizacije nastopa skupaj 8 projektnih parametrov ϕ_i (Slika 50).

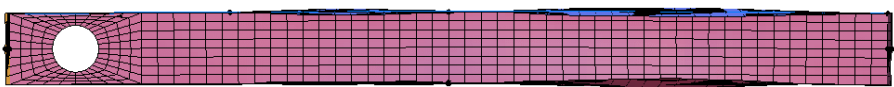
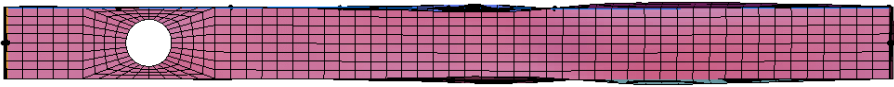
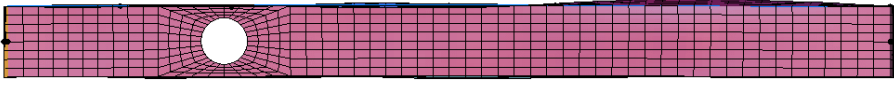





Slika 50: Parametrizacija odprtine

Preglednica 13: Opis ter začetne in mejne vrednosti projektnih parametrov pri optimizaciji nosilca z eno odprtino v stojini

Projektni parameter	Simbol	Oznaka	Začetna vrednost	Minimalna vrednost	Maksimalna vrednost
Horizontalna polos	a_1	ϕ_1	105 mm	10 mm	171.4 mm
	a_2	ϕ_2			
Vertikalna polos	b_1	ϕ_3	105 mm	10 mm	107.5 mm
	b_2	ϕ_4			
Parameter r v eksponentu $\frac{2}{r}$	r_1	ϕ_5	2	1	8
	r_2	ϕ_6			
	r_3	ϕ_7			
	r_4	ϕ_8			

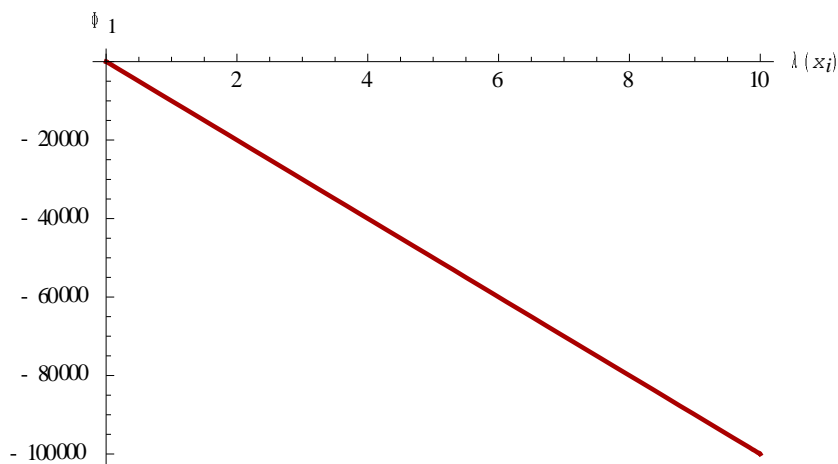
Preglednica 14: Lokacije odprtin glede na oddaljenost od leve podpore in začetni modeli nosilcev

Primer	Lokacija odprtine x [mm]	Začetni model nosilca
1	300	
2	640	
3	980	
4	1320	
5	1660	
6	2000	

4.3.2 Namenska funkcija

Glavni namen optimizacije odprtine nosilca je poiskati takšno obliko odprtine, pri kateri bo nosilec imel čim večjo nosilnost. Vodilni člen namenske funkcije je funkcija nosilnosti v odvisnosti od vrednosti projektnih parametrov:

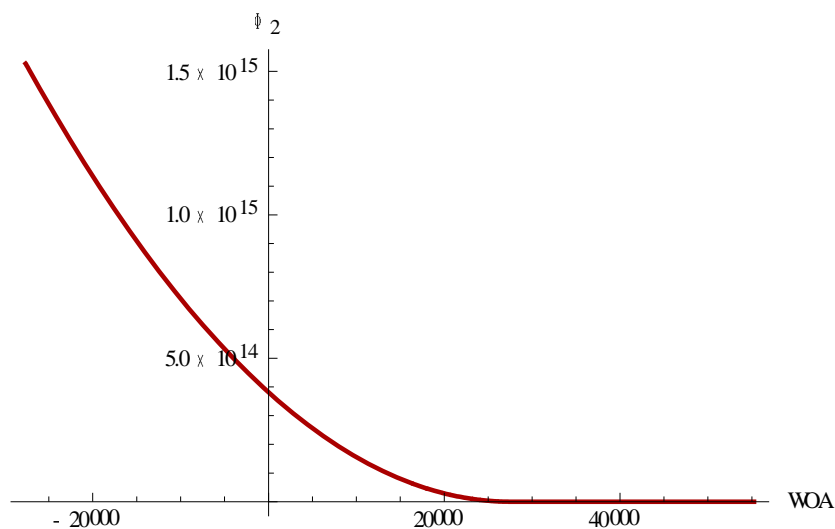
$$\Phi_1 = -100000 \cdot \lambda(x_i) \quad (38)$$



Slika 51: Graf funkcije Φ_1

S kazensko funkcijo Φ_2 (glej poglavje 3.2.2.1) postavimo omejitvev, da mora biti površina optimalne površine večja ali enaka minimalni dopustni velikosti površini:

$$\Phi_2 : WOA(x_i) \geq WOA_{min} , WOA_{min} = 312 \text{ cm}^2 \text{ (krog } r_{eq} \doteq 100 \text{ mm)} \quad (39)$$



Slika 52: Graf kazenske funkcije Φ_2

Maksimalne in minimalne vrednosti projektnih parametrov izrazimo z naslednjima kazenskima funkcijama:

$$\Phi_3 : \phi_i \geq \phi_{min}$$

$$\Phi_4 : \phi_i \leq \phi_{max}$$

Pri optimizaciji nosilca z eno odprtino iščemo minimum sestavljene namenske funkcije Φ :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 \quad (40)$$

4.3.3 Plastičen prečni prerez in rezultati optimizacije

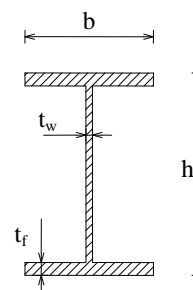
Prečni prerez nosilca:

$$h = 330 \text{ mm}$$

$$b = 160 \text{ mm}$$

$$t_f = 11.5 \text{ mm}$$

$$t_w = 7.5 \text{ mm}$$

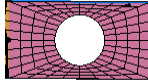
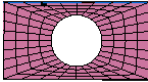
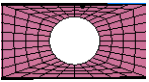
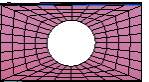
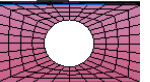
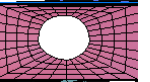


Slika 53: Prečni prerez nosilca

Pred optimizacijo skupine primerov s plastičnim prečnim prereзом (1. razred kompaktnosti), smo izvedli direktno analizo prostoležečega nosilca s polno stojino, pri katerem so upoštevane tako geometrijska in materialna nelinearnost kot začetna nadomestna nepopolnost. Takšen nosilec nosi v mejnem stanju nosilnosti maksimalno vertikalno linijsko obtežbo $q = 92.22 \frac{kN}{m}$. S takšno obtežbo smo obremenili primere nosilcev z odprtino, zato da lahko dobimo vpogled, kako prisotnost odprtine vpliva na nosilnost konstrukcijskega elementa.

Lastnosti in začetne vrednosti projektnih parametrov so opisani v poglavju 4.3.1. V nadaljevanju so predstavljeni rezultati optimizacij prvega sklopa primerov nosilcev z izolirano odprtino.

Preglednica 15: Povzetek rezultatov optimizacij nosilcev z eno odprtino v stojini

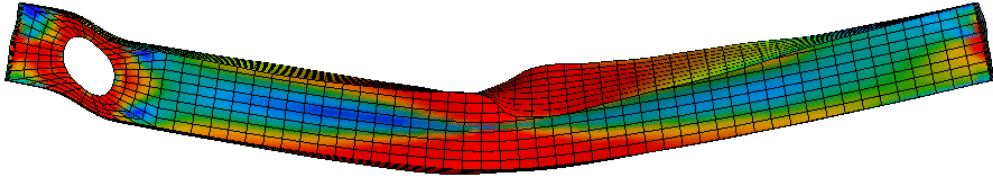
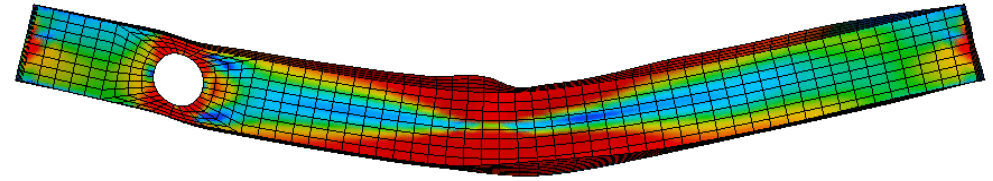
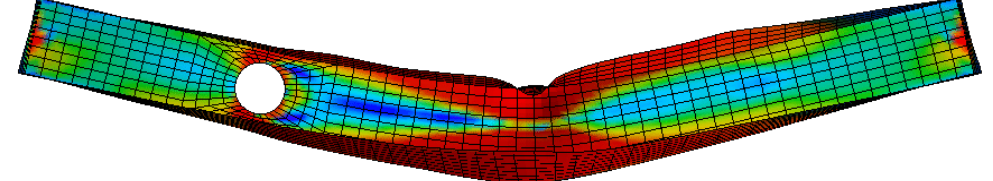
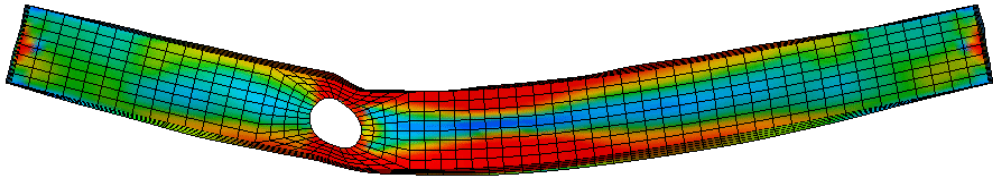
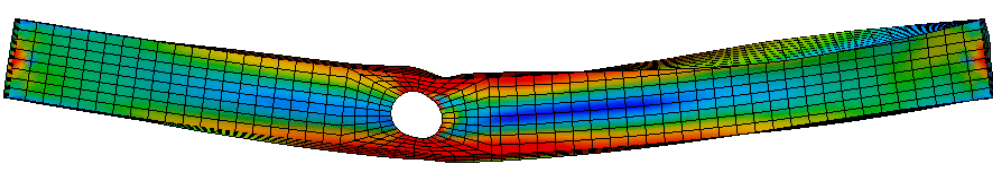
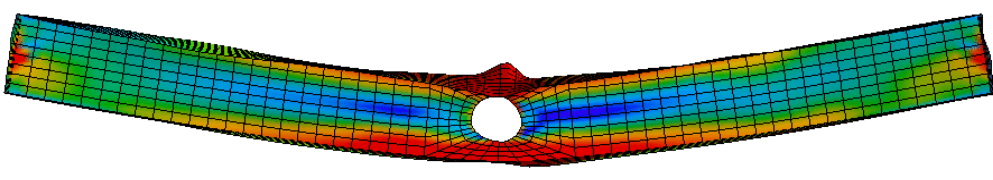
Primer	1	2	3	4	5	6
Št. korakov	184	175	122	208	120	306
ϕ_1 [mm]	105.1	105.5	105.0	103.7	104.3	119.0
ϕ_2 [mm]	105.2	105.4	105.0	102.9	103.4	94.2
ϕ_3 [mm]	105.4	106.2	105.5	96.4	96.6	107.4
ϕ_4 [mm]	105.4	106.1	104.4	97.6	95.8	77.5
ϕ_5	2.00	2.01	2.00	1.95	1.96	2.06
ϕ_6	2.01	2.01	2.00	1.93	1.96	2.56
ϕ_7	2.00	2.01	2.00	1.97	1.98	1.80
ϕ_8	2.00	2.01	2.00	1.95	1.96	1.68
w_{ult} [mm]	36.6	36.4	39.2	33.9	34.8	28.1
λ_u	0.99	1.00	0.98	0.97	0.90	0.91
Optimal. odprtina						

V Preglednici 15 so predstavljeni rezultati optimizacij za posamezne primere, v Preglednici 16 pa je grafični prikaz deformirane oblike optimalizirane konstrukcije v mejnem stanju nosilnosti.

Izhodiščna oblika odprtine je krog s polmerom 105 mm. Opazimo, da se je po optimizaciji pri vseh primerih sama krožna oblika odprtine ohranila. V 1., 2. in 3. primeru ni velikih sprememb v primerjavi z začetnimi vrednostmi projektnih parametrov. V 4. in 5. primeru sta se enakomerno zmanjšali vertikalni dimenziji odprtine, tako ima optimalizirana odprtina obliko rahlo sploščene elipse. Pri optimizaciji odprtine v sredini nosilca, se je znatno podaljšala dolžina leve horizontalne polosi in zmanjšala se višina spodnjega dela odprtine – kakor, da bi se odprtina premaknila v smeri levo navzgor.

Ne glede na pozicijo odprtine se je razvil upogibni porušni mehanizem. V primeru, ko je pozicija odprtine blizu podpore, je opaziti tudi strižni ali Vierendeel mehanizem. Kar je povsem razumljivo, saj so v bližini členkaste podpore prečne sile največje, upogibni moment pa je zanemarljivo majhen. Druga ekstremna situacija je odprtina v sredini razpona nosilca, kjer je upogibni moment največji in se v primeru stabilne konstrukcije razvije plastični členek. Zaradi perforiranega prečnega prereza je razpoložljiva površina prečnega prereza precej manjša, površini T-prerezov nad in pod odprtino pa sta omejeni, zato je upogibna nosilnost prereza manjša – obtežni faktor λ_u v mejnem stanju nosilnosti je za 9% manjši od faktorja nosilnosti nosilca brez odprtine.

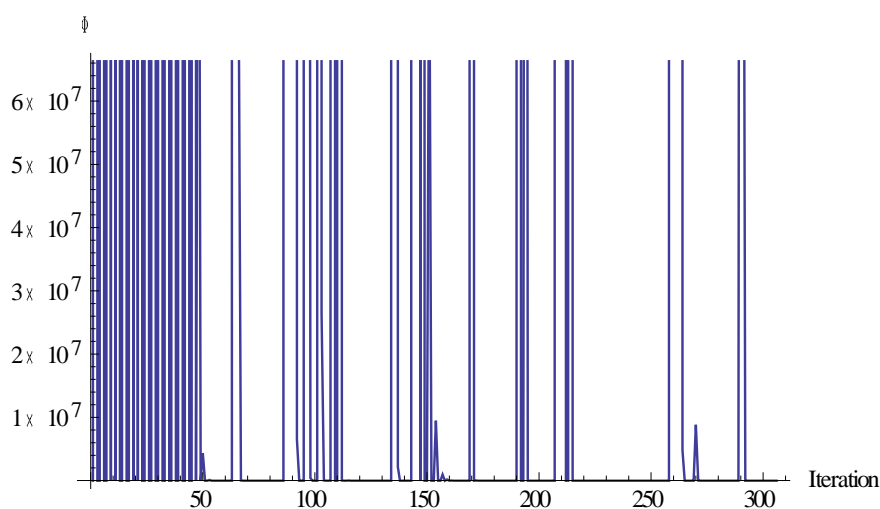
Preglednica 16: Grafični prikaz deformirane oblike za posamezen optimizacijski primer v mejnem stanju nosilnosti

Primer	Deformirana oblika optimaliziranega numeričnega modela v mejnem stanju (10-krat povečano)
1	 A 3D finite element model of a beam with a circular hole, showing its deformed shape under load. The beam is colored with a stress gradient from blue (low stress) to red (high stress). The hole is located on the left side, and the beam is curved downwards.
2	 A 3D finite element model of a beam with a circular hole, showing its deformed shape under load. The beam is colored with a stress gradient from blue to red. The hole is located on the left side, and the beam is curved downwards.
3	 A 3D finite element model of a beam with a circular hole, showing its deformed shape under load. The beam is colored with a stress gradient from blue to red. The hole is located on the left side, and the beam is curved downwards.
4	 A 3D finite element model of a beam with a circular hole, showing its deformed shape under load. The beam is colored with a stress gradient from blue to red. The hole is located on the left side, and the beam is curved downwards.
5	 A 3D finite element model of a beam with a circular hole, showing its deformed shape under load. The beam is colored with a stress gradient from blue to red. The hole is located on the left side, and the beam is curved downwards.
6	 A 3D finite element model of a beam with a circular hole, showing its deformed shape under load. The beam is colored with a stress gradient from blue to red. The hole is located on the left side, and the beam is curved downwards.

Ko je odprtina na šestini razpona nosilca (primer 2), je nosilnost nosilca enaka kot jo ima nosilec brez odprtine in z enako začetno nadomestno nepopolnostjo. Na tistem mestu je interakcija strižnih sil in upogibnih momentov relativno majhna.

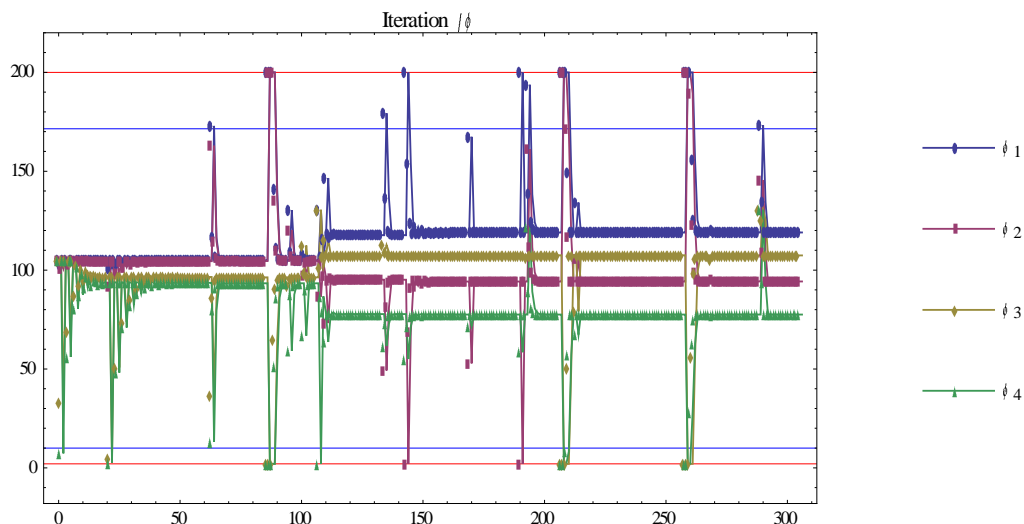
V vseh šestih primerih je mejna nosilnost določena s kriterijem limitne točke ravnotežne poti konstrukcije. V Preglednici 16 so nazorno predstavljene deformirane oblike optimaliziranih modelov. Ko je lokacija odprtine v območju prve četrtine razpona, prisotnost odprtine ne zmanjšuje območja plastifikacije v sredini razpona. Bližje je pozicija odprtine sredini razpona nosilca, manjša je cona plastifikacije – zgoraj in spodaj se ustvarita dva pasova, katerih višina se večja z oddaljenostjo odprtine od prereza z največjim upogibnim momentom.

V različnih situacijah, ko je odprtina v območju velikih notranjih strižnih sil ali upogibnih momentov, se je izkazalo, da je optimalna oblika odprtine krog.

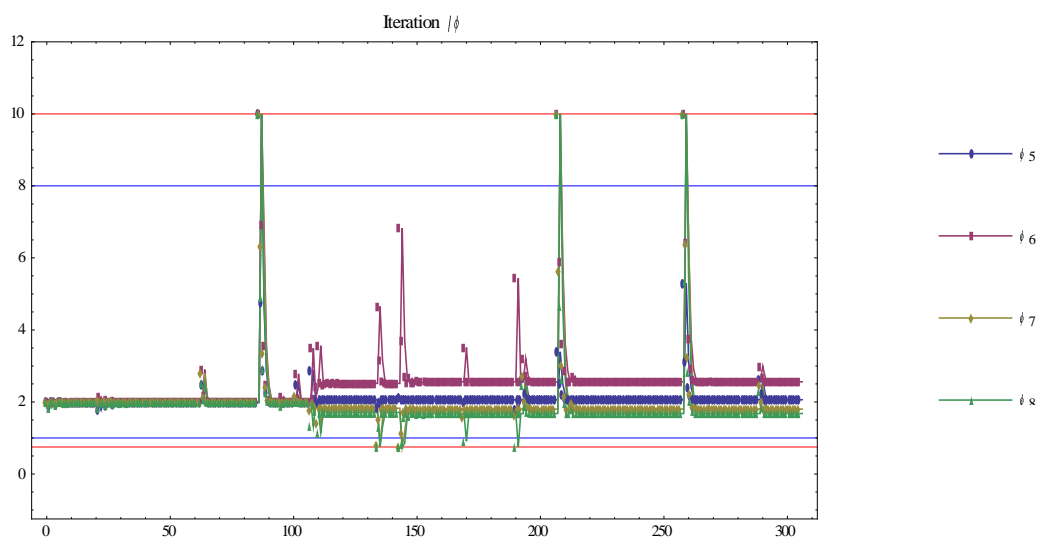


Slika 54: Graf razširjene namenske funkcije za primer nosilca z odprtino v sredini razpona

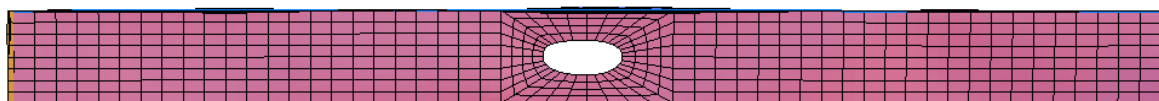
Graf spreminjanja razširjene namenske funkcije (Slika 54) med procesom optimizacije primera prostoležečega nosilca z odprtino v sredini razpona je zelo dinamičen. Več informacij lahko dobimo z diagrami, ki prikazujejo, kako so se spreminjale vrednosti projektnih parametrov med optimizacijo (Slika 55 in Slika 56). Modra premica predstavlja mejne vrednosti skupine projektnih parametrov. Največje amplitude so pri projektnih parametrih za dolžine polosi – dolžine horizontalnih polosi so se večale, vertikalne polosi pa so se krajšale. Projektni parametri za oblikovne parametre r so se z manjšimi izjemami pretežno spreminjali okoli vrednosti 2. To pomeni, da je optimalizirana oblika odprtine nekje vmes med elipsoidno in krožno obliko.



Slika 55: Graf spreminjanja vrednosti projektnih parametrov med procesom optimizacije nosilca z odprtino v sredini razpona



Slika 56: Graf spreminjanja vrednosti projektnih parametrov med procesom optimizacije nosilca z odprtino v sredini razpona



Slika 57: Nosilec v 262. iteraciji optimizacije (površina odprtine je pod zahtevano vrednostjo)

4.3.4 Semikompakten prečni prerez in rezultati optimizacije

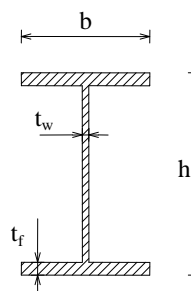
Prečni prerez nosilca:

$$h = 330 \text{ mm}$$

$$b = 160 \text{ mm}$$

$$t_f = 7 \text{ mm}$$

$$t_w = 3.5 \text{ mm}$$



Slika 58: Prečni prerez nosilca

Drugi sklop primerov za optimizacijo oblike odprtine tvorijo modeli nosilcev s semikompaktnim prečnim prereзом (3. razred kompaktnosti). Podobno kot v primeru s plastičnim prečnim prereзом, smo izvedli direktno analizo nosilca s semikompaktnim prečnim prereзом. Rezultat analize je, da takšen nosilec nosi v mejnem stanju nosilnosti maksimalno vertikalno linijsko obtežbo $q = 47.50 \frac{kN}{m}$. S takšno obtežbo smo obremenili naslednje primere nosilcev z odprtino in opazovali oblike optimaliziranih odprtine in odziv modelov v mejnem stanju nosilnosti.

Lastnosti in začetne vrednosti projektnih parametrov so opisani v poglavju 4.3.1. V nadaljevanju so predstavljeni rezultati optimizacij prvega sklopa primerov nosilcev z izolirano odprtino.

Preglednica 17: Povzetek rezultatov optimizacij nosilcev z eno odprtino v stojini – elastičen prerez

Primer	1	2	3	4	5	6
Št. korakov	358	209	172	185	134	191
ϕ_1 [mm]	82.2	102.5	103.6	103.6	104.2	102.6
ϕ_2 [mm]	137.7	103.1	103.4	101.9	103.0	102.5
ϕ_3 [mm]	106.0	97.2	100.6	102.0	98.0	93.5
ϕ_4 [mm]	82.0	98.1	102.0	93.0	102.8	101.4
ϕ_5	2.42	1.95	1.95	1.96	1.96	1.96
ϕ_6	1.72	1.94	1.95	1.98	1.96	1.92
ϕ_7	1.44	1.93	1.97	1.92	2.00	2.00
ϕ_8	1.57	1.94	1.98	1.94	1.97	1.99
w_u [mm]	11.9	15.4	26.2	23.9	23.9	17.0
λ_u	0.70	0.80	0.98	0.92	0.92	0.98
Optimal. odprtina						

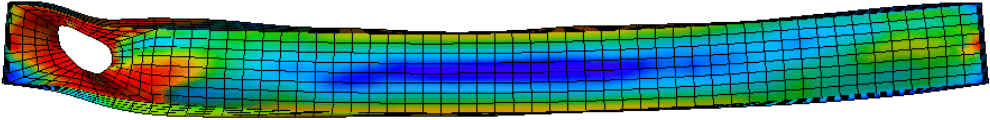
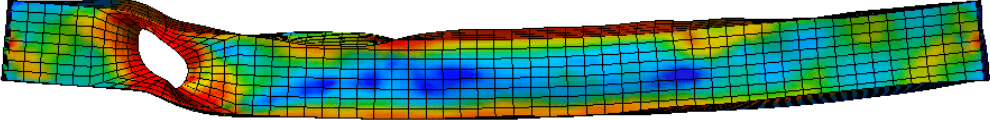
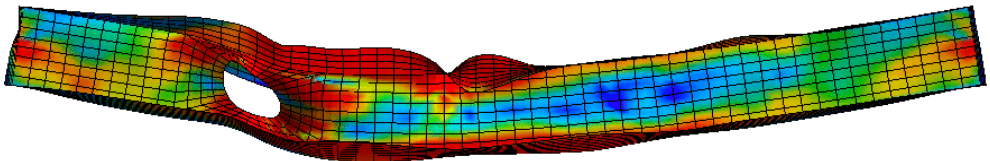
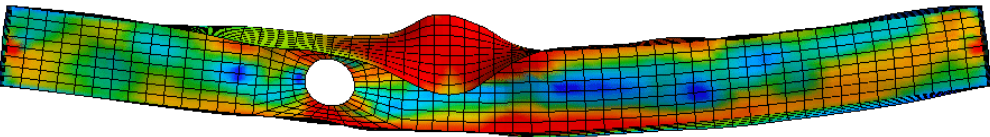
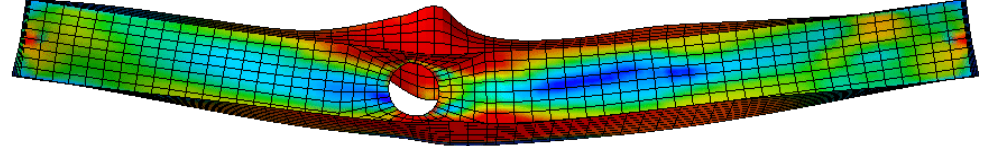
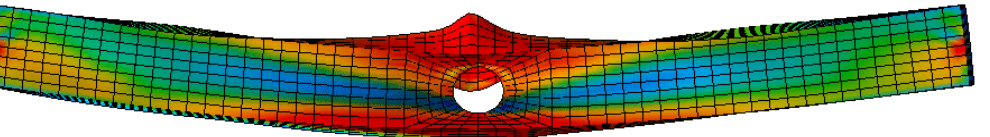
V večini primerov optimalizirane odprtine imajo obliko rahlo sploščene elipse, saj projektni parametri za oblikovni parameter r zasedajo vrednosti blizu 2. Poseben je primer z odprtino v bližini podpore. Zmanjšali sta se dolžini leve polosi (ϕ_1) in spodnje polosi (ϕ_4) na 82.0 mm. Občutno se je povečala dolžina desne polosi na 137.7 mm. Oblikovni parametri so se zmanjšali, le v območju prvega kvadranta se je povečal na 2.42. Dolžina odprtine je približno enaka začetni dolžini. Glede na obliko optimalizirane odprtine se zdi, kakor da se je odprtina premaknila malo v desno. V 5. in 6. primeru se je povečala višina T-prereza nad odprtino.

Prisotnost odprtine v stojini je reducirala nosilnost nosilca, in sicer v 1. primeru za 30%, v 2. primeru pa za 20%. Preostali modeli dosegajo več kot 92% nosilnosti nosilca s polno stojino. V vseh primerih nosilnost modelov je določena s kriterijem limitne točke ravnotežne poti.

V Preglednici 18 so predstavljene deformirane oblike optimaliziranih nosilcev, ki izkazujejo manjšo plastično kapaciteto. V prvem in drugem primeru se je zaradi velikih strižnih sil tvoril Vierendeel mehanizem. Pri tretjem nosilcu se zgodi kombinacija Vierendeel mehanizma in tlačno obremenjene pasnice, vendar prevladuje strižna porušitev konstrukcije. V drugih primerih se nosilec povesi v sredini razpona, hkrati pa je zgornja pasnica močno tlačno obremenjena in se želi bočno ukloniti, kar pa ji preprečujejo bočne podpore. Ko je odprtina v sredini razpona nosilca, se v okolici odprtine material plastificira, kakor da bi se razvil plastični členek.

Lahko zaključimo, da so nosilci s semikompleksnim prečnim prerezom v primerjavi z nosilci s plastičnim prečnim prerezom veliko bolj občutljivi na odprtine – zaradi odprtine se lahko nosilnost zmanjša do 30%. To še posebej velja, ko so odprtine v območjih velikih prečnih sil. Ne glede na kompaktnost prečnega prereza, v vseh primerih optimaliziranih nosilcev odprtine imajo elipsoidno obliko, ki je skoraj krožne oblike.

Preglednica 18: Grafični prikaz deformirane oblike za posamezen optimizacijski primer v mejnem stanju nosilnosti

Primer	Deformirana oblika optimaliziranega numeričnega modela v mejnem stanju (10-krat povečano)
1	 A 3D finite element model of a beam with a hole, showing its deformed shape under load. The beam is colored with a stress gradient from blue (low stress) to red (high stress). The hole is on the left side, and the beam is slightly curved downwards.
2	 A 3D finite element model of a beam with a hole, showing its deformed shape under load. The beam is colored with a stress gradient. The hole is on the left side, and the beam is slightly curved downwards.
3	 A 3D finite element model of a beam with a hole, showing its deformed shape under load. The beam is colored with a stress gradient. The hole is on the left side, and the beam is slightly curved downwards.
4	 A 3D finite element model of a beam with a hole, showing its deformed shape under load. The beam is colored with a stress gradient. The hole is on the left side, and the beam is slightly curved downwards.
5	 A 3D finite element model of a beam with a hole, showing its deformed shape under load. The beam is colored with a stress gradient. The hole is on the left side, and the beam is slightly curved downwards.
6	 A 3D finite element model of a beam with a hole, showing its deformed shape under load. The beam is colored with a stress gradient. The hole is on the left side, and the beam is slightly curved downwards.

5 ZAKLJUČEK

V diplomski nalogi smo se lotili nelinearne optimizacije nosilcev z odprtinami v stojini po gradientni metodi iskanja minimuma namenske funkcije. V fazi modeliranja smo pripravili numerične modele, pri katerem smo upoštevali materialno in geometrijsko nelinearnost ter nadomestno začetno nepopolnost konstrukcije z največjo amplitudo, ki jo podaja standard. Modeli so se analizirali po metodi končnih elementov v programu AceFEM.

Optimizacija je proces iskanja minimuma namenske funkcije, zato je zelo pomembno, kako je namenska funkcije sestavljena in v kakšnem razmerju so projektni parametri. Pri tem smo upoštevali, da so prispevki posameznih členov razširjene namenske funkcije istega velikostnega razreda.

Obravnavani so trije različni primeri: medetažni nosilec, konzolni nadstrešek in greda z izolirano odprtino v stojini. Optimizacijski primeri so pokazali naslednje:

- Razred kompaktnosti prečnega prereza, geometrija in lokacija odprtin, dolžina polnega dela stojine in robni pogoji so glavni faktorji, ki določajo, kako se bo konstrukcija obnašala pri dani konfiguraciji projektnih parametrov.
- Odprtine naj ne bodo v območjih koncentriranih strižnih sil (npr. podpore), saj ima prečni prerez z odprtino zelo majhno strižno površino.
- Ko optimiziramo nosilni element na mejno obtežbo, dolžina polnega dela stojine med odprtinami vpliva na velikost sosednjih odprtin.
- Dobro je, če je prečni prerez kompakten, saj v nasprotnem primeru že prisotnost ene odprtine lahko zmanjša nosilnost konstrukcije tudi do 30%.
- Izkazalo se je, da je optimalna oblika izolirane odprtine elipsa, ki je po geometriji zelo blizu obliki kroga.

Nosilci z odprtinami v stojini odpirajo veliko vprašanj, na katere je potrebno poiskati odgovore. To še posebej velja za numerično analizo tovrstnih nosilnih elementov, saj v primeru nelinearne analize z upoštevanjem nepopolnosti ni povsem jasno, katera vrednost amplitude nadomestne začetne nepopolnosti je primerna. Glede na to, da se nosilci s perforirano stojino zelo veliko uporabljajo v praksi, bi bilo potrebno uvesti tudi standardna navodila za projektiranje nosilcev z odprtinami v stojini.

V nadaljnjem delu bi lahko z gradientno metodo optimizacije optimizirali obliko odprtin in nosilne elemente glede na dolžino polnega dela stojine ali obratno – glede na dano geometrijo odprtin bi lahko iskali optimalno lego odprtin v stojini nosilca.

VIRI

Uporabljeni viri

Bake Mohamadi, S. 2010. Behaviour of Cellular Beams and Cellular Composite Floors at Ambient and Elevated Temperatures. Doctoral Dissertation. Manchester, University of Manchester, School of Mechanical, Aerospace and Civil Engineering: 261 str.

<https://www.escholar.manchester.ac.uk/api/datastream?publicationPid=uk-ac-man-scw:87592&datastreamId=FULL-TEXT.PDF> (Pridobljeno 23. 02. 2013.)

Beg, D. (ur.), Pogačnik, A. (ur.) 2009. Priročnik za projektiranje gradbenih konstrukcij po evrokod standardih. Ljubljana, Inženirska zbornica Slovenije: 1077 str.

Bronštejn, I. N., Semendjajev, K. A., Musiol, G., Mühlig, H. 1997. Matematični priročnik. Ljubljana, Tehniška založba Slovenije: 967 str.

Chung, K. F., Liu, T. C. H., Ko, A. C. H. 2001. Investigation on Vierendeel mechanism in steel beams with circular web openings. Journal of Constructional Steel Research 57: 467-490.

[http://dx.doi.org/10.1016/S0143-974X\(00\)00035-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0143-974X(00)00035-3) (Pridobljeno 25. 07. 2012.)

Commentary and worked examples to EN 1993-1-5 »plated structural elements«. 2007. Luxembourg: Office for Official Publications of the European Communities: Joint Research Centre European Commission: 226 str.

Demirdjian, S. 1999: Stability of castellated beam webs. Degree of Master of Engineering. Montreal, Canada, McGill University, Department of Civil Engineering and Applied Mechanics: 88 str.

http://www.collectionscanada.gc.ca/obj/s4/f2/dsk1/tape8/PQDD_0026/MQ50601.pdf

(Pridobljeno 23. 02. 2013.)

Design of composite beams with large web openings (P355). 2011. Berkshire, The Steel Construction Institute: 117 str.

http://www.steelconstruction.info/File:SCI_P355.pdf (Pridobljeno 26. 02. 2013.)

Ellobody, E. 2012. Nonlinear analysis of cellular steel beams under combined buckling modes, *Thin-Walled Structures* 52: 66-79

<http://dx.doi.org/10.1016/j.tws.2011.12.009> (Pridobljeno 29. 06. 2012.)

Erdal, F., Saka, M. P. 2013. Ultimate load carrying capacity of optimally designed steel cellular beams. *Journal of Constructional Steel Research* 80: 355-368.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.jcsr.2012.10.007> (Pridobljeno 06. 01. 2013.)

Kalkan, I., Buyukkaragoz, A. 2012. A numerical and analytical study on distortional buckling of doubly-symmetric steel I-beams. *Journal of Constructional Steel Research* 70: 289-297.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.jcsr.2011.06.006> (Pridobljeno 07. 01. 2013.)

Kristanič, N. 2008. Sinteza konstrukcij z uporabo točne občutljivostne analize in optimizacije oblike v nelinearnem področju. Doktorska disertacija. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo (samozaložba N. Kristanič): 148 str.

Redwood, R., Demirdjian, S. 1998. Castellated beam web buckling in shear. *Journal of Structural Engineering* 124: 1202-1207.

http://dikul.uni-lj.si/nukweb.nuk.uni-lj.si/V/5278Y54C7VM9ELR58712XGVVFJSPC1TEQ62YCE4BADJ4XRAFKD-08350?func=full-external-exec&doc_number=013296398&line_number=0016&service_type=TAG

(Pridobljeno 06. 01. 2013.)

Tsavdaridis, K. D., D'Mello, C. 2011a. Finite Element Investigation on Web-Post Buckling of Perforated Steel Beams with Various Web Opening Shapes subjected under different shear-moment interaction. V: 6th European Conference on Steel and Composite Structures, 31-08-2011 – 02-09-2011, Budapest, Hungary: loč. pag.

<http://openaccess.city.ac.uk/1043/> (Pridobljeno 25. 02. 2013.)

Tsavdaridis, K. D., D'Mello, C. 2011b. Web buckling study of the behaviour and strength of perforated steel beams with different novel web opening shapes. *Journal of Constructional Steel Research* 67: 1605-1620.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.jcsr.2011.04.004> (Pridobljeno 09. 09. 2012.)

Tsavdaridis, K. D., D'Mello, C. 2012. Optimisation of novel elliptically-based web opening shapes of perforated steel beams. *Journal of Constructional Steel Research* 76: 39-53.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.jcsr.2012.03.026> (Pridobljeno 25. 07. 2012.)

Zirakian, T., Showkati, H. 2006. Distortional buckling of castellated beams. *Journal of Constructional Steel Research* 62: 863-871.

<http://www.sciencedirect.com/science/help/doi.htm> (Pridobljeno 05. 01. 2013.)

Wakchaure, M. R., Sagade, A. V., Auti, V. A. 2012. Parametric study of castellated beam with varying depth of web opening. *International Journal of Scientific and Research Publications* 2, 8: loč. pag.

<http://www.ijsrp.org/research-paper-0812/ijsrp-p0880.pdf> (Pridobljeno 26. 02. 2013.)

Standardi

SIST EN 1991-1-1:2004. Evrokod 1: Vplivi na konstrukcije – 1-1. del: Splošni vplivi – Prostorninske teže, lastna teža, koristne obtežbe stavb.

SIST EN 1991-1-3:2004. Evrokod 1: Vplivi na konstrukcije – 1-3. del: Splošni vplivi – Obtežba snega.

SIST EN 1993-1-1:2005. Evrokod 3: Projektiranje jeklenih konstrukcij – 1-1. del: Splošna pravila in pravila za stavbe.

SIST EN 1993-1-6:2007. Evrokod 3: Projektiranje jeklenih konstrukcij – 1-6. del: Trdnost in stabilnost lupinastih konstrukcij.

Ostali viri

Kocjan, M. 2008. Določevanje optimalne zasnove konstrukcijskih elementov. Diplomski naloga. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo (samozaložba M. Kocjan): 82 str.

Korelc, J. 2010. Automation of Computational modeling: with introduction to AceGen and AceFEM. Ljubljana, University of Ljubljana, Faculty of Civil and Geodetic Engineering: 459 str.

Kovačič, D. 2010. Nosilnost jeklenih nosilcev z odprtini v stojini in jeklenih satastih nosilcev. Diplomski naloga. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo (samozaložba D. Kovačič): 162 str.

Lagaros, N. D., Lemonis, L. D., Papadrakakis, M., Panagiotou, G. 2008. Optimum design of steel structures with web openings. *Engineering Structures* 30: 2528-2537.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2008.02.002> (Pridobljeno 25. 07. 2012.)

Petrić, J., Zlobec, S. 1983. *Nelinearno programiranje*. Beograd, Naučna knjiga: 512 str.

PRAZNA STRAN

**PRILOGA A: ALGORITEM DIMENZIJSKE OPTIMIZACIJE KONZOLE S SEDMIMI
ODPRTINAMI V STOJINI NA MEJNO OBTEŽBO**

Ultimate Load Optimisation Environment

Limit Load Primal and Sensitivity Analysis Procedures

```
<< AceFEM` ;
Quiet[Needs["Optimisation `UnconstrainedProblems`"]];

LLOInitialize[] := (
  Clear[LLOStep, LLOResponseAll, LLOOptimisationIterations, LLOY, LLONoφ, LLOφ,
    LLOAdmissibleMeshφ, LLOφInit, LLOReport, LLOε, LLOδε, LLOHistory, LLOμ, LLOμInit];
  LLOInitImp = False;
  LLOStep = 0; LLOHistory = LLOResponseAll = LLOReportAll = LLOOptimisationIterations = {};
  LLOResultsWindow = CreatePalette["LLO\NLIMIT LOAD OPTIMISATION",
    Sequence @@ If[ValueQ[LLOResultsWindow], {LLOResultsWindow}, {}],
    Saveable → False, WindowTitle → "Optimisation report"];
  LLOAbort = False;
)

LLOOutOfRegion - if optimisation parameters are outside the safe zone defined by LLOAdmissibleMeshφ then calculate objective
function Φ and its gradient δφ on a boundary of the safe zone and modify the values accordingly to the distance from the point to
the boundary of the safe zone


$$\Phi = \Phi_{\text{boundary}} \left( 1 + \sum_{i \in \text{out of boundary}} |\phi_i - \phi_{i,\text{boundary}}|^2 \right)$$


LLOOutOfRegion[φc_, f_, df_] := Module[{p},
  p = 1 + Sum[Which[
    φc[[i]] < LLOAdmissibleMeshφ[[i, 1]], (LLOAdmissibleMeshφ[[i, 1]] - φc[[i]])^2
    , φc[[i]] > LLOAdmissibleMeshφ[[i, 2]], (φc[[i]] - LLOAdmissibleMeshφ[[i, 2]])^2
    , True, 0]
    , {i, 1, φc // Length}];
  {f p
    , MapThread[Which[
      #1 < #2[[1]], #3 * p - 2 f (#2[[1]] - #1)
      , #1 > #2[[2]], #3 * p + 2 f (#1 - #2[[2]])
      , True, #3 * p] &
    , {φc, LLOAdmissibleMeshφ, df}]
  }
]

LLOMaximum - calculate the limit point in its gradient of quadratic parabolo defined by 3 points
returns: {xmax, fmax, {dfmax/y1, dfmax/y2, dfmax/y3}}

LLOMaximum[{x1_, y1_}, {x2_, y2_}, {x3_, y3_}] :=
{(x3^2 * (y1 - y2) + x1^2 * (y2 - y3) + x2^2 * (-y1 + y3)) /
(2 * (x3 * (y1 - y2) + x1 * (y2 - y3) + x2 * (-y1 + y3)))
, y1 + (x3^2 * (-y1 + y2) + x2^2 * (y1 - y3) + x1^2 * (y2 - y3) + 2 * x1 * (x3 * (y1 - y2) + x2 * (-y1 + y3))) *
2 / (4 * (x1 - x2) * (x1 - x3) * (x2 - x3) * (x3 * (y1 - y2) + x1 * (y2 - y3) + x2 * (-y1 + y3)))
, {
(4 - (2 * (2 * x1 - x2 - x3) * (x3^2 * (-y1 + y2) +
x2^2 * (y1 - y3) + x1^2 * (y2 - y3) + 2 * x1 * (x3 * (y1 - y2) + x2 * (-y1 + y3)))) /
((x1 - x2) * (x1 - x3) * (x3 * (y1 - y2) + x1 * (y2 - y3) + x2 * (-y1 + y3))) +
(x3^2 * (-y1 + y2) + x2^2 * (y1 - y3) + x1^2 * (y2 - y3) + 2 * x1 * (x3 * (y1 - y2) + x2 * (-y1 + y3)))^2 /
((x1 - x2) * (x1 - x3) * (x3 * (-y1 + y2) + x2 * (y1 - y3) + x1 * (-y2 + y3))^2) / 4
, ((x3^2 * (-y1 + y2) + 2 * x2 * x3 * (y1 - y3) + x1^2 * (y2 - y3) +
x2^2 * (-y1 + y3) + 2 * x1 * x3 * (-y2 + y3)) *
(x3^2 * (-y1 + y2) + x2^2 * (y1 - y3) + x1^2 * (y2 - y3) + 2 * x1 * (x3 * (y1 - y2) + x2 * (-y1 + y3)))) /
(4 * (x1 - x2) * (x2 - x3) * (x3 * (-y1 + y2) + x2 * (y1 - y3) + x1 * (-y2 + y3))^2)
, ((x3^2 * (y1 - y2) - 2 * x2 * (x3 * (y1 - y2) + x1 * (y2 - y3)) + x2^2 * (y1 - y3) + x1^2 * (y2 - y3)) *
(x3^2 * (-y1 + y2) + x2^2 * (y1 - y3) + x1^2 * (y2 - y3) + 2 * x1 * (x3 * (y1 - y2) + x2 * (-y1 + y3)))) /
(4 * (x1 - x3) * (-x2 + x3) * (x3 * (-y1 + y2) + x2 * (y1 - y3) + x1 * (-y2 + y3))^2)
}
}

Options[LLOPrimalAndSensitivityAnalysis] = {"Debug" → False};
LLOPrimalAndSensitivityAnalysis[t_, φc_? (VectorQ[#, NumberQ] &), μ_, OptionsPattern[]] :=
```

```

Module[{ϕrule, graf, γnode, trans, res, step, old, bondϕ, sens,
  maximum, p, q, ltype, LLODiplPositionNode, LLODiplPositionImp, plr, rv},

ϕrule = Table[LLOϕ[[i]] -> Which[ϕc[[i]] < LLOAdmissibleMeshϕ[[i, 1]], LLOAdmissibleMeshϕ[[i, 1]],
  ϕc[[i]] > LLOAdmissibleMeshϕ[[i, 2]], LLOAdmissibleMeshϕ[[i, 2]], True, ϕc[[i]], {i, 1, LLONoϕ}];

SMTInputData[];
MakeMesh[ϕrule, False];
SMTAddSensitivity[Table[{ToString[LLOϕ[[i]], LLOϕ[[i]] /. ϕrule, _ -> {2, i}}, {i, 1, LLONoϕ}]];

SMTAnalysis[];

(****)
LBrstrainedNodesUP =
  Table[SMTNodeData["X"]][[SMTNearest[{0. + i Lc, 0., i Lc * Tan[αS]}][[1]]], {i, 0, 4}];
LBrstrainedNodesDOWN = Table[SMTNodeData["X"]][[
  SMTNearest[{0. + i Lc, 0., i Lc * Tan[αS] - (hT1x -  $\frac{i Lc}{L} * (hT1x - hT2x)$ )}][[1]]], {i, 0, 4}];

SMTInputData[];
MakeMesh[ϕrule, True];
(****)
SMTAddSensitivity[Table[{ToString[LLOϕ[[i]], LLOϕ[[i]] /. ϕrule, _ -> {2, i}}, {i, 1, LLONoϕ}]];

SMTAnalysis[];

(*Initial Imperfection*)
If[LLOInitImp,
  SMTNodeData[Range[SMTNoNodes - 1],
    "X", SMTNodeData[Range[SMTNoNodes - 1], "X"] + LLOImperfection];
  SMTUpdatePostData[];
];

If[t === "CheckMesh"
, LLOResultsWindow = CreatePalette[SMTShowMesh[],
  LLOResultsWindow, Saveable -> False, WindowTitle -> "Optimisation report"];
  Return[SMTShowMesh["BoundaryConditions" -> True], Module]
];

bondϕ = LLOϕ /. ϕrule;

(*check if already calculated*)
p = Join[bondϕ, {μ}];
old = p /. LLOHistory;
If[old != p,
  res = old;
  If[ϕc != bondϕ,
    res[[{3, 4}]] = LLOOutOfRegion[ϕc, res[[3]], res[[4]]
  ];
  If[MemberQ[{All, "Optimisation"}, OptionValue["Debug"]]
  , Print[{t, " analysis ϕ=", ϕc, " ϕ=", res[[3]], " δϕ=", res[[4]]}
  , If[ϕc != bondϕ, {"Parameters out of permitted interval. ϕbound=", bondϕ,
    " boundϕ=", old[[3]], " boundδϕ=", old[[4]], ""}];
  ];
  Return[If[t === "Primal", res[[3]], res[[4]], Module]
];

If[Length[δXδϕ] != SMTNoNodes
, Print["Number of nodes (" , SMTNoNodes,
  ") and length of shape velocity field (" , Length[δXδϕ], ") must be the same."];
  Abort[];
];

```

```

SMTNodeData["sX", N[ $\delta X \delta \phi$  /.  $\phi$ rule]];
SMTNextStep[1, LLO $\Delta$ Ini];
graf = {}; sens = {};
 $\gamma$ node = SMTFindNodes["load"][[1]]; maximum = False;

While[
  While[step = SMTConvergence[ $10^{-8}$ , 10, {"Adaptive BC", 8, LLO $\Delta$ Min, LLO $\Delta$ Max, 1}],
    SMTNewtonIteration[];
    If[MemberQ[{All, "Analysis"}, OptionValue["Debug"]], SMTStatusReport[]];
  ];
  If[step[[4]] == "MinBound"
    , If[Length[graf] > 2
      , SMTStepBack[]; ltype = "Failed to converge."; step[[3]] = False;
      , SMTStatusReport["Error:  $\Delta\lambda < \Delta\lambda_{min}$  for given mesh.
        Please put more strict limits on parameters (LLOadmissibleMesh $\phi$ )."];
      SMTStepBack[]; Abort[];
    ];
    , If[Not[step[[1]]],
      SMTSensitivity[];
      AppendTo[graf, SMTElementData["PrescribedDispl", "Data"][[1]]];
      AppendTo[sens, SMTNodeData[ $\gamma$ node, "st"]];
      ltype = "Ultimate displacement";
      If[Length[graf] > 2 && (graf[[-3, 2]] < graf[[-2, 2]] && graf[[-1, 2]] < graf[[-2, 2]] ||
        graf[[-3, 2]] > graf[[-2, 2]] && graf[[-1, 2]] > graf[[-2, 2]]
      )
      , ltype = "Maximum load"; maximum = True; step[[3]] = False;
    ];
    (*flat curve if current slope < elastic slope/100*)
    If[step[[3]] && Length[graf] > 4 &&
      Abs[ArcTan[(graf[[-1, 2]] - graf[[-2, 2]]) / (graf[[-1, 1]] - graf[[-2, 1]])] <
      Abs[0.01 ArcTan[graf[[1, 2]] / graf[[1, 1]]]]
    , step[[3]] = False; ltype = "Flat load curve";
    ];
    (*Ultimate deformation exceeded*)
    If[step[[3]] && Length[graf] > 4 && Max[SMTPost["Acc*"]] > LLOMaxe
    , step[[3]] = False; ltype = "Ultimate deformation exceeded";
    ];
  ];
  step[[3]]
  , If[step[[1]], SMTStepBack[]];
  SMTNextStep[1, step[[2]]]
];

q = Table[0, {LLONo $\phi$ }]];
If[maximum
,
  p = LLOMaximum[graf[[-3, -2, -1]]];
  trans = {
    Table[
      Derivative[ReplacePart[q, i  $\rightarrow$  1]][LLO $\gamma$ ][_] -> sens[[-3, -2, -1], i].p[[3], {i, LLONo $\phi$ }]
    , LLO $\gamma$ [LLO $\phi$ ]  $\rightarrow$  p[[2]],  $\phi$ rule, LLO $\mu$   $\rightarrow$   $\mu$ ] // Flatten;
  ,
  trans = {Table[Derivative[ReplacePart[q, i  $\rightarrow$  1]][LLO $\gamma$ ][_] -> sens[[-1, i], {i, LLONo $\phi$ }]
    , LLO $\gamma$ [LLO $\phi$ ]  $\rightarrow$  graf[[-1, 2]],  $\phi$ rule, LLO $\mu$   $\rightarrow$   $\mu$ ] // Flatten;
  ];

res = {LLO $\bar{\phi}$ , LLO $\delta\bar{\phi}$ } /. trans;
++LLOStep;
AppendTo[LLOHistory, Join[bond $\phi$ , { $\mu$ }]  $\rightarrow$  {t, LLOStep, res[[1]], res[[2]]}];
PrependTo[graf, {0, 0}];
AppendTo[LLOResponseAll, graf];
AppendTo[LLOOptimisationIterations, {LLOStep, res[[1]]}];
AppendTo[LLOReportAll, ReleaseHold[LLOReport] /. trans];

If[ $\phi$ c != bond $\phi$ ,
  res[[{1, 2}]] = LLOOutOfRegion[ $\phi$ c, res[[1]], res[[2]]];

```

```

];

CreatePalette[Column[{
  Row[{Button["Abort FindMinimum and continue ...", LLOAbort = True], ""}]
  , Row[{"Ultimate load type: ", ltype}]
  , Pane[Style[LLOReportAll[[-1]], Medium, LineSpacing -> {1, -1}], 400]
  , Sequence @@
    If[ $\phi_c \neq \text{bond}\phi$ , {Pane[Style[{"Original parameters out of permitted interval:  $\phi =$ ",  $\phi_c$ ,
      "  $\delta\epsilon_{\text{mod}} =$ ", res[[1]], "  $\delta\epsilon_{\text{mod}} =$ ", res[[2]]}], Medium, LineSpacing -> {1, -1}], 400]}, {}]
  , ListLinePlot[graf, PlotMarkers -> Automatic, PlotRange -> All, ImageSize -> 200]
  , Show[SMTShowMesh["DeformedMesh" -> True, "Field" -> "Mises*", "Mesh" -> False],
    SMTShowMesh["FillElements" -> False, "Mesh" -> Black], ImageSize -> {300}]
  ]]
, LLOResultsWindow, Saveable -> False, WindowTitle -> "Optimisation report"];

If[MemberQ[{All, "Optimisation"}], OptionValue["Debug"]]
, Print[Column[{
  Row[{t, " analysis ", "Ultimate load type: ", ltype}]
  , LLOReportAll[[-1]]
  , Sequence @@ If[ $\phi_c \neq \text{bond}\phi$ , {"Original parameters out of permitted interval:  $\phi =$ ",
     $\phi_c$ , "  $\delta\epsilon_{\text{mod}} =$ ", res[[1]], "  $\delta\epsilon_{\text{mod}} =$ ", res[[2]]}], {}]
  , Row[{ListLinePlot[graf, PlotMarkers -> Automatic, ImageSize -> 200, PlotRange -> All]
    , SMTShowMesh[ImageSize -> {200}]
    , SMTShowMesh["DeformedMesh" -> True, "Field" -> "Mises*", ImageSize -> {300}]}]
  ]]
];
];
If[graf[[2, 2]] < 0
, Print[Style["Initial slope of the response curve has to be positive!!
  Check the direction of load and the direction of prescribed displacement vector
  .", Red, Larger, Bold]];
];
If[OptionValue["Debug"] === True, Print[LLOReportAll[[-1]]];
If[LLOAbort, LLOAbort = False; Abort[]];
If[t === "Primal", res[[1], res[[2]]]
]

```

OPTIMISATION OF STEEL CANTILEVER WITH 7 WEB OPENING AND INITIAL IMPERFECTION

variable dimension of web openings, h_{T1} , h_{T2}

INITIALIZE AND SET CONSTANTS

Default units: [mm], [N/mm], [N/mm²]

LLOInitialize[]

BEAM

```
(*Initial section*)
hPROFInit = 400.;
bFLAN = 180.;
tFLAN = 13.5;
tWEB = 8.6;

(*Cantilever's length*)
L = 6000.;

(*Distance between lateral restraints*)
Lc = 1500.;

(*Number of circle web openings, N=1-9 *)
LLONoOpen = 7; (*Integer*)

(*Slope of the cantilever in Rad*)

$$\alpha S = 10. \cdot \frac{\pi}{180};$$


(*End plate thickness - right end*)
tepre = 0.3 * tWEB;
```

INITIAL IMPERFECTIONS

e0 - Equivalent Initial (Geometrical) Imperfection. The value is copied out of standard EC3 -1-1, section 5.3.2 (b).

```
LLOInitImp = True;
LLOe0 = L / 100;

Print["Initial Imperfection e0 = ", LLOe0, " mm."]

(*Contribution of individual buckling shape
to initial imperfection. Value: 0-1 (i.e. 0%-100%*)
(*eigenvalue Buckling Shapes → BS*)
LLOeigvBS1 = 1.;
LLOeigvBS2 = 0.7;
LLOeigvBS3 = 0.7;
LLOeigvBS4 = 0.7;
LLOeigvBS5 = 0.7;
LLOeigvBS6 = 0.7;
```

DESIGN PARAMETERS

During procedure of limit load optimisation two geometrical variables are being changed:
 $\phi_i = \alpha$, $i = [1, \text{LLONoOpen}]$ Diameter of circular web openings as part of web height
 $\phi_i = hT_1$, $i = \text{LLONo}\phi - 1$ Height of cantilever at the beginning (at the support)
 $\phi_i = hT_2$, $i = \text{LLONo}\phi$ Height of cantilever at the end (free end)

```
hWEBInit = hPROFInit - 2 tFLAN;

LLONoφ = LLONoOpen + 2;
Clear["φ*"];
φ = LLOφ = Table[Symbol["φ" <> ToString[i]], {i, LLONoφ}];

LLOφInit = Table[Symbol["LLOφInit" <> ToString[i]], {i, LLONoφ}];

LLOφInit[[LLONoφ - 1]] = hWEBInit;
LLOφInit[[LLONoφ]] = 0.7 hWEBInit;
anorm = 0.5 * (LLOφInit[[LLONoφ - 1]] + LLOφInit[[LLONoφ]]);
LLOφInit[[1 ;; (LLONoφ - 2)]] = 0.5 * anorm;

LLOφInit;

LLOAdmissibleMeshφ = Table[{Symbol["LLOAdmissibleφMin" <> ToString[i]],
    Symbol["LLOAdmissibleφMax" <> ToString[i]]}, {i, LLONoφ}];

(*LLOAdmissibleφMin*)
LLOAdmissibleMeshφ[[1 ;; (LLONoφ - 2), 1]] = 0.1 * anorm;          (*web opening*)
LLOAdmissibleMeshφ[[LLONoφ - 1, 1]] = 100.;                      (*hWEB1*)
LLOAdmissibleMeshφ[[LLONoφ, 1]] = 100.;                          (*hWEB2*)

(*LLOAdmissibleφMax*)
LLOAdmissibleMeshφ[[1 ;; (LLONoφ - 2), 2]] = 0.9 * anorm;
LLOAdmissibleMeshφ[[LLONoφ - 1, 2]] = 700.;
LLOAdmissibleMeshφ[[LLONoφ, 2]] = 700.;

LLOAdmissibleMeshφ

LLOφMinMax =
    Table[{Symbol["LLOφMin" <> ToString[i]], Symbol["LLOφMax" <> ToString[i]]}, {i, LLONoφ}];

(*LLOφMin*)
LLOφMinMax[[1 ;; (LLONoφ - 2), 1]] = 0.2 * anorm;
LLOφMinMax[[LLONoφ - 1, 1]] = 150.;
LLOφMinMax[[LLONoφ, 1]] = 150.;

(*LLOφMax*)
LLOφMinMax[[1 ;; (LLONoφ - 2), 2]] = 0.85 * anorm;
LLOφMinMax[[LLONoφ - 1, 2]] = 650.;
LLOφMinMax[[LLONoφ, 2]] = 650.;

LLOφMinMax
```

LOAD AND MATERIAL

- ultimate load parameters

```
LLOMinγUltimate = 1.0;      (*prescribed ultimate load factor*)
LLODisplUltimate = 1000.;   (*prescribed maximal leading displacement in mm*)
LLODisplDirection = {0, 0, -1};
LLOMaxε = 0.05;
LLOμInit = 0.001;
```


- load (value of Continuous load)

```
pLoad = 0;
qLoad = 30;
```

- path following parameters

```
LLOΔλIni = 0.01;
LLOΔλMax = 0.2;
LLOΔλMin = 0.00001;
```

- Material

```
σy = 235.; (*[N/mm2]*)
Emod = 210 000.; (*[N/mm2]*)
ν = 0.29;
```

FINITE ELEMENTS, DENSITY OF MESH OF FE_s AND DOMAINS

- Finite elements

```
LLOnEl = 2; (*Rough mesh. From 1 to 4; 1=coarse... → 4=fine *)
LLOTop = "S2"; (*Topology of Finite Element*)
LLOElement = "SEMSS2DFJCS2P6SVenantMises"; (*Finite element for elements of beam*)
LLOElementEndPlate = "SEMSS2DFHYS2P6SVenant"; (*Finite element for end plates*)
```

```
Domain = {
  {"UPflange", LLOElement, {"E *" → Emod, "ν *" → ν, "σy *" → σy, "t *" → tFLAN}},
  {"web", LLOElement, {"E *" → Emod, "ν *" → ν, "σy *" → σy, "t *" → tWEB}},
  {"DOWNflange", LLOElement, {"E *" → Emod, "ν *" → ν, "σy *" → σy, "t *" → tFLAN}},
  {"endplateEND", LLOElementEndPlate, {"E *" → Emod, "ν *" → ν, "t *" → tpre}},
  {"load", "D3C16DOFContinuousLoad", {"qz *" → -qLoad, "qy *" → pLoad}},
  {"PrescribedDispl", "D36DOFPrescribedDispl",
  {"up *" → LLODisplUltimate, "ex *" → 0, "ey *" → 0, "ez *" → -1}}
};
```

```
(*InterpolationOrder*)
ordA = 3;
ordB = 3;
ordC = 3;
ordD = 3;
ordE = 3;
```

AUXILIARY GEOMETRICAL PARAMETERS

```
hWEB1 = LLOφ[[LLOnφ - 1]]; (*height of web at the beginning*)
hWEB2 = LLOφ[[LLOnφ]];
hT1 = hWEB1 + tFLAN;
hT2 = hWEB2 + tFLAN;
```

$$xB = \text{Table}\left[\frac{i * L}{(LLOn\phi - 2) + 1}, \{i, LLOn\phi - 2\}\right];$$

$$hTx = \text{Table}\left[hT1 - \frac{xB[[i]]}{L} * (hT1 - hT2), \{i, 1, LLOn\phi - 2\}\right];$$

$$zTR[x_, ahT_] := \left(x * \text{Tan}[\alpha S] - ahT * \left(hT1 - \frac{x}{L} * (hT1 - hT2)\right)\right);$$

```

p = Table[Symbol["p" <> ToString[i]], {i, 1, LLONoφ - 2}]; (*length of part with web opening*)
c = Table[Symbol["c" <> ToString[i]], {i, 1, LLONoφ - 2}];
(*height between center of gravity of flange and nearest point of web opening*)

```

```

r = Table[Symbol["r" <> ToString[i]], {i, 1, LLONoOpen}];

```

```

r = Table[ $\frac{LLO\phi[i] * hTx[i]}{2 * anorm}$ , {i, 1, LLONoOpen}];

```

```

Do[
  c[[i]] = hTx[[i]] / 2 - r[[i]];
  p[[i]] = 2 * (c[[i]] + r[[i]]);
  , {i, 1, LLONoφ - 2}];

```

```

aLEFT =  $\frac{L}{(LLONo\phi - 2) + 1} - \frac{p[[1]]}{2}$ ;

```

```

aRIGHT =  $\frac{L}{(LLONo\phi - 2) + 1} - \frac{p[[LLONo\phi - 2]]}{2}$ ;

```

```

(*Length of full parts of web between web openings*)

```

```

aBETWEEN = Table[Symbol["aBETWEEN" <> ToString[i]], {i, 1, LLONoφ - 3}];
aBETWEEN = Table[xB[[i + 1]] - p[[i + 1]] / 2 - xB[[i]] - p[[i]] / 2, {i, 1, LLONoφ - 3}];
MatrixForm[%];

```

```

xD = Table[xB[[i]] + p[[i]] / 2 + aBETWEEN[[i]] / 2, {i, 1, LLONoφ - 3}];
MatrixForm[%];

```

Coordinates of individual parts of actual mesh for beam

```

xA, yA, zA   - Center of the full part of web near left support
xB, yB, zB   - Center of the web openings
xC, yC, zC   - Center of the full part of web at the free end of cantilever
xD, yD, zD   - Center of the full part of web between web openings

```

```

xA =  $\frac{1}{2} * aLEFT$ ;

```

```

xC = L -  $\frac{1}{2} * aRIGHT$ ;

```

```

yA = yB = yC = yD = 0;

```

```

zA = zB = zC = zD = 0;

```

```

n1 = 1.;          (*Number for defining size of vertical angle -
  for describing mesh of web with circular opening*)

```

```

γ = (n1 * 2 π) / 360;

```

```

z = (1. π / 4) / γ;

```

```

n2 = 1.;          (*Number for defining size of horizontal angle -
  for describing mesh of web with circular opening*)

```

```

δ = (n2 * 2 π) / 360;

```

```

u = (1. π / 2) / δ;

```

DISCRETIZATION OF THE DOMAIN

```

Switch [ LOnEl
, 1,
nElWEBx = nElFLANy = nElFLANyzs = 2;
nElWEBzxs = 2;
nElWEBxzs = nElFLANxzs = 3;

nElFLANx = nElWEBz = Ceiling [  $\frac{L}{(LLONoOpen + 1) * \frac{hPROFInit-tFLAN}{1}}$  ];

, 2,
nElWEBx = nElFLANy = nElFLANyzs = 2;
nElWEBzxs = 3;
nElWEBxzs = nElFLANxzs = 4;

nElFLANx = nElWEBz = Ceiling [  $\frac{L}{(LLONoOpen + 1) * \frac{hPROFInit-tFLAN}{2}}$  ];

, 3,
nElWEBx = nElFLANy = nElFLANyzs = 3;
nElWEBzxs = 4;
nElWEBxzs = nElFLANxzs = 5;

nElFLANx = nElWEBz = Ceiling [  $\frac{L}{(LLONoOpen + 1) * \frac{hPROFInit-tFLAN}{4}}$  ];

, 4,
nElWEBx = nElFLANy = nElFLANyzs = 4;
nElWEBzxs = 6;
nElWEBxzs = nElFLANxzs = 8;

nElFLANx = nElWEBz = Ceiling [  $\frac{L}{(LLONoOpen + 1) * \frac{hPROFInit-tFLAN}{8}}$  ];

];

```

AceFEM (actual) Mesh in Symbolic Form

LLOmakeMeshBeam

```

LLOmakeMeshBeam [rules_, q_] := (
    hT1 /. rules;
    hT2 /. rules;
    hT1x = hT1 /. rules;
    hT2x = hT2 /. rules;
    LLODisplPosition = {L, 0, zTR[L, 1.]} /. rules;

    SMTAddDomain[Domain];

    (* AREA A - at the support*)

    LLOmmUPflangeA1 = {
        {{xA - aLEFT/2, yA - bFLAN/2, zA + zTR[xA - aLEFT/2, 0.]}},
        {{xA + aLEFT/2, yA - bFLAN/2, zA + zTR[xA + aLEFT/2, 0.]}},
        {{xA - aLEFT/2, yA, zA + zTR[xA - aLEFT/2, 0.]}},
        {{xA + aLEFT/2, yA, zA + zTR[xA + aLEFT/2, 0.]}},
    };

    LLOmmUPflangeA2 = {
        {{xA - aLEFT/2, yA, zA + zTR[xA - aLEFT/2, 0.]}},
        {{xA + aLEFT/2, yA, zA + zTR[xA + aLEFT/2, 0.]}},
    };

```

```

{{xA - aLEFT / 2, yA + bFLAN / 2, zA + zTR[xA - aLEFT / 2, 0.]},
 {xA + aLEFT / 2, yA + bFLAN / 2, zA + zTR[xA + aLEFT / 2, 0.]}}};

LLOmmWEBA1 = {
  {{xA - aLEFT / 2, yA, zA + zTR[xA - aLEFT / 2, 0.5]},
   {xA - aLEFT / 2, yA, zA + zTR[xA - aLEFT / 2, 0.]}}},
  {{xA + aLEFT / 2, yA, zA + zTR[xA + aLEFT / 2, 0.5]},
   {xA + aLEFT / 2, yA, zA + zTR[xA + aLEFT / 2, 0.]}}};

LLOmmWEBA2 = {
  {{xA + aLEFT / 2, yA, zA + zTR[xA + aLEFT / 2, 0.5]},
   {xA + aLEFT / 2, yA, zA + zTR[xA + aLEFT / 2, 1.]}}},
  {{xA - aLEFT / 2, yA, zA + zTR[xA - aLEFT / 2, 0.5]},
   {xA - aLEFT / 2, yA, zA + zTR[xA - aLEFT / 2, 1.]}}};

LLOmmDOWNflangeA1 = {
  {{xA + aLEFT / 2, yA - bFLAN / 2, zA + zTR[xA + aLEFT / 2, 1.]},
   {xA - aLEFT / 2, yA - bFLAN / 2, zA + zTR[xA - aLEFT / 2, 1.]}}},
  {{xA + aLEFT / 2, yA, zA + zTR[xA + aLEFT / 2, 1.]},
   {xA - aLEFT / 2, yA, zA + zTR[xA - aLEFT / 2, 1.]}}};

LLOmmDOWNflangeA2 = {
  {{xA + aLEFT / 2, yA, zA + zTR[xA + aLEFT / 2, 1.]},
   {xA - aLEFT / 2, yA, zA + zTR[xA - aLEFT / 2, 1.]}}},
  {{xA + aLEFT / 2, yA + bFLAN / 2, zA + zTR[xA + aLEFT / 2, 1.]},
   {xA - aLEFT / 2, yA + bFLAN / 2, zA + zTR[xA - aLEFT / 2, 1.]}}};

SMTMesh["UPflange", LLOTop, {nElFLANx, nElFLANY},
  LLOmmUPflangeA1 /. rules, "InterpolationOrder" → ordA];
SMTMesh["UPflange", LLOTop, {nElFLANx, nElFLANY},
  LLOmmUPflangeA2 /. rules, "InterpolationOrder" → ordA];
SMTMesh["web", LLOTop, {nElWEBx, nElWEBz, LLOmmWEBA1 /. rules, "InterpolationOrder" → ordA];
SMTMesh["web", LLOTop, {nElWEBx, nElWEBz, LLOmmWEBA2 /. rules, "InterpolationOrder" → ordA];
SMTMesh["DOWNflange", LLOTop, {nElFLANx, nElFLANY},
  LLOmmDOWNflangeA1 /. rules, "InterpolationOrder" → ordA];
SMTMesh["DOWNflange", LLOTop, {nElFLANx, nElFLANY},
  LLOmmDOWNflangeA2 /. rules, "InterpolationOrder" → ordA];

(* AREA B - web opening *)

LLOmmUPflangeB1 = Table[Symbol["LLOmmUPflangeB1" <> ToString[i]], {i, 1, LLONoφ - 2}];
LLOmmUPflangeB2 = Table[Symbol["LLOmmUPflangeB2" <> ToString[i]], {i, 1, LLONoφ - 2}];
LLOmmWEBB1 = Table[Symbol["LLOmmWEBB1" <> ToString[i]], {i, 1, LLONoφ - 2}];
LLOmmWEBB2 = Table[Symbol["LLOmmWEBB2" <> ToString[i]], {i, 1, LLONoφ - 2}];
LLOmmWEBB3 = Table[Symbol["LLOmmWEBB3" <> ToString[i]], {i, 1, LLONoφ - 2}];
LLOmmWEBB4 = Table[Symbol["LLOmmWEBB4" <> ToString[i]], {i, 1, LLONoφ - 2}];
LLOmmWEBB5 = Table[Symbol["LLOmmWEBB5" <> ToString[i]], {i, 1, LLONoφ - 2}];
LLOmmWEBB6 = Table[Symbol["LLOmmWEBB6" <> ToString[i]], {i, 1, LLONoφ - 2}];
LLOmmDOWNflangeB1 = Table[Symbol["LLOmmDOWNflangeB1" <> ToString[i]], {i, 1, LLONoφ - 2}];
LLOmmDOWNflangeB2 = Table[Symbol["LLOmmDOWNflangeB2" <> ToString[i]], {i, 1, LLONoφ - 2}];

Do[
  LLOmmUPflangeB1[[i]] = {
    {{xB[[i]] - p[[i]] / 2, yB - bFLAN / 2, zB + zTR[xB[[i]] - p[[i]] / 2, 0.]},
     {xB[[i]] + p[[i]] / 2, yB - bFLAN / 2, zB + zTR[xB[[i]] + p[[i]] / 2, 0.]}}},
    {{xB[[i]] - p[[i]] / 2, yB, zB + zTR[xB[[i]] - p[[i]] / 2, 0.]},
     {xB[[i]] + p[[i]] / 2, yB, zB + zTR[xB[[i]] + p[[i]] / 2, 0.]}}};

  LLOmmUPflangeB2[[i]] = {
    {{xB[[i]] - p[[i]] / 2, yB, zB + zTR[xB[[i]] - p[[i]] / 2, 0.]},
     {xB[[i]] + p[[i]] / 2, yB, zB + zTR[xB[[i]] + p[[i]] / 2, 0.]}}},
    {{xB[[i]] - p[[i]] / 2, yB + bFLAN / 2, zB + zTR[xB[[i]] - p[[i]] / 2, 0.]},
     {xB[[i]] + p[[i]] / 2, yB + bFLAN / 2, zB + zTR[xB[[i]] + p[[i]] / 2, 0.]}}};

```

```

LLOmmWEBB1[[i]] = {
  Table[{{xB[[i]] + p[[i]]/2, yB, zB + (1/(2*z) (hT1 - ((xB[[i]] + p[[i]]/2)/L) * (hT1 - hT2)) * j) +
    zTR[xB[[i]] + p[[i]]/2, 0.5]}, {j, 0, z, 1}],
  Table[{{xB[[i]] + r[[i]] * Cos[θ], yB, zB + r[[i]] * Sin[θ] + zTR[xB[[i]], 0.5]},
    {θ, 0 + αS, 1. π/4 + αS, γ}}];

LLOmmWEBB2[[i]] = {
  Table[
    {xB[[i]] + p[[i]]/2 - (g*p[[i]]/u), yB, zB + zTR[xB[[i]] + p[[i]]/2 - (g*p[[i]]/u), 0.}], {g, 0, u, 1}],
  Table[{{xB[[i]] + r[[i]] * Cos[φ], yB, zB + r[[i]] * Sin[φ] + zTR[xB[[i]], 0.5]},
    {φ, 1. π/4 + αS, 3. π/4 + αS, δ}}];

LLOmmWEBB3[[i]] = {
  Table[{{xB[[i]] - r[[i]] * Cos[θ], yB,
    zB + r[[i]] * Sin[θ] + zTR[xB[[i]], 0.5]}, {θ, 0. - αS, 1. π/4 - αS, γ}],
  Table[{{xB[[i]] - p[[i]]/2, yB, zB + (1/(2*z) (hT1 - ((xB[[i]] - p[[i]]/2)/L) * (hT1 - hT2)) * j) +
    zTR[xB[[i]] - p[[i]]/2, 0.5]}, {j, 0, z, 1}}];

LLOmmWEBB4[[i]] = {
  Table[
    {xB[[i]] + r[[i]] * Cos[θ], yB, zB - r[[i]] * Sin[θ] + zTR[xB[[i]], 0.5]}, {θ, 0 - αS, 1. π/4 - αS, γ}],
  Table[{{xB[[i]] + p[[i]]/2, yB, zB - (1/(2*z) (hT1 - ((xB[[i]] + p[[i]]/2)/L) * (hT1 - hT2)) * j) +
    zTR[xB[[i]] + p[[i]]/2, 0.5]}, {j, 0, z, 1}}];

LLOmmWEBB5[[i]] = {
  Table[
    {xB[[i]] - p[[i]]/2 + (g*p[[i]]/u), yB, zB + zTR[xB[[i]] - p[[i]]/2 + (g*p[[i]]/u), 1.}], {g, 0, u, 1}],
  Table[{{xB[[i]] - r[[i]] * Cos[φ], yB, zB - r[[i]] * Sin[φ] + zTR[xB[[i]], 0.5]},
    {φ, 1. π/4 + αS, 3. π/4 + αS, δ}}];

LLOmmWEBB6[[i]] = {
  Table[{{xB[[i]] + r[[i]] * Cos[φ], yB, zB - r[[i]] * Sin[φ] + zTR[xB[[i]], 0.5]},
    {φ, 3. π/4 - αS, 1. π - αS, γ}],
  Table[{{xB[[i]] - p[[i]]/2, yB, zB + (1/(2*z) (hT1 - ((xB[[i]] - p[[i]]/2)/L) * (hT1 - hT2)) * j) +
    zTR[xB[[i]] - p[[i]]/2, 1.}], {j, 0, z, 1}}];

LLOmmDOWNflangeB1[[i]] = {
  {{xB[[i]] + p[[i]]/2, yB - bFLAN/2, zB + zTR[xB[[i]] + p[[i]]/2, 1.}],
  {xB[[i]] - p[[i]]/2, yB - bFLAN/2, zB + zTR[xB[[i]] - p[[i]]/2, 1.}],
  {{xB[[i]] + p[[i]]/2, yB, zB + zTR[xB[[i]] + p[[i]]/2, 1.}],
  {xB[[i]] - p[[i]]/2, yB, zB + zTR[xB[[i]] - p[[i]]/2, 1.}}];

LLOmmDOWNflangeB2[[i]] = {
  {{xB[[i]] + p[[i]]/2, yB, zB + zTR[xB[[i]] + p[[i]]/2, 1.}],
  {xB[[i]] - p[[i]]/2, yB, zB + zTR[xB[[i]] - p[[i]]/2, 1.}],
  {{xB[[i]] + p[[i]]/2, yB + bFLAN/2, zB + zTR[xB[[i]] + p[[i]]/2, 1.}],
  {xB[[i]] - p[[i]]/2, yB + bFLAN/2, zB + zTR[xB[[i]] - p[[i]]/2, 1.}}];

SMTMesh["UPflange", LLOTop, {nEIFLANxzs, nEIFLANyzs},
  LLOmmUPflangeB1[[i]] /. rules, "InterpolationOrder" → ordB];
SMTMesh["UPflange", LLOTop, {nEIFLANxzs, nEIFLANyzs},

```



```

SMTMesh["DOWNflange", LLOTop, {nElFLANx, nElFLANY},
  LLOmmDOWNflangeC2 /. rules, "InterpolationOrder" -> ordC];

(* AREA D - Area between web openings*)

LLOmmUPflangeD1 = Table[Symbol["LLOmmUPflangeD1" <> ToString[i]], {i, 1, LLONoφ - 3}];
LLOmmUPflangeD2 = Table[Symbol["LLOmmUPflangeD2" <> ToString[i]], {i, 1, LLONoφ - 3}];
LLOmmWEBD1 = Table[Symbol["LLOmmWEBD1" <> ToString[i]], {i, 1, LLONoφ - 3}];
LLOmmWEBD2 = Table[Symbol["LLOmmWEBD2" <> ToString[i]], {i, 1, LLONoφ - 3}];
LLOmmDOWNflangeD1 = Table[Symbol["LLOmmDOWNflangeD1" <> ToString[i]], {i, 1, LLONoφ - 3}];
LLOmmDOWNflangeD2 = Table[Symbol["LLOmmDOWNflangeD2" <> ToString[i]], {i, 1, LLONoφ - 3}];

Do[
  LLOmmUPflangeD1[[i]] = {
    {{xD[[i]] - aBETWEEN[[i]] / 2, yD - bFLAN / 2, zD + zTR[xD[[i]] - aBETWEEN[[i]] / 2, 0.}},
    {{xD[[i]] + aBETWEEN[[i]] / 2, yD - bFLAN / 2, zD + zTR[xD[[i]] + aBETWEEN[[i]] / 2, 0.}}},
    {{xD[[i]] - aBETWEEN[[i]] / 2, yD, zD + zTR[xD[[i]] - aBETWEEN[[i]] / 2, 0.}},
    {{xD[[i]] + aBETWEEN[[i]] / 2, yB, zB + zTR[xD[[i]] + aBETWEEN[[i]] / 2, 0.}}}};

  LLOmmUPflangeD2[[i]] = {
    {{xD[[i]] - aBETWEEN[[i]] / 2, yD, zD + zTR[xD[[i]] - aBETWEEN[[i]] / 2, 0.}},
    {{xD[[i]] + aBETWEEN[[i]] / 2, yD, zD + zTR[xD[[i]] + aBETWEEN[[i]] / 2, 0.}}},
    {{xD[[i]] - aBETWEEN[[i]] / 2, yD + bFLAN / 2, zD + zTR[xD[[i]] - aBETWEEN[[i]] / 2, 0.}},
    {{xD[[i]] + aBETWEEN[[i]] / 2, yD + bFLAN / 2, zD + zTR[xD[[i]] + aBETWEEN[[i]] / 2, 0.}}}};

  LLOmmWEBD1[[i]] = {
    {{xD[[i]] - aBETWEEN[[i]] / 2, yD, zD + zTR[xD[[i]] - aBETWEEN[[i]] / 2, 0.5}},
    {{xD[[i]] - aBETWEEN[[i]] / 2, yD, zD + zTR[xD[[i]] - aBETWEEN[[i]] / 2, 0.}}},
    {{xD[[i]] + aBETWEEN[[i]] / 2, yD, zD + zTR[xD[[i]] + aBETWEEN[[i]] / 2, 0.5}},
    {{xD[[i]] + aBETWEEN[[i]] / 2, yD, zD + zTR[xD[[i]] + aBETWEEN[[i]] / 2, 0.}}}};

  LLOmmWEBD2[[i]] = {
    {{xD[[i]] + aBETWEEN[[i]] / 2, yD, zD + zTR[xD[[i]] + aBETWEEN[[i]] / 2, 0.5}},
    {{xD[[i]] + aBETWEEN[[i]] / 2, yD, zD + zTR[xD[[i]] + aBETWEEN[[i]] / 2, 1.}}},
    {{xD[[i]] - aBETWEEN[[i]] / 2, yD, zD + zTR[xD[[i]] - aBETWEEN[[i]] / 2, 0.5}},
    {{xD[[i]] - aBETWEEN[[i]] / 2, yD, zD + zTR[xD[[i]] - aBETWEEN[[i]] / 2, 1.}}}};

  LLOmmDOWNflangeD1[[i]] = {
    {{xD[[i]] - aBETWEEN[[i]] / 2, yD - bFLAN / 2, zD + zTR[xD[[i]] - aBETWEEN[[i]] / 2, 1.}},
    {{xD[[i]] + aBETWEEN[[i]] / 2, yD - bFLAN / 2, zD + zTR[xD[[i]] + aBETWEEN[[i]] / 2, 1.}}},
    {{xD[[i]] - aBETWEEN[[i]] / 2, yD, zD + zTR[xD[[i]] - aBETWEEN[[i]] / 2, 1.}},
    {{xD[[i]] + aBETWEEN[[i]] / 2, yD, zD + zTR[xD[[i]] + aBETWEEN[[i]] / 2, 1.}}}};

  LLOmmDOWNflangeD2[[i]] = {
    {{xD[[i]] - aBETWEEN[[i]] / 2, yD, zD + zTR[xD[[i]] - aBETWEEN[[i]] / 2, 1.}},
    {{xD[[i]] + aBETWEEN[[i]] / 2, yD, zD + zTR[xD[[i]] + aBETWEEN[[i]] / 2, 1.}}},
    {{xD[[i]] - aBETWEEN[[i]] / 2, yD + bFLAN / 2, zD + zTR[xD[[i]] - aBETWEEN[[i]] / 2, 1.}},
    {{xD[[i]] + aBETWEEN[[i]] / 2, yD + bFLAN / 2, zD + zTR[xD[[i]] + aBETWEEN[[i]] / 2, 1.}}}};

  SMTMesh["UPflange", LLOTop, {nElFLANx, nElFLANY},
    LLOmmUPflangeD1[[i]] /. rules, "InterpolationOrder" -> ordD];
  SMTMesh["UPflange", LLOTop, {nElFLANx, nElFLANY},
    LLOmmUPflangeD2[[i]] /. rules, "InterpolationOrder" -> ordD];
  SMTMesh["web", LLOTop, {nElWEBx, nElWEBz}, LLOmmWEBD1[[i]] /. rules,
    "InterpolationOrder" -> ordD];
  SMTMesh["web", LLOTop, {nElWEBx, nElWEBz}, LLOmmWEBD2[[i]] /. rules,
    "InterpolationOrder" -> ordD];
  SMTMesh["DOWNflange", LLOTop, {nElFLANx, nElFLANY},
    LLOmmDOWNflangeD1[[i]] /. rules, "InterpolationOrder" -> ordD];
  SMTMesh["DOWNflange", LLOTop, {nElFLANx, nElFLANY},
    LLOmmDOWNflangeD2[[i]] /. rules, "InterpolationOrder" -> ordD];

, {i, 1, LLONoφ - 3, 1}
];

```

```

(* AREA of END PLATE *)

LLOmmENDplateE1 = {
  {{L, -bFLAN/2, zTR[L, 1.]}, {L, -bFLAN/2, zTR[L, 0.5]}},
  {{L, 0, zTR[L, 1.]}, {L, 0, zTR[L, 0.5]}}};
LLOmmENDplateE2 = {
  {{L, 0, zTR[L, 1.]}, {L, 0, zTR[L, 0.5]}},
  {{L, bFLAN/2, zTR[L, 1.]}, {L, bFLAN/2, zTR[L, 0.5]}}};
LLOmmENDplateE3 = {
  {{L, -bFLAN/2, zTR[L, 0.5]}, {L, -bFLAN/2, zTR[L, 0.]}},
  {{L, 0, zTR[L, 0.5]}, {L, 0, zTR[L, 0.]}}};
LLOmmENDplateE4 = {{L, 0, zTR[L, 0.5]}, {L, 0, zTR[L, 0.]}},
  {{L, bFLAN/2, zTR[L, 0.5]}, {L, bFLAN/2, zTR[L, 0.]}}};

SMTMesh["endplateEND", LLOTop, {nElWEBx, nElFLANY},
  LLOmmENDplateE1 /. rules, "InterpolationOrder" → orde];
SMTMesh["endplateEND", LLOTop, {nElWEBx, nElFLANY},
  LLOmmENDplateE2 /. rules, "InterpolationOrder" → orde];
SMTMesh["endplateEND", LLOTop, {nElWEBx, nElFLANY},
  LLOmmENDplateE3 /. rules, "InterpolationOrder" → orde];
SMTMesh["endplateEND", LLOTop, {nElWEBx, nElFLANY},
  LLOmmENDplateE4 /. rules, "InterpolationOrder" → orde];

SMTAddEssentialBoundary[{
  {"X" == 0 &, 1 → 0, 2 → 0, 3 → 0, 4 → 0, 5 → 0, 6 → 0}
}];

If[q,
Do[
  SMTAddEssentialBoundary[{
    {Point[LBrestrainedNodesUP[[i]], 2 → 0}
  }];
  , {i, 2, Length[LBrestrainedNodesUP]}
];
Do[
  SMTAddEssentialBoundary[{
    {Point[LBrestrainedNodesDOWN[[i]], 2 → 0}
  }];
  , {i, 2, Length[LBrestrainedNodesDOWN]}
];
];
];
);

```


MakeMesh

```
MakeMesh[rules_, q_] := (  
  
  LLOMakeMeshBeam[rules, q];  
  
  (*VERTIKALNA LINIJSKA OBTEŽBA*)  
  (* AREA A - at the support*)  
  SMTMesh["load", "C1", {nElFLANx},  
    {{xA - aLEFT/2, yA, zA + zTR[xA - aLEFT/2, 0.]},  
     {xA + aLEFT/2, yA, zA + zTR[xA + aLEFT/2, 0.]}} /. rules, "InterpolationOrder" → ordA];  
  
  (* AREA B - web opening *)  
  Do[  
    SMTMesh["load", "C1", {nElFLANxzs},  
      {{xB[[i]] - p[[i]]/2, yB, zB + zTR[xB[[i]] - p[[i]]/2, 0.}}, {xB[[i]] + p[[i]]/2,  
       yB, zB + zTR[xB[[i]] + p[[i]]/2, 0.]}} /. rules, "InterpolationOrder" → ordB];  
  
  , {i, 1, LLONoφ - 2, 1}  
];  
  
  (* AREA C - at the free end of cantilever*)  
  SMTMesh["load", "C1", {nElFLANx},  
    {{xC - aRIGHT/2, yC, zC + zTR[xC - aRIGHT/2, 0.]},  
     {xC + aRIGHT/2, yC, zC + zTR[xC + aRIGHT/2, 0.]}} /. rules, "InterpolationOrder" → ordC];  
  
  (* AREA D - Area between web openings*)  
  Do[  
    SMTMesh["load", "C1", {nElFLANx},  
      {{xD[[i]] - aBETWEEN[[i]]/2, yD, zD + zTR[xD[[i]] - aBETWEEN[[i]]/2, 0.}}, {xD[[i]] + aBETWEEN[[i]]/2,  
       yD, zD + zTR[xD[[i]] + aBETWEEN[[i]]/2, 0.]}} /. rules, "InterpolationOrder" → ordD];  
  
  , {i, 1, LLONoφ - 3, 1}  
];  
  
  SMTAddElement["PrescribedDispl", {LLODisplPosition}];  
  
);
```

EVALUATE INITIAL IMPERFERCTION

```
LLOImperfectionData =  
  {{LLOeigvBS1, LLOeigvBS2, LLOeigvBS3, LLOeigvBS4, LLOeigvBS5, LLOeigvBS6}, LLOe0};  
LLOeigv = {Null, Null, Null, Null, Null, Null};  
  
LLOInitialImperfection[] := Module[  
  {φrule, mp, mt, n, q1, ratioe0, q4, imp, pos, eigv},  
  
  φrule = MapThread[Rule, {LLOφ, LLOφInit}];  
  
  hT11 = hT1 /. φrule;  
  hT21 = hT2 /. φrule;  
  SMTInputData[];  
  LLOMakeMeshBeam[φrule, False];  
  SMTAnalysis[];  
  
  (****)  
  LBrestrainedNodesUP =  
    Table[SMTNodeData["X"][[SMTNearest[{0. + i Lc, 0., i Lc * Tan[αS]}][[1]]]], {i, 0, 4}];
```

```

LBrstrainedNodesDOWN = Table[SMTNodeData["X"][[
    SMTNearest[{{0. + i Lc, 0., i Lc * Tan[αS] - (hT11 -  $\frac{i Lc}{L}$  * (hT11 - hT21))}}][[1]]], {i, 0, 4}];

SMTInputData[];
LLOMakeMeshBeam[φrule, True];
(****)

SMTAnalysis[];

SMTNextStep[1, 1];

mp = SMTData["TangentMatrix"];
SMTNewtonIteration[];
SMTIData["GeometricTangentMatrix", 3];
mt = SMTData["TangentMatrix"];
SMTIData["GeometricTangentMatrix", 0];

n = -6;

Quiet[
q1 = Eigensystem[{mt, mp}, n, Method → {"Arnoldi", MaxIterations → 10 000}];
];

q4 = Reverse[q1[[2]]]; (*buckling shapes*)

eigv = Table[
MapIndexed[
Map[If[# < 1, 0, q4[[i]][[#]]] &, Take[# + 1, SMTSpatialDimension]] &, SMTNodeData["DOF"]],
{i, -n}];

Do[LLOeigv[[j]] = 1000 * eigv[[j]] / Max[Map[Norm, eigv[[j]]], {j, -n}];

imp = Sum[LLOeigv[[i]] * LLOImperfectionData[[1, i]], {i, -n}];

(*pomiki vozlišč mreže KE zaradi imperfektnosti*)
LLOImperfection = LLOImperfectionData[[2]] * imp / Max[Map[Norm, imp]];

(*LLOScale=
{Faktor povečave za prikaz uklonskih oblik, Faktor povečave za prikaz nepopolnost} *)
LLOScale = {0.1, 2};

Print[
Column[{
Style["Buckling shapes: ", Bold]
, TabView[
Table[SMTShowMesh["DeformedMesh" → LLOScale[[1]] * Transpose[LLOeigv[[i]]]
, RotationAction → "Clip", SphericalRegion → True, Axes → True, AxesLabel → {"X", "Y", "Z"},
ViewCenter → Automatic, ViewAngle → Automatic, Background → RGBColor[1, 1, 1]], {i, 6}]
, Alignment → Center]
, ""
, Style["Chosen initial imperfection: " <>
ToString[LLOe0] <> "mm;" <> " Scale: " <> ToString[LLOScale[[2]]] <> ":1", Bold]
, SMTShowMesh["DeformedMesh" → LLOScale[[2]] * Transpose[LLOImperfection]
, RotationAction → "Clip", SphericalRegion → True, Axes → True, AxesLabel → {"X", "Y", "Z"},
ViewCenter → Automatic, ViewAngle → Automatic, Background → RGBColor[1, 1, 1]]
]]
];
]
]

If[LLOInitImp, LLOInitialImperfection[]; Print["Initial Imperfection is not considered."]]

```

Construct Objective Function

```
LLOBarrierFunction[v_, b_, μ_, ε_] := Piecewise[
  {
    {-μ Log[v - b], v - b > ε}
    , {(μ * (b^2 - 2*b*v + v^2 + 4*b*ε - 4*v*ε + 3*ε^2 - 2*ε^2*Log[ε])) / (2*ε^2), True}
  }
]
```

Φ1 - minimisation of volume

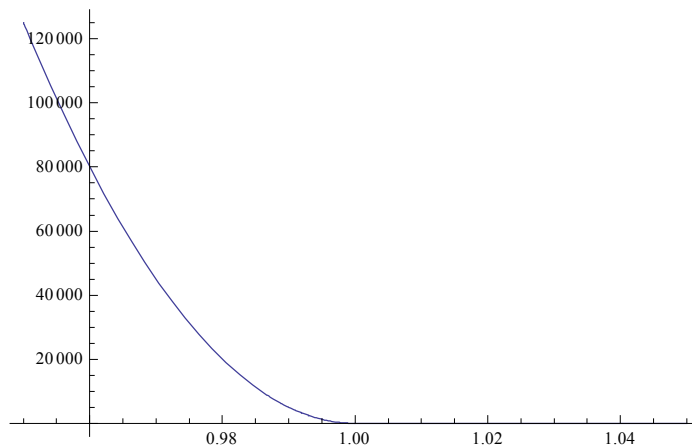
```
volume = Piecewise[{
  {(hWEB1 - 0.5 * (hWEB1 - hWEB2)) * L * tWEB + 2 * tFLAN * bFLAN * L, (hWEB1 - hWEB2) ≥ 0},
  {(hWEB2 - 0.5 * (hWEB2 - hWEB1)) * L * tWEB + 2 * tFLAN * bFLAN * L, (hWEB1 - hWEB2) < 0}}] -
  π * (Sum[r[[i]]^2, {i, 1, LLONoφ - 2}]) * tWEB;
```

Φ1 = volume / 10. ^ 5

Φ2 - load factor has to be equal prescribed ultimate load factor: $\gamma > \gamma_{ult}$

```
Φ2 = LLOBarrierFunction[LLOγ[LLOφ], LLOMinγUltimate, LLOμ, LLOμ / 10.]
  (+LLOBarrierFunction[LLOMinγUltimate, LLOγ[LLOφ], LLOμ, LLOμ / 10.] *);
```

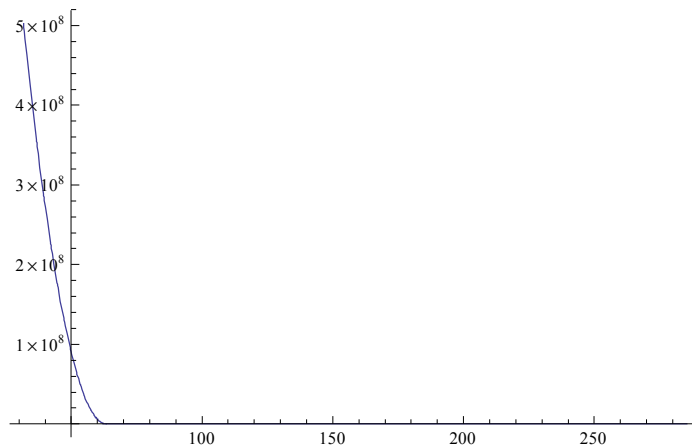
```
Plot[LLOBarrierFunction[LLOγ, LLOMinγUltimate, LLOμInit / 10, LLOμInit / 1000] // Evaluate,
  {LLOγ, 0.95 LLOMinγUltimate, 1.05 LLOMinγUltimate}, PlotRange → All]
```



Φ3 - penalty constrain: $\phi_i > \phi_{min}$

```
Φ3 = Sum[LLOBarrierFunction[LLOφ[[i]], LLOφMinMax[[i, 1]], 0.0001, 0.00001], {i, LLONoφ}];
```

```
Plot[Φ3[[1]], {φ1, LLOAdmissibleMeshφ[[1, 1]], LLOAdmissibleMeshφ[[1, 2]]}, PlotRange → All]
```



Φ4 - penalty constrain: $\phi_i < \phi_{max}$

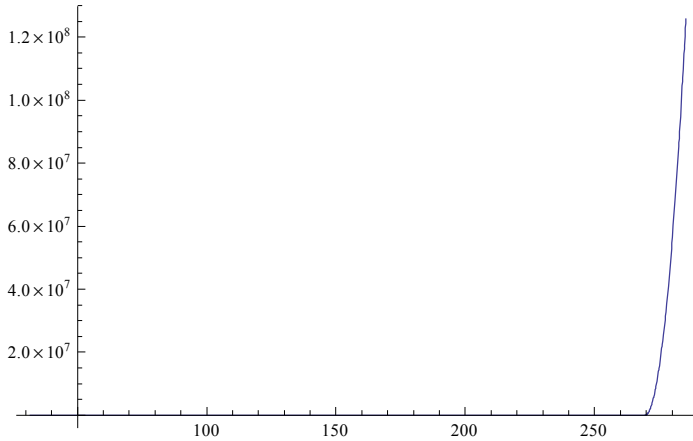
```

 $\Phi_4 = \text{Sum}[\text{LLOBarrierFunction}[\text{LLO}\phi\text{MinMax}[i, 2]], \text{LLO}\phi[[i]], 0.0001, 0.00001], \{i, \text{LLONo}\phi\}];$ 
```

```

Plot[ $\Phi_4[[1]]$ , { $\phi_1$ , LLOadmissibleMesh $\phi[[1, 1]]$ , LLOadmissibleMesh $\phi[[1, 2]]$ }, PlotRange  $\rightarrow$  All]

```



LLO Φ - objective function

```
LLO $\Phi$  =  $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4$ ;
```

```
LLO $\delta\Phi$  = Table[D[LLO $\Phi$ , LLO $\phi[[i]]$ ], {i, LLONo $\phi$ }];
```

```

LLOReport = {
  "Step"  $\rightarrow$  Hold[LLOStep], " $\phi$ "  $\rightarrow$  LLO $\phi$ ,
  "wult/ $\gamma$ ult"  $\rightarrow$  Hold[LLOResponseAll[-1, -1]], " $\Phi$ "  $\rightarrow$  LLO $\Phi$ , " $\delta\Phi$ "  $\rightarrow$  LLO $\delta\Phi$ ,
  " $\phi$ MinMax"  $\rightarrow$  LLO $\phi$ MinMax, " $\phi$ Safe"  $\rightarrow$  LLOadmissibleMesh $\phi$ ,
  " $\Phi_1$ "  $\rightarrow$  {"volume",  $\Phi_1$ , Table[D[ $\Phi_1$ , LLO $\phi[[i]]$ ], {i, LLONo $\phi$ }]},
  " $\Phi_2$ "  $\rightarrow$  {" $\gamma > \gamma_u$ ",  $\Phi_2$ , Table[D[ $\Phi_2$ , LLO $\phi[[i]]$ ], {i, LLONo $\phi$ }]},
  " $\Phi_3$ "  $\rightarrow$  {" $\phi_i > \phi_{min}$ ",  $\Phi_3$ , Table[D[ $\Phi_3$ , LLO $\phi[[i]]$ ], {i, LLONo $\phi$ }]},
  " $\Phi_4$ "  $\rightarrow$  {" $\phi_i < \phi_{max}$ ",  $\Phi_4$ , Table[D[ $\Phi_4$ , LLO $\phi[[i]]$ ], {i, LLONo $\phi$ }]},
};

```

Evaluate Design Velocity Field $\delta X \delta \phi$

```

SMTInputData[];
MakeMesh[{}, False];
SMTAnalysis["SearchFunction"  $\rightarrow$  (# /. MapThread[Rule, {LLO $\phi$ , LLO $\phi$ Init}] &)];
Xn = SMTNodes[All, 2 ;; SMTSpatialDimension + 1];
 $\delta X \delta \phi$  = Map[Flatten, Transpose[Table[D[Xn, LLO $\phi[[i]]$ ], {i, LLONo $\phi$ }]]];

```

Optimisation

```

LLOPrimalAndSensitivityAnalysis["CheckMesh", LLO $\phi$ Init, LLO $\mu$ Init]

LLOPrimalAndSensitivityAnalysis["Primal", LLO $\phi$ Init, LLO $\mu$ Init, "Debug"  $\rightarrow$  "Optimisation"]

{ $\Phi$ min,  $\phi$ min} = FindMinimum[
  LLOPrimalAndSensitivityAnalysis["Primal",  $\phi$ s, LLO $\mu$ Init, "Debug"  $\rightarrow$  "Optimisation"]
  , { $\phi$ s, LLO $\phi$ Init}
  , MaxIterations  $\rightarrow$  50, AccuracyGoal  $\rightarrow$  2
  , Gradient  $\rightarrow$  LLOPrimalAndSensitivityAnalysis["Sensitivity",  $\phi$ s, LLO $\mu$ Init, "Debug"  $\rightarrow$  False]
  , "Method"  $\rightarrow$  {"QuasiNewton", "StepControl"  $\rightarrow$  "LineSearch"}
  , StepMonitor  $\Rightarrow$  Print["FindMinimum update:",  $\phi$ last =  $\phi$ s, LLOResponseAll[-1, -1]]
];

```

```

{ϕmin, ϕmin} = FindMinimum[
  LLOPrimalAndSensitivityAnalysis["Primal", ϕs, LLOμInit/10, "Debug" → "Optimisation"]
  , {ϕs, ϕlast}
  , MaxIterations → 50, AccuracyGoal → 2
  , Gradient → LLOPrimalAndSensitivityAnalysis["Sensitivity", ϕs, LLOμInit/10, "Debug" → False]
  , "Method" → {"QuasiNewton", "StepControl" → "LineSearch"}
  , StepMonitor ⇒ Print["FindMinimum update:", ϕlast = ϕs, LLOResponseAll[[-1, -1]]]
];

{ϕmin, ϕmin} = FindMinimum[
  LLOPrimalAndSensitivityAnalysis["Primal", ϕs, LLOμInit/100, "Debug" → "Optimisation"]
  , {ϕs, ϕlast}
  , MaxIterations → 500, AccuracyGoal → 4
  ,
  Gradient → LLOPrimalAndSensitivityAnalysis["Sensitivity", ϕs, LLOμInit/100, "Debug" → False]
  , "Method" → {"QuasiNewton", "StepControl" → "LineSearch"}
  , StepMonitor ⇒ Print["FindMinimum update:", ϕlast = ϕs, LLOResponseAll[[-1, -1]]]
];

LLOReportAll[[-1]] // TableForm

SMTShowMesh[]

```