

Univerza
v Ljubljani
Fakulteta
*za gradbeništvo
in geodezijo*

*Janova 2
1000 Ljubljana, Slovenija
telefon (01) 47 68 500
faks (01) 42 50 681
fgg@fgg.uni-lj.si*



Univerzitetni študij geodezije,
Geodezija

Kandidat:

Anja Vrečko

Določitev premikov točk v geodetski mreži po metodi Fredericton

Diplomska naloga št.: 840

Mentor:

izr. prof. dr. Tomaž Ambrožič

Somentor:

asist. Aleš Marjetič

Ljubljana, 2010

STRAN ZA POPRAVKE

Stran z napako

Vrstica z napako

Namesto

Naj bo

IZJAVA O AVTORSTVU

Skladno s 27. členom Pravilnika o diplomskem delu UL Fakultete za gradbeništvo in geodezijo,

podpisani/-a **Anja Vrečko** izjavljam, da sem avtorica diplomske naloge z naslovom:

»DOLOČITEV PREMIKOV TOČK V GEODETSKI MREŽI PO METODI FREDERICTON«.

Izjavljam, da prenašam vse materialne avtorske pravice v zvezi z diplomsko nalogo na UL, Fakulteto za gradbeništvo in geodezijo.

Noben del tega zaključnega dela ni bil uporabljen za pridobitev strokovnega naziva ali druge strokovne kvalifikacije na tej ali na drugi univerzi ali izobraževalni inštituciji.

Ljubljana,

(podpis kandidata/-ke)

BIBLIOGRAFSKO - DOKUMENTACIJSKA STRAN IN IZVLEČEK

| | |
|-------------------------|--|
| UDK: | 528.33(043.2) |
| Avtor: | Anja Vrečko |
| Mentor: | izr. prof. dr. Tomaž Ambrožič |
| Somentor: | asist. Aleš Marjetič, univ. dipl. inž. geod. |
| Naslov: | Določitev premikov točk v geodetski mreži po metodi Fredericton |
| Obseg in oprema: | 46 str., 4 pregl., 9 sl., 59 en. |
| Ključne besede: | deformacijska analiza, postopek Fredericton, deformacijski model, deformacijski parameter, iterativni postopek dodeljevanje uteži, geodetski datum, mreža Pesje |

Izveček

Diplomska naloga obravnava postopek Fredericton, ki je eden od postopkov deformacijske analize za določitev premikov točk v geodetski mreži. V uvodu so predstavljeni specifični vidiki določevanja premikov v geodeziji. Pri tem je poseben poudarek na vplivu geodetskega datuma na vektorje premikov, ki jih dobimo iz razlik izravnanih koordinat v dveh terminskih izmerah. Sledi teoretična izpeljeva in opis postopka v petih korakih: izravnava terminskih izmer, identifikacija možnih deformacijskih modelov, določitev deformacijskih parametrov za izbrane deformacijske modele, statistična ocena deformacijskih modelov in izbira najboljšega, grafična predstavitev izbranega deformacijskega modela. Postopek smo uporabili na konkretnem primeru, na podatkih iz mreže Pesje. Obdelana so bila opazovanja iz dveh terminskih izmeri. V mreži ni bilo defekta konfiguracije, prisoten pa je bil defekt datuma, saj je bil uporabljen koordinatni pristop. Rezultati so se nekoliko razlikovali od rezultatov postopkov Delft, Karlsruhe, Hannover, bolj pa od rezultatov postopka München. Postopek Fredericton je v primerjavi z drugim postopki manj avtomatičen, saj zahteva geodetovo odločitev o možnih deformacijskih modelih. Prednost postopka je, da ga je možno prilagoditi specifičnim situacijam (npr. defekt konfiguracije mreže) tako, da je splošno uporaben.

BIBLIOGRAPHIC – DOCUMENTALISTIC INFORMATION

UDK: 528.33(043.2)
Author: Anja Vrečko
Supervisor: Assoc. Prof. Tomaž Ambrožič
Co - supervisor: Assist. Aleš Marjetič
Title: Determination of Displacement Geodetic Network Points, Fredericton Approach
Notes: 46 p., 4 tab., 9 fig., 59 eq.
Key word: deformation analysis, Fredericton method, deformation parameter, deformation model, Iterative Weighted Projection, geodetic datum, geodetic network Pesje

Abstract

This graduate thesis deals with the Fredericton approach for determining displacements in geodetic networks. In the introduction strain analysis is presented from a geodetic point of view. Special emphasis is placed on the problem of geodetic datum. It is followed by a theoretical explanation of the method in five steps: adjustment of observation for each epoch, preliminary identification of deformation models, estimation of deformation parameters, checking the deformation models and selecting the best one, graphical presentation of the selected deformation model. The method was applied to observations made in a relative geodetic network Pesje in two epochs. The network did not have defects of configuration but a datum defect was present from the use of the coordinate approach. The results differ slightly from the results obtained from the Delft, Hannover and Karlsruhe approaches and even more from the results obtained from the Munich approach. Compared to other methods, the Fredericton method is less automatic since it requires a human decision on the preliminary identification of deformation models. The advantage of this method is its general applicability, which can be achieved by adapting the method to specific situations within a geodetic network.

ZAHVALA

Zahvaljujem se mentorju izr. prof. dr. Tomažu Ambrožiču, uni. dipl. inž. geod. in somentorju asist. Alešu Marjetiču, uni. dipl. inž. geod. za pomoč, potrpežljivost in nasvete pri nastajanju diplomske naloge. Zahvala gre še asist. Klemnu Kregarju, uni. dipl. inž. geod. in asist. mag. Oskarju Sterletu, uni. dipl. inž. geod. za njune odgovore in komentarje.

Hvala vsem prijateljem in sošolcem, ki so tekom študija z mano delili »fixed & floating«. Tistim, ki so si upali deliti slednje še posebej hvala.

Hvala tudi moji družini. Ker lahko grem in ker lahko pridem ... tudi brez diplome☺.

*"Živiš lahko na dva načina.
Lahko se pretvarjaš kot, da ni nič čudežno.
Lahko pa imaš vse za čudež."
A. Einstein*

KAZALO

| | |
|---|----|
| KAZALO SLIK..... | IX |
| KAZALO PREGLEDNIC | X |
| 1 UVOD | 1 |
| 1.1 Namen in sestava diplomskega dela | 1 |
| 1.2 Splošno o določevanju premikov | 2 |
| 1.3 Specifični vidiki določevanja premikov v geodeziji..... | 4 |
| 1.4 Geodetski datum pri določevanju premikov | 5 |
| 2 POSTOPEK FREDERICTON..... | 9 |
| 2.1 Izravnava opazovanj in odkrivanje grobih pogreškov | 11 |
| 2.1.1 Izravnava opazovanj..... | 11 |
| 2.1.2 Odkrivanje grobih pogreškov | 13 |
| 2.2 Identifikacija možnih deformacijskih modelov..... | 15 |
| 2.2.1 Iterativni postopek prilagajanja uteži | 16 |
| 2.2.2 Aproksimacija polja premikov s polinomom | 19 |
| 2.2.3 Primeri osnovnih deformacijskih modelov | 20 |
| 2.3 Določitev deformacijskih parametrov..... | 21 |
| 2.3.1 Izračun za dve terminski izmeri..... | 25 |
| 2.4 Pregled deformacijskih modelov in izbira najboljšega | 27 |
| 2.5 Grafična predstavitev izbranega deformacijskega modela | 29 |
| 3 PRIMER MREŽE PESJE..... | 30 |
| 3.1 Izravnava in odkrivanje grobih pogreškov v obeh terminskih izmerah..... | 31 |
| 3.2 Izbira možnih deformacijskih modelov | 33 |
| 3.3 Določitev in statistično testiranje deformacijskih parametrov | 36 |

| | | |
|-----|--|----|
| 3.4 | Izbira najustrežnejšega modela..... | 38 |
| 4 | PREIMERJAVA REZULTATOV Z REZULTATI DRUGIH METOD..... | 40 |
| 5 | ZAKLJUČEK | 45 |
| 6 | VIRI..... | 47 |
| | PRILOGE | |

KAZALO SLIK

| | |
|---|----|
| Slika 1: Shematični prikaz premikov točk v dveh terminskih izmerah v prosti mreži. | 6 |
| Slika 2: Shematični prikaz premikov točk v dveh terminskih izmerah v vpeti mreži. Dana sta položaj točke T3 in smer iz točke T3 na T2. | 7 |
| Slika 3: Prikaz pravega premika točke T4, ter premika iz razlik koordinat izravnanih v dveh terminskih izmerah s prosto mrežo. | 8 |
| Slika 4: Ilustrativni prikaz spremembe vektorjev premikov pred (levo) in po (desno) uporabi postopka Iterativnega dodeljevanja uteži. | 18 |
| Slika 6: Vektorji koordinatnih razlik med prvo in drugo terminsko izmero mreže Pesje po uporabi postopka IWP. | 34 |
| Slika 7: Razvrstitev točk v bloke glede na premike. | 35 |
| Slika 8: Grafična predstavitev premikov določenih z izbranim modelom po postopku Fredericton. | 39 |
| Slika 9: Grafična predstavitev vektorjev premikov iz posameznega postopka deformacijske analize. | 42 |

KAZALO PREGLEDNIC

| | |
|--|----|
| Preglednica 1: Razdelitev na bloke, točke in parametri za vsak blok. | 35 |
| Preglednica 2: Identificirani deformacijski modeli, določeni deformacijski parametri ter njihove stopnje zaupanja za mrežo Pesje. | 36 |
| Preglednica 3: Primerjava rezultatov petih deformacijskih analiz. | 40 |
| Preglednica 4: Vrednosti testne statistike T^2 za deformacijske modele drugih postopkov. | 44 |

1 UVOD

1.1 Namen in sestava diplomskega dela

Premiki v našem okolju so stalnica. Določiti jih želimo predvsem zato, da bi preprečili ali omilili negativne posledice, ki bi jih lahko imeli na naše življenje. Pravilno določeni premiki so osnova za razumevanje in modeliranje dogajanj v naravi ter na grajenih objektih.

Za določevanje premikov v geodeziji obstaja veliko postopkov. Namen tega diplomskega dela je podrobno opisati in uporabiti postopek Fredericton za določitev premikov točk v geodetski mreži.

V uvodu naloge so najprej predstavljene splošne značilnosti določevanja premikov, ki jim sledi geodetski vidik in specifični problemi pri določevanju premikov v geodeziji. Posebna pozornost je namenjena vplivu geodetskega datuma na določevanje premikov, kjer je poudarek na grafični predstavitvi le-tega. V drugem poglavju je teoretično izpeljan postopek Fredericton. Pri tem se osredotočimo na koordinatni pristop v relativnih mrežah, vendar je nakazana obdelava tudi za primer pristopa z opazovanji. Sledi uporaba postopka na ravninski mreži Pesje, ter primerjava z rezultati drugih postopkov. To je pomembno, saj ima vsak postopek svoje prednosti, slabosti in omejitve. Za odločitev, kateri postopek uporabiti na neki mreži, je nujno razumeti kakšne so omejitve posameznega postopka, v čem se razlikuje od drugih ter kako to vpliva na rezultate. V zaključku povzamemo in izpostavimo glavne značilnosti postopka Fredericton.

V tem delu se ne ukvarjamo z metodami in postopki merjenja, izbiro položajev in načina stabilizacije točk, redukcijo meritev, ki so prav tako zelo pomembni kadar moramo doseгти visoke natančnosti opazovanj. Podatki, uporabljeni v nalogi, so predhodno obdelani in predpostavili smo pravilnost in optimalnost predhodnih postopkov.

1.2 Splošno o določevanju premikov

Poglejmo najprej osnovne splošno znane zveze med premiki in deformacijami objekta. Tematika je podrobno obravnavana npr. v knjigi Osnove mehanike trdnih teles (Stanek, Turk 1998). Tukaj le navedemo enačbe, ki jih bomo kasneje uporabili v koraku določitve deformacijskih parametrov.

Premik objekta v prostoru in času je posledica spremembe lege, oblike in velikosti objekta. Spremembo lege objekta opišemo kot seštevek togega premika in rotacije objekta. Obliko in velikost lahko spremenijo le objekti, ki so deformabilni (lastnost materiala). Tako spremembo imenujemo tudi deformacija objekta. Z enačbo opišemo zvezo med položajem telesa pred spremembo in premikom telesa (Chen, 1983):

$$\mathbf{d}_p = \mathbf{t} + (\mathbf{R}(\omega) - \mathbf{I})\mathbf{r}_0 + \mathbf{\tilde{d}}, \quad \dots (1)$$

kjer so, če obravnavamo premike v ravnini:

$\mathbf{d}_p = [d_y, d_x]^T$... vektor premika objekta,

$\mathbf{t} = [t_y, t_x]^T$... vektor premika togega objekta,

$\mathbf{R}(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}$... rotacijska matrika za majhen kot zasuka ω ,

$\mathbf{r}_0 = [y, x]^T$... položaj objekta pred premikom,

$\mathbf{\tilde{d}}$... vpliv deformacije objekta na premik objekta.

Postopke za določevanje premikov v geodeziji imenujemo deformacijska analiza. Cilj deformacijske analize v geodeziji je torej določiti vse tri člene v zgornji enačbi; premik objekta, rotacijo objekta in deformacijo objekta.

Če poznamo polje premikov (t.j. vektor premika za vsako točko objekta), lahko z odvajanjem komponent vektorja premikov v smereh koordinatnih osi dobimo matriko gradienta vektorskega polja premikov:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial dy}{\partial y} & \frac{\partial dy}{\partial x} \\ \frac{\partial dx}{\partial y} & \frac{\partial dx}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \dots (2)$$

Matrika \mathbf{E} nosi informacije o deformacijah (raztezkah in strigu) ter o rotaciji objekta. Izrazimo jih tako, da matriko \mathbf{E} razdelimo na simetrični in antisimetrični del:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yx} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{xx} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} = \quad \dots (3)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial dy}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial dy}{\partial x} + \frac{\partial dx}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial dy}{\partial x} + \frac{\partial dx}{\partial y} \right) & \frac{\partial dx}{\partial x} \end{bmatrix} + \quad \dots (4)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial dy}{\partial x} - \frac{\partial dx}{\partial y} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial dy}{\partial x} - \frac{\partial dx}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

Dobimo splošno znane zveze za izračun osnovnih deformacijskih parametrov:

- razteška v smeri koordinatnih osi: $\varepsilon_{yy} = \frac{\partial dy}{\partial y}$, $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial dx}{\partial x}$,
- strižne deformacije: $\varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial dy}{\partial x} + \frac{\partial dx}{\partial y} \right)$ in
- rotacije telesa: $\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial dy}{\partial x} - \frac{\partial dx}{\partial y} \right)$.

Vseh šest deformacijskih parametrov (t_y , t_x , ε_{yy} , ε_{xx} , ε_{yx} , ω), lahko relativno preprosto določimo, če poznamo vektorje premikov vsaj treh točk na objektu in predpostavimo, da gre za homogene deformacije. Sestavimo lahko sistem šestih enačb s šestimi neznankami in izračunamo deformacijske parametre. Če poznamo premike več točk, deformacijske parametre določimo po metodi najmanjših kvadratov.

1.3 Specifični vidiki določevanja premikov v geodeziji

Pri določevanju premikov v geodeziji se pojavijo naslednji problemi (Chen, 1983):

- deformacijski model ni (v celoti) poznan,
- ne moremo določiti (»pravega«) polja premikov, saj nimamo informacije o verjetno mirujočih točkah, s katerimi bi lahko zagotovili enak geodetski datum pred in po deformaciji,
- razmerja med utežmi (natančnosti) različnih tipov opazovanj niso vedno znana,
- opazovanja lahko vsebujejo grobe in/ali sistematične pogreške.

Razvili so se številni postopki, ki pri določevanju premikov v geodetski mreži zaobidejo ali rešijo zgornje probleme. V želji po poenotenju teh postopkov je bil leta 1978 sklican 2. simpozij delovne skupine za deformacijska merjenja pri mednarodni zvezi geodetov FIG. Do poenotenja ni prišlo, razvitih je bilo pet postopkov, poimenovanih po krajih, kjer so bili razviti (Ambrožič, 1996). To so:

- postopek Hannover (Ambrožič, 1996),
- postopek Karlsruhe (Trunk, 2005),
- postopek Delft (Zemljak, 2006),
- postopek München (Soldo, 2009) ter
- postopek Fredericton, ki je obravnavan v tej diplomski nalogi.

Ti postopki se ukvarjajo predvsem z verjetno mirujočimi točkami v geodetski mreži za zagotovitev geodetskega datuma. Premike točk vrednotijo s statistično analizo ter odločajo ali je ugotovljeni premik statistično značilen (Savšek et al., 2010). Raziskovalni centri (Stuttgart, Calgary, kasneje tudi Hannover ter Fredericton), ki so se ukvarjali z deformacijsko analizo izven okvira omenjene delovne skupine, so bolj težili k fizikalni interpretaciji in modeliranju razmerij med vzroki /delovanje sil/ in posledicami /deformacije/ (Welsh, Heunecke, 2001).

Z razvojem tehnologije, ki omogoča pogostejše izmere ali celo kontinuirano spremljanje objektov, se je razvoj deformacijskih modelov usmeril v razumevanje dinamike procesa. Tako se danes v deformacijski model vključuje tudi sile, ki povzročijo premike, upošteva se časovna odvisnost premikov ter fizikalne značilnosti telesa, ki se deformira. Take modele

imenujemo dinamični modeli. V praksi se, ker ni vedno na voljo vseh informacij o procesu, pogosteje uporabijo poenostavljene izpeljanke (Welsh, Heunecke, 2001):

- statični modeli, ki primerjajo geometrijo mreže v različnih terminskih izmerah in modelirajo vpliv vzročnih sil na premike,
- kinematični modeli, ki v model vključujejo časovno odvisnost premikov objekta,
- modeli kongruence, ki primerjajo geometrijo mreže v različnih terminskih izmerah.

Postopek Fredericton, ki je obravnavan v tem delu, primerja geometrijo mreže v več terminskih izmerah. V fazi identificiranja možnih deformacijskih modelov se opira tudi na informacije o fizikalnih značilnostih obravnavanega telesa, če so le-te na voljo in ga uvrščamo med statične modele. Postopek je dodelan tako, da je splošno uporaben za določevanje premikov (glej tudi poglavje 2), ne glede na morebiten defekt konfiguracije v mreži ali različno določitev geodetskega datuma v terminskih izmerah.

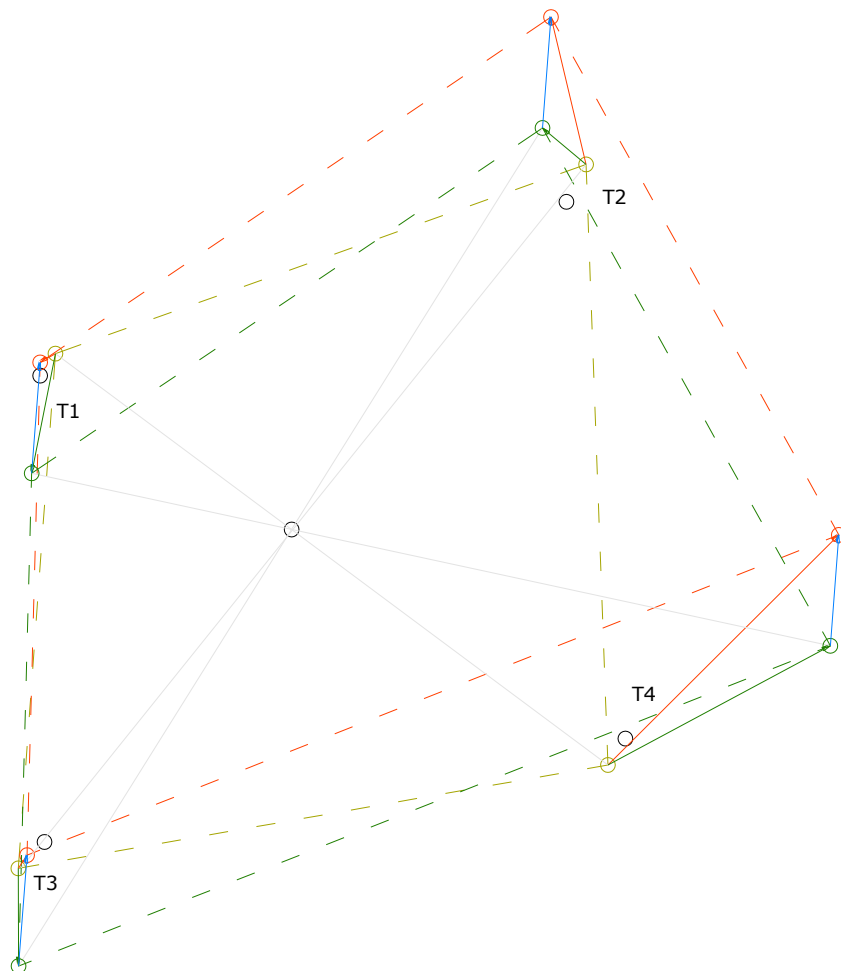
1.4 Geodetski datum pri določevanju premikov

Namen tega poglavja je predstaviti vpliv odprave defekta ranga matrike normalnih enačb v fazi izravnave opazovanj na premike, ki jih določimo kot razliko koordinat iz izravnave terminskih izmer.

Defekt ranga matrike normalnih enačb je posledica defekta konfiguracije mreže in nedoločenih parametrov geodetskega datuma. Nedoločene parametre geodetskega datuma odpravimo z vpeljavo minimalnega števila veznih enačb v postopku izravnave. S tem ne vplivamo na geometrijo mreže, ampak na njeno umeščenost v koordinatni sistem, na koordinate točk v mreži torej. Na podlagi koordinat točk v različnih terminskih izmerah izračunamo vektorje premikov, ki so potemtakem tudi odvisni od zagotovitve geodetskega datuma. Kadar parametre geodetskega datuma zagotovimo z danimi količinami govorimo o vpeti mreži, kadar pa z notranjimi vezmi govorimo o prosti mreži. Sliki 1 in 2 prikazujeta vpliv geodetskega datuma na določitev premikov točk v obeh primerih.

Na slikah so s črnimi krogi označene približne koordinate točk, ki so iste za obe terminski izmeri. Rumeni krogi so položaji točk po izravnavi prve terminske izmere, zeleni krogi so

položaji točk po izravnavi druge terminske izmere. Rdeči krogi predstavljajo dejanski položaj točk v drugi terminski izmeri. S polnimi črtami so označeni premiki, ki si jih bomo podrobneje ogledali na sliki 3. Premaknili sta se točki T2 in T4, točki T1 in T3 se med terminskima izmerama nista premaknili.

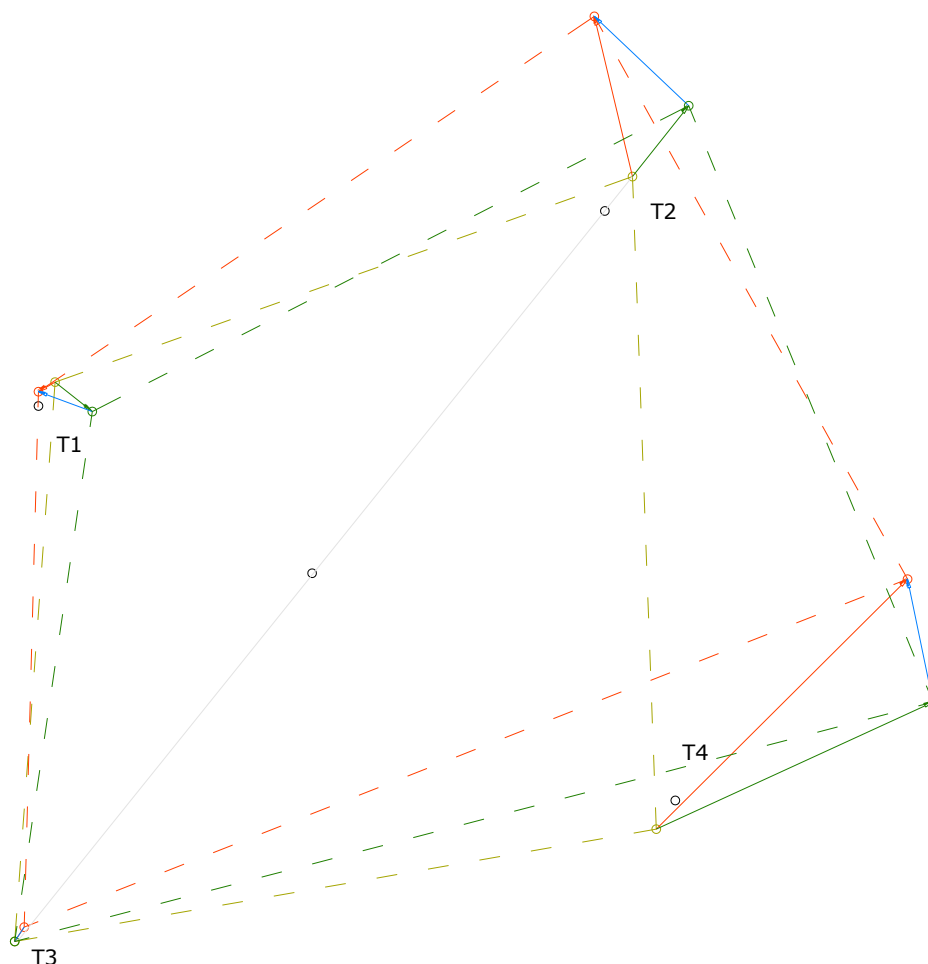


Slika 1: Shematični prikaz premikov točk v dveh terminskih izmerah v prosti mreži.

V tem primeru (slika 1) je bila mreža v obeh terminskih izmerah izravnan kot prosta. Minimalne vezi, zahtevajo, da se težišče mreže ne premakne in da mreža ne rotira. Opazovanja v drugi terminski izmeri se torej nanašajo na rdeče položaje, vendar so rezultat izravnave zeleni položaji točk. Vidimo, da sta spremenjena tudi položaja točk T1 in T3, ki se nista premaknili, spremembi položajev točk T2 in T4 pa sta manjši od dejanskih premikov.

V primeru vpete mreže (slika 2) dobimo popačene vektorjev premikov, če se katera od danih količin nanaša na točko, ki se je med terminskima izmerama premaknila. Tak je slučaj na sliki

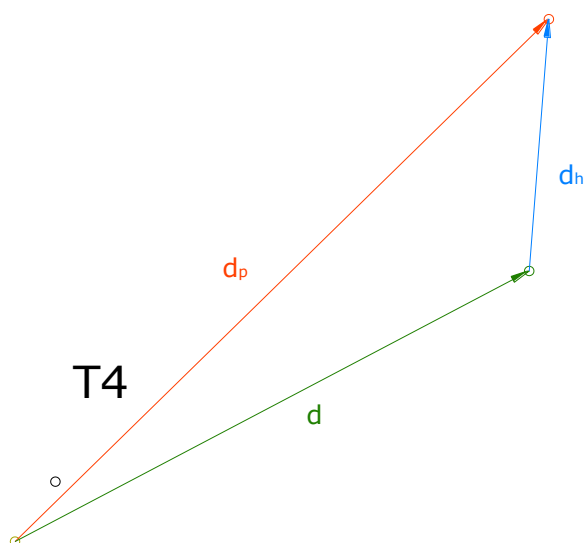
2, kjer je kot dana obravnavana smer iz točke T3 na premaknjeno točko T2. To je povzročilo zasuk mreže okoli dane točke. Posledica so popačeni premiki na vseh točkah (razen na dani).



Slika 2: Shematični prikaz premikov točk v dveh terminskih izmerah v vpeti mreži. Dana sta položaj točke T3 in smer iz točke T3 na T2.

Če bi se dane količine pri izravnavi vpete mreže nanašale samo na točke, ki se med terminskimi izmerami niso premaknile, bi položaji točk po izravnavi druge terminske izmere sovpadali z dejanskimi položaji točk (zelena mreža bi prekrila rdečo). V tem primeru ne bi imeli težav zaradi vpliva geodetskega datuma na premike točk.

V deformacijski analizi želimo določiti dejanske premike točk. Podrobneje si oglejmo situacijo na eni izmed premaknjenih točk, na točki T4:



Slika 3: Prikaz pravega premika točke T4, ter premika iz razlik koordinat izravnanih v dveh terminskih izmerah s prosto mrežo.

Po izravnavi obeh terminskih izmer imamo torej položaj rumene (1. terminska izmera) in zelene (2. terminska izmera) točke. Iz razlike teh koordinat lahko dobimo »nepravi« vektor premika \mathbf{d} na sliki označen z zeleno barvo. Nas zanima »pravi« vektor premika \mathbf{d}_p , na sliki označen z rdečo, ki ga neposredno ne moremo izračunati, saj ne poznamo »pravega« položaja točke (glede na prvo izmero) v drugi izmeri (rdeč krogec). Cilj deformacijske analize je določitev pravega premika \mathbf{d}_p (rdeč vektor) za vsako točko v mreži.

Znani so trije načini, ki odpravijo vpliv geodetskega datuma na premike (Chen, 1983):

- uporaba generalizirane inverzije matrike \mathbf{N} ,
- transformacija S in
- metoda projekcije v prostor parametrov.

V postopku Fredericton se za izris pravega polja premikov uporabi iterativni postopek prilagajanja uteži, ki temelji na transformaciji S , za določitev deformacijskih parametrov pa psevdoinverzija (eden izmed načinov izračuna generalizirane inverzije) matrike \mathbf{N} .

2 POSTOPEK FREDERICTON

Postopek Fredericton so razvili A. Chrzanowski, Y. Q. Chen in J. Secord na Oddelku za geodezijo univerze New Brunswick v Frederictonu v Kanadi.

Avtorji postopka so želeli zagotoviti njegovo splošno uporabnost. Postavili so si naslednje zahteve, ki so usmerjale razvoj postopka (Chen, 1983):

- Postopek mora biti uporaben za absolutne in relativne mreže. Absolutne so tiste mreže, pri katerih nekatere točke, ki jih imenujemo osnovne ali referenčne, ležijo izven območja deformacije, se ne premikajo in določajo koordinatni sistem. Relativne mreže so tiste, pri katerih vse točke ležijo v območju deformacij ali na objektu, oz. nismo gotovi v njihovo premikanje (Mozetič, 2006).
- Postopek mora biti uporaben za katerikoli tip deformacij, tako za določanje premika posamezne točke, kot pri analizi deformacij bloka točk.
- Postopek mora biti uporaben za obravnavo eno, dvo in tri razsežnostnih geodetskih mrež.
- Postopek mora omogočati vključitev geodetskih in tudi fizikalno – mehanskih opazovanj (nakloni, napetosti, ...) v izračun deformacijskih parametrov.
- Postopek mora biti uporaben za poljubno geometrijo geodetske mreže, tudi za primere nepopolnih mrež z defektom konfiguracije.
- Postopek mora biti uporaben ne glede na določitev geodetskega datuma (vpeta mreža z minimalni številom vezi, prosta mreža) v koraku izravnave.

Osnovna ideja postopka je na podlagi statističnih značilnosti izbrati najustreznejši deformacijski model za polje premikov in z metodo najmanjših kvadratov določiti deformacijske parametre, ki so neodvisni od določitve geodetskega datuma.

Imamo dve možnosti (Chrzanowski, Chen, Secord, 1982):

- V izračun vključimo opazovanja. Polje premikov tako podaja razliko med opazovanji v prvi in drugih terminskih izmerah (za vsako terminsko izmero dobimo svoje polje

premikov) za vsako točko obravnavanega objekta, področja. Ta način poimenujmo pristop z opazovanji.

- Iz opazovanj izračunamo koordinate točk, kar naredimo s posredno izravnavo. Polje premikov v tem primeru podaja razliko med položajem točke v prvi in drugih terminskih izmerah. Ta način poimenujmo koordinatni pristop.

Prednosti pristopa z opazovanji sta, da se s tvorjenjem razlik neposredno med opazovanji eliminirajo morebitni sistematični pogreški ter da so opazovanja neodvisna od geodetskega datuma in so tako dobljene razlike med opazovanji iz različnih terminskih izmer že tudi prave razlike. Pri koordinatnem pristopu so določene koordinate točk odvisne od zagotovitve geodetskega datuma in premiki, ki jih dobimo iz razlik koordinat, niso pravi premiki, kar smo razložili v poglavju 1.4.

Prednost koordinatnega pristopa je, da je formulacija deformacijskega modela enostavna in pregledna. Grafična predstavitev koordinat, še bolj pa razlik koordinat, je veliko bolj nazorna kot grafična predstavitev opazovanj oziroma njihovih razlik. To bistveno pripomore k boljši izbiri možnih deformacijskih parametrov v drugem koraku postopka Fredericton. Druga pomembna prednost tega pristopa je, da so opazovanja predhodno izravnana in so izločeni grobi pogreški. V postopku določanja deformacijskih parametrov tako ne pride do »mešanja« vplivov grobo pogrešenih opazovanj in odstopanj deformacijskega modela.

V nekaterih korakih postopka se izračun razlikuje glede na to katero od zgornjih dveh možnosti izberemo, vendar v nadaljevanju obravnave obeh pristopov ne ločimo, saj je večji del postopka enak v obeh primerih. Ko temu ni tako, na to eksplicitno opozorimo in predstavimo izračun za oba pristopa.

Potek postopka Fredericton lahko razdelimo v pet korakov, ki so v nadaljevanju tudi podrobneje opisani (Secord, 1985):

1. Izravnava opazovanj v geodetski mreži po metodi najmanjših korakov, določitev natančnosti opazovanj in koordinatnih neznank ter odkrivanje grobih pogreškov v opazovanjih. Ta korak se izvede samo kadar se odločimo za koordinatni pristop.
2. Določitev možnih deformacijskih modelov.

3. Določitev deformacijskih parametrov za izbrane deformacijske modele.
4. Statistična ocenitev deformacijskih modelov in izbira najboljšega.
5. Grafični prikaz izbranega modela z bloki.

2.1 Izravnava opazovanj in odkrivanje grobih pogreškov

2.1.1 Izravnava opazovanj

Kadar se odločimo za koordinatni pristop k deformacijski analizi po postopku Fredericton, koordinate točk ocenimo v postopku izravnave. Uporabimo Gauss-Markov model posredne izravnave, ki povezuje slučajni vektor opazovanj \mathbf{l} s slučajnim vektorjem neznank \mathbf{x} (Grigillo, Stopar, 2003):

$$\mathbf{v}_i + \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i = \mathbf{c}_i - \mathbf{l}_i = \mathbf{f}_i, \quad i = 1, \dots, k, \quad \dots (5)$$

$$\Sigma_{\mathbf{l}_i} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{l}_i} = \sigma_0^2 \mathbf{P}_{\mathbf{l}_i}^{-1}, \quad \dots (6)$$

kjer so:

i ... se nanaša na posamezno terminsko izmero,

k ... število terminskih izmer,

\mathbf{v} ... vektor popravkov opazovanj,

\mathbf{A} ... matrika koeficientov enačb popravkov opazovanj,

\mathbf{x} ... vektor popravkov približnih vrednosti koordinatnih neznank (orientacijske neznanke so eliminirane),

\mathbf{c} ... vektor konstant,

\mathbf{l} ... vektor opazovanj,

\mathbf{f} ... vektor odstopanj,

σ_0^2 ... referenčna varianca a priori,

$\Sigma_{\mathbf{l}}$... kovariančna matrika opazovanj,

\mathbf{Q}_{ll} ... matrika kofaktorjev opazovanj,

\mathbf{P}_{ll} ... matrika uteži opazovanj.

Lahko se zgodi, da se konfiguracija in geometrija mreže med terminskimi izmerami razlikujeta, zato vektor neznank \mathbf{x} ni nujno istih dimenzij v vsaki terminski izmeri. V takem primeru je potrebno v nadaljnji obravnavi vektor \mathbf{x} dopolniti, tako da vsebuje isto število elementov za vse terminske izmere. V pripadajoči matriki uteži na ustrezna mesta postavimo ničle (glej tudi poglavje 2.3). Terminske izmere skoraj vedno izravnavamo ločeno. Le kadar so opazovanja v različnih terminskih izmerah medsebojno odvisna, je potrebno take terminske izmere izravnati skupaj. Odvisnost opazovanj med terminskimi izmerami vključimo v model z neničelnimi elementi izven diagonale matrike uteži, ki je v nasprotnem primeru bločno diagonalna (Chrzanowski, Chen, Secord, 1982).

Sistem enačb popravkov opazovanj je predoločen, kar rešimo z metodo najmanjših kvadratov. Druga težava je defekt ranga matrike \mathbf{A} ter posledično tudi matrike \mathbf{N} , matrike koeficientov normalnih enačb. Za odpravo slednjega določimo ustrezne notranje (ali zunanje) vezi med opazovanji. Iz sistema teh enačb dobimo matriko \mathbf{H} . Izpolniti je torej potrebno dva pogoja (Grigillo, Stopar, 2003):

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{P}_{ll_i} \mathbf{v}_i = \min. , \quad \dots (7)$$

$$\mathbf{H}^T \mathbf{x}_i = 0. \quad \dots (8)$$

Rešitev izračunamo z reševanjem sistema normalnih enačb:

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_{ll_i} \mathbf{A}_i \quad \dots (9)$$

$$\mathbf{x}_i = (\mathbf{N}_i + \mathbf{H}\mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_{ll_i} \mathbf{f}_i \quad \dots (10)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{x}_i^0 + \mathbf{x}_i \quad \dots (11)$$

$$\hat{\mathbf{l}}_i = \mathbf{l}_i + (\mathbf{f}_i - \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i) \quad \dots (12)$$

$$\mathbf{v}_i = \hat{\mathbf{I}}_i - \mathbf{l}_i \quad \dots (13)$$

$$\hat{\sigma}_{0i}^2 = \frac{\mathbf{v}_i^T \mathbf{P}_{ll_i} \mathbf{v}_i}{n_i - u_i + d_i} \quad \dots (14)$$

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}_i} = (\mathbf{N}_i + \mathbf{H}\mathbf{H}^T)^{-1} - \mathbf{H}(\mathbf{H}^T \mathbf{H}\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \quad \dots (15)$$

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{v}\mathbf{v}_i} = \mathbf{Q}_{ll_i} - \mathbf{A}_i(\mathbf{N}_i + \mathbf{H}\mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{A}_i^T, \quad \dots (16)$$

kjer so:

\mathbf{H} ... matrika notranjih vezi,

\mathbf{N} ... matrika normalnih enačb,

$\hat{\mathbf{x}}$... vektor ocenjenih neznank,

$\hat{\mathbf{I}}$... vektor izravnanih opazovanj,

$\hat{\sigma}_0^2$... referenčna varianca a posteriori,

n ... število opazovanj,

u ... število vseh neznank (tudi neznank, ki smo jih eliminirali),

d ... datumski defekt mreže (za ravninsko mrežo, v kateri je merjena vsaj ena dolžina: $d=3$),

$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}$... matrika kofaktorjev ocenjenih koordinatnih neznank,

$\mathbf{Q}_{\mathbf{v}\mathbf{v}}$... matrika kofaktorjev popravkov opazovanj.

2.1.2 Odkrivanje grobih pogreškov

Izravnavi sledi še odkrivanje grobih pogreškov v opazovanjih. S tem zagotovimo, da so iz obdelave odstranjena opazovanja, ki ne ustrezajo predpostavki o normalno porazdeljenih opazovanjih. Obstaja več metod, ki so podrobno opisane v članku avtorjev Grigillo in Stopar iz leta 2003 (Grigillo, Stopar, 2003). Tukaj podajamo kratek opis globalnega testa modela in

metode »data snooping«, ki je uporabljena za odkrivanje grobo pogrešenih opazovanj, kadar poznamo uteži opazovanj.

2.1.2.1 Globalni test modela

Z globalnim testom modela primerjamo statistično skladnost referenčnih varianc a priori in a posteriori, ki bi morala veljati glede na ničelno hipotezo:

H_0 : *Matematični in stohastični model sta pravilna in popolna, med opazovanji ni grobih pogreškov.*

H_{1a} : *Uteži opazovanji niso pravilno določene.*

H_{1b} : *Med opazovanji je prisoten grobi pogrešek.*

Tvorimo testno statistiko $Y_i = \frac{\hat{\sigma}_{0i}^2 f_i}{\sigma_0^2}$ (indeks i se, kot v prejšnjem poglavju, nanaša na posamezno terminsko izmero), ki se porazdeljuje po porazdelitvi χ^2 s $f_i = n_i - u_i + d_i$ prostostnimi stopnjami. H_0 ne zavrnemo, če testna statistika zavzame vrednost v intervalu $\chi_{\frac{\alpha}{2}, f_i}^2 < Y_i < \chi_{1-\frac{\alpha}{2}, f_i}^2$. Pri tem je stopnja tveganja testa največkrat izbrana kot $\alpha = 0.05$. Če pade testna statistika Y izven izračunanega intervala, H_0 zavrnemo. Možna sta dva vzroka:

- opazovanjem so dodeljene nepravilne uteži,
- med opazovanji so prisotni grobi pogreški.

2.1.2.2 Data snooping

Pri metodi »data snooping« predpostavimo, da je referenčna varianca a priori znana in so tako uteži opazovanj prave. Zato kot alternativno testiramo hipotezo:

H_{1b} : *Med opazovanji je prisoten grobi pogrešek.*

Testno statistiko sestavimo za vsako opazovanje v posamezni terminski izmeri:

$$\omega_{ij} = \frac{\mathbf{v}_{ij}}{\sigma_{\mathbf{v}_{ij}}} = \frac{\mathbf{v}_{ij}}{\sigma_0 \sqrt{q_{\mathbf{v}\mathbf{v}_{ij}}}}, \quad \dots (17)$$

kjer so:

\mathbf{v}_{ij} ... popravek posameznega opazovanja j v i -ti terminski izmeri,

$q_{vv_{ij}}$... j -ti diagonalni element matrike kofaktorjev popravkov opazovanj $\mathbf{Q}_{vv_{ij}}$.

Testna statistika ω_{ij} se porazdeljuje po standardizirani normalni porazdelitvi. Opazovanje smatramo kot domnevno grobo pogrešeno s stopnjo tveganja α , če velja: $|\omega_{ij}| < N_{\frac{\alpha}{2}}(0,1)$.

Ker se z metodo najmanjših kvadratov odstopanje zaradi grobo pogrešenega opazovanja prelije tudi na popravke drugih opazovanj, je potrebno nekaj previdnosti pri odstranjevanju domnevno grobo pogrešenega opazovanja. Pomagamo si z matriko nadštevilnosti:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{I} - \mathbf{A}_i(\mathbf{N}_i + \mathbf{H}\mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_{11_i}, \quad \dots (18)$$

katere elementi v vrstici nam povedo, koliko je posamezno opazovanje vplivalo na popravek. Po izločitvi grobo pogrešenega opazovanja ponovno izravnamo mrežo. Postopek ponavljamo, dokler globalni test modela ni sprejet.

V nadaljevanju postopka Fredericton bomo uporabili naslednje podatke iz izravnave posamezne terminske izmere:

- vektor izravnanih vrednosti koordinat $\hat{\mathbf{x}}$,
- pripadajočo matriko kofaktorjev $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}$,
- referenčno varianco a posteriori $\hat{\sigma}_0^2$,
- pripadajoče prostostne stopnje f ,
- matriko normalnih enačb \mathbf{N} ter
- matriko vezi \mathbf{H} .

2.2 Identifikacija možnih deformacijskih modelov

Cilj tega koraka je določiti/identificirati deformacijske modele, s katerimi bi lahko opisali premike v geodetski mreži in posledično na obravnavanem objektu.

Možne deformacijske modele izberemo na podlagi predhodnih podatkov ali/in izkušenj o obnašanju območja. V primeru premikov površja so uporabne informacije o geološki sestavi

tal, o prelomih in premikih tektonskih plošč, itd. V primeru umetnih objektov se pri določanju možnih deformacijskih modelov lahko opremo na informacije o lastnostih materiala, izpostavljenosti naravnim pojavom (veter, osončenje, mraz), delovanje drugih mehanskih sil na objekt, itd.

Kadar nimamo (dovolj) takih podatkov, da bi lahko popolnoma opisali vzroke nastalih premikov, si pomagamo z grafično predstavitevjo vektorja premikov \mathbf{d} med terminskima izmerama. Pri tem mreža v obeh terminskih izmerah nima (nujno) istega datuma ali pa sta izmeri izravnani kot prosti mreži, zato vektor premikov \mathbf{d} , izračunan neposredno iz razlik koordinat, ne podaja neposredno informacije o dejanskih premikih točk. Avtorji postopka Fredericton predlagajo Iterativni postopek prilagajanja uteži kot rešitev za ta problem.

2.2.1 Iterativni postopek prilagajanja uteži

Osnovna ideja Iterativnega postopka dodeljevanja uteži IWP (angl. Iterative Weighted Projection) je vektor \mathbf{d} transformirati v datum, ki ga v večji meri določajo (imajo večjo utež) točke z manjšo koordinatno razliko med dvema terminskima izmerama. Teoretično s tem postopkom določimo datum, ki minimizira prvo normo končne projekcije vektorja \mathbf{d} (Chen, 1983). Postopek je izpeljanka transformacije S , kjer sta v matriki uteži (za katero je, v primeru transformacije S , največkrat uporabljena oznaka \mathbf{E}) možni le vrednosti 0 ali 1. Kot že ime metode pove, gre za iterativni postopek. Začetne vrednosti priredimo tako:

$$\mathbf{d}_0 = \hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{x}}_1, \quad \mathbf{W}_0 = \mathbf{I}, \quad \dots (19)$$

k -ti korak iteracije poteka tako:

$$\mathbf{d}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{H}(\mathbf{H}^T \mathbf{W}_{k-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{W}_{k-1}) \mathbf{d}_{k-1}, \quad \dots (20)$$

$$\mathbf{W}_k = \text{diag} \left(\frac{1}{|\mathbf{d}_k|} \right). \quad \dots (21)$$

S pomočjo matrike \mathbf{W} , določene v zadnjem koraku, transformiramo tudi matriko kofaktorjev, ki jo potrebujemo za izris elips:

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{I} - \mathbf{H}(\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{W}) \mathbf{Q}_{dd} (\mathbf{I} - \mathbf{H}(\mathbf{H}^T \mathbf{W} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{W})^T, \quad \dots (22)$$

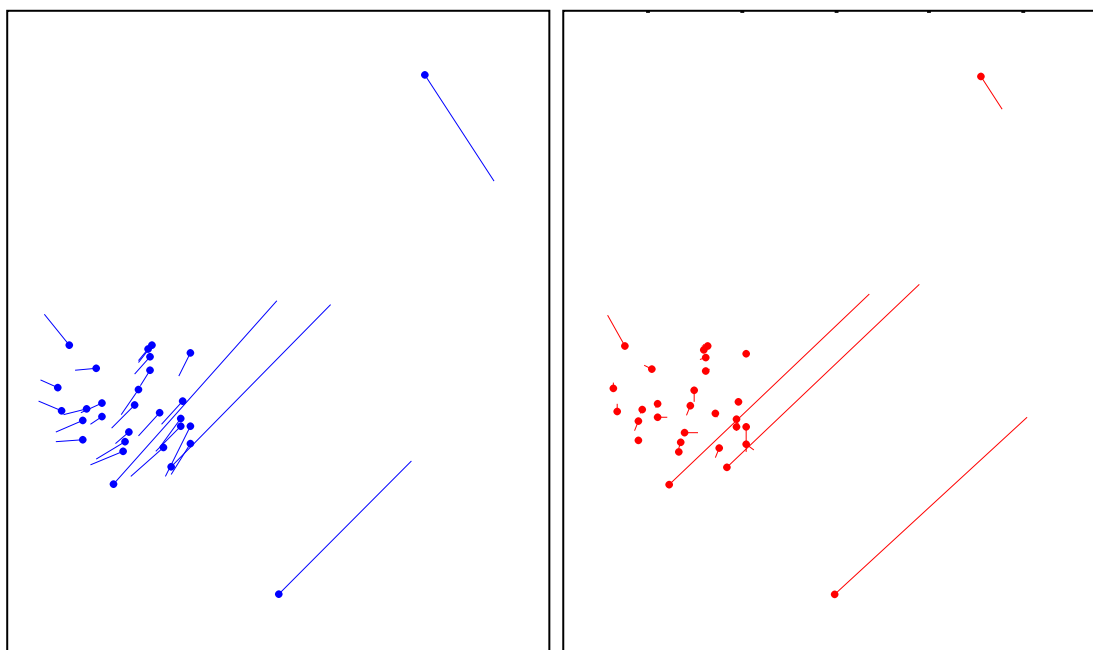
kjer so:

W ... matrika uteži, ki določi kolikšen vpliv naj ima posamezna točka pri določitvi geodetskega datuma,

Q_{dd} = (**Q_{x₁x₁}** + **Q_{x₂x₂}**) ... matrika kofaktorjev koordinatnih razlik med dvema terminskima izmerama.

Iteracije končamo, ko postane razlika med vektorjema **d_k** in **d_{k-1}** dovolj majhna. V praksi izračun izvedemo v 4 do 6 korakih. Premiki verjetno mirujočih točk bodo dobili vrednosti blizu 0 m, zato pod neko mejo (npr. $|d_{k_i}| < 10^{-6}$ m) dodelimo takim premikom utež 0 v matriki **W**, da se izognemo numerični nestabilnosti zaradi deljenja z majhnimi vrednostmi (Chen, 1983).

Spodnja slika nazorno prikazuje kako Iterativni postopek prilagajanja uteži spremeni, ali bolje popravi, polje premikov. V mreži Pesje smo simulirali premik treh točk, ki ležijo desno spodaj, v smeri desno navzgor. Velikost premika je 10 cm. Na levi sliki so vektorji premikov določeni iz razlik koordinat, določenih iz izravnave proste mreže v dveh terminskih izmerah. Premiki treh točk so se prenesli tudi na ostale točke v mreži. Na desni sliki so vektorji premikov po uporabi postopka Iterativnega dodeljevanja uteži. Metoda je dobro določila velike vektorje premikov za premaknjene točke. Manjši premiki drugih točk kažejo na dejanske premike v mreži (ne simulirane) in jih obravnavamo v 3. poglavju.



Slika 4: Ilustrativni prikaz spremembe vektorjev premikov pred (levo) in po (desno) uporabi postopka Iterativnega dodeljevanja uteži.

Zdi se, da smo z uporabo postopka Iterativnega določevanja uteži uspešno rešili problem vpliva geodetskega datuma na vektor premikov \mathbf{d} . Vendar v nadaljnjem postopku ne uporabimo »popravljenega« vektorja premikov \mathbf{d} . Zakaj ne?

Vektor \mathbf{d} je potrebno obravnavati kot slučajno spremenljivko, ki se porazdeljuje po normalni porazdelitvi, skupaj s pripadajočo matriko kofaktorjev \mathbf{Q}_{dd} (Chen, 1983). Vektor \mathbf{d} transformiramo, zato je potrebno transformirati tudi matriko \mathbf{Q}_{dd} , t.j. narediti prenos kofaktorjev. To ni trivialno, ker matrika, s katero projiciramo $(\mathbf{I} - \mathbf{H}(\mathbf{H}^T \mathbf{W}_{k-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{W}_{k-1})$ ni linearna, ampak je funkcija vektorja \mathbf{d} . Pravilneje je torej zapisati: $(\mathbf{I} - \mathbf{H}(\mathbf{H}^T \mathbf{W}_{k-1}(\mathbf{d}_{k-1}) \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{W}_{k-1}(\mathbf{d}_{k-1}))$. Druga posledica te nelinearne zveze je, da se slučajna spremenljivka ne \mathbf{d}_k porazdeljuje več po normalni porazdelitvi. Predpostavka o normalni porazdeljenosti slučajne spremenljivke \mathbf{d} pa je osnova za statistično testiranje deformacijskih modelov v četrtem koraku postopka. Z postopkom IWP smo se torej le približali pravemu polju premikov zato, da smo lahko bolj identificirali možne deformacijske modele. V nadaljnji obdelavi operiramo z vektorjem \mathbf{d} (razlika izravnanih koordinat iz obeh terminskih izmer).

2.2.2 Aproksimacija polja premikov s polinomom

V geodeziji opazovani objekt predstavimo s karakterističnimi točkami, ki jih povežemo v geodetsko mrežo. Z opazovanji v različnih terminskih izmerah dobimo vektorje premikov na teh točkah. Polje premikov določimo z aproksimacijskim polinomom. V primeru ravninske mreže velja (Chrzanowski, Chen, 1982):

$$dy = a_0 + a_1y + a_2x + a_3yx + a_4y^2 + a_5x^2 + K \quad \dots (23)$$

$$dx = b_0 + b_1y + b_2x + b_3yx + b_4y^2 + b_5x^2 + K \quad \dots (24)$$

Ker obravnavan objekt ali območje razdelimo na posamezne bloke tako, da so deformacije znotraj enega bloka homogene, t.j. niso odvisne od položaja, sta premika $dy(y,x)$ in $dx(y,x)$ linearni funkciji položaja. V polinomih (23) in (24) upoštevamo le linearne člene (Secord, 1985):

$$dy = a_0 + a_1y + a_2x \quad \dots (25)$$

$$dx = b_0 + b_1y + b_2x \quad \dots (26)$$

Koeficiente obeh polinomov želimo povezati z deformacijskimi parametri, omenjenimi v uvodu. Koeficienta a_0 in b_0 , ki sta neodvisna od položaja, predstavljata premik togega telesa, v uvodu označena t_y in t_x . Za izračun ostalih deformacijskih parametrov uporabimo enačbi (2) in (3):

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial dy}{\partial y} & \frac{\partial dy}{\partial x} \\ \frac{\partial dx}{\partial y} & \frac{\partial dx}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yx} + \omega \\ \varepsilon_{yx} - \omega & \varepsilon_{xx} \end{bmatrix} \quad \dots (27)$$

Aproksimacijska polinoma (25) in (26) lahko torej zapišemo:

$$dy = t_y + \varepsilon_{yy}y + (\varepsilon_{yx} + \omega)x \quad \dots (28)$$

$$dx = t_x + \varepsilon_{xx}x + (\varepsilon_{yx} - \omega)y. \quad \dots (29)$$

Zadnji dve enačbi uporabimo za opise premikov posamezne točke v izbranih deformacijskih modelih. Nekatero deformacijske parametre lahko izpustimo iz nekaterih deformacijskih modelov. Za vse točke v posameznem bloku zapišemo enačbi (28) in (29) v matrični obliki:

$$\mathbf{d} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{e}} \quad \dots (30)$$

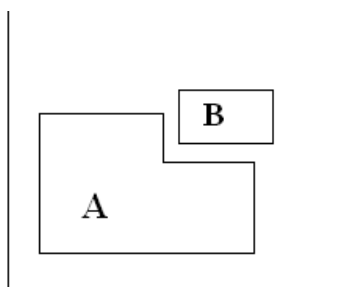
$$\begin{bmatrix} \vdots \\ dy \\ dx \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y & x & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y & 1 & x & -y \\ \vdots & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_y \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{yx} \\ t_x \\ \varepsilon_{xx} \\ \omega \end{bmatrix} \quad \dots (31)$$

2.2.3 Primeri osnovnih deformacijskih modelov

V tem poglavju je predstavljenih nekaj primerov osnovnih deformacijskih modelov, ki se največkrat uporabijo za opis polja premikov. Lahko se uporabi tudi poljubna kombinacija osnovnih modelov. Primeri naj služijo predvsem kot zgled za sestavo enačb premikov točk.

2.2.3.1 Premik togega telesa (premik posamezne točke)

Model uporabimo, kadar so vektorji premikov točk v bloku podobni, relativni položaji med njimi pa niso spremenjeni.



Za točke v bloku A sestavimo enačbe:

$$dy_A = 0, dx_A = 0$$

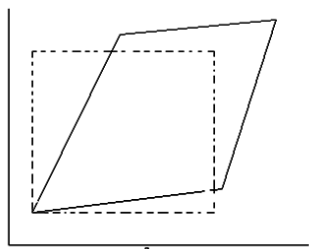
Za točke v bloku B sestavimo enačbe:

$$dy_B = t_y, dx_B = t_x$$

Premik togega telesa (Chen, 1983, str. 121).

2.2.3.2 Strižna deformacija, razteg in rotacija telesa

Model uporabimo, kadar se vektorji premikov točk v bloku povečujejo v določeni smeri, ki ni vzporedna z nobeno od koordinatnih osi.



Za vse točke v bloku sestavimo enačbe:

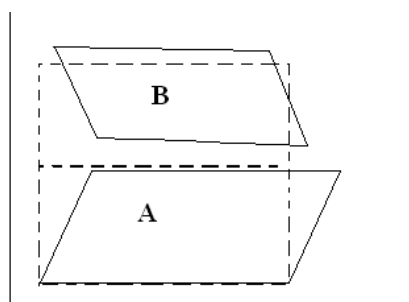
$$dy = \varepsilon_{yx}x + \varepsilon_{yy}y + \omega x,$$

$$dx = \varepsilon_{yx}y + \varepsilon_{xx}x - \omega y.$$

Strižna deformacija, razteg in rotacija telesa (Chen, 1983, str. 121).

2.2.3.3 Premik in strižna deformacija ločenega bloka

Model uporabimo, kadar se vektorji premikov točk v bloku A in B povečujejo v določeni smeri, ki je v primeru bloka A vzporedna z eno izmed koordinatnih osi, v bloku B pa z nobeno.



Za točke v bloku A sestavimo enačbe:

$$dy_A = a_1y + a_2x,$$

$$dx_A = b_1y + b_2x.$$

Za točke v bloku B sestavimo enačbe:

$$dy_B = c_0 + c_1y + c_2x,$$

$$dx_B = g_0 + g_1y + g_2x.$$

Premik in strižna deformacija ločenega bloka (Chen, 1983, str. 121).

2.3 Določitev deformacijskih parametrov

Deformacijski model je povezava med opazovanimi količinami in deformacijskimi parametri (Chen, 1983). V prejšnjem poglavju smo določili, katere deformacijske parametre je smiselno vključiti v deformacijski model, v tem poglavju bomo določili njihove vrednosti in natančnosti.

Kot smo povedali že v uvodu, imamo za vključitev opazovanj v model dve možnosti: pristop z opazovanji in koordinatni pristop. V tem koraku se postopek razlikuje glede na izbrani pristop. V primeru pristopa z opazovanji v tem koraku skupaj naredimo določitev deformacijskih parametrov in izravnavo opazovanj, medtem ko smo pri koordinatnem pristopu izravnavo opazovanj (in oceno koordinat) naredili ločeno v prvem koraku postopka.

Model sloni na hipotezi, da je pričakovana vrednost opazovanj (koordinat) v i -ti izmeri enaka seštevku pričakovane vrednosti opazovanj (koordinat) v prvi terminski izmeri in premika, ki ga opisuje deformacijski model. Matematično ničelno in alternativno hipotezo formiramo (Chen, 1983):

- v primeru pristopa z opazovanji:

$$H_0: E[\mathbf{l}_i] = E[\mathbf{l}_1] + \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{e}} \quad \dots (32)$$

$$H_1: E[\mathbf{l}_i] \neq E[\mathbf{l}_1] + \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{e}} \quad \dots (33)$$

- v primeru koordinatnega pristopa:

$$H_0: E[\mathbf{l}_i] = \mathbf{A}_i E[\mathbf{x}_i] = \mathbf{A}_i E[\mathbf{x}_1] + \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{e}},$$

$$H_0: E[\mathbf{x}_i] = E[\mathbf{x}_1] + \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{e}}, \quad \dots (34)$$

$$H_1: E[\mathbf{x}_i] \neq E[\mathbf{x}_1] + \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{e}} \quad \dots (35)$$

kjer so:

$E[\]$... pričakovana vrednost,

\mathbf{l} ... vektor opazovanj,

\mathbf{B} ... matrika deformacijskega modela, ki povezuje deformacijske parametre z razlikami koordinat,

$\hat{\mathbf{e}}$... vektor deformacijskih parametrov.

Oba pristopa se razlikujeta le v matriki \mathbf{A} , ki je v primeru koordinatnega pristopa identiteta in jo lahko izpustimo. Zato je v nadaljevanju podan enak potek postopka za oba primera. Na podlagi ničelne hipoteze (32) ali (34) lahko tvorimo matematični model:

$$\mathbf{x}_1 + \boldsymbol{\delta}_1 = \boldsymbol{\xi}, \quad \dots (36)$$

$$\mathbf{x}_i + \boldsymbol{\delta}_i = \boldsymbol{\xi} + \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{e}}, \quad \dots (37)$$

kjer so:

\mathbf{x} ... vektor opazovanj (pristop z opazovanji) ali ocenjenih koordinat (koordinatni pristop) posamezne izmere,

δ ... vektor popravkov opazovanj (pristop z opazovanji) ali popravkov koordinat (koordinatni pristop), ki se določijo pri ocenjevanju deformacijskih parametrov,

ξ ... vektor konstant,

\mathbf{B} ... matrika deformacijskega modela (kot v izrazu (29) in ne matrika \mathbf{B} iz poglavja 2.1),

\mathbf{A} ... matrika koeficientov enačb, ki povezujejo koordinate z opazovanji,

$\hat{\mathbf{e}}$... vektor ocenjenih deformacijski parametrov.

Cilj tega koraka je torej določiti vrednosti v vektorju $\hat{\mathbf{e}}$. To je mogoče kadar je velikost (dimenzija) vektorja \mathbf{x} enaka v vseh terminskih izmerah. Pomeni, da morajo biti v vseh terminskih izmerah izvajana ista opazovanja oz. morajo biti v izmero vključene iste točke. V praksi se to vedno ne zgodi. Ker je ena izmed zahtev za postopek (poglavje 2.1), da ga je možno uporabiti tudi v primeru defekta konfiguracije mreže, v takem primeru vektor \mathbf{x} ustrezno dopolnimo s približno vrednostjo manjkajočega opazovanja (koordinate), v matriki uteži pa na odgovarjajoča mesta postavimo ničle ter tako eliminiramo vpliv tega opazovanja (koordinate) na rezultate.

Sistem je rešljiv, če je premikov točk v mreži (število enačb) vsaj toliko, kolikor je deformacijskih parametrov (št. neznank). V primeru, ko je premikov točk več kot deformacijskih parametrov, slednje ocenimo z metodo najmanjših kvadratov. Dobimo sistem normalnih enačb (izpeljava je zaradi preglednosti v Prilogi A) :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^k \mathbf{P}_i & \sum_{i=2}^k \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \\ \sum_{i=2}^k \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i & \sum_{i=2}^k \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \hat{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^k \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i \\ \sum_{i=2}^k \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i \end{bmatrix}, \quad \dots (38)$$

kjer je:

\mathbf{P}_i ... matrika uteži i -te terminske izmere.

Za koordinatni pristop to matriko določimo kot:

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{N}_i = \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}_i}^{-1}, \quad \dots (39)$$

za pristop z opazovanji kot:

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_{\parallel_i}. \quad \dots (40)$$

Število normalnih enačb je enako številu neznanih parametrov, zato je sistem enolično rešljiv. Iz enačb eliminiramo ξ tako, da ga izrazimo iz prve enačbe in vstavimo v drugo, nato izrazimo neznan vektor $\hat{\mathbf{e}}$:

$$\xi = \left(\sum_{i=1}^k \mathbf{P}_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^k \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i - \sum_{i=2}^k \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{e}} \right) \quad \dots (41)$$

$$\hat{\mathbf{e}} = \left[\sum_{i=2}^k \mathbf{B}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{B}_i - \sum_{i=2}^k \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \left(\sum_{i=1}^k \mathbf{P}_i \right)^{-1} \sum_{i=2}^k \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \right]^{-1} \cdot \left[\sum_{i=2}^k \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i - \sum_{i=2}^k \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \left(\sum_{i=1}^k \mathbf{P}_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^k \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i \right]. \quad \dots (42)$$

Pripadajoča kovariančna matrika vektorja $\hat{\mathbf{e}}$ se izračuna:

$$\Sigma_{\hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}}} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}}} \quad \dots (43)$$

$$\Sigma_{\hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}}} = \hat{\sigma}_0^2 \left[\sum_{i=2}^k \mathbf{B}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{B}_i - \sum_{i=2}^k \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \left(\sum_{i=1}^k \mathbf{P}_i \right)^{-1} \sum_{i=2}^k \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \right]^{-1},$$

kjer je:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i \hat{\sigma}_{0i}^2}{\sum_{i=1}^k f_i} \dots \text{referenčna varianca a posteriori iz izravnave koordinat } k\text{-izmer.}$$

V primeru koordinatnega pristopa je problem še v singularnosti matrike \mathbf{P}_i , saj v nadaljnjem izračunu potrebujemo inverzijo matrike \mathbf{P}_i . Uporabimo t.i. generalizirano inverzijo $\left(\sum_{i=0}^k \mathbf{P}_i \right)^{-}$. Generalizirana inverzija ni enolično določena, vendar so deformacijski parametri neodvisni od načina določitve generalizirane inverzije. Če je defekt ranga matrike $\sum_{i=1}^k \mathbf{P}_i$

posledica le defekta geodetskega datuma (in ne tudi defekta konfiguracije mreže), je izračun generalizirane inverzije preprost:

$$\left(\sum_{i=1}^k \mathbf{P}_i \right)^{-} = \left(\sum_{i=1}^k \mathbf{P}_i + \mathbf{H}\mathbf{H}^T \right)^{-1} . \quad \dots (44)$$

2.3.1 Izračun za dve terminski izmeri

Izračun deformacijskih parametrov se poenostavi, kadar primerjamo dve terminski izmeri. Recimo, da izberemo koordinatni pristop (in lahko zato izpustimo matriko \mathbf{A} , ki je za tak primer enotska), odštejemo enačbi v matematičnem modelu in dobimo:

$$\mathbf{d} + \mathbf{v}_d = \mathbf{B}\hat{\mathbf{e}} , \quad \dots (45)$$

kjer so:

$\mathbf{d} = \hat{\mathbf{x}}_2 - \hat{\mathbf{x}}_1$...vektor premikov,

$\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2$... vektorja izravnanih koordinat iz posamezne terminske izmere,

$\delta_d = \delta_2 - \delta_1$... vektor popravkov premikov, ki jih določimo ob določitvi deformacijskih parametrov z metodo najmanjših kvadratov.

Kovariančna matrika vektorja premikov se izračuna:

$$\Sigma_{\mathbf{d}\mathbf{d}} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{d}\mathbf{d}} = \hat{\sigma}_0^2 (\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_1\hat{\mathbf{x}}_1} + \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_2\hat{\mathbf{x}}_2}) \quad \dots (46)$$

Deformacijske parametre določimo po poenostavljeni enačbi (poenostavitev je zaradi preglednosti izpeljana v Prilogi B) :

$$\hat{\mathbf{e}} = [\mathbf{B}_2^T(\mathbf{P}_1 \mp \mathbf{P}_2)\mathbf{B}_2]^{-1} \mathbf{B}_2^T(\mathbf{P}_1 \mp \mathbf{P}_2)\mathbf{d} , \quad \dots (47)$$

$$\Sigma_{\hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}}} = \hat{\sigma}_0^2 [\mathbf{B}_2^T(\mathbf{P}_1 \mp \mathbf{P}_2)\mathbf{B}_2]^{-1} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}}} , \quad \dots (48)$$

kjer so:

$\Sigma_{\hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}}}$... kovariančna matrika deformacijskih parametrov,

$\mathbf{Q}_{\hat{e}\hat{e}}$...matrika kofaktorjev deformacijskih parametrov,

$\mathbf{P}_1 \bar{\pm} \mathbf{P}_2$... paralelna vsota matrik uteži iz posamezne terminske izmere (definirana je v izpeljavi v Prilogi B).

Za koordinatni pristop to matriko določimo kot:

$$\mathbf{P}_1 \bar{\pm} \mathbf{P}_2 = \mathbf{N}_1(\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2)^{-1}\mathbf{N}_2, \quad \dots (49)$$

za pristop z opazovanji (pri tem v izrazu (42) dodamo matriko \mathbf{A}) kot:

$$\mathbf{P}_1 \bar{\pm} \mathbf{P}_2 = \mathbf{Q}_{ll_1}^{-1} \bar{\pm} \mathbf{Q}_{ll_2}^{-1} = (\mathbf{Q}_{ll_1} + \mathbf{Q}_{ll_2})^{-1}. \quad \dots (50)$$

Deformacijske parametre smo torej v primeru koordinatnega pristopa izračunali iz premikov, izračunanih neposredno iz izravnanih koordinat. Čeprav so ti premiki odvisni od določitve geodetskega datuma, so ocenjeni deformacijski parametri neodvisni od določitve geodetskega datuma. Zakaj je tako?

2.3.1.1 Neodvisnost deformacijskih parametrov od določitve geodetskega datuma

Spomnimo se Slika 3. Vidimo, da lahko vektor premikov \mathbf{d} , ki je izračunan iz izravnanih koordinat, zapišemo kot linearno kombinacijo vektorja \mathbf{d}_h , ki je odvisen od zagotovitve datuma v izravnavi in »pravega« vektorja premika \mathbf{d}_p (Chen, 1983):

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_p + \mathbf{d}_h \quad \dots (51)$$

Vektor \mathbf{d}_h je linearna kombinacija stolpcev matrike \mathbf{H} . Matrika \mathbf{H} pa predstavlja bazo ničelnega prostora matrike \mathbf{N} , matrike normalnih enačb iz koraka izravnave. Torej leži vektor \mathbf{d}_h v ničelnem prostoru matrike \mathbf{N} . Pri določevanju deformacijskih parametrov, t.j. določanju vrednosti elementov vektorja $\hat{\mathbf{e}}$, vektor premikov množimo z matriko $\mathbf{P}_1 \bar{\pm} \mathbf{P}_2 = \mathbf{N}_1(\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2)^{-1}\mathbf{N}_2$. Ničelni prostor matrike $\mathbf{P}_1 \bar{\pm} \mathbf{P}_2$ je zato enak kot ničelni prostor matrike \mathbf{N} . Za vektor \mathbf{d}_h velja, da leži tudi v ničelnem prostoru matrike $\mathbf{P}_1 \bar{\pm} \mathbf{P}_2$ in se torej pri preslikavanju s to matriko ne preslika v sliko. Povedano drugače, velja:

$$(\mathbf{P}_1 \bar{\pm} \mathbf{P}_2)\mathbf{d}_h = 0 \quad \dots (52)$$

To lastnost uporabimo v enačbi za določitev deformacijskih parametrov:

$$\hat{\mathbf{e}} = (\mathbf{B}^T(\mathbf{P}_1 \pm \mathbf{P}_2)\mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T(\mathbf{P}_1 \pm \mathbf{P}_2)\mathbf{d} = \dots (53)$$

$$= (\mathbf{B}^T(\mathbf{P}_1 \pm \mathbf{P}_2)\mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T(\mathbf{P}_1 \pm \mathbf{P}_2) (\mathbf{d}_p + \mathbf{d}_h) = \dots (54)$$

$$= (\mathbf{B}^T(\mathbf{P}_1 \pm \mathbf{P}_2)\mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T(\mathbf{P}_1 \pm \mathbf{P}_2)\mathbf{d}_p + \underbrace{(\mathbf{B}^T(\mathbf{P}_1 \pm \mathbf{P}_2)\mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T(\mathbf{P}_1 \pm \mathbf{P}_2)\mathbf{d}_h}_0 = \dots (55)$$

$$= (\mathbf{B}^T(\mathbf{P}_1 \pm \mathbf{P}_2)\mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T(\mathbf{P}_1 \pm \mathbf{P}_2)\mathbf{d}_p = \hat{\mathbf{e}} \dots (56)$$

Vidimo torej, da je rezultat (izračunani deformacijski parametri) enak ne glede na to, kako je določen geodetski datum.

3.2.1.2 Parameter rotacije ω

V primeru vpete mreže je pri odpravi vpliva določitve datuma pomemben parameter rotacije ω . Kadar nimamo podatka o zunanji orientaciji mreže, se ta parameter izpusti, v primeru vpete mreže pa mora biti ta nujno vključen v model. Če se namreč med terminskima izmerama premakne katera od točk, med katerima je definirana smer, pride do zasuka celotne mreže. V deformacijskem modelu prevzame parameter ω nase ta vpliv in tako ostanejo drugi deformacijski parametri neodvisni od določitve geodetskega datuma. Element rotacije v model vključimo tako, da ga dodamo v vektor neznank $\hat{\mathbf{e}}$ ter v matriko \mathbf{B} dodamo ustrezne odvode po neznankah (Chen, 1983).

2.4 Pregled deformacijskih modelov in izbira najboljšega

V poglavju 2.2 smo poskušali identificirati model, ki bi kar najbolje opisal dogajanje v naravi. Pri tem smo se oprli na predhodne informacije o objektu in na premike, ki smo jih transformirali s postopkom IWP, da bi se kar najbolj približali pravim. Identifikacija ustreznega modela je zelo pomembna, saj se v postopku določevanja deformacijskih parametrov v primeru neustreznega deformacijskega modela ta napaka razlije na popravke

vseh drugih premikov ter na določane vrednosti deformacijskih parametrov. Gre torej za neskladje modela s premiki. Situacijo bi lahko primerjali s prisotnostjo grobega pogreška v opazovanjih pri izravnavi geodetske mreže.

V fazi identifikacije kot možne podamo več modelov. Nato za vsakega določimo deformacijske parametre. V tej fazi je potrebno modele pregledati in izbrati najboljšega. To naredimo na podlagi statističnih testov. Računamo globalni test modela in stopnje zaupanja za posamezni deformacijski parameter.

Globalno primernost modela testiramo s kvadratno normo popravkov iz matematičnega modela. Model je sprejet, če drži (Chen, 1983):

$$T^2 = \frac{\hat{\sigma}_e^2}{\hat{\sigma}_0^2} = \frac{\sum_{i=1}^k \boldsymbol{\delta}_i^T \mathbf{P}_i \boldsymbol{\delta}_i}{\hat{\sigma}_0^2 df_e} < F(\alpha, df_e, df), \quad \dots (57)$$

kjer so:

$df = \sum_{i=1}^k f_i$... število prostostnih stopenj pri izračunu referenčne variance a posteriori v vseh terminskih izmerah,

f_i ... število prostostnih stopenj za izračun a posteriori variance v posamezni terminski izmeri,

$df_e = \text{rang}(\mathbf{P}) - u + d$... število prostostnih stopenj pri izračunu referenčne variance a posteriori pri določevanju deformacijskih parametrov,

$\mathbf{P} = \text{diag}(\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_i)$... matrika uteži,

u ... število neznank v deformacijskem modelu (= število neznanih konstant v vektorju $\boldsymbol{\xi}$ + število deformacijskih parametrov v vektorju $\hat{\mathbf{e}}$),

d ... defekt datuma,

$F(\alpha, df_e, df)$... kritična vrednost po Fisherjevi porazdelitvi,

$1 - \alpha$... stopnja zaupanja testa.

V splošnem se lahko zgodi, da več modelov zadosti pogoju (57). Kot pomoč pri odločanju za najboljši model izračunamo še stopnjo zaupanja za posamezen deformacijski parameter ali za skupino deformacijskih parametrov. Stopnjo zaupanja za posamezni parameter določimo tako, da izračunamo njegovo standardizirano formo ter poiščemo tisto vrednost stopnje zaupanja $1 - \alpha$, pri kateri je izpolnjen pogoj:

$$\frac{\hat{\mathbf{e}}_i^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{e}}_i}^{-1} \hat{\mathbf{e}}_i}{\hat{\sigma}_0^2 u_i} > F(\alpha, 1, df). \quad \dots (58)$$

Če računamo stopnjo zaupanja za skupino parametrov, mora biti izpolnjen naslednji pogoj:

$$\frac{\hat{\mathbf{e}}_i^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{e}}_i}^{-1} \hat{\mathbf{e}}_i}{\hat{\sigma}_0^2 u_i} > F(\alpha, u_i, df) \quad \dots (59)$$

kjer je:

u ... število parametrov v skupini.

Najboljši model izberemo glede na naslednje kriterije:

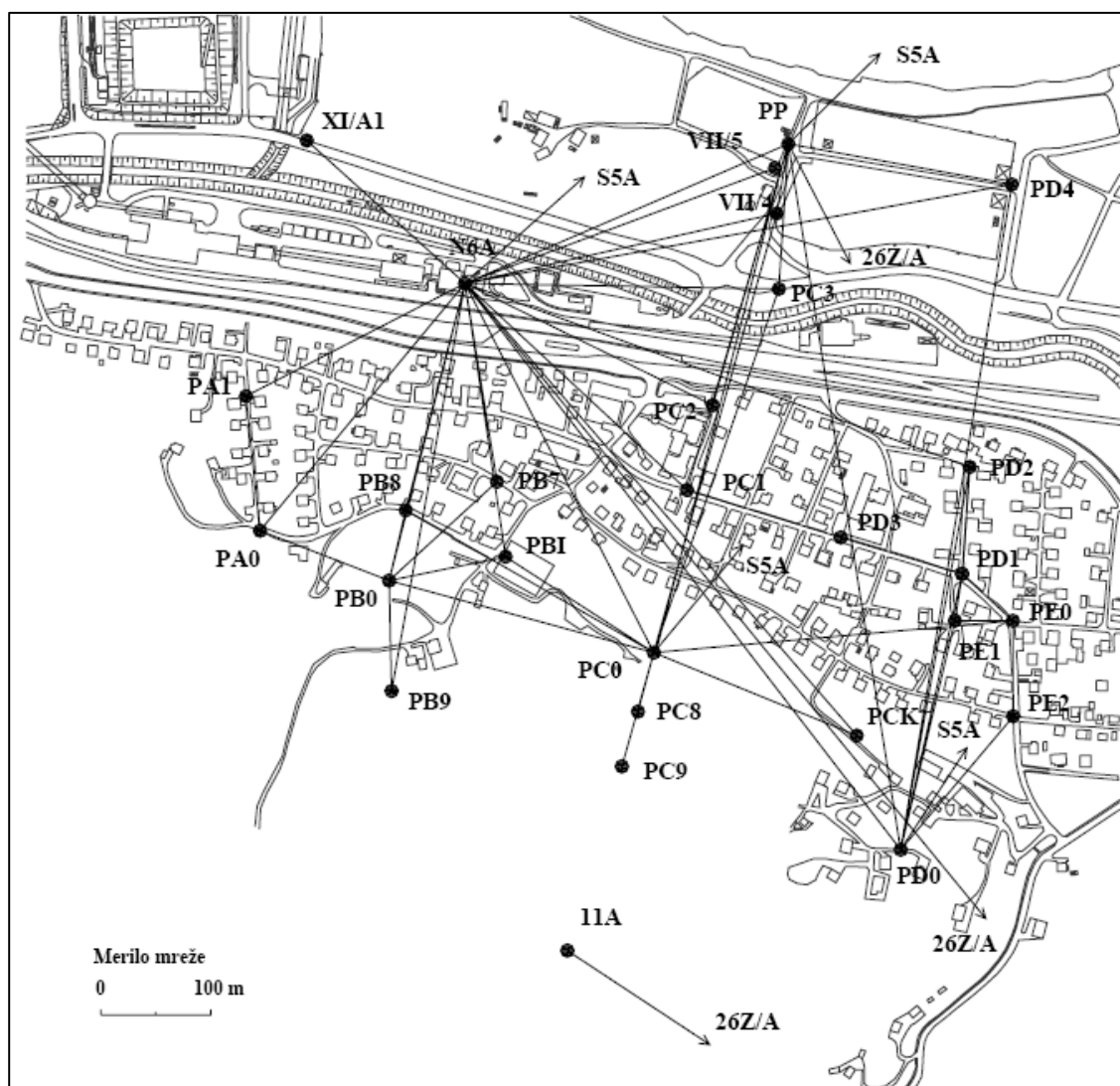
- manjše število deformacijskih parametrov,
- preprostejši deformacijski model,
- razlogi, ki imajo geofizikalno ozadje,
- minimalni vsota kvadratov popravkov,
- stopnja zaupanja parametrov.

2.5 Grafična predstavitev izbranega deformacijskega modela

Izbran deformacijski model navadno predstavimo tudi grafično. Prikažemo točke geodetske mreže, razdelitev na bloke ter deformacijske parametre, ki smo jih določali.

3 PRIMER MREŽE PESJE

Mreža Pesje je bila razvita na območju vasi Pesje v okolici Velenja za potrebe Premogovnika Velenje. Sestavlja jo 30 točk, med katerimi so bile opazovane horizontalne smeri in dolžine, ki so bile reducirane v horizontalne dolžine. Obdelani so podatki za dve termiski izmeri, ki sta bili opravljene oktobra 2000 in aprila 2001.



Skica mreže Pesje na topografski podlagi (Zemljak, 2006, str. 42).

3.1 Izravnava in odkrivanje grobih pogreškov v obeh terminskih izmerah

Izbran je bil koordinatni pristop, zato smo izvedli izravnavo opazovanj in izračun izravnanih neznank. Terminski izmeri sta bili izravnani ločeno, saj ni bilo osnove za sklepanje o koreliranosti opazovanj med terminskima izmerama. V obeh primerih smo mrežo izravnali kot prosto in uporabili enake približne koordinate točk. Mreža je bila izravnana kot ravninska s programom GeM3.

Izravnane koordinatne neznanke v obeh terminskih izmerah ter komponente vektorja premikov iz koordinatnih razlik (Soldo, 2009, str. 29).

| Točka | Približne koordinate | | 1. terminska izmera | | 2. terminska izmera | | d_y [mm] | d_x [mm] |
|-------|----------------------|-------------|---------------------|-------------|---------------------|-------------|---------------|---------------|
| | y^0 [m] | x^0 [m] | y_1 [m] | x_1 [m] | y_2 [m] | x_2 [m] | | |
| 26Z/A | 7509,3070 | 134867,6830 | 7509,2923 | 134867,6781 | 7509,2996 | 134867,6781 | 7,3 | 0,0 |
| 11A | 6624,4810 | 135449,8040 | 6624,4727 | 135449,8073 | 6624,4786 | 135449,8054 | 5,9 | -1,9 |
| N6A | 6531,0300 | 136056,5000 | 6531,0269 | 136056,4995 | 6531,0215 | 136056,5023 | -5,4 | 2,8 |
| S5A | 8280,7000 | 137612,7500 | 8280,6999 | 137612,7562 | 8280,6996 | 137612,7478 | -0,3 | -8,4 |
| PP | 6826,1700 | 136183,4200 | 6826,1755 | 136183,4216 | 6826,1707 | 136183,4233 | -4,8 | 1,7 |
| VII/5 | 6814,0100 | 136161,4900 | 6814,0122 | 136161,4891 | 6814,0100 | 136161,4927 | -2,2 | 3,6 |
| VII/4 | 6815,5700 | 136120,2200 | 6815,5756 | 136120,2260 | 6815,5724 | 136120,2266 | -3,2 | 0,6 |
| PD4 | 7030,1700 | 136146,5700 | 7030,1666 | 136146,5692 | 7030,1636 | 136146,5703 | -3,0 | 1,1 |
| PC3 | 6817,4800 | 136051,5100 | 6817,4789 | 136051,5194 | 6817,4782 | 136051,5227 | -0,7 | 3,3 |
| PBI | 6568,1300 | 135808,0200 | 6568,1221 | 135808,0143 | 6568,1273 | 135808,0149 | 5,2 | 0,6 |
| PB0 | 6461,8100 | 135786,3000 | 6461,8100 | 135786,2956 | 6461,8081 | 135786,2906 | -1,9 | -5,0 |
| PB8 | 6476,9700 | 135850,2100 | 6476,9721 | 135850,2114 | 6476,9702 | 135850,2092 | -1,9 | -2,2 |
| PA1 | 6331,1500 | 135953,9100 | 6331,1495 | 135953,9128 | 6331,1481 | 135953,9163 | -1,4 | 3,5 |
| XI/A1 | 6386,6200 | 136186,5500 | 6386,6149 | 136186,5527 | 6386,6075 | 136186,5693 | -7,4 | 16,6 |
| PB7 | 6560,2500 | 135876,2300 | 6560,2523 | 135876,2303 | 6560,2511 | 135876,2289 | -1,2 | -1,4 |
| PB9 | 6464,0500 | 135685,8700 | 6464,0514 | 135685,8721 | 6464,0521 | 135685,8721 | 0,7 | 0,0 |
| PA0 | 6344,0300 | 135831,7000 | 6344,0288 | 135831,6932 | 6344,0293 | 135831,6964 | 0,5 | 3,2 |

Se nadaljuje ...

... nadaljevanje

| | | | | | | | | |
|-----|-----------|-------------|-----------|-------------|-----------|-------------|------|-------|
| PCK | 6888,5800 | 135645,3600 | 6888,5845 | 135645,3583 | 6888,5833 | 135645,3533 | -1,2 | -5,0 |
| PC0 | 6703,4100 | 135720,7700 | 6703,4173 | 135720,7729 | 6703,4250 | 135720,7744 | 7,7 | 1,5 |
| PD2 | 6991,7600 | 135889,6200 | 6991,7625 | 135889,6180 | 6991,7605 | 135889,6203 | -2,0 | 2,3 |
| PC2 | 6757,0000 | 135945,8100 | 6757,0056 | 135945,8039 | 6757,0044 | 135945,8010 | -1,2 | -2,9 |
| PC1 | 6733,6200 | 135868,7500 | 6733,6221 | 135868,7554 | 6733,6205 | 135868,7516 | -1,6 | -3,8 |
| PD0 | 6928,7100 | 135541,5300 | 6928,7094 | 135541,5315 | 6928,7132 | 135541,5308 | 3,8 | -0,7 |
| PC8 | 6688,9000 | 135667,1700 | 6688,9089 | 135667,1757 | 6688,9089 | 135667,1747 | 0,0 | -1,0 |
| PC9 | 6674,2600 | 135617,4000 | 6674,2516 | 135617,3547 | 6674,2534 | 135617,3553 | 1,8 | 0,6 |
| PD1 | 6984,8000 | 135792,3200 | 6984,8026 | 135792,3235 | 6984,8037 | 135792,3238 | 1,1 | 0,3 |
| PE1 | 6978,2000 | 135749,8400 | 6978,2020 | 135749,8457 | 6978,2032 | 135749,8472 | 1,2 | 1,5 |
| PE2 | 7031,3300 | 135662,8300 | 7031,3294 | 135662,8393 | 7031,3339 | 135662,8382 | 4,5 | -1,1 |
| PD3 | 6873,9800 | 135825,4700 | 6873,9793 | 135825,4749 | 6873,9789 | 135825,4755 | -0,4 | 0,6 |
| PE0 | 7031,0300 | 135749,7500 | 7031,0309 | 135749,7546 | 7031,0314 | 135749,7442 | 0,5 | -10,4 |

Drugi rezultati izravnave geodetske mreže Pesje (Soldo, 2009, str. 30).

| | 1. terminska izmera | 2. terminska izmera |
|------------------|------------------------|------------------------|
| σ_d | 0,84 mm | 0,82 mm |
| σ_s | 2,1" | 2,6" |
| $\hat{\sigma}_0$ | 1,0379 | 1,0307 |
| n | 170 | 170 |
| u | 71 | 71 |
| d | 3 | 3 |
| r | 102 | 102 |

Kjer so:

 σ_d ... a priori standardna deviacija enote uteži za dolžine, σ_s ... a priori standardna deviacija enote uteži za smeri, $\hat{\sigma}_0$... a posteriori referenčna standardna deviacija,

n ... število opazovanj,

$u = u_x + u_o$... število neznank,

u_x ... število koordinatnih neznank,

u_o ... število eliminiranih (orientacijskih) neznank,

d ... defekt mreže in

$r = n - u + d$... število nadštevilnih opazovanj.

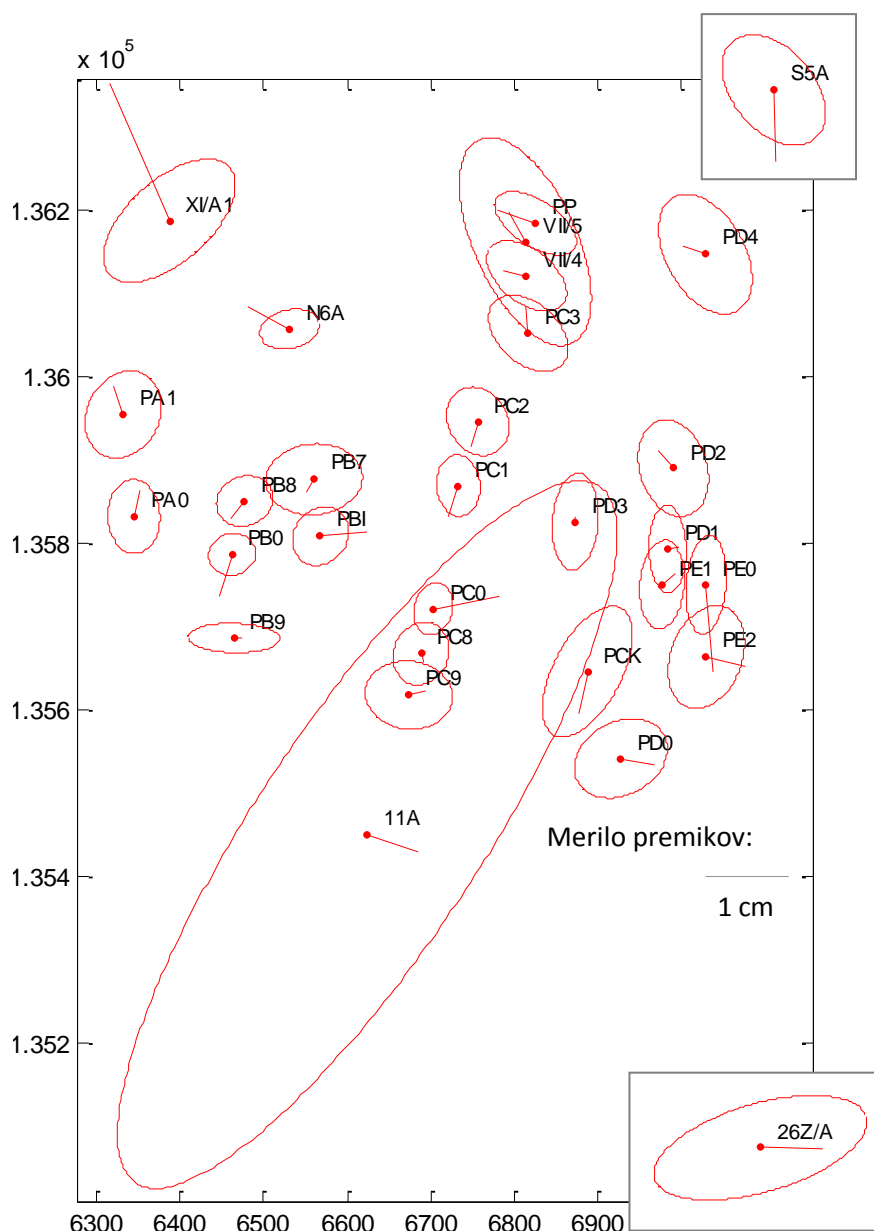
Pri določitvi števila prostostnih stopenj je potrebno upoštevati tudi število orientacijskih neznank u_o , ki jih med izravnavo eliminiramo.

Globalni test modela je bil sprejet za obe terminski izmeri, zato smo sklepali, da v opazovanjih ni grobih pogreškov.

3.2 Izbira možnih deformacijskih modelov

Premogovnik Velenje, ki ima predvidoma največji vpliv na premike v mreži, leži severovzhodno od mreže Pesje. Severno od mreže je tudi Velenjsko jezero. Največji premiki so tako pričakovani pri točkah v severnem delu mreže. Druge točke so stabilizirane na objektih in cestah v vasi. O drugih morebitnih dejavnikih, ki bi lahko povzročali premike ni podatkov. Tako smo se pri izbiri možnih deformacijskih modelov oprli predvsem na sliko vektorjev premikov. Uporabili smo postopek IWP (opisan v poglavju 2.2.1), ki da realnejšo sliko vektorjev premikov.

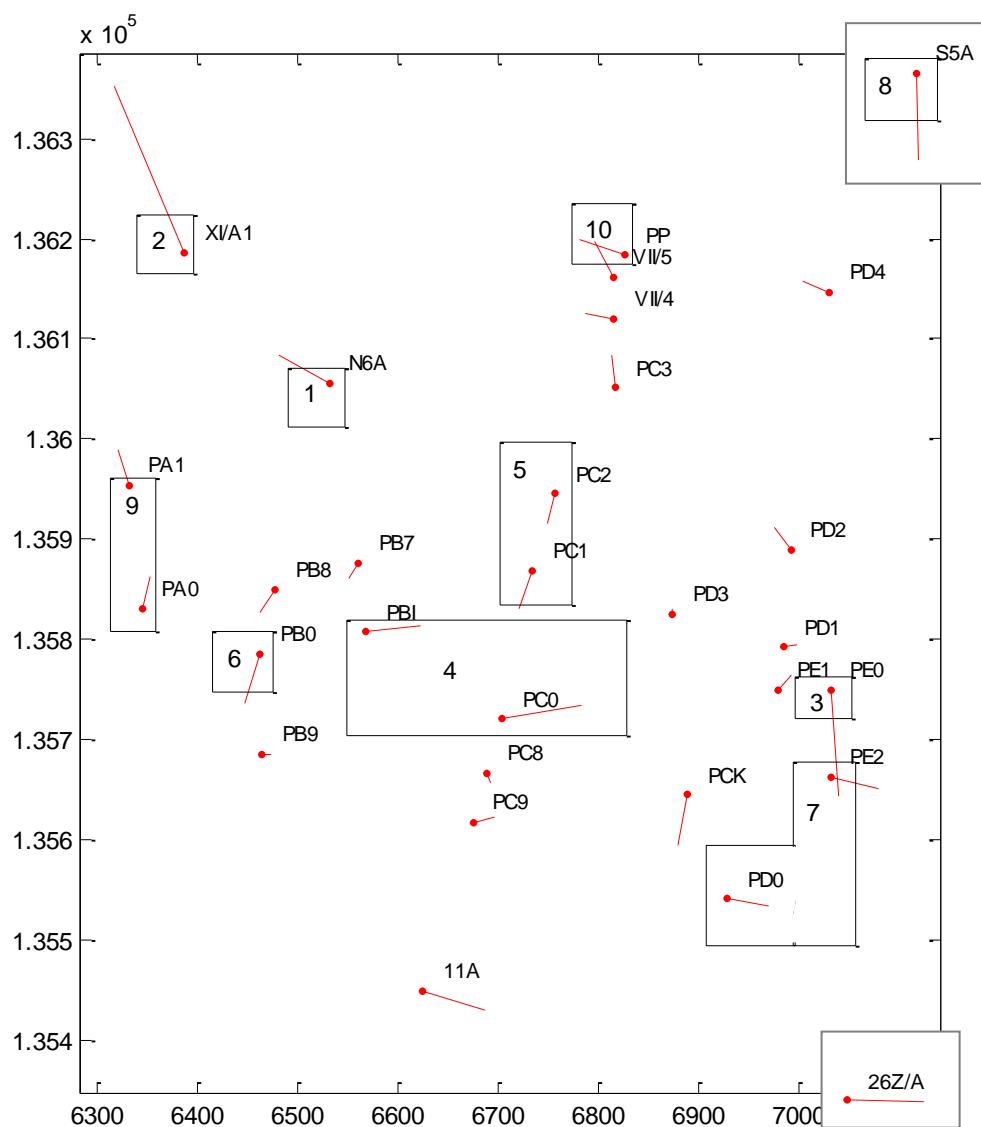
Na spodnji sliki so prikazani vektorji premikov po uporabi postopka IWP in 95% - relativne elipse zaupanja. O premikih sklepamo pri točkah, kjer je velikost premika izven ali na meji elipse. Točki S5A in 26Z/A sta premaknjeni bližje drugim točkam v mreži, da je mogoč prikaz v večjem merilu. Osi elips in premiki so prikazani v istem, 1000 krat večjem merilu kot mreža.



Slika 5: Vektorji koordinatnih razlik med prvo in drugo terminsko izmero mreže Pesje po uporabi postopka IWP.

Na podlagi slike 5 smo točke združili v 10 blokov (Slika 6) ter identificirali 5 možnih deformacijskih modelov (preglednica 2). Kot samostojen blok brez premikov obravnavamo točke, ki v posameznem modelu niso zajete v nobenega od drugih blokov. Vektorji premikov v mreži Pesje so precej različni, zato je točke težko združevati v bloke. 5 točk obravnavamo kot samostojen blok in je tako za te bloke (1, 2, 3, 6, 8, 10) izmed deformacijskih parametrov možno določiti le komponenti premikov v smeri y in x . Za ostale bloke bi načeloma lahko

določili tudi druge parametre, vendar se zdi, glede na sliko vektorjev premikov, najbolj smiselno za vsak blok določiti le komponenti premika v smeri y in x .



Slika 6: Razvrstitev točk v bloke glede na premike.

Preglednica 1: Razdelitev na bloke, točke in parametri za vsak blok.

| | blok 1 | blok 2 | blok 3 | blok 4 | blok 5 | blok 6 | blok 7 | blok 8 | blok 9 | blok 10 |
|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|------------------------|
| točke | N6A | X1/A1 | PE0 | PC0 PBI | PC1 PC2 | PB0 | PD0 PE2 | S5A | PA1 PA0 | PP |
| parametri | d_{y1} d_{x1} | d_{y2} d_{x2} | d_{y3} d_{x3} | d_{y4} d_{x4} | d_{y5} d_{x5} | d_{y6} d_{x6} | d_{y7} d_{x7} | d_{y8} d_{x8} | d_{y9} d_{x9} | d_{y10} d_{x10} |

3.3 Določitev in statistično testiranje deformacijskih parametrov

V primeru mreže Pesje smo primerjali le dve terminski izmeri, zato smo za določitev deformacijskih parametrov uporabili enačbe iz poglavja 2.3.1. Za vsak model smo izračunali tudi globalni test modela, ter kritično vrednost iz porazdelitve F. Za posamezen parameter pa še stopnjo zaupanja.

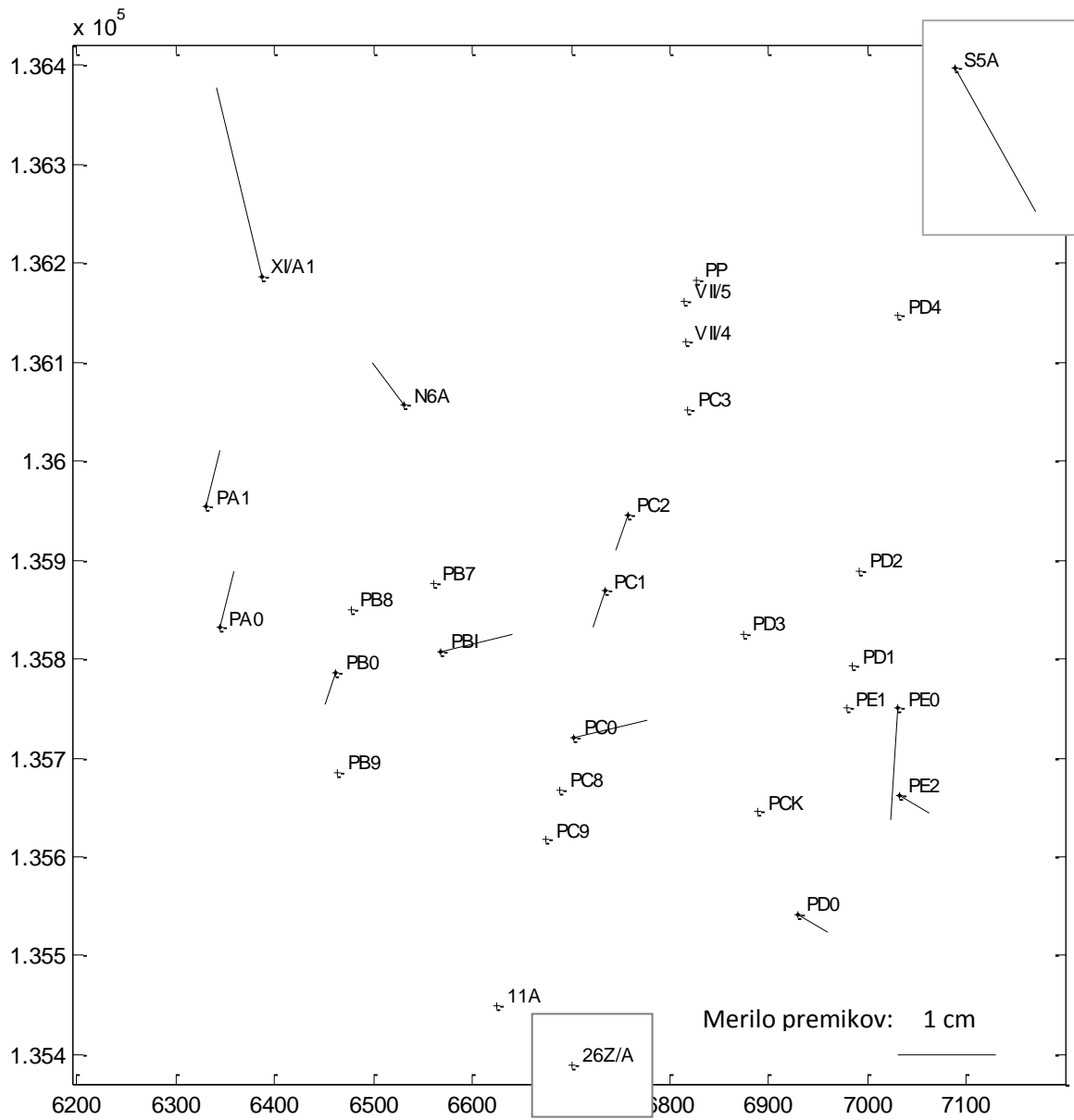
Preglednica 2: Identificirani deformacijski modeli, določeni deformacijski parametri ter njihove stopnje zaupanja za mrežo Pesje.

| | Deformacijski parametri | Vrednosti parametrov [mm] | Stopnja zaupanja v parameter [%] | Globalni test [$\alpha = 0.05$] |
|--|--|---|--|-----------------------------------|
| Model 0: ni premikov | | | | 15.419 > 1.377 ZAVRNJEN |
| Model 1: (premiki, ki padejo očitno izven elips) premiki blokov: 1, 2, 3, 6 | d_{y1} d_{x1} d_{y6} d_{x6} d_{y2} d_{x2} d_{y3} d_{x3} | -4.93 3.82 -3.44 -4.47 -6.51 18.09 -1.80 -11.28 | ~100.0 ~100.0 ~100.0 ~100.0 99.1 ~100.0 ~100.0 ~100.0 | 5.474 > 1.398 ZAVRNJEN |
| Model 2: (vsi premiki, ki padejo izven elips) premiki blokov: 1, 2, 3, 4, 5 (samo točka PC1), 6, 7 (samo točka PE2), 8 | d_{y1} d_{x1} d_{y6} d_{x6} d_{y2} d_{x2} d_{y3} d_{x3} d_{y8} d_{x8} d_{y4} d_{x4} d_{y5} d_{x5} d_{y7} d_{x7} | -4.60 3.66 -0.98 -4.32 -6.40 17.68 -0.73 -11.34 7.34 -14.18 7.30 1.63 -1.16 -2.21 2.85 -2.01 | ~100.0 ~100.0 94.4 ~100.0 99.0 ~100.0 89.1 ~100.0 77.9 99.4 ~100.0 99.9 91.6 99.7 97.4 96.3 | 1.712 > 1.424 ZAVRNJEN |
| Model 3: (Model 2 in točki PC2 ter PD0, ki zaokrožita bloka 5 | d_{y1} d_{x1} d_{y6} d_{x6} | -4.35 3.26 -0.98 -4.38 | ~100.0 ~100.0 94.4 ~100.0 | 1.486 > 1.424 ZAVRNJEN |

| | | | | |
|---|----------|--------|--------|---------------------------------|
| in 7) premiki blokov: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 | d_{y2} | -6.04 | 98.6 | |
| | d_{x2} | 17.40 | ~100.0 | |
| | d_{y3} | -0.66 | 85.2 | |
| | d_{x3} | -11.21 | ~100.0 | |
| | d_{y8} | 6.57 | 72.4 | |
| | d_{x8} | -13.56 | 99.1 | |
| | d_{y4} | 7.33 | ~100.0 | |
| | d_{x4} | 1.55 | 99.8 | |
| | d_{y5} | -1.31 | 92.5 | |
| | d_{x5} | -3.72 | ~100.0 | |
| | d_{y7} | 3.15 | 98.5 | |
| | d_{x7} | -1.82 | 99.4 | |
| Model 4: (Model 3 in blok 9) premiki blokov: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 | d_{y1} | -3.32 | ~100.0 | 1.064 < 1.432 SPREJET |
| | d_{x1} | 4.34 | ~100.0 | |
| | d_{y6} | -1.04 | 91.9 | |
| | d_{x6} | -3.32 | ~100.0 | |
| | d_{y2} | -4.47 | 93.9 | |
| | d_{x2} | 19.09 | ~100.0 | |
| | d_{y3} | -0.67 | 86.0 | |
| | d_{x3} | -11.22 | ~100.0 | |
| | d_{y8} | 8.22 | 82.7 | |
| | d_{x8} | -14.45 | 99.4 | |
| | d_{y4} | 7.29 | ~100.0 | |
| | d_{x4} | 1.67 | 99.9 | |
| | d_{y5} | -1.19 | 89.8 | |
| | d_{x5} | -3.64 | ~100.0 | |
| | d_{y7} | 3.05 | 98.2 | |
| d_{x7} | -1.80 | 99.4 | | |
| d_{y9} | 1.39 | 89.4 | | |
| d_{x9} | 5.73 | ~100.0 | | |
| Model 5: premiki blokov: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 | d_{y1} | -3.65 | ~100.0 | 0.967 < 1.440 SPREJET |
| | d_{x1} | 4.21 | ~100.0 | |
| | d_{y6} | -1.07 | 92.8 | |
| | d_{x6} | -3.39 | ~100.0 | |
| | d_{y2} | -4.92 | 95.8 | |
| | d_{x2} | 18.82 | ~100.0 | |
| | d_{y3} | -0.68 | 86.2 | |
| | d_{x3} | -11.20 | ~100.0 | |
| | d_{y8} | 6.30 | 69.7 | |
| | d_{x8} | -13.32 | 99.0 | |
| | d_{y4} | 7.27 | ~100.0 | |
| | d_{x4} | 1.68 | 99.9 | |
| | d_{y5} | -1.29 | 91.7 | |
| | d_{x5} | -3.59 | ~100.0 | |
| | d_{y7} | 3.04 | 98.1 | |
| d_{x7} | -1.72 | 99.1 | | |
| d_{y9} | 1.26 | 86.0 | | |
| d_{x9} | 5.49 | ~100.0 | | |
| d_{y10} | -1.99 | 99.0 | | |
| d_{x10} | 0.66 | 78.5 | | |

3.4 Izbira najustrežnejšega modela

Ker ne poznamo geoloških ali fizikalnih vzrokov, s katerimi bi lahko utemeljili izbiro posameznega modela, smo se pri izbiri »najboljšega« modela oprli zgolj na njihove statistične lastnosti. Vsi možni deformacijski modeli imajo vrednost testne statistike blizu kritični vrednosti. Sprejeta sta le modela 4 in 5. Če primerjamo stopnje zaupanja za parametre, ki nastopajo v obeh (4 in 5) modelih, ugotovimo, da imajo parametri, določeni v modelu 4 nekoliko višje stopnje zaupanja. Izstopa parameter premika točke S5A v smeri y , ki ima v modelu 4 stopnjo zaupanja 82,7%, v modelu 5 pa 69,7%. Nekoliko višja je tudi stopnja zaupanja parameter premika bloka 9 v smeri y . Ob tem model 4 tudi zadosti globalnemu testu modela ob manjšem številu parametrov, zato smo kot »najboljšega« izbrali model 4.



Slika 7: Grafična predstavitev premikov določenih z izbranim modelom po postopku Fredericton.

4 PREIMERJAVA REZULTATOV Z REZULTATI DRUGIH METOD

Rezultate, dobljene po postopku Fredericton, smo primerjali z rezultati dobljenimi po postopkih Delft, Karlsruhe, Hannover in München. Rezultati ostalih metod so vzeti iz diplomske naloge Določevanje premikov v geodetski mreži po metodi München (Soldo, 2009).

Preglednica 3: Primerjava rezultatov petih deformacijskih analiz.

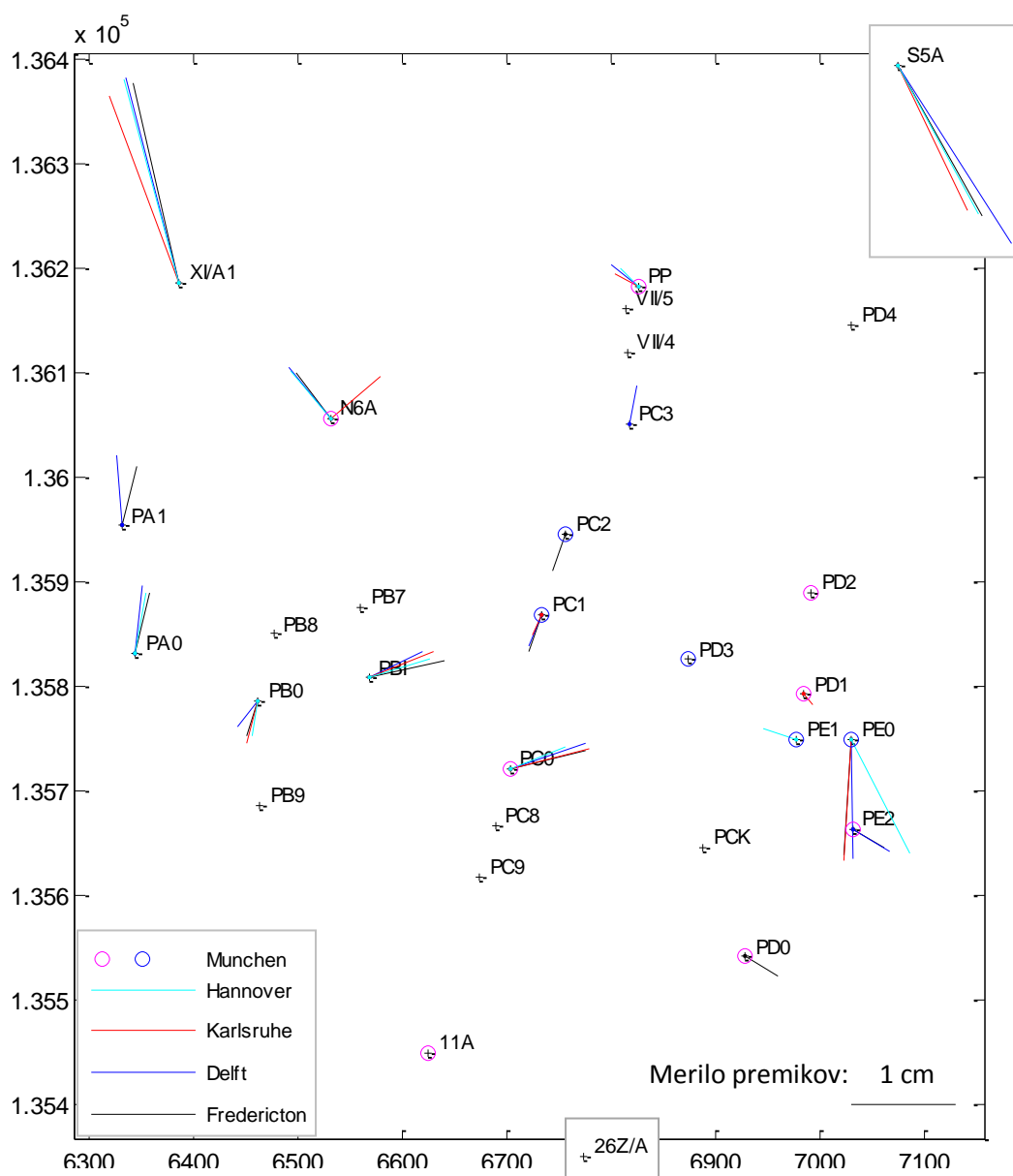
| Točka | Delft | | | Karlsruhe | | | Hannover | | | München | Fredericton | | |
|-------|---------------|---------------|-------|---------------|---------------|-------|---------------|---------------|-------|---------|---------------|---------------|-------|
| | d_y [mm] | d_x [mm] | Stab. | d_y [mm] | d_x [mm] | Stab. | d_y [mm] | d_x [mm] | Stab. | Stab. | d_y [mm] | d_x [mm] | Stab. |
| 26Z/A | 1,5 | -4,0 | da | - | - | da | 7,3 | 0,0 | da | da | 0 | 0 | da |
| 11A | 3,7 | -0,4 | da | - | - | da | 5,9 | -1,9 | da | ne | 0 | 0 | da |
| N6A | -3,9 | 4,9 | ne | 4,8 | 4,0 | ne | -3,8 | 4,6 | ne | ne | -3,3 | 4,3 | ne |
| S5A | 10,9 | -17,1 | ne | 6,7 | -13,9 | ne | 7,8 | -14,2 | ne | da | 8,2 | -14,4 | ne |
| PP | -2,5 | 2,0 | ne | -2,2 | 1,2 | ne | -1,7 | 1,6 | ne | ne | 0,0 | 0,0 | da |
| VII/5 | 0,0 | 3,9 | da | - | - | da | -2,2 | 3,6 | da | da | 0,0 | 0,0 | da |
| VII/4 | -1,3 | 0,9 | da | - | - | da | -3,2 | 0,6 | da | da | 0,0 | 0,0 | da |
| PD4 | -0,9 | 0,1 | da | - | - | da | -3,0 | 1,1 | da | da | 0,0 | 0,0 | da |
| PC3 | 0,8 | 3,6 | ne | - | - | da | -0,7 | 3,3 | da | da | 0,0 | 0,0 | da |
| PBI | 5,2 | 2,5 | ne | 6,2 | 2,5 | ne | 5,8 | 1,9 | ne | da | 7,3 | 1,7 | ne |
| PB0 | -2,0 | -2,5 | ne | -1,1 | -4,0 | ne | -0,5 | -3,3 | ne | da | -1,0 | -3,3 | ne |
| PB8 | -1,6 | 0,2 | da | - | - | da | -1,9 | -2,2 | da | da | 0,0 | 0,0 | da |
| PA1 | -0,5 | 6,8 | ne | - | - | da | -0,2 | 6,1 | da | da | 1,4 | 5,7 | ne |
| XI/A1 | -5,1 | 19,6 | ne | -6,7 | 17,9 | ne | -5,3 | 19,4 | ne | da | -4,5 | 19,1 | ne |
| PB7 | -0,8 | 0,5 | da | - | - | da | -1,2 | -1,4 | da | da | 0,0 | 0,0 | da |
| PB9 | 0,0 | 2,5 | da | - | - | da | 0,7 | 0,0 | da | da | 0,0 | 0,0 | da |
| PA0 | 0,7 | 6,4 | ne | - | - | da | 1,1 | 5,8 | ne | da | 1,4 | 5,7 | ne |

Se nadaljuje ...

... nadaljevanje

| | | | | | | | | | | | | | |
|-----|-------------|--------------|-----------|-------------|--------------|-----------|-------------|--------------|-----------|-----------|-------------|--------------|-----------|
| PCK | -2,2 | -5,1 | da | - | - | da | -1,2 | -5,0 | da | da | 0,0 | 0,0 | da |
| PC0 | 7,2 | 2,5 | ne | 7,6 | 1,9 | ne | 5,3 | 2,2 | ne | ne | 7,3 | 1,7 | ne |
| PD2 | -1,5 | -1,5 | da | - | - | da | -2,0 | 2,3 | da | ne | 0,0 | 0,0 | da |
| PC2 | -0,3 | -2,2 | da | - | - | da | -1,2 | -2,9 | da | ? | -1,2 | -3,6 | ne |
| PC1 | -1,2 | -3,0 | ne | -0,9 | -2,0 | ne | -1,6 | -3,8 | da | ? | -1,2 | -3,6 | ne |
| PD0 | 2,2 | -1,1 | da | - | - | da | 3,8 | -0,7 | da | ne | 3,1 | -1,8 | ne |
| PC8 | -0,9 | 0,1 | da | - | - | da | 0,0 | -1,0 | da | da | 0,0 | 0,0 | da |
| PC9 | 0,6 | 1,8 | da | - | - | da | 1,8 | 0,6 | da | da | 0,0 | 0,0 | da |
| PD1 | 1,0 | -0,4 | da | 0,8 | -0,9 | ne | 1,1 | 0,3 | da | ne | 0,0 | 0,0 | da |
| PE1 | 0,8 | 0,8 | da | - | - | da | -3,3 | 0,9 | ne | ? | 0,0 | 0,0 | da |
| PE2 | 3,6 | -2,1 | ne | - | - | da | 4,5 | -1,1 | da | ne | 3,1 | -1,8 | ne |
| PD3 | -0,3 | 0,6 | da | - | - | da | -0,4 | 0,6 | da | ? | 0,0 | 0,0 | da |
| PE0 | 0,1 | -11,4 | ne | -0,7 | -11,7 | ne | 5,6 | -11,0 | ne | ? | -0,7 | -11,2 | ne |

Podatke zbrane v tabeli predstavimo še grafično na naslednji strani.



Slika 8: Grafična predstavitev vektorjev premikov iz posameznega postopka deformacijske analize

Zgornja slika, ki grafično prikaže podatke, zbrane v preglednici Preglednica 3 ni čisto korektna. Na sliki vse vektorje prikazujemo v istem koordinatnem sistemu s pomočjo koordinatnih razlik koordinat, ki se ne nanašajo na ta koordinatni sistem. Vektorji premikov so izrisani na podlagi komponent dy in dx . Pri tem ni nujno, da imata koordinatni osi v vseh primerih enako smer, saj je (lahko) geodetski datum v posameznem postopku določen drugače kot v drugih. Drugačen datum bi povzročil premik in rotacijo vektorjev premikov posamezne terminske izmere glede na druge, medtem ko bi velikost vektorjev premikov ostala ista, saj je merilo določeno na podlagi merjenih dolžin enako v vseh terminskih izmerah. Tudi premik

vektorjev premikov določenih po posameznem postopku, nas tukaj ne moti, saj primerjamo vektorje premikov med seboj in ne njihovega absolutnega položaja. Ob zavedanju, da je pri primerjanju smeri vektorjev izrisanih na sliki, potrebne nekaj previdnosti (če so smeri vektorjev premikov bistveno različne le na nekaterih točkah je to posledica razlike postopkov in ne zgolj vpliva geodetskega datuma), je prikaz uporaben pri primerjanju velikosti premikov ter pri določitvi verjetno mirujočih točk po posameznem postopku.

Točke, ki verjetno niso mirujoče po vseh postopkih so: N6A, PC0 in PE0. Pri tem je zanimivo, da so vsi vektorji premikov podobni le na točki PC0, medtem ko na točki N6A premik, določen po metodi Karlsruhe bistveno odstopa po smeri, velikosti so podobne. Na točki PE0, je po smeri in velikosti glede na ostale najbolj odmaknjen premik določen po metodi Hannover.

Premike na točkah X1/A1, S5A in PB1 določijo vsi postopki razen postopka München. Premiki na teh točkah so glede na postopek določitve med seboj podobni, le postopek Delft določi na točk S5A nekoliko večji premiki od ostalih. Premiki teh točk so po velikosti med največjimi (npr. X1/A1 okoli 20 mm, S5A okoli 17 mm), zato je zanimivo, da jih postopek München določi kot verjetno mirujoče. Vzrok bi bilo mogoče iskati v slabi vpetosti obeh točk v mrežo, saj je točka X1/A1 opazovana le iz (verjetno nemirujoče) točke N6A, točka S5A pa je zelo oddaljena od ostale mreže in so koti med opazovanji na in iz te točke majhni. Vendar je to zgolj ugibanje, razlog bi bilo potrebno poiskati s podrobnejšo analizo postopka München.

Premik točke PP določijo vsi postopki razen postopka Fredericton. Velikost premika, ki ga določijo ostali postopki je okoli 3 mm. Premik te točke smo vključili med možne modele v modelu 5. Pri primerjavi modelov 4 in 5 smo ugotovili, da ta vključitev zmanjša stopnjo zaupanja parametra premika dy točke S5A in smo se, tudi zaradi tega, odločili za model 4.

Zanimiv je še trend na jugovzhodnem delu mreže. Premike na točkah PD0 in PE2 zaznata postopka München (ki določi kot nemirujočo tudi točko 11A) in Fredericton, ki te točke poveže v blok in določi premik, velik cca. 4 mm v smeri jugovzhod. Te točke se nahajajo na

pobočju vzpetine južno od vasi Pesje in bi njihovi premiki lahko kazali na geodinamiko na tem območju. Z večjo gotovostjo bi o tem govorili, če bi imeli na voljo podatke iz terminskih izmer z večjim časovnim presledkom.

Zanimalo nas je ali bi bili deformacijski modeli, ki jih predlagajo drugi postopki za mrežo Pesje sprejeti po postopku Fredericton. Podajamo vrednosti testne statistike T^2 tudi za te modele.

Preglednica 4: Vrednosti testne statistike T^2 za deformacijske modele drugih postopkov.

| | Premiki točk: | Globalni test [$\alpha = 0.05$] |
|------------------------|--|--------------------------------------|
| Model Delft | N6A, S5A, PP, PC3, PB1, PB0, PA1, X1/A1, PA0, PC0, PC1, PE2, PE0 | 0.993 < 1.469 SPREJET |
| Model Karlsruhe | N6A, S5A, PP, PB1, PB0, X1/A1, PC0, PC1, PD1, PE0 | 1.608 > 1.440 ZAVRNJEN |
| Model Hannover | N6A, S5A, PP, PB1, PB0, X1/A1, PA0, PC0, PE1, PE0 | 1.543 > 1.440 ZAVRNJEN |
| Model München | 11A, N6A, PP, PC0, PD2, PD0, PE2, | 10.425 > 1.424 ZAVRNJEN |
| | + točke z vprašaji: PC2, PC1, PE1, PD3, PE0 | 7.139 > 1.469 ZAVRNJEN |

Vidimo, da bi od predlaganih deformacijskih modelov po drugih postopkih bil sprejet le model, ki ga predlaga postopek Delft. Vrednost testne statistike za modela Karlsruhe in Hannover sta zelo blizu kritični vrednosti, medtem ko model München nekoliko bolj odstopa.

5 ZAKLJUČEK

Postopek Fredericton je splošen in uporaben ne glede na situacijo v geodetski mreži (glej zahteve za postopek v poglavju 2). Pri tem je potrebna pozornost, saj je v različnih situacijah nekatere korake postopka potrebno prilagoditi, npr. drugačen izračun matrike uteži glede na pristop z opazovanji ali koordinatni pristop, vključitev parametra ω pri obravnavi vpete mreže, dodatno upoštevanje defekta konfiguracije geodetske mreže, itd.

Prednost postopka Fredericton pred ostalimi vidimo v tem, da poskuša premike smiselno povezati v zaključene bloke in njihove deformacije povezati, utemeljiti z geofizikalnim dogajanjem na obravnavanem območju ali objektu. Ta prednost v mreži Pesje ni prišla do izraza. Premiki so bili med seboj različni in niso kazali na noben značilen trend premikanj v mreži. Vsekakor bi bilo tak trend, v kolikor obstaja, lažje prepoznati, če bi imeli na voljo meritve več terminskih izmer za daljše časovno obdobje.

Posebnost postopka Fredericton glede na druge postopke je tudi, da ni avtomatičen. V fazi identificiranja možnih deformacijskih modelov je potrebna geodetova odločitev o tem katere točke je smiselno povezati v bloke in katere deformacijske parametre je, glede na polje premikov, smiselno določevati za posamezen blok. Ta korak v postopku je pomemben, saj uporabnih rezultatov ne moremo dobiti, dokler ne identificiramo dovolj dobrega modela (v nasprotnem primeru ne bo sprejet globalni test modela). Identifikacija možnih deformacijskih modelov je torej subjektivna in je odvisna od geodetove interpretacije morebitnih dodatnih podatkov o obravnavanem območju (geofizikalne lastnosti) in njegove izkušnosti. Zanimivo bi bilo preskusiti ali bi lahko ta korak zadovoljivo avtomatizirali z uporabo katerega od modernih postopkov, npr. z nevronskimi mrežami.

Rezultati petih postopkov, ki smo jih primerjali v poglavju 4, se nekoliko razlikujejo med seboj. Za boljše razumevanje vpliva posebnosti posameznega postopka na rezultate, bi bilo nujno izvesti primerjavo rezultatov še za več različnih geodetskih mrež v več terminskih izmerah. Pri tem bi bilo smiselno opazovati, kako na različnost rezultatov med metodami, vplivajo geometrija mrež, defekti konfiguracij med terminskimi izmerami, polje premikov,

število nadštevilnih opazovanj. Taka primerjava, bi lahko bila osnova za odločitev o tem katerega od postopkov uporabiti v konkretni situaciji.

6 VIRI

6.1 Uporabljeni viri

Ambrožič, T. 1996. Ocena stabilnosti točk v geodetski mreži. Magistrska naloga. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Oddelek za geodezijo: 76 str.

Chen, Y. Q. 1983. Analysis of Deformation Surveys - A Generalized Approach. Doktorska disertacija. Fredericton, N.B., University of New Brunswick, Department of Geodesy and Geomatics Engineering.

<http://gge.unb.ca/Pubs/TR94> (2. 6. 2010)

Chrzanowski, A., Chen, Y. Q., Secord J. M. 1982. A Generalized Approach to the Geometrical Analysis of Deformation Surveys. 3rd international symposium on deformation measurements by geodetic methods, Budimpešta, 25. – 27. avgust 1982.

Grigillo, D., Stopar, B. 2003. Metode odkrivanja grobih pogreškov v geodetskih opazovanjih, Geodetski vestnik 47, 4: 387 - 403.

Marjetič, A., Stopar, B. 2007. Geodetski datum in S-transformacija, Geodetski vestnik 51, 3: 549 - 564.

Mozetič, B., Kogoj, D., Ambrožič, T. 2006. Uporabnost izbranih metod deformacijske analize na praktičnih primerih geodetskih mrež. Geodetski vestnik 50, 4: 620 – 631.

Rao, C. R., Mitra S.K. 1971. Generalized Inverse of Matrices and its Applications. New York, London, Sydney, Toronto, John Wiley and sons, inc.: str. 186 – 192.

Savšek, S., Ambrožič, T., Kogoj, D., Koler, B., Sterle, O., Stopar, B. 2010. Geodezija v geotehniki. Geodetski vestnik, 54, 1: 31 – 45.

Secord, M., J. 1985. Implementation of a generalized method for the analysis of deformation surveys.

<http://gge.unb.ca/Pubs/TR117.pdf> (2. 6. 2010)

Soldo, J. 2009. Določitev premikov v geodetski mreži po postopku München. Diplomski naloga. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Oddelek za geodezijo, geodetska smer: 45 str.

Stanek, M., Turk, G. 1998. Kinematične enačbe. V: Stanek, M., Turk, G. 1998. Osnove mehanike trdnih teles. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo: 1 - 67 str.

Trunk, J. 2005. Določitev premikov v geodetski mreži po postopku Karlsruhe. Diplomski naloga. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Oddelek za geodezijo, geodetska smer: 71 str.

Welsch W. M., Heunecke O. 2001. Models and Terminology for the Analysis of Geodetic Monitoring Observation. Official Report FIG Working Group, Institut of Geodesy, Hannover. <http://www.fig.net/pub/figpub/pub25/figpub25.htm#PREFACE> (junij 2010)

Zemljak, M. 2006. Določitev premikov v geodetski mreži po postopku Delft. Diplomski naloga. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Oddelek za geodezijo, geodetska smer, 68 str.

6.2 Drugi viri

Chen, Y. Q., Charzanowski, A., Secord J. M. 1990. A strategy for the analysis of the stability of reference points in deformation surveys.

<http://ccge.unb.ca/publications/downloads/CCGE%20-%201990%20-%20A%20strategy%20for%20the%20analysis%20of%20the%20stability%20of%20reference%20points%20in%20deformation%20surveys.pdf> (2.6. 2010)

Savšek Safić, S., Ambrožič, T., Stopar B., Turk G. 2003. Ugotavljanje premikov točk v geodetski mreži. Geodetski vestnik, 47, 1-2: 7 – 17.

Savšek Safić, S. 2002. Ugotavljanje premikov z metodami deformacijske analize. <http://www.fgg.uni-lj.si/sugg/referati/2002/Savsek2002.pdf> (junij 2010).

Shortis, M. 1999. Error Ellipses. The University of Melbourne, Australia. http://www.geom.unimelb.edu.au/nicole/surveynetworks/02a/notes09_01.html (14. avgust 2010)

Wikipedija, geslo: Deformation (mechanics)

http://en.wikipedia.org/wiki/Talk:Deformation_%28mechanics%29 (junij 2010)

PRILOGE

PRILOGA A:

Izpeljava modela s pogojem najmanjših kvadratov popravkov

Imamo matematični model:

$$\mathbf{x}_1 + \boldsymbol{\delta}_1 = \boldsymbol{\xi}$$

$$\mathbf{x}_i + \boldsymbol{\delta}_i = \boldsymbol{\xi} + \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{e}}, \quad i = 2, \dots, k$$

Poiskati moramo tako rešitev, da bo utežena vsota kvadratov popravkov minimalna. Ta pogoj zapišemo kot:

$$\Phi = \boldsymbol{\delta}_1^T \mathbf{P}_1 \boldsymbol{\delta}_1 + \sum_{i=2}^k \boldsymbol{\delta}_i^T \mathbf{P}_i \boldsymbol{\delta}_i = \min.$$

$$\Phi = (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_1)^T \mathbf{P}_1 (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_1) + \sum_{i=2}^k (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{e}} - \mathbf{x}_i)^T \mathbf{P}_i (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{e}} - \mathbf{x}_i) = \min.$$

Člene zmnožimo in seštejemo istovrstne člene. Pri tem upoštevamo, da so matrike \mathbf{P}_i diagonalne in velja $\mathbf{P}_i^T = \mathbf{P}_i$ ter pravilo za množenje transponiranih matrik $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$.

$$\begin{aligned} \Phi &= \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P}_1 \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1^T \mathbf{P}_1 \boldsymbol{\xi} + \mathbf{x}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{x}_1 + \\ &+ \sum_{i=2}^k \left(\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P}_i \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{e}} - \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i + \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \boldsymbol{\xi} + \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{e}} - \right. \\ &\quad \left. - \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i^T \mathbf{P}_i \boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{e}} + \mathbf{x}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i \right) = \min. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P}_1 \boldsymbol{\xi} - 2 \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{x}_1 + \\ &+ \sum_{i=2}^k \left(\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P}_i \boldsymbol{\xi} + 2 \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{e}} - 2 \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i + \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \hat{\mathbf{e}} - 2 \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{x}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i \right) = \min. \end{aligned}$$

Ker moramo poiskati minimum, enačbo odvajamo po obeh neznankah, po ξ in po \hat{e} , ter oba odvoda enačimo z 0:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = 2\mathbf{P}_1 \xi - 2\mathbf{P}_1 \mathbf{x}_1 + \sum_{i=2}^k (2\mathbf{P}_i \xi + 2\mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \hat{e} - 2\mathbf{P}_i \mathbf{x}_i) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \hat{e}} = \sum_{i=2}^k (2(\xi^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i)^T + 2\mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \hat{e} - 2\mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i) = 0$$

Obe enačbi delimo z 2, ter seštejemo istovrstne člene:

$$\sum_{i=1}^k (\mathbf{P}_i \xi) + \sum_{i=2}^k (\mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \hat{e}) - \sum_{i=1}^k (\mathbf{P}_i \mathbf{x}_i) = 0$$

$$\sum_{i=2}^k (\mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \xi) + \sum_{i=2}^k (\mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \hat{e}) - \sum_{i=2}^k (\mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i) = 0$$

Enačbi zapišemo v matrični obliki in izpeljava je končana:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^k \mathbf{P}_i & \sum_{i=2}^k \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \\ \sum_{i=2}^k \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i & \sum_{i=2}^k \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \hat{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^k \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i \\ \sum_{i=2}^k \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i \end{bmatrix}$$

PRILOGA B:**Izpeljava enačbe za izračun deformacijskih parametrov za dve terminski izmeri**

Izpeljava je bila narejena s pomočjo poglavij o paralelni vsoti matrik avtorjev Rao in Mitra (1971). V izpeljavi bomo uporabili naslednje zveze:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \bar{\pm} \mathbf{B} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{A} = \\ &= \mathbf{A} \underbrace{(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{B})}_{\mathbf{I}} - \mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A} - \mathbf{A}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{A} \end{aligned}$$

Enačba za izračun deformacijskih parametrov iz poljubne št. terminskih izmer je (enačba ??):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}} &= \left[\sum_{i=2}^k \mathbf{B}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{B}_i - \sum_{i=2}^k \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \left(\sum_{i=1}^k \mathbf{P}_i \right)^{-1} \sum_{i=2}^k \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \right]^{-1} \cdot \\ &\cdot \left[\sum_{i=2}^k \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i - \sum_{i=2}^k \mathbf{B}_i^T \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \left(\sum_{i=1}^k \mathbf{P}_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^k \mathbf{P}_i \mathbf{x}_i \right] \end{aligned}$$

Zaradi preglednosti izpeljave obravnavamo matriko \mathbf{A} kot enotsko, oz. kot del matrike \mathbf{B} .

Enačbo zapišemo za $i = 1, 2$:

$$\hat{\mathbf{e}} = [\mathbf{B}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_2^T \mathbf{P}_2 (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^{-1} \mathbf{P}_2 \mathbf{B}_2]^{-1} [\mathbf{B}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{x}_2 - \mathbf{B}_2^T \mathbf{P}_2 (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^{-1} (\mathbf{P}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{P}_2 \mathbf{x}_2)]$$

Vidimo, da so vsi členi množeni z \mathbf{B}_2^T , v prvem oklepaju pa tudi z $\cdot \mathbf{B}_2$. Izpostavimo:

$$\hat{\mathbf{e}} = \left[\mathbf{B}_2^T \underbrace{(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_2 (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^{-1} \mathbf{P}_2)}_{\mathbf{P}_1 \bar{\pm} \mathbf{P}_2} \mathbf{B}_2 \right]^{-1} [\mathbf{B}_2^T (\mathbf{P}_2 \mathbf{x}_2 - \mathbf{P}_2 (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^{-1} (\mathbf{P}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{P}_2 \mathbf{x}_2))]$$

$$\hat{\mathbf{e}} = [\mathbf{B}_2^T (\mathbf{P}_1 \bar{\pm} \mathbf{P}_2) \mathbf{B}_2]^{-1} [\mathbf{B}_2^T (\mathbf{P}_2 \mathbf{x}_2 - \mathbf{P}_2 (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^{-1} \mathbf{P}_1 \mathbf{x}_1 - \mathbf{P}_2 (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^{-1} \mathbf{P}_2 \mathbf{x}_2)]$$

$$\hat{\mathbf{e}} = [\mathbf{B}_2^T (\mathbf{P}_1 \bar{\pm} \mathbf{P}_2) \mathbf{B}_2]^{-1} \left[\mathbf{B}_2^T \left(\underbrace{(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_2 (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^{-1} \mathbf{P}_2)}_{\mathbf{P}_1 \bar{\pm} \mathbf{P}_2} \mathbf{x}_2 - \underbrace{\mathbf{P}_2 (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2)^{-1} \mathbf{P}_1 \mathbf{x}_1}_{\mathbf{P}_1 \bar{\pm} \mathbf{P}_2} \right) \right]$$

$$\hat{\mathbf{e}} = [\mathbf{B}_2^T (\mathbf{P}_1 \bar{\pm} \mathbf{P}_2) \mathbf{B}_2]^{-1} \mathbf{B}_2^T (\mathbf{P}_1 \bar{\pm} \mathbf{P}_2) \underbrace{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}_{\mathbf{d}}$$

$$\hat{\mathbf{e}} = [\mathbf{B}_2^T (\mathbf{P}_1 \bar{\pm} \mathbf{P}_2) \mathbf{B}_2]^{-1} \mathbf{B}_2^T (\mathbf{P}_1 \bar{\pm} \mathbf{P}_2) \mathbf{d}$$