

Univerza
v Ljubljani
Fakulteta
*za gradbeništvo
in geodezijo*

*Janova 2
1000 Ljubljana, Slovenija
telefon (01) 47 68 500
faks (01) 42 50 681
fgg@fgg.uni-lj.si*



Univerzitetni program Gradbeništvo,
Konstrukcijska smer

Kandidat:

Boštjan Jursinovič

Kotaljenje diska po deformabilnem nosilcu

Diplomska naloga št.: 3168

Mentor:

izr. prof. dr. Dejan Zupan

Somentor:

prof. dr. Igor Planinc

Ljubljana, 24. 6. 2011

POPRAVKI

Stran z napako

Vrstica z napako

Namesto

Naj bo

IZJAVA O AVTORSTVU

Podpisani BOŠTJAN JURSIKOVIČ izjavljam, da sem avtor diplomske naloge z naslovom:
»KOTALJENJE DISKA PO DEFORMABILNEM NOSILCU«.

Izjavljam, da je elektronska različica v vsem enaka tiskani različici.

Izjavljam, da dovoljujem objavo elektronske različice v repozitorju UL FGG.

Ljubljana,.....

Podpis: _____

BIBLIOGRAFSKO – DOKUMENTACIJSKA STRAN IN IZVLEČEK

UDK:	539.3:004.42(043.2)
Avtor:	Boštjan Jursinovič
Mentor:	izr. prof. dr. Dejan Zupan
Somentor:	prof. dr. Igor Planinc
Naslov:	Kotaljenje diska po deformabilnem nosilcu
Obseg in oprema:	98 str., 13 pregl., 42 sl., 170 en.
Ključne besede:	dinamika, kotaljenje brez podrsavanja, Reissnerjev nosilec, numerično reševanje diferencialnih enačb, programski paket Matlab, metoda končnih elementov, kotaljenje diska po linijskem nosilcu

Izvleček

V diplomski nalogi smo izdelali ravninski matematični model kotaljenja togega telesa po deformabilni podlagi. Togo telo smo nadomestili z diskom, deformabilno podlago pa predstavlja elastičen linijski nosilec. Izpeljali smo enačbe kotaljenja diska brez podrsavanja po znani krivulji, enačbe dinamičnega odziva linijskega nosilca na točkovno obtežbo ter enačbe kotaljenja diska brez podrsavanja po linijskem nosilcu. Enačbe najprej diskretiziramo po kraju po metodi končnih elementov. Tako diskretizirane enačbe so še vedno diferencialne enačbe po času. Rešujemo jih z numeričnimi metodami družine Runge-Kutta, ki so že vgrajene v programski paket *Matlab*. Napisali smo računalniške programe, ki omogočajo numerično reševanje teh enačb. Uporaba programov je prikazana na različnih primerih, rezultate pa prikazujemo s pomočjo grafov in animacij.

BIBLIOGRAPHIC – DOCUMENTALISTIC INFORMATION AND ABSTRACT

UDC:	539.3:004.42(043.2)
Author:	Boštjan Jursinovič
Supervisor:	Assoc. Prof. Dejan Zupan, Ph.D.
Co-supervisor:	Prof. Igor Planinc, Ph.D.
Title:	Study of Reissner beam under rolling disk
Notes:	98 p., 13 tab., 42 fig., 170 eq.
Key words:	dynamics, rolling, Reissner beam, numerical methods for differential equations, Matlab, finite-element method, rolling of disk on beam-like structure

Abstract

For this degree paper we developed two-dimensional mathematical model of a rigid body rolling motion on deformable surface. Rigid body was modeled as a disk and deformable surface with geometrically non-linear beam. We derived equations of the rolling disk on known curve line, equations of dynamical response of Reissner beam under point load and equations of coupled rolling of disk on geometrical non-linear beam. Equations are discretized first with respect to the length of the beam following the finite-element method. Discretized equations are still differential equations with respect to the time. They were solved by the use of numerical methods of the Runge-Kutta family that are part of the commercial software *Matlab*. We developed programs for solving the governing equations and post-processing of the results. Use of these programs is presented for several numerical studies.

ZAHVALA

Iskreno se zahvaljujem mentorju izr. prof. dr. Dejanu Zupanu za pomoč in sproščeno vzdušje, ki mi ju je nudil tekom izdelave diplomske naloge.

Zahvalil bi se tudi vsem bližnjim za podporo in vse prijetne trenutke skozi celotno obdobje študija.

KAZALO VSEBINE

1	UVOD	1
1.1	Motivacija	1
1.2	Predpostavke	1
1.3	Načrt dela.....	2
2	KINEMATIKA IN DINAMIKA DISKA PO POLJUBNI KRIVULJI.....	4
2.1	Kinematika	4
2.1.1	Koordinatni sistemi.....	4
2.1.2	Zveze med koordinatnimi sistemi.....	6
2.1.3	Odvod baznih vektorjev po času in vektorji kotne hitrosti.....	10
2.1.4	Odvod vektorja v pomičnem koordinatnem sistemu	14
2.1.5	Krajevni vektorji glede na prostorski koordinatni sistem.....	14
2.1.6	Vektorji hitrosti.....	15
2.1.7	Sile	17
2.1.7.1	<i>Zunanje sile.....</i>	<i>17</i>
2.1.7.2	<i>Momenti zunanjih sil.....</i>	<i>18</i>
2.2	Gibalne enačbe	18
2.2.1	Izrek o gibalni količini.....	18
2.2.2	Izrek o vrtilni količini	19
2.3	Krivulja kotaljenja	20
3	KOTALJENJE DISKA PO POLJUBNI ZNANI KRIVULJI	24
3.1	Kotaljenje brez podrsavanja po poljubni znani krivulji.....	25
3.1.1	Sistem enačb kotaljenja brez podrsavanja po poljubni znani krivulji	26
3.1.2	Zapis sistema diferencialnih enačb kotaljenja brez podrsavanja po poljubni znani krivulji v matrični obliki	29
3.1.3	Primer: Kotaljenje brez podrsavanja po kvadratni paraboli	31
3.2	Numerične študije: Kotaljenja diska brez podrsavanja po kvadratni paraboli.....	33
4	LINIJSKI NOSILEC	39
4.1	Diskretizacija po Galerkinovi metodi končnih elementov	42

4.1.1	Sistem enačb linijskega nosilca.....	48
4.1.2	Zapis sistema diferencialnih enačb linijskega nosilca v matrični obliki.....	50
4.2	Numerične študije: Dinamičen odziv linijskega nosilca pod hipno točkovno obtežbo.....	53
4.2.1	Na eni strani togo na drugi vrtljivo podprti nosilec.....	53
4.2.2	Previsni nosilec.....	58
5	KOTALJENJE DISKA PO LINIJSKEM NOSILCU.....	63
5.1	Kotaljenje brez podrsavanja po linijskem nosilcu.....	63
5.1.1	Sistem enačb kotaljenja brez podrsavanja po linijskem nosilcu.....	67
5.1.2	Zapis sistema diferencialnih enačb kotaljenja brez podrsavanja po linijskem nosilcu v matrični obliki.....	72
5.2	Numerične študije: Kotaljenje diska po linijskem nosilcu.....	75
5.2.1	Prostoležeči nosilec.....	76
5.2.2	Nosilec iz gume.....	82
5.2.3	Adrenalinska vrva.....	85
6	REŠEVANJE ENAČB S PROGRAMOM MATLAB.....	89
6.1	Shematski prikaz opisne datoteke za reševanje sistema navadnih diferencialnih enačb.....	90
6.1.1	Zaznavanje posebnih dogodkov.....	92
6.2	Shematski prikaz glavnega programa.....	93
6.3	Shematski prikaz opisne datoteke s podatki.....	94
7	ZAKLJUČEK.....	96
VIRI	97

KAZALO PREGLEDNIC

Preglednica 1: Sistem enačb kotaljenja brez podrsavanja.	28
Preglednica 2: Začetni pogoj pri kotaljenju brez podrsavanja.	29
Preglednica 3: Sistem enačb kotaljenja brez podrsavanja po kvadratni paraboli.	32
Preglednica 4: Začetni pogoji pri kotaljenju brez podrsavanja po kvadratni paraboli.	32
Preglednica 5: Sistem enačb linijskega nosilca.	49
Preglednica 6: Začetni pogoji enačb linijskega nosilca.	50
Preglednica 7: Podatki o nosilcu, ki je na eni strani togo, na drugi pa vrtljivo podprt.	54
Preglednica 8: Podatki o previsnem nosilcu.	59
Preglednica 9: Sistem enačb kotaljenja brez podrsavanja po linijskem nosilcu.	69
Preglednica 10: Začetni pogoji enačb kotaljenja brez podrsavanja po linijskem nosilcu.	72
Preglednica 11: Podatki o prostoležečem nosilcu.	76
Preglednica 12: Podatki o linijskem nosilcu iz gume.	82
Preglednica 13: Podatki o adrenalinski vrvi.	85

KAZALO SLIK

Slika 1: Skica kotaljenja diska po linijskem nosilcu	5
Slika 2: Zasuk globalnega koordinatnega sistema okrog osi E_Z	7
Slika 3: Zasuk izbranega koordinatnega sistema okrog osi e_Z	9
Slika 4: Krajevni vektorji.	14
Slika 5: Zunanje sile, ki delujejo na disk.....	17
Slika 6: Prikaz opisa krivulje kotaljenja.....	21
Slika 7: Kotaljenje diska po kvadratni paraboli.	34
Slika 8: Hitrosti in reakcijski sili diska z maso 1 kg in polmerom 0.1 m.....	35
Slika 9: Hitrosti in reakcijski sili diska z maso 1 kg in polmerom 0.2 m.....	36
Slika 10: Hitrosti in reakcijski sili diska z maso 2 kg in polmerom 0.15 m.....	37
Slika 11: Hitrosti in reakcijski sili diska z maso 3 kg in polmerom 0.15 m.....	38
Slika 12: Prikaz deformiranja Reissnerjevega ravninskega nosilca.....	40
Slika 13: Model nosilca, ki je na eni strani togo, na drugi pa vrtljivo podprt in njegov prečni prerez.....	54
Slika 14: Deformirana oblika nosilca za $l = 8$ m in $c = 0.75 l$ pri fiksnih časih. Faktor povečave pomikov je enak 100.	55
Slika 15: Ovojnica pomikov in zasukov nosilca za $l = 8$ m in $c = 0.75 l$	55
Slika 16: Deformirana oblika nosilca za $l = 7$ m in $c = 0.75 l$ pri fiksnih časih. Faktor povečave pomikov je enak 100.	56
Slika 17: Ovojnica pomikov in zasukov nosilca za $l = 7$ m in $c = 0.75 l$	56
Slika 18: Deformirana oblika nosilca za $l = 8$ m in $c = 0.5 l$ pri fiksnih časih. Faktor povečave pomikov je enak 100.	57
Slika 19: Ovojnica pomikov in zasukov nosilca za $l = 8$ m in $c = 0.5 l$	57
Slika 20: Model previsnega nosilca in njegov prečni prerez.....	58
Slika 21: Deformirana oblika previsnega nosilca z $A = 33.7 \text{ cm}^2$ in $I = 1330 \text{ cm}^4$ pri fiksnih časih. Faktor povečave pomikov je enak 50.....	59
Slika 22: Ovojnica pomikov in zasukov previsnega nosilca z $A = 33.7 \text{ cm}^2$ in $I = 1330 \text{ cm}^4$..	60
Slika 23: Deformirana oblika previsnega nosilca z $A = 33.9 \text{ cm}^2$ in $I = 1700 \text{ cm}^4$ pri fiksnih časih. Faktor povečave pomikov je enak 50.....	60
Slika 24: Ovojnica pomikov in zasukov previsnega nosilca z $A = 33.9 \text{ cm}^2$ in $I = 1700 \text{ cm}^4$..	61

Slika 25: Deformirana oblika previsnega nosilca z $A = 45 \text{ cm}^2$ in $I = 1280 \text{ cm}^4$ pri fiksnih časih. Faktor povečave pomikov je enak 50.	61
Slika 26: Ovojnica pomikov in zasukov previsnega nosilca z $A = 45 \text{ cm}^2$ in $I = 1280 \text{ cm}^4$	62
Slika 27: Deformiranje težiščne osi linijskega nosilca.	63
Slika 28: Model prostoležečega nosilca in njegov prečni prerez.	76
Slika 29: Deformirana oblika prostoležečega nosilca pri fiksnih časih in kotni hitrosti diska $\Omega_z = -44 \text{ s}^{-1}$ Faktor povečave pomikov je enak 100.	77
Slika 30: Ovojnica pomikov in zasukov prostoležečega nosilca pri kotni hitrosti diska $\Omega_z = -44 \text{ s}^{-1}$	78
Slika 31: Spreminjanje količin diska s časom pri kotni hitrosti diska $\Omega_z = -44 \text{ s}^{-1}$	79
Slika 32: Deformirana oblika prostoležečega nosilca pri fiksnih časih in kotni hitrosti diska $\Omega_z = -50 \text{ s}^{-1}$ Faktor povečave pomikov je enak 100.	79
Slika 33: Ovojnica pomikov in zasukov prostoležečega nosilca pri kotni hitrosti diska $\Omega_z = -50 \text{ s}^{-1}$	80
Slika 34: Spreminjanje količin diska s časom pri kotni hitrosti diska $\Omega_z = -50 \text{ s}^{-1}$	81
Slika 35: Model linijskega nosilca iz gume in njegov prečni prerez.	82
Slika 36: Deformirana oblika nosilca iz gume pri fiksnih časih. Faktor povečave pomikov je enak 1.	83
Slika 37: Ovojnica pomikov in zasukov nosilca iz gume.	83
Slika 38: Spreminjanje količin diska pri kotaljenju po nosilcu iz gume.	84
Slika 39: Model adrenalinske vrvi in njen prečni prerez.	85
Slika 40: Deformirana oblika adrenalinske vrvi pri fiksnih časih. Faktor povečave pomikov je enak 15.	86
Slika 41: Ovojnica pomikov in zasukov adrenalinske vrvi.	87
Slika 42: Spreminjanje količin diska s časom pri kotaljenju po adrenalinski vrvi.	88

SEZNAM PRILOG

Priloga A: Algoritem v programu <i>Matlab</i> in animacije primerov.....	-1-
--	-----

1 UVOD

1.1 Motivacija

V gradbeništvu imamo največkrat opravka s konstrukcijami (npr. stanovanjske hiše, nebotičniki), katerih nosilna konstrukcija je sestavljena iz prostorskih, ploskovnih in linijskih konstrukcijskih elementov. Imamo pa tudi veliko konstrukcij (npr. mostovi, viadukti), katerih nosilna konstrukcija je sestavljena predvsem iz elementov, kateri imajo eno od svojih dimenzij bistveno večjo od preostalih dveh. Take konstrukcije imenujemo linijske konstrukcije in so sestavljene iz linijskih elementov (npr. palice, nosilci, stebri). Za te konstrukcije je značilno, da so pogostokrat izpostavljene obtežbam, katere so posledica vpliva gibanja teles po konstrukciji, npr. prehod avtomobila čez viadukt, prehod vlaka čez železniški most. Vpliv gibajočega telesa na konstrukcijo pa se prenaša preko stične površin med njima, npr. preko koles avtomobila ali vlaka.

Nas zanima tako vpliv gibajočega telesa na konstrukcijo in vpliv konstrukcije na gibanje telesa. V nalogi se omejimo na ravninski problem, kjer najprej izpeljemo enačbe kotaljenja gibajočega telesa po poljubni znani krivulji. Nato zapišemo enačbe, ki opisujejo dinamičen odziv linijskega nosilca na točkovno obtežbo. V zadnjem delu pa združimo prej omenjena problema in tako fizikalno opišemo kotaljenje gibajočega telesa po linijskem nosilcu z upoštevanjem dinamičnih vplivov. Enačbe rešujemo numerično, z metodami družine Runge – Kutta, ki so že vgrajene v programski paket *Matlab*. Nato izdelamo programe, ki rezultate prikažejo z animacijami. Osnovni namen naloge je modelirati medsebojni vpliv linijskega nosilca in gibajočega se telesa ob upoštevanju dinamičnih vplivov.

1.2 Predpostavke

Ustrezen matematičen model, še bolj pa njegovo reševanje po deformabilni podlagi je dokaj zahtevno. Zaradi zahtevnosti naloge in povezanosti enačb, ki opisujejo problem, se v nalogi omejimo na ravninsko gibanje. Preučujemo kotaljenje diska po elastičnem deformabilnem nosilcu. Nosilec opišemo s kinematično točnim Reissnerjevim modelom, disk pa modeliramo kot togo telo. Tako lahko predpostavimo, da se disk med gibanjem (razen če pride do odlepitve) s podlago stika samo v eni točki. Tako lahko vpliv telesa na podlago in obratno

opišemo preko diskretne točke, ki se s časom spreminja in jo v nadaljevanju imenujemo točka dotikališča. Pri zapisu enačb predpostavimo, da je podlaga dovolj hrapava, da se disk giblje brez podrsavanja. Predpostavimo tudi, da je vpliv dušenja na disk in nosilec zanemarljiv.

1.3 Načrt dela

Na podlagi omejitev, podanih v uvodu se lahko tako lotimo zastavljene naloge. V nalogi najprej izpeljemo vse potrebne enačbe, ki opisujejo zadani problem. Drugi del naloge, pa je priprava programskega okolja, katero omogoča rešitev izpeljanih enačb.

Najprej vpeljemo tri koordinatne sisteme: nepomičnega, ki ga imenujemo globalni koordinatni sistem in dva pomična (telesnega ter še enega, ki ga imenujemo kar izbrani koordinatni sistem). Telesni koordinatni sistem je pripet v težišče diska in se vrtilni skupaj z diskom. Izbrani koordinatni sistem je ravno tako pripet v težišče in se spreminja z deformiranjem nosilca ter se po smereh ujema z lokalnimi koordinatami nosilca v dotikališču. Nosilec opišemo s krajevnim vektorjem težiščne osi in zasuki prečnih prereзов. Disk opišemo s koordinatami težišča in zasukom okrog lastne osi. Najprej določimo bazne vektorje in zveze med njimi. Temu sledi določitev odvodov baznih vektorjev, zapis krajevnih vektorjev in vektorjev hitrosti. Nato zapišemo vektorje zunanjih sil, ki delujejo na disk ter zapišemo momente teh sil na težišče diska. Sledi zapis gibalnih enačb in izreka o vrtilni količini. Sledi še zapis enačb v obliki, primerni za reševanje v *Matlab*-u.

V nadaljnjem koraku izpeljemo diferencialne enačbe, ki opisujejo dinamičen odziv linijskega nosilca na točkovno obtežbo. Zapišemo enačbe elastičnega deformabilnega nosilca s kinematično točnim Reissnerjevim modelom, nato v teh enačbah upoštevamo še dinamičen vpliv. Sledi zapis enačb linijskega nosilca kot končnega elementa, ki so primerne za reševanje z numeričnimi metodami v *Matlab*-u.

V končnem delu izpeljav zapišemo enačbe, ki nam opisujejo kotaljenje diska po opisanem linijskem nosilcu. Znano krivuljo po kateri se disk kotali tokrat predstavlja težiščna os linijskega nosilca. Točkovno obtežbo predstavlja disk s svojo maso, katera vpliva na nosilec preko točke dotikališča med diskom in nosilcem.

Tako je prvi del naloge, ki je namenjen izpeljavi enačb zaključen. Ostane nam še drugi pomemben del naloge, kateri pa je namenjen pripravi programskega okolja. Rezultate numeričnega reševanja pa prikažemo preko dvodimenzionalne animacije.

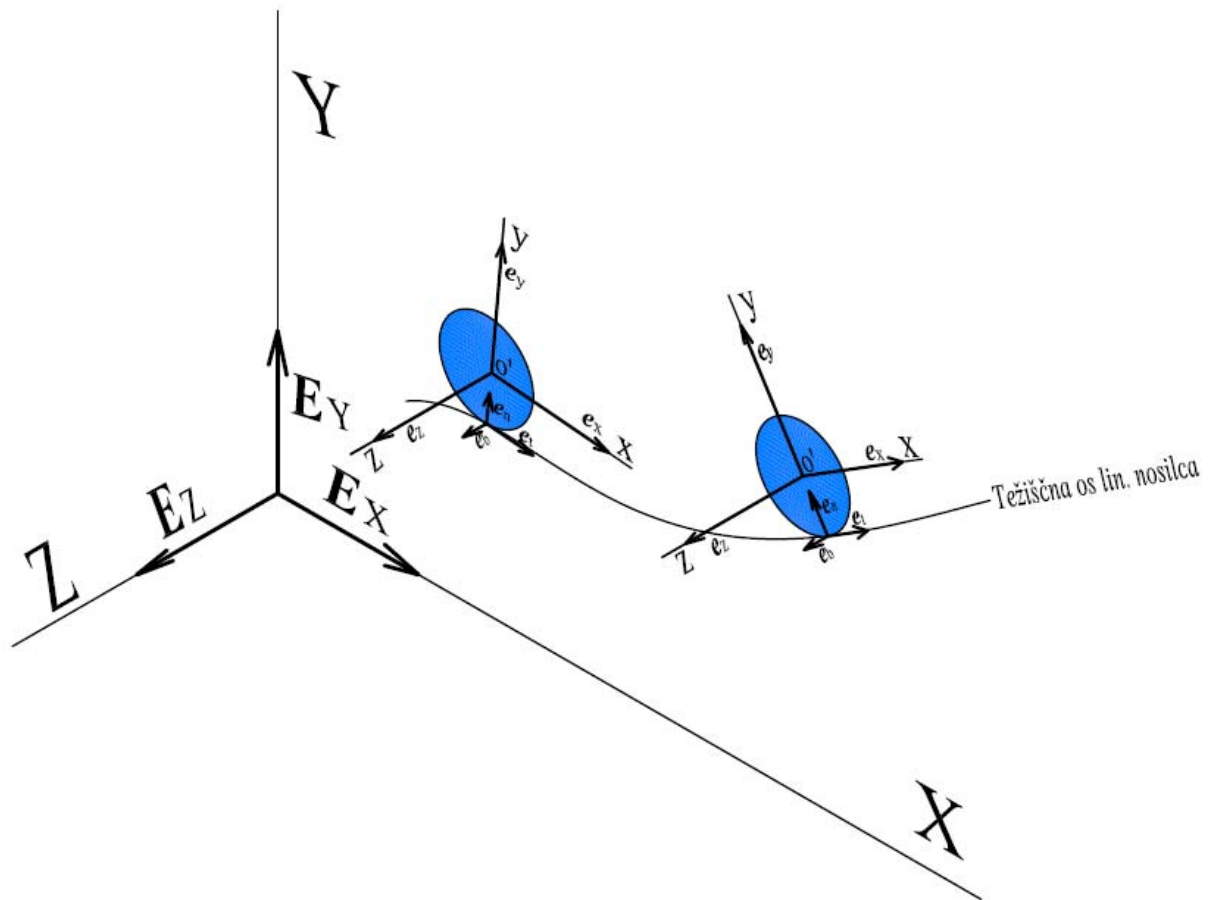
2 KINEMATIKA IN DINAMIKA DISKA PO POLJUBNI KRIVULJI

2.1 Kinematika

2.1.1 Koordinatni sistemi

V trirazsežni evklidski prostor postavimo kartezični koordinatni sistem, ki ga imenujemo **globalni koordinatni sistem** (X, Y, Z) . Določen je z izhodiščem v točki O in z baznimi vektorji $(\mathbf{E}_X, \mathbf{E}_Y, \mathbf{E}_Z)$. Orientiramo ga tako, da bazna vektorja \mathbf{E}_X in \mathbf{E}_Z napenjata vodoravno ravnino, bazni vektor \mathbf{E}_Y pa je nasprotno usmerjen delovanju sile teže. Predpostavimo, da se disk giblje v navpični ravnini, ki jo napenjata bazna vektorja \mathbf{E}_X in \mathbf{E}_Y , vrti pa se okrog baznega vektorja \mathbf{E}_Z in tako os Z predstavlja os, okrog katere se dogaja zasuk. Z globalnim koordinatnim sistemom opišemo lego težišča telesa, merimo dejanske razdalje, premike ter zasuke telesa.

Na telo (disk) postavimo **telesni koordinatni sistem**, ki je tudi kartezičen s koordinatami (ξ, η, ζ) in z baznimi vektorji $(\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta)$ ter njihovim izhodiščem O' v težišču telesa T . Telesni koordinatni sistem je s telesom trdno povezan, zato se lega delcev telesa glede na telesni koordinatni sistem med gibanjem ne spreminja. Osi telesnega koordinatnega sistem izberemo tako, da ležijo na glavnih vztrajnostnih oseh telesa. Za osi ξ in η izberemo osi v ravnini diska, os ζ pa je pravokotna na ravnino diska. Ker je v našem modelu disk togo telo, se njegova lega glede na telesni koordinatni sistem s časom ne spreminja. Tako telesne koordinate kateregakoli delca ostajajo med gibanjem konstantne torej so neodvisne od časa $(\dot{\xi} = 0, \dot{\eta} = 0, \dot{\zeta} = 0)$.



Slika 1: Skica kotaljenja diska po linijskem nosilcu

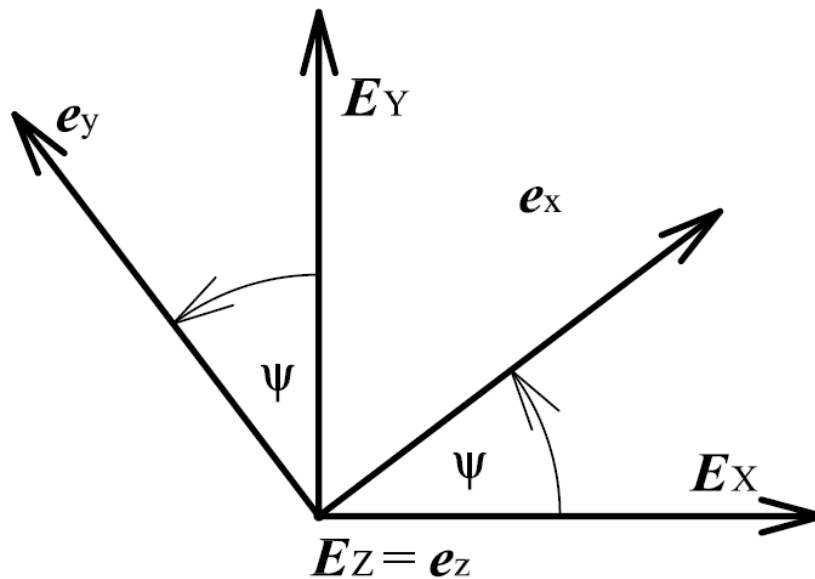
Tretji koordinatni sistem pa izberemo zato, da bi preprosteje opisali gibalne enačbe kotaljenja diska po poljubni znani krivulji. Izrek o gibalni količini pravi, da je odvod gibalne količine enak vsoti zunanjih sil, ki delujejo na telo. Med temi silami je najpomembnejša reakcijska sila podlage. To v fazi kotaljenja razstavimo na silo trenja in normalno silo podlage. Sila trenja, ki deluje na stiku telesa s podlago v vsakem času in v vsaki legi telesa leži na tangenti krivulje kotaljenja v točki dotikališča D . Normalna sila podlage pa leži v smeri normale na krivuljo gibanja in je torej pravokotna na tangento. Z vektorskim produktom tangente z normalo pa je definirana binormala. Izmed dveh možnih smeri normale izberemo tisto, da bo binormala kazala v smeri enotskega vektorja E_Z . Privzamemo, da sta os y in bazni vektor e_y usmerjena v smeri normale e_n na podano krivuljo v točki dotikališča. Os x in bazni vektor e_x kaže v smeri tangente e_t na podano krivuljo v točki dotikališča. Os z in bazni vektor e_z pa sta pravokotna na disk (in sta usmerjena v smeri binormale e_b). Velja tudi, da je triob desnosučen $e_x \times e_y = e_z$.

Tak koordinatni sistem poimenujemo **izbrani koordinatni sistem** z osmi (x, y, z) in pripadajočimi baznimi vektorji $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ z izhodiščem v $O'' = O'$ (v težišču diska).

2.1.2 Zveze med koordinatnimi sistemi

Pri uporabi več koordinatnih sistemov potrebujemo za delo zveze med baznimi vektorji le – teh. Za določitev zvez med koordinatnimi sistemi uporabimo Eulerjeve kote. Eulerjeva ugotovitev je, da lahko pravokotni koordinatni sistem zavrtimo v drugega, ravno tako pravokotnega z maksimalno tremi zaporednimi zasuki. Legi izbranega in telesnega koordinatnega sistema se s časom spreminjata, izpeljane zveze pa veljajo pri vsakem fiksnem času.

Sedaj lahko zapišemo zvezo med globalnim in izbranim koordinatnim sistemom. Najprej vse koordinatne sisteme prestavimo v skupno izhodišče. Zaradi nazornosti je najugodnejše, da si izberemo kar težišče diska O (to lahko storimo, ker translatorni pomik ne vpliva na velikost zasukov). Izpeljavo zvez nadaljujemo tako, da sklenemo, da se izbrani koordinatni sistem v začetku merjenja zasukov ujema z globalnim. Nato globalni koordinatni sistem v nekem trenutku hipoma zasukamo glede na izbrani koordinatni sistem. Ker se ukvarjamo z ravninskim primerom, je ta zveza preprosta, saj se bazi skoraj ujemata. Loči ju le zasuk okrog osi Z .



Slika 2: Zasuk globalnega koordinatnega sistema okrog osi E_Z .

Globalni koordinatni sistem zavrtimo za kot ψ okrog osi Z v pozitivni smeri. Kot določimo tako, da zavrteni bazni vektor E_X sovpade z vektorjem e_x , bazni vektor E_Y pa sovpada z vektorjem e_y .

Izbrani koordinatni sistem lahko povežemo z globalnim kot:

$$\begin{aligned} e_x &= e_{xX} E_X + e_{xY} E_Y \\ e_y &= e_{yX} E_X + e_{yY} E_Y \\ e_z &= E_Z \end{aligned} \quad (2.1)$$

Opazimo, da so komponente baznih vektorjev e_x , e_y , glede na bazo globalnega koordinatnega sistema enake smernim kosinusom:

$$\begin{aligned} e_{xX} &= \cos \psi & e_{yX} &= -\sin \psi \\ e_{xY} &= \sin \psi & e_{yY} &= \cos \psi \end{aligned} \quad (2.2)$$

in tako lahko zapišemo:

$$\begin{aligned} e_x &= \cos \psi E_X + \sin \psi E_Y \\ e_y &= -\sin \psi E_X + \cos \psi E_Y \\ e_z &= E_Z \end{aligned} \quad (2.3)$$

V matrični obliki se gornji rezultat glasi:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_X \\ \mathbf{E}_Y \\ \mathbf{E}_Z \end{bmatrix} = \mathbf{Q}(\psi) \begin{bmatrix} \mathbf{E}_X \\ \mathbf{E}_Y \\ \mathbf{E}_Z \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

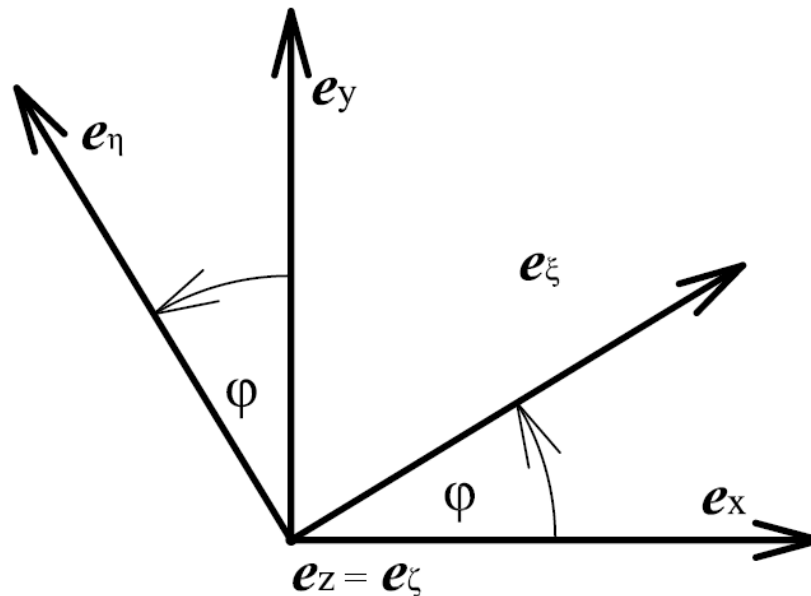
Matrika

$$\mathbf{Q}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

predstavlja zvezo med izbranim in globalnim koordinatnim sistemom. Ker je matrika $\mathbf{Q}(\psi)$ ortogonalna velja $\mathbf{Q}(\psi)^{-1} = \mathbf{Q}(\psi)^T$ (Saje, 1999) in zlahka določimo tudi obratno zvezo;

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_X \\ \mathbf{E}_Y \\ \mathbf{E}_Z \end{bmatrix} = \mathbf{Q}(\psi)^T \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Sedaj poiščemo še zvezo med telesnim in izbranim koordinatnim sistemom. Telesni koordinatni sistem je togo pripet na disk in se vrti skupaj z njim. Tako lahko v danem trenutku opazovanja glede na izbrani koordinatni sistem zavzema poljubno lego. Tudi to zvezo bomo poiskali s pomočjo ustreznega kota, ker smo telesni koordinatni sistem izbrali tako, da se os ζ in bazni vektor \mathbf{e}_ζ ujemata z osjo z in baznim vektorjem \mathbf{e}_z izbranega koordinatnega sistema, je zveza preprosta (glej Sliko 3):



Slika 3: Zasuk izbranega koordinatnega sistema okrog osi e_z .

Izbrani koordinatni sistem zavrtimo okrog osi z v pozitivni smeri za tak kot φ , da nam zavrteni bazni vektor e_x sovpade z baznim vektorjem e_ξ . V tem primeru tudi zavrteni vektor e_y sovpada z baznim vektorjem e_η . Telesni koordinatni sistem lahko izrazimo z izbranim kot:

$$\begin{aligned} e_\xi &= e_{\xi x} e_x + e_{\xi y} e_y \\ e_\eta &= e_{\eta x} e_x + e_{\eta y} e_y \\ e_\zeta &= e_z \end{aligned} \quad (2.7)$$

kjer komponente ustrezajo smernim kosinusom in tako lahko zapišemo:

$$\begin{aligned} e_\xi &= \cos \varphi e_x + \sin \varphi e_y \\ e_\eta &= -\sin \varphi e_x + \cos \varphi e_y \\ e_\zeta &= e_z \end{aligned} \quad (2.8)$$

V matrični obliki pa velja:

$$\begin{bmatrix} e_\xi \\ e_\eta \\ e_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \mathbf{R}(\varphi) \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

S tem smo opisali zvezo med telesnim in izbranim koordinatnim sistemom:

$$\mathbf{R}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Tudi matrika $\mathbf{R}(\varphi)$ je ortogonalna matrika, torej za obratno zvezo med izbranim in telesnim koordinatnim sistemom velja:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} = \mathbf{R}(\varphi)^T \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\xi \\ \mathbf{e}_\eta \\ \mathbf{e}_\zeta \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Sedaj, ko poznamo obe transformacijski matriki $\mathbf{Q}(\psi)$ in $\mathbf{R}(\varphi)$ lahko zapišemo tudi zvezo med telesnim in globalnim koordinatnim sistemom. Če vstavimo (2.4) v (2.9), dobimo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_\xi \\ \mathbf{e}_\eta \\ \mathbf{e}_\zeta \end{bmatrix} = \mathbf{R}(\varphi) \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} = \mathbf{R}(\varphi) \mathbf{Q}(\psi) \begin{bmatrix} \mathbf{E}_X \\ \mathbf{E}_Y \\ \mathbf{E}_Z \end{bmatrix} = \mathbf{S}(\varphi, \psi) \begin{bmatrix} \mathbf{E}_X \\ \mathbf{E}_Y \\ \mathbf{E}_Z \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

kjer je $\mathbf{S}(\varphi, \psi)$ produkt ortogonalnih matrik in tudi sama ortogonalna matrika:

$$\mathbf{S}(\varphi, \psi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \psi \sin \varphi & \sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi & 0 \\ -\sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi & -\cos \varphi \cos \psi - \sin \psi \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Obratno zvezo med koordinatnima sistemoma določa matrika $\mathbf{S}(\varphi, \psi)^T$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_X \\ \mathbf{E}_Y \\ \mathbf{E}_Z \end{bmatrix} = \mathbf{S}(\varphi, \psi)^T \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\xi \\ \mathbf{e}_\eta \\ \mathbf{e}_\zeta \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

2.1.3 Odvod baznih vektorjev po času in vektorji kotne hitrosti

V globalnem koordinatnem sistemu, ki je nepomičen, so odvodi baznih vektorjev po času enaki nič,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_X &= 0 \\ \dot{\mathbf{E}}_Y &= 0 \\ \dot{\mathbf{E}}_Z &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

časovni odvodi vektorjev, zapisanih v tem sistemu, pa so kar enaki relativnim odvodom komponent. Odvodi baznih vektorjev izbranega koordinatnega sistema pa so različni od nič in jih dobimo tako, da odvajamo izraz (2.4) po času:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{Q} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_X \\ \mathbf{E}_Y \\ \mathbf{E}_Z \end{bmatrix} \right) = \dot{\mathbf{Q}} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_X \\ \mathbf{E}_Y \\ \mathbf{E}_Z \end{bmatrix} + \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{E}}_X \\ \dot{\mathbf{E}}_Y \\ \dot{\mathbf{E}}_Z \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{Q}} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_X \\ \mathbf{E}_Y \\ \mathbf{E}_Z \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Odvod $\frac{d}{dt} \mathbf{Q} = \dot{\mathbf{Q}}$ izračunamo tako, da po času odvajamo vsako od komponent matrike \mathbf{Q} , pri čemer moramo upoštevati, da je \mathbf{Q} odvisna od ψ :

$$\dot{\mathbf{Q}} = \frac{d}{dt} \mathbf{Q}(\psi) = \frac{d\mathbf{Q}}{d\psi} \frac{d\psi}{dt} = \begin{bmatrix} -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ -\cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\psi} \quad (2.17)$$

Ker $\dot{\mathbf{Q}}$ izvira samo iz vrtenja vektorjev in ne tudi iz translatornega pomika, enačba (2.17) pove s kolikšno hitrostjo se bazni vektorji izbranega koordinatnega sistema vrtijo glede na bazne vektorje globalnega koordinatnega sistema – torej njihovo kotno hitrost. Komponente matrike $\dot{\mathbf{Q}}$ v (2.17) so izražene glede na bazne vektorje globalnega koordinatnega sistema. Običajno želimo matriko kotnih hitrosti izraziti glede na izbrano bazo. V enačbi (2.17) upoštevamo transformacijo (2.6):

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Po opravljenem množenju matrik $\dot{\mathbf{Q}}$ in \mathbf{Q}^T dobimo:

$$\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\psi} & 0 \\ -\dot{\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\omega}^T \quad (2.19)$$

Matrika $\boldsymbol{\omega}$ povezuje odvode po času baznih vektorjev izbranega koordinatnega sistema s temi vektorji:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}}_x \\ \dot{\mathbf{e}}_y \\ \dot{\mathbf{e}}_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{\omega} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

To matriko imenujemo **matrika kotnih hitrosti** izbranega koordinatnega sistema. Zanj velja, da je antisimetrična.

Asimetrična matrika tretjega reda ima tri medsebojno neodvisne komponente, ki jih lahko združimo v osni vektor kotne hitrosti $\boldsymbol{\omega}$ izbranega koordinatnega sistema. Ker se ukvarjamo z ravninskim problemom, je od treh neodvisnih komponent vektorja le ena različna od nič:

$$\begin{aligned}\omega_x &= 0 \\ \omega_y &= 0 \\ \omega_z &= \dot{\psi},\end{aligned}\tag{2.21}$$

pri čemer

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{e}_x + \omega_y \mathbf{e}_y + \omega_z \mathbf{e}_z.\tag{2.22}$$

Odvide baznih vektorjev izbranega koordinatnega sistema po času lahko zapišemo tudi kot:

$$\dot{\mathbf{e}}_x = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_x, \quad \dot{\mathbf{e}}_y = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_y, \quad \dot{\mathbf{e}}_z = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_z.\tag{2.23}$$

Postopek ponovimo še za bazne vektorje telesnega koordinatnega sistema. Izraz (2.9) odvajamo po času:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\xi \\ \mathbf{e}_\eta \\ \mathbf{e}_\zeta \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{R} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} \right) = \dot{\mathbf{R}} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} + \mathbf{R} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{e}}_x \\ \dot{\mathbf{e}}_y \\ \dot{\mathbf{e}}_z \end{bmatrix}\tag{2.24}$$

in upoštevamo izraz (2.20)

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\xi \\ \mathbf{e}_\eta \\ \mathbf{e}_\zeta \end{bmatrix} = (\dot{\mathbf{R}} + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega}) \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Omega} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix}.\tag{2.25}$$

Tako smo dobili matriko $\boldsymbol{\Omega}$, ki jo imenujemo matrika kotnih hitrosti telesnega koordinatnega sistema glede na bazne vektorje izbranega koordinatnega sistema. Tudi sedaj želimo zapisati matriko kotnih hitrosti telesnega koordinatnega sistema, ki bo zapisana glede na bazne vektorje telesnega koordinatnega sistema. V enačbi (2.25) upoštevamo izraz (2.11) in dobimo:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\xi \\ \mathbf{e}_\eta \\ \mathbf{e}_\zeta \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{R}^T \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\xi \\ \mathbf{e}_\eta \\ \mathbf{e}_\zeta \end{bmatrix} = (\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T + \mathbf{R} \boldsymbol{\omega} \mathbf{R}^T) \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\xi \\ \mathbf{e}_\eta \\ \mathbf{e}_\zeta \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Omega} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\xi \\ \mathbf{e}_\eta \\ \mathbf{e}_\zeta \end{bmatrix}.\tag{2.26}$$

Tako smo dobili matriko kotnih hitrosti telesnega koordinatnega sistema Ω izraženo s telesnimi baznimi vektorji:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\psi} + \dot{\phi} & 0 \\ -\dot{\psi} - \dot{\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\Omega^T \quad (2.27)$$

Ker je matrika Ω tudi antisimetrična matrika, jo lahko nadomestimo z osnim vektorjem kotne hitrosti telesnega koordinatnega sistema

$$\Omega = \Omega_\xi e_\xi + \Omega_\eta e_\eta + \Omega_\zeta e_\zeta, \quad (2.28)$$

kjer so:

$$\begin{aligned} \Omega_\xi &= 0 \\ \Omega_\eta &= 0 \\ \Omega_\zeta &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Odhode baznih vektorjev telesnega koordinatnega sistema pa lahko zapišemo kot:

$$\dot{e}_\xi = \Omega \times e_\xi, \quad \dot{e}_\eta = \Omega \times e_\eta, \quad \dot{e}_\zeta = \Omega \times e_\zeta \quad (2.30)$$

Za nadaljnje delo vektor kotne hitrosti zapišemo še z baznimi vektorji izbranega koordinatnega sistema:

$$\Omega = \Omega_x e_x + \Omega_y e_y + \Omega_z e_z \quad (2.31)$$

Komponente $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ pa določimo glede na enačbo (2.11):

$$\begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} = \mathbf{R}^T \begin{bmatrix} \Omega_\xi \\ \Omega_\eta \\ \Omega_\zeta \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

in dobimo:

$$\begin{aligned} \Omega_x &= 0 \\ \Omega_y &= 0 \\ \Omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\phi} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Opazimo, da so komponente vektorja kotne hitrosti telesnega koordinatnega sistema enake, glede na telesni in glede na izbrani koordinatni sistem. Vzrok temu je, da se izbrani bazni vektor e_z ujema s telesnim baznim vektorjem e_ζ .

2.1.4 Odvod vektorja v pomičnem koordinatnem sistemu

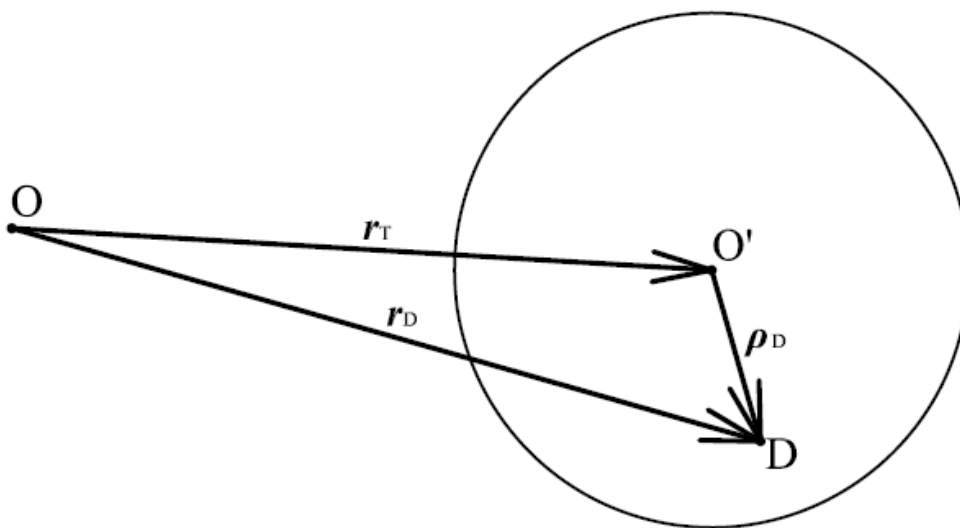
V gibalnih enačbah nastopata časovna odvoda vektorjev gibalne in vrtilne količine. Oba bomo zapisali v izbranem koordinatnem sistemu. Za račun odvodov poljubnih vektorjev v izbranem koordinatnem sistemu uporabimo obrazec (Saje, 1999):

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{p}}_{\text{rel}} + \boldsymbol{\omega}_g \times \mathbf{p} \quad \text{pri čemer} \quad \dot{\mathbf{p}}_{\text{rel}} = \dot{p}_1 \mathbf{g}_1 + \dot{p}_2 \mathbf{g}_2 + \dot{p}_3 \mathbf{g}_3 \quad (2.34)$$

Odvod vektorja po času je torej enak vsoti relativnega odvoda vektorja, ki upošteva samo spreminjanje komponent vektorja glede na pomični koordinatni sistem in systemskega odvoda, ki izvira iz vrtenja baznih vektorjev izbranega koordinatnega sistema. Za kotno hitrost vzamemo $\boldsymbol{\omega}_g$, ki predstavlja kotno hitrost baze $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$.

2.1.5 Krajevni vektorji glede na prostorski koordinatni sistem

Med gibanjem telesa moramo poznati lego vseh delcev. Ker vsak delec telesa v določenem trenutku zavzame natanko eno točko evklidskega prostora (v našem primeru je gibanje omejeno na ravnino), lahko lego delca opišemo s krajevnimi vektorji. Krajevni vektor poljubnega delca D glede na izhodišče globalnega koordinatnega sistema označimo z \mathbf{r}_D . Zapišemo ga kot vektorsko vsoto krajevnega vektorja težišča \mathbf{r}_T in relativnega vektorja $\boldsymbol{\rho}_D$, ki sega od težišča delca O' do izbranega delca D :



Slika 4: Krajevni vektorji.

$$\mathbf{r}_D = \mathbf{r}_T + \boldsymbol{\rho}_D \quad (2.35)$$

Za opis gibanja je najbolj ugodno, da krajevne vektorje zapišemo glede na izhodišče globalnega koordinatnega sistema. Tako je lega telesa v vsakem trenutku izražena glede na nepomičen prostor:

$$\mathbf{r}_T = X_T \mathbf{E}_x + Y_T \mathbf{E}_y + Z_T \mathbf{E}_z; \quad Z_T = 0 \quad (2.36)$$

V našem primeru vzamemo $Z_T = 0$, saj imamo ravninski problem.

Vektor $\boldsymbol{\rho}_D$ ima v telesnem koordinatnem sistemu stalne koordinate $\boldsymbol{\rho}_D$ ($\xi_D, \eta_D, \zeta_D = 0$). Ob znanih zasukih ψ, φ ga v globalnem koordinatnem sistemu zapišemo kot:

$$\begin{bmatrix} X_D \\ Y_D \\ Z_D \end{bmatrix} = \mathbf{S}^T \begin{bmatrix} \xi_D \\ \eta_D \\ \zeta_D \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

2.1.6 Vektorji hitrosti

Vektor hitrosti poljubnega delca diska dobimo z odvajanjem njegovega krajevnega vektorja po času:

$$\mathbf{v}_D = \dot{\mathbf{r}}_D = \dot{\mathbf{r}}_T + \dot{\boldsymbol{\rho}}_D \quad (2.38)$$

Vektor $\boldsymbol{\rho}_D$ zapišemo v telesni bazi, odvajamo in upoštevamo, da so koordinate neodvisne od časa:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\rho}}_D &= \dot{\xi}_D \mathbf{e}_\xi + \dot{\eta}_D \mathbf{e}_\eta + \xi_D \dot{\mathbf{e}}_\xi + \eta_D \dot{\mathbf{e}}_\eta \\ \dot{\boldsymbol{\rho}}_D &= \xi_D \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_\xi + \eta_D \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_\eta \\ \dot{\boldsymbol{\rho}}_D &= \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\rho}_D \end{aligned} \quad (2.39)$$

Ker je globalni koordinatni sistem neodvisen od časa, velja $\dot{\mathbf{r}}_T = \mathbf{v}_T$. Tako zapišemo:

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_T + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\rho}_D \quad (2.40)$$

Ker smo se odločili, da izrek o gibalni količini zapišemo v izbranem koordinatnem sistemu, moramo ustrezno zapisati tudi vektor hitrosti težišča. Najprej zapišemo krajevni vektor težišča:

$$\mathbf{r}_T = x_T \mathbf{e}_x + y_T \mathbf{e}_y + z_T \mathbf{e}_z, \quad z_T = 0 \quad (2.41)$$

Sedaj koordinate težišča (x_T, y_T, z_T) ob upoštevanju (2.4) izrazimo z globalnimi koordinatami (X_T, Y_T, Z_T) :

$$\begin{aligned}x_T &= \cos \psi X_T + \sin \psi Y_T \\y_T &= -\sin \psi X_T + \cos \psi Y_T \\z_T &= Z_T = 0\end{aligned}\quad (2.42)$$

Odvajajmo krajevni vektor težišča:

$$\mathbf{v}_T = \dot{\mathbf{r}}_T = \dot{x}_T \mathbf{e}_x + \dot{y}_T \mathbf{e}_y + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_T = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z \quad (2.43)$$

Ko primerjamo komponente

$$\begin{aligned}v_x &= \dot{x}_T - \omega_z y_T \\v_y &= \dot{y}_T + \omega_z x_T \\v_z &= 0\end{aligned}\quad (2.44)$$

in upoštevamo (2.42), dobimo:

$$\begin{aligned}v_x &= \cos \psi \dot{X}_T + \sin \psi \dot{Y}_T \\v_y &= -\sin \psi \dot{X}_T + \cos \psi \dot{Y}_T \\v_z &= 0\end{aligned}\quad (2.45)$$

Komponente vektorja hitrosti težišča glede na izbrani koordinatni sistem se s časom spreminjajo le zaradi spreminjanja koordinat težišča. To je tudi razumljivo, saj ima izbrani koordinatni sistem izhodišče v težišču telesa, zato njegovo vrtenje ne vpliva na hitrost težišča.

Izrazimo še vektor hitrosti delca B , ki se v danem trenutku nahaja v dotikališču med telesom in nosilcem. Zaradi oblike diska, lahko relativni krajevni vektor točke v dotikališču v izbranem koordinatnem sistemu zapišemo kot:

$$\boldsymbol{\rho}_B = -a \mathbf{e}_y, \quad (2.46)$$

kjer je a polmer diska. Potem je $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_T + \boldsymbol{\rho}_B$ in hitrosti v dotikališču določimo po enačbi:

$$\mathbf{v}_B = \dot{\mathbf{r}}_T + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\rho}_B = \mathbf{v}_T + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\rho}_B = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + \boldsymbol{\Omega} \times (-a \mathbf{e}_y) \quad (2.47)$$

Po vektorskem množenju lahko zapišemo vrednosti komponent vektorja hitrosti v dotikališču:

$$\begin{aligned}v_{Bx} &= v_x + a \Omega_z \\v_{By} &= v_y \\v_{Bz} &= 0\end{aligned}\quad (2.48)$$

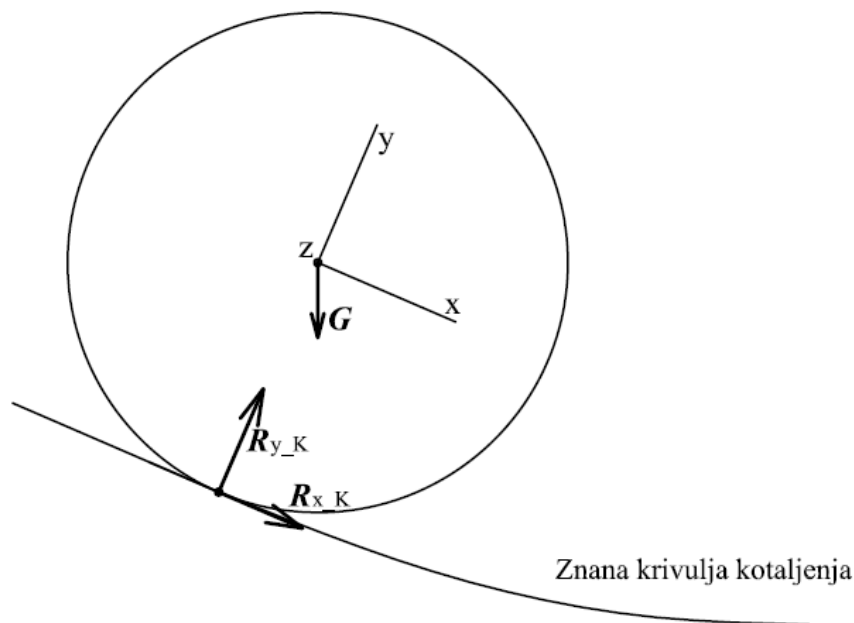
2.1.7 Sile

Pod te spadajo zunanje sile ter momenti teh sil na težišče telesa. Z zunanjimi silami zajamemo vpliv okolice na gibanje diska. Vemo tudi, da notranje sile v izrekih ne nastopajo.

2.1.7.1 Zunanje sile

Najpomembnejša sila, ki deluje na telo z dotikom, je reakcijska sila podlage v točki B . Označimo jo z vektorjem \mathbf{R} , njena smer in velikost pa nista znani. Vemo pa, da ima prijemališče v točki B . V izbranem koordinatnem sistemu jo zapišemo na sledeč način:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= R_{x_K} \mathbf{e}_x + R_{y_K} \mathbf{e}_y + R_{z_K} \mathbf{e}_z; \quad R_{z_K} = 0 \\ \mathbf{R} &= R_{x_K} \mathbf{e}_x + R_{y_K} \mathbf{e}_y \end{aligned} \quad (2.49)$$



Slika 5: Zunanje sile, ki delujejo na disk.

Za silo zračnega upora, silo vetra ter vzgonsko silo zraka predpostavimo, da so tako majhne, da jih lahko zanemarimo! Drugih kontaktnih sil med telesom in okolico ni.

Druga sila, ki jo upoštevamo, pa je gravitacijska sila Zemlje. Ta deluje v težišču kroglice, njena velikost je enaka teži, smer pa je nasprotna smeri baznega vektorja \mathbf{E}_Y .

$$\mathbf{G} = -mg \mathbf{E}_Y \quad (2.50)$$

Upoštevamo enačbo (2.7) in izrazimo v izbranem koordinatnem sistemu:

$$\begin{aligned}\mathbf{G} &= G_x \mathbf{e}_x + G_y \mathbf{e}_y + G_z \mathbf{e}_z; \quad G_z = 0 \\ G_x &= -mg \sin \psi \\ G_y &= -mg \cos \psi\end{aligned}\tag{2.51}$$

Tako lahko zapišemo rezultanto zunanjih sil:

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{R} + \mathbf{G} = (R_{x_K} - mg \sin \psi) \mathbf{e}_x + (R_{y_K} - mg \cos \psi) \mathbf{e}_y\tag{2.52}$$

2.1.7.2 Momenti zunanjih sil

Ker gravitacijska sila deluje v težišču telesa je njen moment na težišče enak 0. Tako ostane samo moment, ki ga povzroča reakcijska sila podlage.

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{M}^T &= \boldsymbol{\rho}_R \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}_G \times \mathbf{G}; \quad \boldsymbol{\rho}_R = -a \mathbf{e}_y, \quad \boldsymbol{\rho}_G = \mathbf{0} \\ \sum \mathbf{M}^T &= \boldsymbol{\rho}_R \times \mathbf{R} = (-a \mathbf{e}_y) \times (R_x \mathbf{e}_x + R_y \mathbf{e}_y) \\ \sum \mathbf{M}^T &= a R_x \mathbf{e}_z\end{aligned}\tag{2.53}$$

2.2 Gibalne enačbe

Dobimo jih s pomočjo izreka o gibalni in vrtilni količini. Izpeljemo jih za primer diska (kroga) in zapišemo v izbranem koordinatnem sistemu.

2.2.1 Izrek o gibalni količini

Gibalno količino togega telesa označujemo s \mathbf{K} in izračunamo po obrazcu:

$$\mathbf{K} = m \mathbf{v}_T\tag{2.54}$$

Za maso predpostavimo, da se med gibanjem ohranja ($\dot{m} = 0$).

Izrek o gibalni količini pravi:

$$\dot{\mathbf{K}} = \sum \mathbf{F},\tag{2.55}$$

pri čemer je

$$\dot{\mathbf{K}} = m \dot{\mathbf{v}}_T\tag{2.56}$$

Vektor hitrosti težišča je zapisan glede na izbrani koordinatni sistem. Sedaj zapišemo odvod vektorja hitrosti težišča ob upoštevanju pravila (2.34):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}}_T &= \dot{v}_x \mathbf{e}_x + \dot{v}_y \mathbf{e}_y + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_T, \\ \dot{\mathbf{v}}_T &= (\dot{v}_x - \omega_z v_y) \mathbf{e}_x + (\dot{v}_y + \omega_z v_x) \mathbf{e}_y.\end{aligned}\tag{2.57}$$

Sedaj zapišemo izrek o gibalni količini še v skalarni obliki:

$$\begin{aligned}m(\dot{v}_x - \omega_z v_y) &= R_x + G_x \\ m(\dot{v}_y + \omega_z v_x) &= R_y + G_y.\end{aligned}\tag{2.58}$$

Upoštevamo še izraza (2.25) in (2.54) ter tako po urejanju dobimo:

$$\begin{aligned}m \dot{v}_x - m v_y \dot{\psi} &= R_x - mg \sin \psi \\ m \dot{v}_y + m v_x \dot{\psi} &= R_y - mg \cos \psi.\end{aligned}\tag{2.59}$$

2.2.2 Izrek o vrtilni količini

Vrtilno količino togega telesa glede na težišče označujemo z L^T . Izračunamo ga na sledeč način:

$$L^T = \int_V \boldsymbol{\rho} \times \dot{\boldsymbol{\rho}} \rho_m dV\tag{2.60}$$

pri čemer je ρ_m gostota materiala, $\boldsymbol{\rho}$ pa relativni krajevni vektorji delcev telesa. Če upoštevamo zapis vektorja $\boldsymbol{\rho}$ v telesni bazi, velja:

$$\boldsymbol{\rho} = \xi \mathbf{e}_\xi + \eta \mathbf{e}_\eta.\tag{2.61}$$

Ker se telesna baza ne spreminja s časom, lahko zapišemo:

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\rho},\tag{2.62}$$

torej je vektor vrtilne količine enak

$$L^T = \int_V \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\rho}) \rho_m dV\tag{2.63}$$

Ker želimo vrtilno količino zapisati v izbranem koordinatnem sistemu, najprej vektorja $\boldsymbol{\rho}$ in $\boldsymbol{\Omega}$ zapišemo glede na izbrano bazo $\boldsymbol{\rho} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y$ in $\boldsymbol{\Omega} = \Omega_z \mathbf{e}_z$. Za integracijske spremenljivke vzamemo koordinate x, y, z . Takrat je $dV = dx dy dz$. Upoštevamo še, da so bazni vektorji in komponente kotne hitrosti konstantne:

$$L^T = J_{zz} \Omega_z \mathbf{e}_z.\tag{2.64}$$

Količina J_{zz} predstavlja **težiščni mehanski vztrajnostni moment** diska glede na izbrani koordinatni sistem. Določen je s formulo:

$$J_{zz} = \iiint \rho_m (x^2 + y^2) dx dy dz \quad (2.65)$$

Območje integracije določa lega diska v koordinatnem sistemu x, y, z . To je v našem primeru krog s središčem v njegovem težišču. Ker je disk rotacijsko simetričen in homogen lik, so osi izbranega koordinatnega sistema ves čas gibanja tudi **glavne vztrajnostne osi** diska in velja (Saje, 1999):

$$J_{zz} = \frac{ma^2}{2} = C \quad (2.66)$$

Z vpeljavo oznake (2.66) lahko zapišemo:

$$\mathbf{L}^T = C \dot{\Omega}_z \mathbf{e}_z \quad (2.67)$$

Odvod vrtilne količine po času je enak vsoti momentov zunanjih sil na težišče:

$$\dot{\mathbf{L}}^T = \sum \mathbf{M}^T \quad (2.68)$$

Ob upoštevanju (2.34) lahko izrazimo:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}}^T &= C \dot{\Omega}_z \mathbf{e}_z + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}^T \\ \dot{\mathbf{L}}^T &= C \dot{\Omega}_z \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (2.69)$$

saj sta $\boldsymbol{\omega}$ in \mathbf{L}^T vzporedna vektorja. Po izreku o vrtilni količini iz (2.69) in (2.53) sledi:

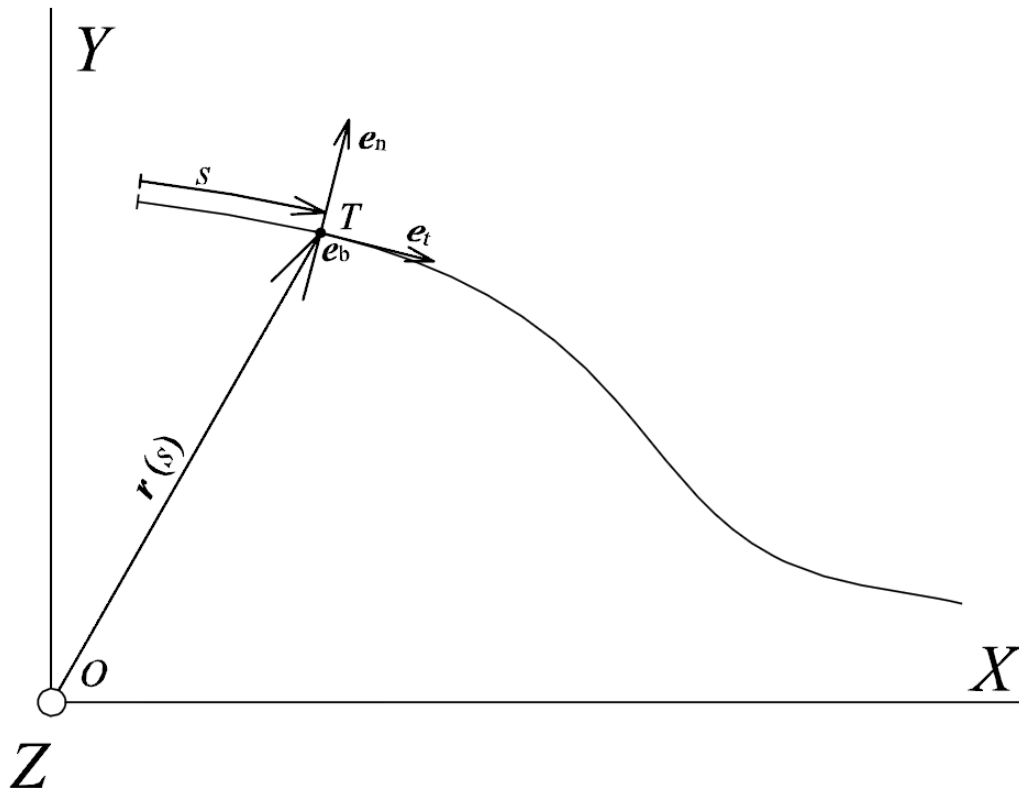
$$C \dot{\Omega}_z = a R_x \quad (2.70)$$

2.3 Krivulja kotaljenja

Predpostavimo, da se delec B v točki dotikališča pri vsakem času t nahaja na dani krivulji. Ravninsko krivuljo, po kateri se disk giblje, bomo opisali v parametrični obliki:

$$\mathbf{r}(s) = X(s) \mathbf{E}_X + Y(s) \mathbf{E}_Y \quad (2.71)$$

Vrednost spremenljivke s tako enolično določa točko dotikališča, hkrati pa je zaradi narave problema tudi ta odvisna od časa, kar še poudarimo z zapisom $s = s(t)$.



Slika 6: Prikaz opisa krivulje kotaljenja

Za poljubno vrednost parametra s lahko določimo naravni koordinatni sistem v pripadajoči točki. Enotski vektor e_t usmerimo vzdolž tangente na krivuljo:

$$\mathbf{e}_t = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|} = \frac{X'(s)\mathbf{E}_X + Y'(s)\mathbf{E}_Y}{\sqrt{X'(s)^2 + Y'(s)^2}} \quad (2.72)$$

Za vektor binormale e_b privzamemo, da se ujema z vektorjem \mathbf{E}_Z :

$$\mathbf{e}_b = \mathbf{E}_Z. \quad (2.73)$$

Vektor normale e_n pa izberemo tako, da bazni vektorji $\{\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b\}$ določajo desnosučni koordinatni sistem:

$$\mathbf{e}_n = -\mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_b = -\mathbf{e}_t \times \mathbf{E}_Z. \quad (2.74)$$

Opozorimo, da smo s črtico () označevali odvod po parametru s . Odvisnost s od časa t vpliva na naravni koordinatni sistem zgolj posredno in je pri določitvi nismo potrebovali.

Formalno lahko zapišemo:

$$\mathbf{e}_t = e_{tX}\mathbf{E}_X + e_{tY}\mathbf{E}_Y, \quad (2.75)$$

kjer sta

$$\begin{aligned} e_{tX} &= \frac{X'(s)}{\sqrt{X'(s)^2 + Y'(s)^2}} \\ e_{tY} &= \frac{Y'(s)}{\sqrt{X'(s)^2 + Y'(s)^2}} \end{aligned} \quad (2.76)$$

Zaradi desnosučnosti in ortonormiranosti baze globalnega koordinatnega sistema velja:

$$\mathbf{e}_n = -e_{tY} \mathbf{E}_X + e_{tX} \mathbf{E}_Y. \quad (2.77)$$

Trojica baznih vektorjev $\{\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_b\}$ naravnega koordinatnega sistema se povsem ujema z izbranim koordinatnim sistemom kot smo ga definirali v poglavju 2.1.1.

Torej ob upoštevanju opisanega dejstva velja:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x &= \mathbf{e}_t \rightarrow \cos \psi \mathbf{E}_X + \sin \psi \mathbf{E}_Y = e_{tX} \mathbf{E}_X + e_{tY} \mathbf{E}_Y \\ \mathbf{e}_y &= \mathbf{e}_n \rightarrow -\sin \psi \mathbf{E}_X + \cos \psi \mathbf{E}_Y = -e_{tY} \mathbf{E}_X + e_{tX} \mathbf{E}_Y \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_b = \mathbf{E}_Z \end{aligned} \quad (2.78)$$

Tako smo kot ψ povezali s parametrično podano krivuljo, po kateri se disk giblje. S tem smo kot ψ izrazili s parametrom s , ki določa dotikališčno točko. Seveda sta tako ψ kot tudi s funkciji časa. Matriko \mathbf{Q} lahko torej zapišemo tudi kot:

$$\mathbf{Q}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X'(s)}{\sqrt{X'(s)^2 + Y'(s)^2}} & \frac{Y'(s)}{\sqrt{X'(s)^2 + Y'(s)^2}} & 0 \\ -\frac{Y'(s)}{\sqrt{X'(s)^2 + Y'(s)^2}} & \frac{X'(s)}{\sqrt{X'(s)^2 + Y'(s)^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{tX} & e_{tY} & 0 \\ -e_{tY} & e_{tX} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

Iz zgornjega sledi eksplicitna zveza med ψ in s :

$$\psi = \arccos e_{tX} = \arccos \left(\frac{X'(s)}{\sqrt{X'(s)^2 + Y'(s)^2}} \right) \quad (2.80)$$

Pri izražavi odvoda kota ψ po času sedaj upoštevamo odvisnost od parametra s

$\psi(s) = \psi(s(t))$ in dobimo:

$$\frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi} = \frac{d\psi}{ds} \frac{ds}{dt} = \psi' \dot{s} = \frac{d(\arccos e_{tX})}{ds} \dot{s} = -\frac{e'_{tX}}{\sqrt{1-e_{tX}^2}} \dot{s} \quad (2.81)$$

3 KOTALJENJE DISKA PO POLJUBNI ZNANI KRIVULJI

Disk se kotali po podlagi, ki jo predstavlja znana krivulja. Predpostavimo, da je med kotaljenjem disk vedno v stiku s podlago in je z njo povezan izključno preko ene same točke, v kateri deluje tudi reakcijska sila podlage. Trenje v dotikališču med krivuljo in diskom opišemo s pomočjo Coulombovega zakona. Pri kotaljenju diska po podlagi se lahko zgodi, da nastopi takšno razmerje med komponentami reakcijske sile, da pride do zdrsa diska. V obsegu tega diplomskega dela predpostavimo, da je podlaga dovolj hrapava, da do zdrsa ne pride.

Sile v dotikališču opišemo v izbranem koordinatnem sistemu. Reakcijsko silo podlage zapisano v izrazu (2.49) razstavimo na normalno silo podlage in na silo trenja, ki predstavlja tangento na tir dotikališča v točki dotikališča.

$$\mathbf{R} = R_x \mathbf{e}_x + R_y \mathbf{e}_y = (-\mathbf{T}) + \mathbf{N} \quad (3.1)$$

Ker je za silo trenja značilno, da nasprotuje smeri v kateri se telo giblje, je v našem primeru sila trenja nasprotno enaka komponenti reakcijske sile v smeri x (ta namreč kaže v smeri gibanja diska). Njeno velikost označimo s T . Normalna sila pa je enaka komponenti reakcijske sile v smeri y , njeno velikost označimo z N :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= -R_x \mathbf{e}_x, & T &= |\mathbf{T}| = |-R_x| \\ \mathbf{N} &= R_y \mathbf{e}_y, & N &= |\mathbf{N}| = |R_y| \end{aligned} \quad (3.2)$$

Trenjske lastnosti materialov opišemo preko koeficienta trenja μ . Predpostavimo, da je koeficient trenja konstanten in neodvisen od vrste gibanja. Koeficient trenja je podan z razmerjem med velikostjo sile trenja in normalno silo podlage. Dokler med kotaljenjem velja razmerje

$$\frac{T}{N} < \mu,$$

se disk kotali brez podrsavanja. Ko ta pogoj ni več izpolnjen, pride do zdrsa in takrat moramo v enačbah gibanja upoštevati vezno enačbo:

$$T = \mu N$$

Med kotaljenjem diska po krivulji je normalna komponenta reakcijske sile \mathbf{R} usmerjena v smeri normale na krivuljo, torej v smeri baznega vektorja \mathbf{e}_y . R_y je ves čas kotaljenja diska

pozitivna vrednost. Če bi R_y zamenjal predznak bi se je disk odlepil od podlage in o kotaljenju ne moremo govoriti. Disk se med kotaljenjem tudi ne odlepi od podlage ali se vanjo pogrezne. To dosežemo z zahtevo, da je hitrost delca v dotikališču v smeri osi y izbranega koordinatnega sistema enaka nič ($v_{By} = 0$). Hitrost večja od nič bi pomenila, da se je disk odlepil od podlage, hitrost manjša od nič pa, da se je disk pogreznil v podlago.

3.1 Kotaljenje brez podrsavanja po poljubni znani krivulji

Pri kotaljenju brez podrsavanja upoštevamo, da je hitrost dotikališča enaka nič:

$$\mathbf{v}_B = 0 \quad (3.3)$$

Iz (3.3) in (2.48) sledijo kinematične vezi v komponentni obliki v izbranem koordinatnem sistemu pri kotaljenju diska brez podrsavanja:

$$\begin{aligned} v_x + a\Omega_z &= 0 \\ v_y &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ker so komponente reakcije podlage edine neznanke v izreku o gibalni količini (2.59) in v izreku o vrtilni količini (2.70), ki ne nastopajo v obliki odvodov po času, jih zaradi učinkovitejšega reševanja diferencialnih enačb izločimo iz sistema enačb. Tako se izognemo zahtevnim algebrasko diferencialnim enačbam. Iz izreka o gibalni količini (2.59) izrazimo komponente reakcije podlage:

$$\begin{aligned} R_{x_K} &= m(\dot{v}_x - v_y\dot{\psi}) + mg e_{tY} \\ R_{y_K} &= m(\dot{v}_y - v_x\dot{\psi}) + mg e_{tY} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Upoštevamo še (3.4) in tako dobimo:

$$\begin{aligned} R_{x_K} &= m\dot{v}_x + mg e_{tY} \\ R_{y_K} &= mv_x\dot{\psi} + mg e_{tX} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Izraza (3.6) vstavimo v izrek o vrtilni količini (2.70), pri tem pa enačbo tako uredimo, da člene, v katerih nastopajo odvodi neznank po času, pišemo na levi, ostale pa na desni strani:

$$-ma\dot{v}_x + C\dot{\Omega}_z = mga e_{tY} \quad (3.7)$$

Opazimo, da izrek o vrtilni količini določa eno samo skalarno enačbo v kateri nastopa samo komponenta reakcije podlage v smeri x . V enačbah smo upoštevali, da smo ψ izrazili z s . Torej ψ ni več osnovna neznanka problema. $\dot{\psi}$ pa lahko nadomestimo z enačbo (2.81).

3.1.1 Sistem enačb kotaljenja brez podrsavanja po poljubni znani krivulji

Osnovne neznanke problema so tiste neznane količine, ki jih med izpeljavami nismo izrazili z drugimi neznankami. To so:

- koordinati težišča v globalnem koordinatnem sistemu: X_T, Y_T ;
- komponenta hitrosti težišča diska v izbranem koordinatnem sistemu: v_x ;
- parameter, ki določa dotikališčno točko s krivuljo: s ;
- zasuk telesnega koordinatnega sistema: φ ;
- komponenta telesnega vektorja kotne hitrosti, zapisanega glede na izbrani koordinatni sistem: Ω_z .

Odvisne neznanke pa so:

- komponenta vektorja kotne hitrosti izbranega koordinatnega sistema: ω_z ;
- komponente reakcijske sile podlage: R_x, R_y .

Enačbe, ki jih imamo na voljo za izračun osnovnih neznank so:

- ena diferencialna enačba izreka o vrtilni količini (3.7);
- ena algebrajska enačba (drugi je že avtomatično zadoščeno) - kinematična vez (3.4), ki je pogoj kotaljenja brez podrsavanja;
- dve diferencialni enačbi (2.45) za določitev težiščnih hitrosti;
- diferencialna enačba (2.33), ki povezuje telesni vektor kotnih hitrosti izbranega koordinatnega sistema z odvodoma kota ψ in φ ;
- algebrajska enačba (2.71), ki povezuje koordinato dotikališča zapisno glede na globalni koordinatni sistem s parametrom s ;
- in diferencialna enačba (2.81), ki povezuje odvoda ψ in s po času.

Enačbe bomo reševali z numeričnimi metodami, ki jih ponuja programski paket *Matlab*. Nekatero enačbo sistema so diferencialne, druge pa algebrajske. Torej imamo mešani sistem enačb, ki pa lahko pri numeričnem reševanju povzročajo težave. Temu se izognemo tako, da algebrajske enačbe pretvorimo v diferencialne z odvajanjem po času, enačbo (2.81) pa vstavimo v (2.33) in tako izločimo neznanko ψ .

Najprej po času odvajamo algebrasko enačbo (3.4) in dobimo:

$$\dot{v}_x + a\dot{\Omega}_z = 0 \quad (3.8)$$

Koordinate točke dotikališča moramo izraziti s koordinatami težišča in parametrom s , ki predstavljajo osnovne neznanke problema. Ob upoštevanju enačb (2.46) in (2.35) lahko zapišemo:

$$X_B E_X + Y_B E_Y = X_T E_X + Y_T E_Y - a e_y = X_T E_X + Y_T E_Y - a e_n \quad (3.9)$$

In od tu dobimo izraz za točko dotikališča:

$$\begin{aligned} X_B(s) &= X_T + a \frac{Y'(s)}{\sqrt{X'(s)^2 + Y'(s)^2}} = X_T + a e_{iy}(s) \\ Y_B(s) &= Y_T - a \frac{X'(s)}{\sqrt{X'(s)^2 + Y'(s)^2}} = Y_T - a e_{ix}(s) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Z odvajanjem (3.10) po času in dobimo:

$$\dot{X}_B = \dot{X}_T + a \frac{de_{iy}}{ds} \dot{s} = \dot{X}_T + a e'_{iy} \dot{s} \quad (3.11)$$

Ker vemo, da je $X_B = X(s)$, lahko zapišemo:

$$\dot{X}_B = \frac{dX(s)}{ds} \dot{s} = X' \dot{s} \quad (3.12)$$

in ob upoštevanju izraza (3.11) velja

$$\dot{X}_T + (a e'_{iy} - X') \dot{s} = 0 \quad (3.13)$$

Naloga ima enolično rešitev, kadar poznamo začetne vrednosti:

$$\begin{aligned} t = t_0: \quad X_T(t_0) &= X_T^0, \quad Y_T(t_0) = Y_T^0 \\ v_x(t_0) &= v_x^0 \\ s(t_0) &= s^0 \\ \varphi(t_0) &= \varphi^0 \\ \Omega_z(t_0) &= \Omega_z^0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Pri začetnih pogojih moramo upoštevati, da med seboj niso popolnoma neodvisni, temveč morajo zadoščati veznim enačbam. Tako mora tudi pri začetnih pogojih veljati kinematična vez (3.4):

$$v_x^0 + a \Omega_z^0 = 0 \quad (3.15)$$

Za točko dotikališča diska s krivuljo na začetku gibanja velja:

$$\mathbf{r}(s^0) = (X_B^0, Y_B^0) = (X(s^0), Y(s^0)) \quad (3.16)$$

Od začetne lege dotikališča, pa je odvisna tudi začetna lega težišča:

$$\begin{aligned} X_T^0 &= X(s^0) - ae_{iY}(s^0) \\ Y_T^0 &= Y(s^0) + ae_{iX}(s^0) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Sistem vodilnih enačb kotaljenja brez podrsavanja je zbran v Preglednici 1. Začetni pogoji z veznimi enačbami pa so prikazani v Preglednici 2.

Preglednica 1: Sistem enačb kotaljenja brez podrsavanja.

Podatki o krivulji:

$$\mathbf{r}(s) = X(s)\mathbf{E}_X + Y(s)\mathbf{E}_Y$$

$$e_{iX}(s) = \frac{X'(s)}{\sqrt{X'(s)^2 + Y'(s)^2}}$$

$$e_{iY}(s) = \frac{Y'(s)}{\sqrt{X'(s)^2 + Y'(s)^2}}$$

Osnovne neznanke: $X_T, Y_T, v_x, s, \varphi, \Omega_z$

$$[D_1]: e_{iX}\dot{X}_T + e_{iY}\dot{Y}_T = v_x$$

$$[D_2]: -e_{iY}\dot{X}_T + e_{iX}\dot{Y}_T = 0$$

$$[D_3]: \dot{v}_x + a\dot{\Omega}_z = 0$$

$$[D_4]: -ma\dot{v}_x + C\dot{\Omega}_z = mga e_{iY}$$

$$[D_5]: -\frac{e_{iX}'}{\sqrt{1-e_{iX}^2}}\dot{s} + \dot{\varphi} = \Omega_z$$

$$[D_6]: \dot{X}_T + (ae_{iY}' - X')\dot{s} = 0$$

se nadaljuje ...

... nadaljevanje Preglednice 1

Odvise neznanke: R_x, R_y, ω_z

$$[D_{01}]: R_{x_K} = m\dot{v}_x + mge_{tY}$$

$$[D_{02}]: R_{y_K} = mv_x \left(-\frac{e'_{tX}}{\sqrt{1-e_{tX}^2}} \right) \dot{s} + mge_{tX}$$

$$[D_{03}]: \omega_z = -\frac{e'_{tX}}{\sqrt{1-e_{tX}^2}} \dot{s}$$

Preglednica 2: Začetni pogoj pri kotaljenju brez podrsavanja.

$$t = t_0: s(t_0) = s^0$$

$$\varphi(t_0) = \varphi^0$$

$$\Omega_z(t_0) = \Omega_z^0$$

Vezne enačbe:

$$(X_B^0, Y_B^0) = (X(s^0), Y(s^0))$$

$$v_x^0 + a\Omega_z^0 = 0$$

$$X_T^0 = X_B^0 - ae_{tY}(s^0)$$

$$Y_T^0 = Y_B^0 + ae_{tX}(s^0)$$

3.1.2 Zapis sistema diferencialnih enačb kotaljenja brez podrsavanja po poljubni znani krivulji v matrični obliki

Osnovni sistem diferencialnih enačb $[D_1]$ – $[D_6]$ rešujemo numerično. Zaradi lažje priprave programov v *Matlab*-u sistem zapišemo še v matrični obliki. Enačbe $[D_1]$ – $[D_6]$ lahko zapišemo v obliki:

$$\mathbf{M}_D \dot{\mathbf{X}}_D = \mathbf{F}_D, \quad (3.18)$$

kjer je

$\dot{\mathbf{X}}_D$ stolpec neznank

$$\dot{\mathbf{X}}_D = \begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \\ v_x \\ s \\ \varphi \\ \Omega_z \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

\mathbf{F}_D je stolpec desnih strani

$$\mathbf{F}_D = \begin{bmatrix} v_x \\ 0 \\ 0 \\ mge_{tY} \\ \Omega_z \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

\mathbf{M}_D pa je masna matrika sistema. Matrika je kvadratna in nesimetrična. Zaradi boljše preglednosti jo zapišemo shematsko (pika '.' označuje ničelno komponento, '×' pa neničelno), neničelne komponente pa navedemo posebej.

$$\mathbf{M}_D = \begin{bmatrix} \times & \times & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \times & \times & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \times & \cdot & \cdot & \times \\ \cdot & \cdot & \times & \cdot & \cdot & \times \\ \cdot & \cdot & \cdot & \times & \times & \cdot \\ \times & \cdot & \cdot & \times & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Neničelne komponente so:

$$M_D(1,1) = e_{tX}$$

$$M_D(1,2) = e_{tY}$$

$$M_D(2,1) = -e_{tY}$$

$$M_D(2,2) = e_{tX}$$

$$M_D(3,3) = 1$$

$$M_D(3,6) = a$$

$$M_D(4,3) = -ma$$

$$M_D(4,6) = C$$

$$M_D(5,4) = -\frac{e'_{iX}}{\sqrt{1-e_{iX}^2}}$$

$$M_D(5,5) = 1$$

$$M_D(6,1) = 1$$

$$M_D(6,4) = a e'_{iY} - X'$$

3.1.3 Primer: Kotaljenje brez podrsavanja po kvadratni paraboli

Zgoraj zapisane enačbe opisujejo gibanje diska po poljubni poznani krivulji. Za ponazoritev v nadaljevanju prikazujemo primer kotaljenja diska po kvadratni paraboli, katera je zapisana v parametrični obliki. Najprej zapišemo točne enačbe, ki prikazujejo gibanje po kvadratni paraboli nato pa prikazujemo še rezultate numeričnega izračuna.

Kvadratno parabolo moramo podati v parametrični obliki. V tem primeru vzemimo kar:

$$\mathbf{r}(s) = (s, s^2) \quad (3.22)$$

Iz Preglednice 1 določimo komponente baznih vektorjev izbranega koordinatnega sistema:

$$\begin{aligned} e_{iX} &= \frac{1}{\sqrt{1+4s^2}} \\ e_{iY} &= \frac{2s}{\sqrt{1+4s^2}} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Prav tako potrebujemo odvode teh komponent, ki so:

$$\begin{aligned} e'_{iX} &= -\frac{4s}{\sqrt{(1+4s^2)^3}} \\ e'_{iY} &= \frac{2}{\sqrt{(1+4s^2)^3}} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Tako lahko sedaj zapišemo sistem enačb za kotaljenje diska po kvadratni paraboli.

Preglednica 3: Sistem enačb kotaljenja brez podrsavanja po kvadratni paraboli.Osnovne neznanke: $X_T, Y_T, v_x, s, \varphi, \Omega_z$

$$[D_1]: \frac{1}{\sqrt{1+4s^2}} \dot{X}_T + \frac{2s}{\sqrt{1+4s^2}} \dot{Y}_T = v_x$$

$$[D_2]: -\frac{2s}{\sqrt{1+4s^2}} \dot{X}_T + \frac{1}{\sqrt{1+4s^2}} \dot{Y}_T = 0$$

$$[D_3]: \dot{v}_x + a\dot{\Omega}_z = 0$$

$$[D_4]: -ma\dot{v}_x + C\dot{\Omega}_z = mga \frac{2s}{\sqrt{1+4s^2}}$$

$$[D_5]: \frac{2}{1+4s^2} \dot{s} + \dot{\varphi} = \Omega_z$$

$$[D_6]: \dot{X}_T + \left(\frac{2a}{\sqrt{(1+4s^2)^3}} - 1 \right) \dot{s} = 0$$

Odvise neznanke: R_x, R_y, ω_z

$$[D_{O1}]: R_{x_K} = m\dot{v}_x + mg \frac{2s}{\sqrt{1+4s^2}}$$

$$[D_{O2}]: R_{y_K} = mv_x \frac{2}{1+4s^2} \dot{s} + mg \frac{1}{\sqrt{1+4s^2}}$$

$$[D_{O3}]: \omega_z = \frac{2}{1+4s^2} \dot{s}$$

Preglednica 4: Začetni pogoji pri kotaljenju brez podrsavanja po kvadratni paraboli.

$$t = t_0: s(t_0) = s^0$$

$$\varphi(t_0) = \varphi^0$$

$$\Omega_z(t_0) = \Omega_z^0$$

Vezne enačbe:

$$(X_B^0, Y_B^0) = (s^0, (s^0)^2)$$

se nadaljuje ...

... nadaljevanje Preglednice 4

$$v_x^0 + a\Omega_z^0 = 0$$

$$X_T^0 = X_B^0 - a \frac{2s^0}{\sqrt{1+4(s^0)^2}}$$

$$Y_T^0 = Y_B^0 + a \frac{1}{\sqrt{1+4(s^0)^2}}$$

Tako smo zapisali sistem enačb z vsemi potrebnimi začetnimi pogoji, katere lahko zapišemo v obliki $\mathbf{M}_D \dot{\mathbf{X}}_D = \mathbf{F}_D$, ki je ugodna za računanje s programom *Matlab*.

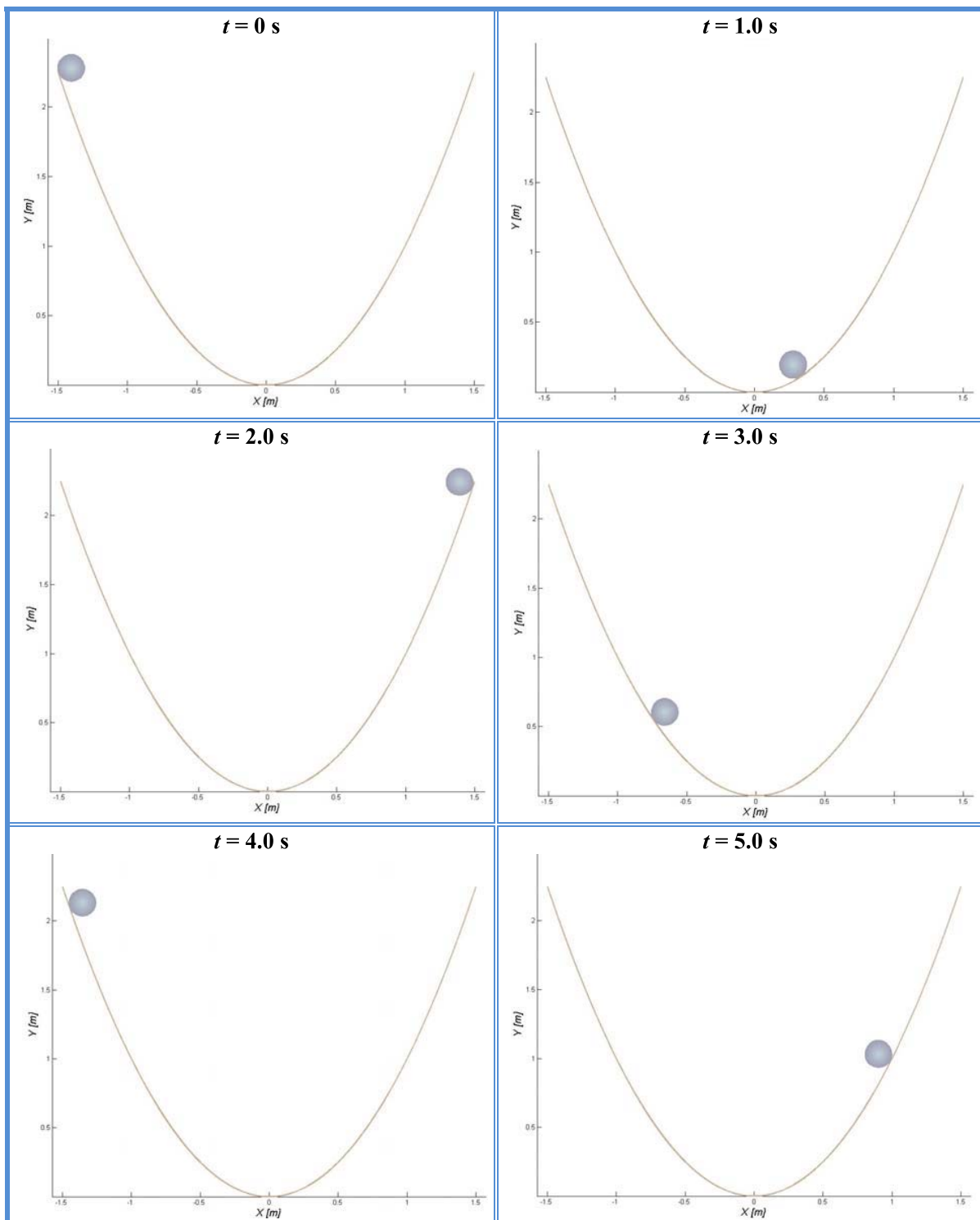
3.2 Numerične študije: Kotaljenja diska brez podrsavanja po kvadratni paraboli

Izpeljane enačbe v poglavju 3.1 veljajo za poljubno zvezno odvedljivo krivuljo. Tukaj pa se omejimo na predstavljen primer gibanja diska po kvadratni paraboli

$$\mathbf{r}(s) = (s, s^2).$$

Parabola ni omejena, začetna vrednost parametra s pa znaša $s = -1.5$ m. Najprej prikažemo rezultate za disk mase $m = 1$ kg, polmera $a = 0.1$ m za čas 5 sekund. Predpostavimo, da je disk iz gume, katere gostota znaša $\rho = 1000$ kg/m³. Prikaz nekaterih leg diska v odvisnosti od časa je predstavljen na Sliki 7.

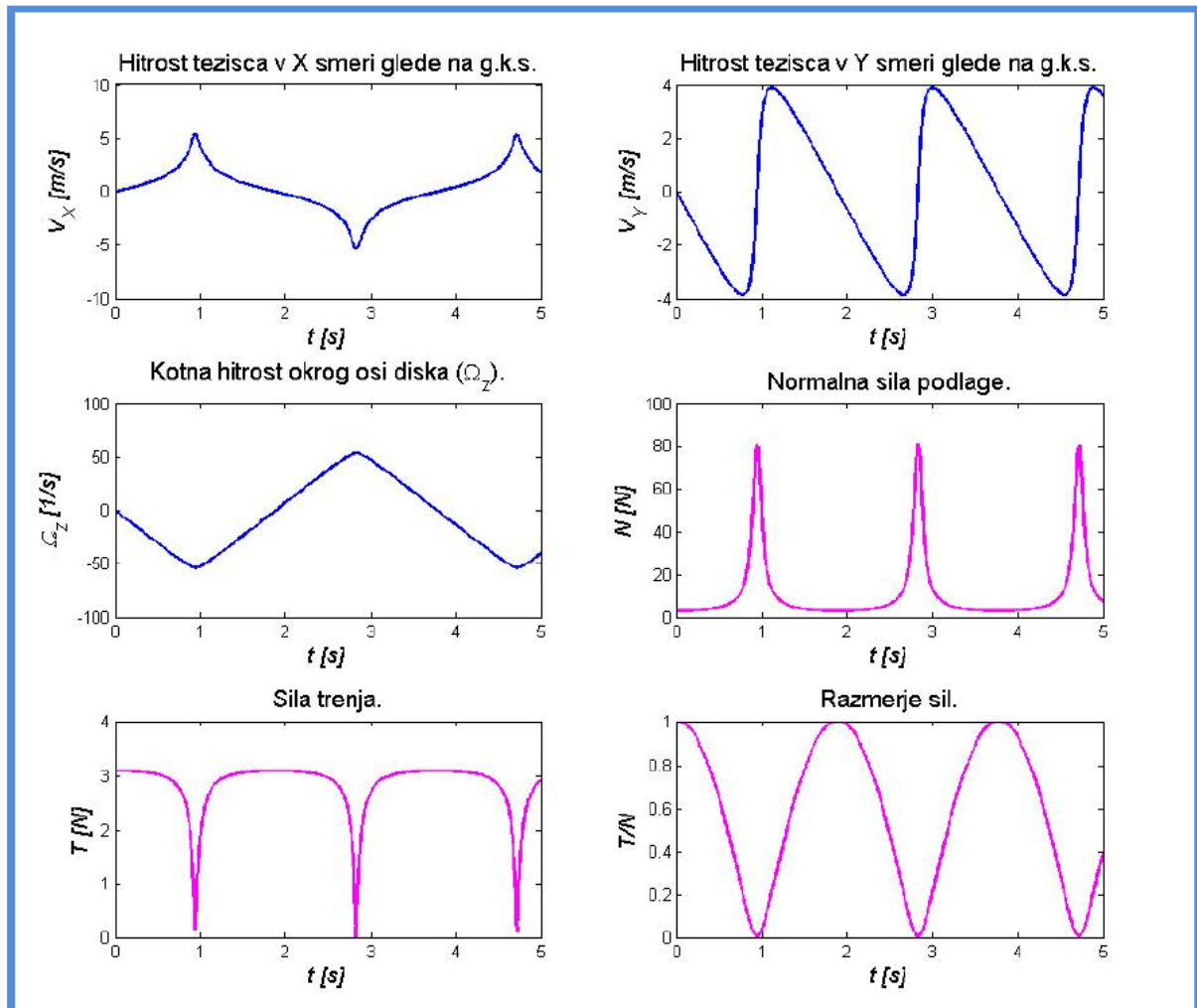
V nadaljevanju prikazujemo še vpliv mase in polmera diska na spreminjanje nekaterih količin s časom.



Slika 7: Kotaljenje diska po kvadratni paraboli.

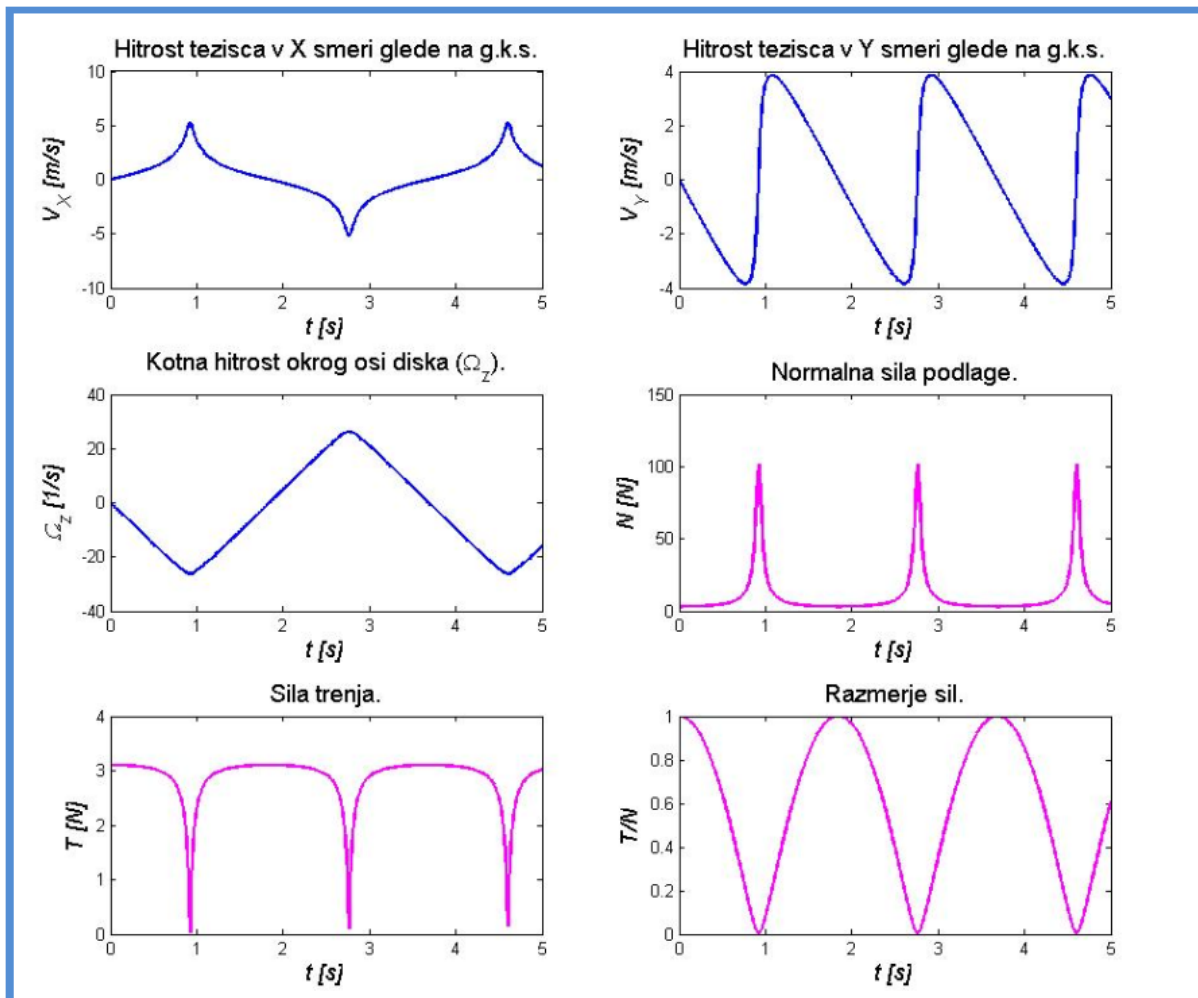
Vzemimo štiri diske. Prva dva imata maso 1 kg njun premer pa znaša 0.10 m in 0.2 m. Druga dva pa imata enak premer, ki znaša 0.15 m, njuni masi pa sta 2 kg in 3 kg.. Vsi ostali podatki se ujemajo.

- masa in polmer diska: $m = 1,0$ kg, $a = 0.1$ m.



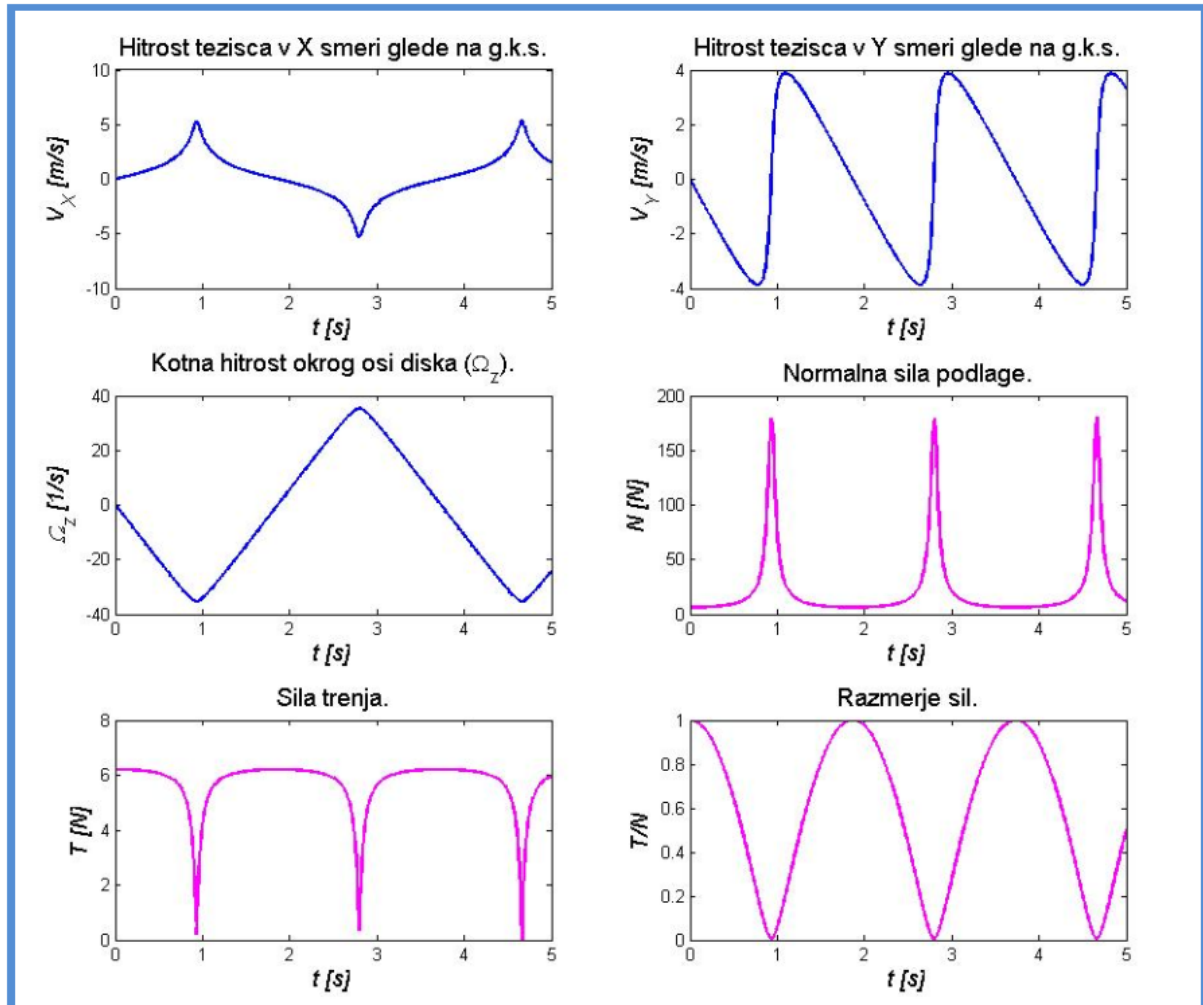
Slika 8: Hitrosti in reakcijski sili diska z maso 1 kg in polmerom 0.1 m.

- masa in polmer diska: $m = 1,0$ kg, $a = 0.2$ m.



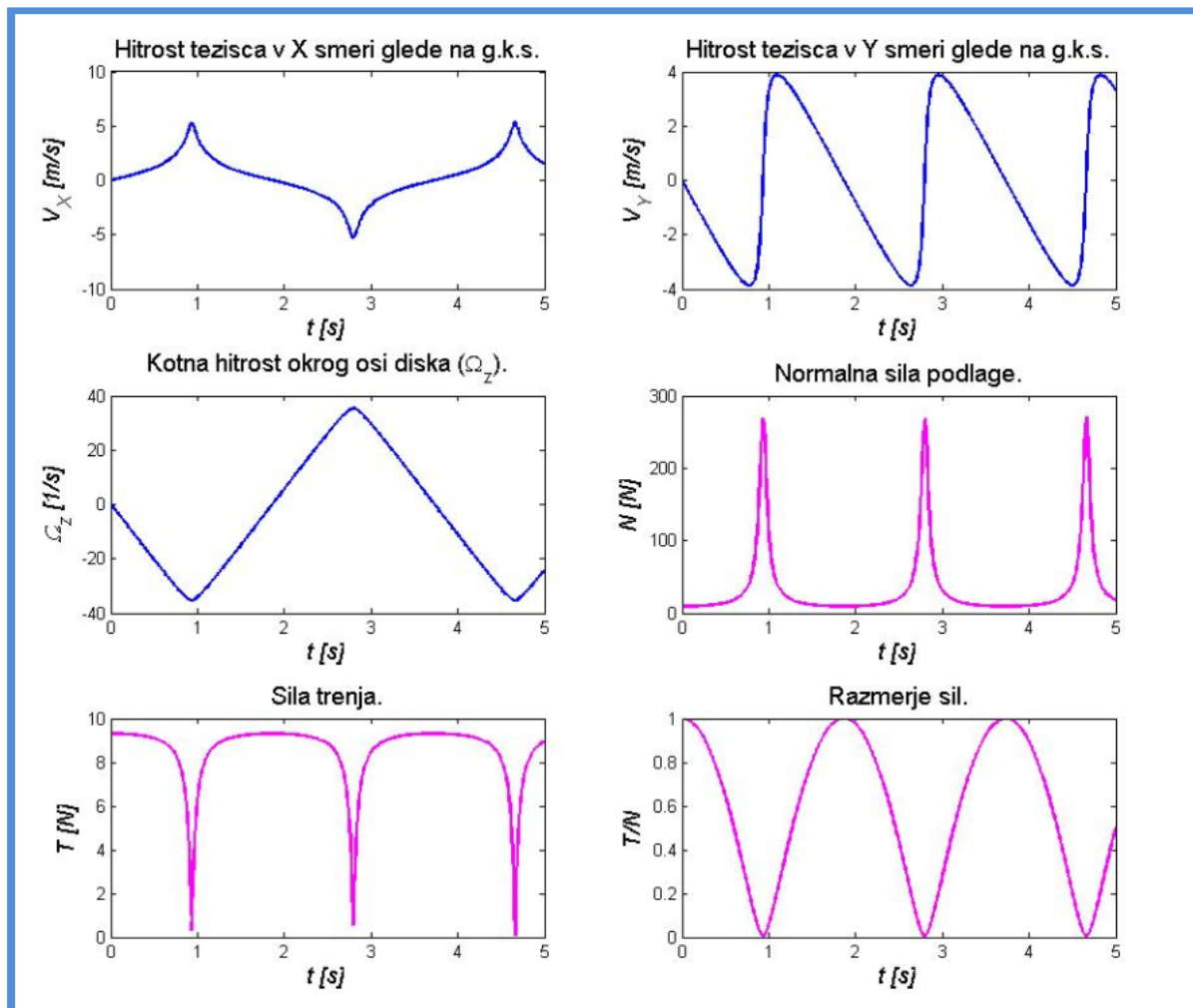
Slika 9: Hitrosti in reakcijski sili diska z maso 1 kg in polmerom 0.2 m.

- masa in polmer diska: $m = 2,0 \text{ kg}$, $a = 0.15 \text{ m}$.



Slika 10: Hitrosti in reakcijski sili diska z maso 2 kg in polmerom 0.15 m.

- masa in polmer diska: $m = 3,0$ kg, $a = 0.15$ m.



Slika 11: Hitrosti in reakcijski sili diska z maso 3 kg in polmerom 0.15 m.

V vseh primerih je kvalitativno gledano gibanje enako, kar smo tudi pričakovali, kajti poleg gravitacijske sile in sile podlage na telo ne deluje nobena zunanja sila. Ker pa je tudi podlaga toga in neodvisna od diska (krivulja kotaljenja je enaka kvadratna parabola), se razlikujejo le vrednosti posameznih količin. Hitrosti težišča se le malo razlikujeta, do večjih razlik pa pride pri kotnih hitrostih in reaktivnih silah podlage.

4 LINIJSKI NOSILEC

Za mnoge konstrukcijske elemente v gradbeništvu je značilno, da je ena od njihovih razsežnosti dosti večja od ostalih dveh. Za obravnavanje takih elementov vpeljemo računski model **linijskega nosilca**. To pomeni, da dejansko tridimenzionalno konstrukcijo nadomestimo z enodimenzionalnim računskim modelom in s tem poenostavimo osnovne enačbe in seveda njihovo reševanje.

V tem okviru, se omejimo na začetno raven materialno linearen in geometrijsko nelinearen linijski element. Enačbe nosilca povzamemo po geometrijsko točni Reissnerjevi teoriji (Reissner, 1972). Z izpeljavo teh enačb se v tej diplomski nalogi ne ukvarjamo, temveč le te samo navajamo. Zaradi večjega števila količin, ki nastopajo v enačbah, najprej pojasnimo pomen oznak (glej tudi Sliko 12):

x ... naravni parameter nedeformirane težiščne osi nosilca,

L ... dolžina nosilca v nedeformirani legi,

ϕ ... zasuk prečnega prereza (zasuk ni nujno pravokoten na os nosilca),

ϕ_0 ... začetni zasuk osi nosilca,

$\mathbf{r}(x) = X(x)\mathbf{E}_X + Y(x)\mathbf{E}_Y$... krajevni vektor težiščne osi nosilca,

$\mathbf{d}(x) = u(x)\mathbf{E}_X + w(x)\mathbf{E}_Y$... vektor pomika težiščne osi,

N ... osna sila,

Q ... prečna sila,

M ... upogibni moment,

R_X ... rezultanta osne in prečne sile v smeri globalne osi X ,

R_Y ... rezultanta osne in prečne sile v smeri globalne osi Y ,

$u(x)$... komponenta pomika v smeri globalne koordinatne osi X ,

$w(x)$... komponenta pomika v smeri globalne koordinatne osi Y ,

ε ... osna deformacija,

γ ... strižna deformacija,

κ ... ukrivljenost elementa,

$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 \dots$ robne obtežbe,

$\rho \dots$ gostota materiala,

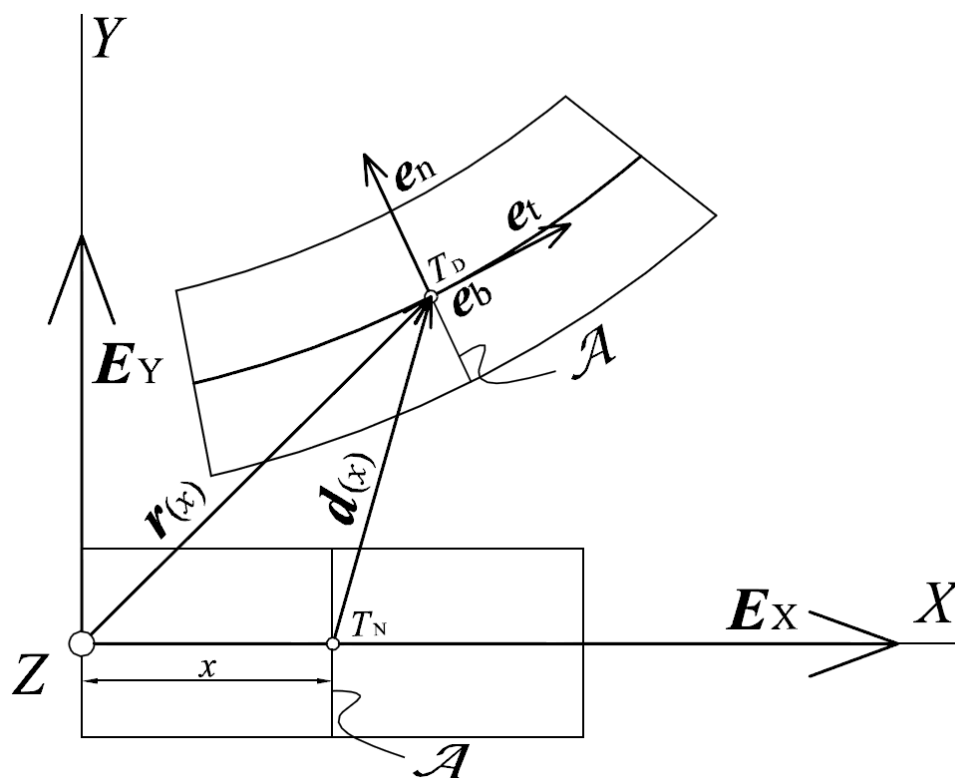
$A \dots$ ploščina prečnega prereza,

$I \dots$ glavni vztrajnostni moment prereza okrog globalne osi Z ,

$\mathcal{P}_X \dots$ zunanja porazdeljena obtežba v smeri globalne osi X ,

$\mathcal{P}_Y \dots$ zunanja porazdeljena obtežba v smeri globalne osi Y ,

$\mathcal{M}_Z \dots$ zunanja porazdeljena momentna obtežba okrog globalne osi Z .



Slika 12: Prikaz deformiranja Reissnerjevega ravninskega nosilca.

Sedaj zapišemo še enačbe, ki opisujejo nosilec v ravnini in izhajajo iz geometrijsko točne Reissnerjeve teorije.

Najprej zapišemo **kinematične enačbe**:

$$\begin{aligned} 1 + u' &= (1 + \varepsilon) \cos \phi + \gamma \sin \phi \\ w' &= -(1 + \varepsilon) \sin \phi + \gamma \cos \phi \\ \phi' &= \kappa \end{aligned} \quad (4.1)$$

Sledijo **ravnotežne enačbe**

$$\begin{aligned} R'_X + \mathcal{P}_X &= 0 \\ R'_Y + \mathcal{P}_Y &= 0 \\ M' + (1 + \varepsilon)Q - \gamma N - \mathcal{M}_Z &, \end{aligned} \quad (4.2)$$

kjer sta

$$\begin{aligned} N &= R_X \cos \phi + R_Y \sin \phi \\ Q &= -R_X \sin \phi + R_Y \cos \phi \end{aligned} \quad (4.3)$$

Na koncu pa zapišemo še **konstitutivne enačbe**, ki se glasijo:

$$\begin{aligned} N &= EA\varepsilon \\ Q &= GA_s\gamma \\ M &= EI\kappa \end{aligned} \quad (4.4)$$

Enačbe veljajo tudi v dinamiki, kjer upoštevamo, da so porazdeljene obtežbe sestavljene iz linijskih zunanjih obtežb in vztrajnostnih linijskih sil,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_X^D &= \mathcal{P}_X - \rho A \ddot{u} \\ \mathcal{P}_Y^D &= \mathcal{P}_Y - \rho A \ddot{w} \\ \mathcal{M}_Z^D &= \mathcal{M}_Z - \rho I \ddot{\phi} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Tu smo ($\ddot{}$) označili druge odvode kinematičnih količin po času.

Enačbe (4.1), (4.2) in (4.4) so prezahtevne, da bi jih rešili analitično, zato se opremo na numerične metode. Tukaj izhajamo iz Galerkinove metode končnih elementov, kjer diskretizacijo vpeljemo neposredno v princip virtualnega dela.

Izhajamo torej iz **principa virtualnega dela**, kjer pri zunanji obtežbi upoštevamo vztrajnostne sile:

$$\int_0^L (N\delta\varepsilon + Q\delta\gamma + M\delta\kappa) = \int_0^L (\mathcal{P}_X - \rho A\ddot{u})\delta u dx + \int_0^L (\mathcal{P}_Y - \rho A\ddot{w})\delta w dx + \int_0^L (\mathcal{M}_Z - \rho I\ddot{\phi})\delta\phi dx + S_1\delta u_1 + S_2\delta u_2 + S_3\delta u_3 + S_4\delta u_4 + S_5\delta u_5 + S_6\delta u_6 \quad (4.6)$$

pri tem smo z $S_i, i=1,2,\dots,6$, označili robne točkovne sile in momente na obeh krajiščih nosilca (pri $x=0$ in $x=L$).

4.1 Diskretizacija po Galerkinovi metodi končnih elementov

Diskretizacijo po kraju izvedemo sami, diskretizacijo po času pa prepustimo numeričnim metodam, ki so vgrajene v programski paket *Matlab*. Pri diskretizaciji po kraju neznane kinematične količine nadomestimo z vrednostmi v diskretnih točkah $x_i, i=1,2,\dots,n$, vmes pa rešitev aproksimiramo z interpolacijskimi polinomi:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{i=1}^n P_i(x)U_i(t) \\ w(x,t) &= \sum_{i=1}^n P_i(x)W_i(t) \\ \phi(x,t) &= \phi_0 + \sum_{i=1}^n P_i(x)\Phi_i(t) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Tako smo z nastavki razcepili približno rešitev na del, ki je odvisen od kraja x in del, ki je odvisen od časa t .

Če enačbe (4.7) odvajamo po spremenljivki x , dobimo:

$$\begin{aligned} u'(x,t) &= \sum_{i=1}^n P_i'(x)U_i(t) \\ w'(x,t) &= \sum_{i=1}^n P_i'(x)W_i(t) \\ \phi'(x,t) &= \sum_{i=1}^n P_i'(x)\Phi_i(t) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Variacije neznank pa so neodvisne od interpolacijskih polinomov in velja:

$$\begin{aligned}
 \delta u(x, t) &= \sum_{i=1}^n P_i(x) \delta U_i(t) \\
 \delta w(x, t) &= \sum_{i=1}^n P_i(x) \delta W_i(t) \\
 \delta \phi(x, t) &= \sum_{i=1}^n P_i(x) \delta \Phi_i(t)
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Kinematične enačbe (4.1) variramo in v varirani obliki upoštevamo v principu virtualnega dela. Zaradi preglednosti besedila in izpeljav v nadaljevanju argumente odvisnosti opustimo.

$$\begin{aligned}
 \delta \varepsilon &= \cos \phi \delta u' + \sin \phi \delta w' + \left(-(\cos \phi_0 + u') \sin \phi + (\sin \phi_0 + w') \cos \phi \right) \delta \phi \\
 \delta \gamma &= -\sin \phi \delta u' + \cos \phi \delta w' - \left((\sin \phi_0 + w') \sin \phi + (\cos \phi_0 + u') \cos \phi \right) \delta \phi \\
 \delta \kappa &= \delta \phi'
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

V (4.17) upoštevamo sedaj izraze (4.15) in (4.16) ter se tako znebimo odvodov variacij:

$$\begin{aligned}
 \delta \varepsilon &= \cos \phi \left(\sum_{i=1}^n P_i' \delta U_i \right) + \sin \phi \left(\sum_{i=1}^n P_i' \delta W_i \right) + \left(-(\cos \phi_0 + u') \sin \phi + (\sin \phi_0 + w') \cos \phi \right) \left(\sum_{i=1}^n P_i \delta \phi_i \right) \\
 \delta \gamma &= -\sin \phi \left(\sum_{i=1}^n P_i' \delta U_i \right) + \cos \phi \left(\sum_{i=1}^n P_i' \delta W_i \right) - \left((\sin \phi_0 + w') \sin \phi + (\cos \phi_0 + u') \cos \phi \right) \left(\sum_{i=1}^n P_i \delta \phi_i \right) \\
 \delta \kappa &= \sum_{i=1}^n P_i' \delta \Phi_i
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Enačbi (4.9) in (4.11) vstavimo v princip virtualnega dela:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^L \left(N \cos \phi \sum_{i=1}^n P_i' \delta U_i + N \sin \phi \sum_{i=1}^n P_i' \delta W_i + N \left(-(\cos \phi_0 + u') \sin \phi + (\sin \phi_0 + w') \cos \phi \right) \sum_{i=1}^n P_i \delta \phi_i \right) dx \\
 &+ \int_0^L \left(-Q \sin \phi \sum_{i=1}^n P_i' \delta U_i + Q \cos \phi \sum_{i=1}^n P_i' \delta W_i - Q \left((\sin \phi_0 + w') \sin \phi + (\cos \phi_0 + u') \cos \phi \right) \sum_{i=1}^n P_i \delta \phi_i \right) dx \\
 &+ \int_0^L \left(M \sum_{i=1}^n P_i' \delta \phi_i \right) dx = \\
 &= \int_0^L \left((\mathcal{P}_X - \rho A \ddot{u}) \sum_{i=1}^n P_i \delta U_i \right) dx + \int_0^L \left((\mathcal{P}_Y - \rho A \ddot{w}) \sum_{i=1}^n P_i \delta W_i \right) dx + \int_0^L \left((\mathcal{M}_Z - \rho I \ddot{\phi}) \sum_{i=1}^n P_i \delta \Phi_i \right) dx \\
 &+ S_1 \delta U_1 + S_2 \delta W_1 + S_3 \delta \Phi_1 + S_4 \delta U_n + S_5 \delta W_n + S_6 \delta \Phi_n
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Izraze (4.19) sedaj uredimo po variacijah δU_i , δW_i , $\delta \Phi_i$ in izpostavimo vsote:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \left(\int_0^L \left((N \cos \phi - Q \sin \phi) P'_i - (\mathcal{F}_X - \rho A \ddot{u}) P_i \right) dx \right) \delta U_i \\
& + \sum_{i=1}^n \left(\int_0^L \left((N \sin \phi + Q \cos \phi) P'_i - (\mathcal{F}_Y - \rho A \ddot{w}) P_i \right) dx \right) \delta W_i \\
& + \sum_{i=1}^n \left(\int_0^L \left(MP'_i + \left(N \left(-(\cos \phi_0 + u') \sin \phi + (\sin \phi_0 + w') \cos \phi \right) \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. - Q \left((\sin \phi_0 + w') \sin \phi + (\cos \phi_0 + u') \cos \phi \right) - (\mathcal{M}_Z - \rho I \ddot{\phi}) \right) P_i \right) dx \right) \delta \Phi_i \\
& = S_1 \delta U_1 + S_2 \delta W_1 + S_3 \delta \Phi_1 + S_4 \delta U_n + S_5 \delta W_n + S_6 \delta \Phi_n
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Sedaj upoštevamo zvezi

$$\begin{aligned}
R_X &= N \cos \phi - Q \sin \phi \\
R_Y &= N \sin \phi + Q \cos \phi,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

ter dodatne oznake

$$\begin{aligned}
S_X &= \begin{cases} S_1, \text{ če } i = 1 \\ S_4, \text{ če } i = n \\ 0, \text{ sicer} \end{cases} \\
S_Y &= \begin{cases} S_2, \text{ če } i = 1 \\ S_5, \text{ če } i = n \\ 0, \text{ sicer} \end{cases} \\
S_\phi &= \begin{cases} S_3, \text{ če } i = 1 \\ S_6, \text{ če } i = n \\ 0, \text{ sicer} \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Ker so vozliščne variacije poljubne, iz izrazov (4.13) ob upoštevanju (4.14) in (4.15) dobimo:

$$\begin{aligned}
f_{1i} &= \int_0^L \left(R_X P'_i - (\mathcal{F}_X - \rho A \ddot{u}) P_i \right) dx - S_X = 0 \\
f_{2i} &= \int_0^L \left(R_Y P'_i - (\mathcal{F}_Y - \rho A \ddot{w}) P_i \right) dx - S_Y = 0 \\
f_{3i} &= \int_0^L \left(MP'_i + \left((\sin \phi_0 + w') R_X - (\cos \phi_0 + u') R_Y - (\mathcal{M}_Z - \rho I \ddot{\phi}) \right) P_i \right) dx - S_\phi = 0
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Člene, ki so posledica dinamične obtežbe, pišemo na levo stran, ostale pa na desno stran:

$$\begin{aligned}
 f_{1i} = 0 &\rightarrow \int_0^L \rho A \ddot{u} P \, dx = -\int_0^L \left(R_X P_i' - \mathcal{F}_X P_i \right) dx + S_X \\
 f_{2i} = 0 &\rightarrow \int_0^L \rho A \ddot{w} P_i \, dx = -\int_0^L \left(R_Y P_i' - \mathcal{F}_Y P_i \right) dx + S_Y \\
 f_{3i} = 0 &\rightarrow \int_0^L \rho I \ddot{\phi} P_i \, dx = -\int_0^L \left(M P_i' + ((\sin \phi_0 + w') R_X - (\cos \phi_0 + u') R_Y - \mathcal{M}_Z) P_i \right) dx + S_\phi
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Pri izražavi drugih odvodov kinematičnih količin po času upoštevamo nastavke (4.7)

$$\begin{aligned}
 \ddot{u} &= \sum_{j=1}^n P_j(x) \ddot{U}_j(t) \\
 \ddot{w} &= \sum_{j=1}^n P_j(x) \ddot{W}_j(t) \\
 \ddot{\phi} &= \sum_{j=1}^n P_j(x) \ddot{\Phi}_j(t)
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

in dobimo:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n \left(\int_0^L \rho A P_i P_j \, dx \right) \ddot{U}_j &= -\int_0^L \left(R_X P_i' - \mathcal{F}_X P_i \right) dx + S_X \\
 \sum_{j=1}^n \left(\int_0^L \rho A P_i P_j \, dx \right) \ddot{W}_j &= -\int_0^L \left(R_Y P_i' - \mathcal{F}_Y P_i \right) dx + S_Y \\
 \sum_{j=1}^n \left(\int_0^L \rho I P_i P_j \, dx \right) \ddot{\Phi}_j &= -\int_0^L \left(M P_i' + ((\sin \phi_0 + w') R_X - (\cos \phi_0 + u') R_Y - \mathcal{M}_Z) P_i \right) dx + S_\phi
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Gornje enačbe predstavljajo diskreten sistem dinamičnih enačb ravninskega nosilca. V nadaljevanju upoštevamo, da zunanjo obtežbo predstavlja lokalni vpliv diska. Lokalne vplive lahko v zveznih sistemih zajamemo z uporabo teorije distribucij.

Točkovna sila predstavlja računski model porazdeljene obtežbe, ki deluje na zelo majhnem intervalu. Tako obtežbo, v obliki posplošene funkcije, določa tudi **Diracova funkcija delta**. Uporaba posplošene funkcije omogoča, da točkovno obtežbo na linijskem nosilcu opišemo kot del porazdeljene obtežbe. Tako ni potrebno razdeliti nosilca na posamezna polja oziroma končne elemente, temveč lahko obravnavamo nosilec kot celoto.

Diracovo funkcijo delta označimo z $\delta(x-c)$ in ponazorimo s predpisom:

$$\delta(x-c) = \begin{cases} 0, & x \neq c \\ \infty, & x = c \end{cases}, \quad (4.20)$$

vendar je bolj kot predpis, pomemben integral te funkcije.

Diracova funkcija delta, je posplošena funkcija, ki jo določajo lastnosti njenega integrala

$$\int_a^b \delta(x-c) dx = \begin{cases} 1, & c \in [a, b] \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}. \quad (4.21)$$

Gornja enačba opisuje posplošen integral. Posplošen integral Diracove funkcije delta natanko ustreza opisu lokalnega vpliva po analogiji z upoštevanjem polj. Iz definicije Diracove funkcije delta in njenega integrala potem neposredno sledi:

$$\int_a^b F(x) \delta(x-c) dx = F(c); \quad c \in [a, b] \quad (4.22)$$

Če c ne leži v integracijskem območju, je integral enak nič. Za podrobnosti glej (Stanek, Turk, 2005).

Omejimo se na primere, ko zunanjo obtežbo na nosilec predstavljata le točkovna sila v diskretni točki, določeni s parametrom c . Ostalih točkovnih vplivov ni, torej so robne sile nič

$$S_X = S_Y = S_\phi = 0. \quad (4.23)$$

Porazdeljeno obtežbo pa lahko zapišemo kot:

$$\mathcal{P}_X = P_X \delta(x-c), \quad \mathcal{P}_Z = P_Y \delta(x-c), \quad \mathcal{M}_Z = 0, \quad (4.24)$$

kjer sta P_X in P_Y komponenti zunanje točkovne sile v globalnih koordinatah.

Oblike obtežbe upoštevamo v enačbah (4.19):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left(\int_0^L \rho A P_i P_j dx \right) \ddot{U}_j &= - \int_0^L (R_X P_i') dx + \int_0^L P_X P_i(x) \delta(x-c) dx \\ \sum_{j=1}^n \left(\int_0^L \rho A P_i P_j dx \right) \ddot{W}_j &= - \int_0^L (R_Y P_i') dx + \int_0^L P_Y P_i(x) \delta(x-c) dx \\ \sum_{j=1}^n \left(\int_0^L \rho I P_i P_j dx \right) \ddot{\Phi}_j &= - \int_0^L \left(M_c P_i' + ((\sin \phi_0 + w') R_X - (\cos \phi_0 + u') R_Y) P_i \right) dx \end{aligned} \quad (4.25)$$

Znana integracija Diracove funkcije (4.22) da končno obliko enačb:

$$\begin{aligned}
 \sum_j \left(\int_0^L \rho A P_i P_j dx \right) \ddot{U}_j &= - \int_0^L \left(R_X P_i' \right) dx + P_X P_i(c) \\
 \sum_j \left(\int_0^L \rho A P_i P_j dx \right) \ddot{W}_j &= - \int_0^L \left(R_Y P_i' \right) dx + P_Y P_i(c) \\
 \sum_j \left(\int_0^L \rho I P_i P_j dx \right) \ddot{\Phi}_j &= - \int_0^L \left(M_c P_i' + ((\sin \phi_0 + w') R_X - (\cos \phi_0 + u') R_Y) P_i \right) dx
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

Tako smo dobili končne enačbe, ki opisujejo dinamično obnašanje linijskega nosilca v ravnini ob pogoju pod točkovno obtežbo v poljubni točki c . Enačbe veljajo za celoten nosilec in ne zahtevajo delitve mreže v točki c . Zaradi lažjega dela in večje preglednosti uvedemo nove oznake:

$$\begin{aligned}
 M_{ij}^u &= \int_0^L \rho A P_i P_j dx \\
 M_{ij}^w &= \int_0^L \rho A P_i P_j dx \\
 M_{ij}^\phi &= \int_0^L \rho I P_i P_j dx
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Tako lahko izraze (4.26) zapišemo v sledeči obliki:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n M_{ij}^u \ddot{U}_j &= - \int_0^L \left(R_X P_i' \right) dx + P_X P_i(c) \\
 \sum_{j=1}^n M_{ij}^w \ddot{W}_j &= - \int_0^L \left(R_Y P_i' \right) dx + P_Y P_i(c) \\
 \sum_{j=1}^n M_{ij}^\phi \ddot{\Phi}_j &= - \int_0^L \left(M_c P_i' + ((\sin \phi_0 + w') R_X - (\cos \phi_0 + u') R_Y) P_i \right) dx
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

4.1.1 Sistem enačb linijskega nosilca

Imamo nabor treh osnovnih neznank v vsaki diskretizacijski točki $x_i, i = 1, 2, \dots, n$:

- diskreten pomik (pomik odvisen od časa pri konstantni koordinati) v smeri X: U_j ;
- diskreten pomik (pomik odvisen od časa pri konstantni vrednosti) v smeri Y: W_j ;
- diskreten zasuk (zasuk odvisen od časa pri konstantni vrednosti) okrog osi Z: Φ_j ;

skupno torej $3n$ diskretnih vrednosti, kjer je

$x_1 = 0$ (levo krajišče),

$x_n = L$ (desno krajišče),

$n \geq 2$, lahko je tudi velik npr. $n = 8$. Take elemente imenujemo elementi višjega reda in so točnejši.

Odvisne neznanke pa so:

- zvezni pomik v smeri X: $u(x, t)$;
- zvezni pomik v smeri Y: $w(x, t)$;
- zvezni zasuk okrog osi Z: $\phi(x, t)$;
- odvod pomika v smeri X: u' ;
- odvod pomika v smeri Y: w' ;
- odvod zasuka okrog osi Z: ϕ' ;
- normalna deformacija: ε ;
- strižna deformacija: γ ;
- ukrivljenost: κ ;
- osna sila: N ;
- prečna sila: Q ;
- upogibni moment okrog osi Z: M ;
- notranja sila v smeri X: R_x ;
- notranja sila v smeri Y: R_y .

Enačbe, ki jih imamo na voljo za izračun osnovnih neznank:

- $3n$ diferencialnih enačbe drugega reda, ki povezujejo pospeške in notranje statične količine (4.28) glede na diskretizacijske točke problema $x_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Za skupno $3n$ osnovnih neznank problema imam tako na voljo $3n$ enačb. Kot opazimo, so enačbe sistema diferencialne enačbe drugega reda. Torej potrebujemo za $6n$ začetnih pogojev:

$$\begin{aligned}
 t = t_0: \quad U_j(t_0) = U_j^0, \quad W_j(t_0) = W_j^0, \quad \Phi_j(t_0) = \Phi_j^0 \\
 \dot{U}_j(t_0) = \dot{U}_j^0, \quad \dot{W}_j(t_0) = \dot{W}_j^0, \quad \dot{\Phi}_j(t_0) = \dot{\Phi}_j^0
 \end{aligned}
 \tag{4.29}$$

Sistem enačb ravnega linijskega nosilca je tako podan v Preglednici 5. Začetni pogoji pa so prikazani v Preglednici 6.

Preglednica 5: Sistem enačb linijskega nosilca.

Osnovne neznanke: $U_j, W_j, \Phi_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$	
$[N_{1i}]$:	$\sum_{j=1}^n M_{ij}^u \ddot{U}_j = -\int_0^L (R_X P_i') dx + P_X P_i(c)$
$[N_{2i}]$:	$\sum_{j=1}^n M_{ij}^w \ddot{W}_j = -\int_0^L (R_Y P_i') dx + P_X P_i(c)$
$[N_{3i}]$:	$\sum_{j=1}^n M_{ij}^\phi \ddot{\Phi}_j = -\int_0^L (M_c P_i' + ((\sin \phi_0 + w') R_X - (\cos \phi_0 + u') R_Y) P_i') dx \quad i = 1, 2, \dots, n$
Odvisne neznanke: $u, w, \phi, u', w', \phi', \varepsilon, \gamma, \kappa, N, Q, M, R_X, R_Y$	
$[N_{01}]$:	$u = \sum_{j=1}^n P_j U_j$
$[N_{02}]$:	$w = \sum_{j=1}^n P_j W_j$
$[N_{03}]$:	$\phi = \phi_0 + \sum_{j=1}^n P_j \Phi_j$
$[N_{04}]$:	$u' = \sum_{j=1}^n P_j' U_j$

se nadaljuje...

... nadaljevanje Preglednice 5

$$\begin{aligned}
 [N_{05}] : w' &= \sum_{j=1}^n P'_j W_j \\
 [N_{06}] : \phi' &= \sum_{j=1}^n P'_j \Phi_j \\
 [N_{07}] : \varepsilon &= (\cos \phi_0 + u') \cos \phi + (\sin \phi_0 + w') \sin \phi - 1 \\
 [N_{08}] : \gamma &= -(\cos \phi_0 + u') \sin \phi + (\sin \phi_0 + w') \cos \phi \\
 [N_{09}] : \kappa &= \phi' \\
 [N_{010}] : N &= EA\varepsilon \\
 [N_{011}] : Q &= GA_s \gamma \\
 [N_{012}] : M &= EI\kappa \\
 [N_{013}] : R_x &= N \cos \phi - Q \sin \phi \\
 [N_{014}] : R_y &= N \sin \phi + Q \cos \phi
 \end{aligned}$$

Preglednica 6: Začetni pogoji enačb linijskega nosilca.

$$\begin{aligned}
 t = t_0 : \quad U_j(t_0) &= U_j^0, \quad W_j(t_0) = W_j^0, \quad \Phi_j(t_0) = \Phi_j^0 \\
 \dot{U}_j(t_0) &= \dot{U}_j^0, \quad \dot{W}_j(t_0) = \dot{W}_j^0, \quad \dot{\Phi}_j(t_0) = \dot{\Phi}_j^0
 \end{aligned}$$

4.1.2 Zapis sistema diferencialnih enačb linijskega nosilca v matrični obliki

Osnovni sistem diferencialnih enačb $[N_{1i}] - [N_{3i}]$ rešujemo numerično. Zaradi lažje priprave programov v *Matlab*-u sistem zapišemo še v matrični obliki. Pred tem uvedemo dodatne oznake:

$$\begin{aligned}
 F_{1i} &= -\int_0^L (R_X P_i') dx + P_X P_i(c) \\
 F_{2i} &= -\int_0^L (R_Y P_i') dx + P_Y P_i(c) \\
 F_{3i} &= -\int_0^L (M_c P_i' + ((\sin \phi_0 + w') R_X - (\cos \phi_0 + u') R_Y) P_i) dx
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Tako dobi sistem enačb linijskega nosilca preprosti shematski zapis:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n M_{ij}^u \ddot{U}_j &= F_{1i} \\
 \sum_{j=1}^n M_{ij}^w \ddot{W}_j &= F_{2i} \\
 \sum_{j=1}^n M_{ij}^\phi \ddot{\Phi}_j &= F_{3i}
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Kot opazimo je takšen zapis zelo primeren za zapis v matrični obliki:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} M_{11}^u & M_{12}^u & \cdots & M_{1n}^u \\ M_{21}^u & M_{22}^u & \cdots & M_{2n}^u \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1}^u & M_{n2}^u & \cdots & M_{nn}^u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U}_1 \\ \ddot{U}_2 \\ \vdots \\ \ddot{U}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ \vdots \\ F_{1n} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} M_{11}^w & M_{12}^w & \cdots & M_{1n}^w \\ M_{21}^w & M_{22}^w & \cdots & M_{2n}^w \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1}^w & M_{n2}^w & \cdots & M_{nn}^w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{W}_1 \\ \ddot{W}_2 \\ \vdots \\ \ddot{W}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_{21} \\ F_{22} \\ \vdots \\ F_{2n} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} M_{11}^\phi & M_{12}^\phi & \cdots & M_{1n}^\phi \\ M_{21}^\phi & M_{22}^\phi & \cdots & M_{2n}^\phi \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1}^\phi & M_{n2}^\phi & \cdots & M_{nn}^\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\Phi}_1 \\ \ddot{\Phi}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\Phi}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_{31} \\ F_{32} \\ \vdots \\ F_{3n} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Tako smo sistem enačb $[N_{1i}] - [N_{3i}]$ zapisali s pomočjo matrik, ki pa nudi še kompaktnejši zapis:

$$\mathbf{M}_N \ddot{\mathbf{X}}_N = \mathbf{F}_N \tag{4.33}$$

Pri čemer je $\ddot{\mathbf{X}}_N$ stolpec neznank

$$\ddot{\mathbf{X}}_N = [\ddot{U}_1 \quad \dots \quad \ddot{U}_n \quad \ddot{W}_1 \quad \dots \quad \ddot{W}_n \quad \ddot{\Phi}_1 \quad \dots \quad \ddot{\Phi}_n]^T, \quad (4.34)$$

\mathbf{F}_N je stolpec desnih strani

$$\mathbf{F}_N = [F_{11} \quad \dots \quad F_{1n} \quad F_2 \quad \dots \quad F_{2n} \quad \Phi_3 \quad \dots \quad \Phi_{3n}]^T, \quad (4.35)$$

\mathbf{M}_N pa je masna matrika sistema, katere komponente so neodvisne od časa

$$\mathbf{M}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ij}^u & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{ij}^w & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_{ij}^\phi \end{bmatrix}$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad (4.36)$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

Zaradi reševanja z rutinami, vgrajenimi v program. *Matlab*, navadne diferencialne enačbe drugega reda prevedemo na sistem navadnih diferencialnih enačb prvega reda. To storimo s pomočjo substitucij (Zupan, 2000).

Izraz (4.33) prevedemo na obliko sistema navadnih diferencialnih enačb prvega reda z uvedbo dodatnih neznank:

$$\mathbf{Y}_{1N} = \mathbf{X}_N$$

$$\mathbf{Y}_{2N} = \dot{\mathbf{X}}_N = \dot{\mathbf{Y}}_{1N} \quad (4.37)$$

Iz (4.37) tako sledi:

$$\dot{\mathbf{Y}}_{1N} = \mathbf{Y}_{2N}$$

$$\mathbf{M}_N \dot{\mathbf{Y}}_{2N} = \mathbf{F}_N \quad (4.38)$$

Tako smo dobili obliko zapisa sistema diferencialnih enačb ravninskega nosilca pod točkovno obtežbo v poljubni točki, ki je primeren za reševanje v programu *Matlab*.

4.2 Numerične študije: Dinamičen odziv linijskega nosilca pod hipno točkovno obtežbo

Pogosto se zgodi, da so gradbene konstrukcije v svoji življenjski dobi obremenjene z udarno obtežbo. Največkrat se to dogaja na cestnih konstrukcijah in pa na konstrukcijah, ki so namenjene skladiščenju. Pri slednjih ni redkost, da nam zaradi nepredvidljive situacije breme iz določene višine pade na konstrukcijo.

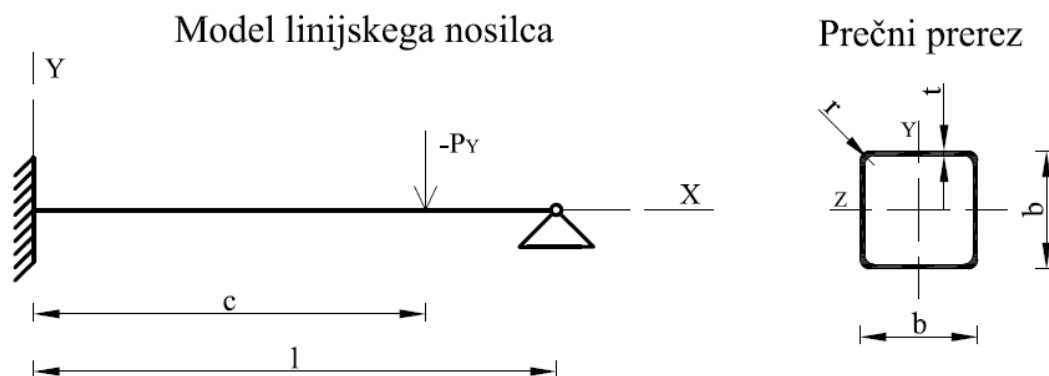
V našem primeru ta pojav zelo poenostavimo in problem opišemo z obtežbo, ki se hipno pojavi na konstrukciji (linijskem nosilcu). Analiziramo vpliv hipne obtežbe na dveh različno podprtih linijskih nosilcih. V prvem primeru predpostavimo, da nosilec hipno obremenimo z obtežbo, ki celoten čas analize tudi ostane na nosilcu. V drugem primeru pa predpostavimo, da hipoma na nosilec postavimo obtežbo, ki jo po določenem času, ki je manjši od celotnega časa analize, odstranimo z nosilca.

Analizirali bomo vplive različnih podpor in nekaterih drugih parametrov (dolžine, prijemališča obtežbe, karakteristik prečnega prereza) na dinamičen odziv nosilca.

4.2.1 Na eni strani togo na drugi vrtljivo podprti nosilec

Najprej obravnavamo linijski nosilec predstavljen na Sliki 13. Podatki uporabljeni v izračunu so navedeni v Preglednici 7. Rezultate prikazujemo v obliki grafov deformirane oblike nosilca pri posameznih diskretnih časih intervalih ter ovojnice pomikov in zasukov.

Potrebno je pa poudariti, da zaradi majhnosti pomikov v primerjavi z dolžino nosilca, pri prikazu deformacijske oblike, pomike povečamo s **faktorjem povečave pomikov**. S tem zmanjšamo razmerje med velikostjo pomikov ter dolžino nosilca pri čemer pa deformirana oblika nosilca ohranja prvotno obliko. Ta maneuver nam omogoča grafični prikaz pomikov kljub pomikom, ki so za nekaj velikostnih redov manjši od dolžine nosilca.

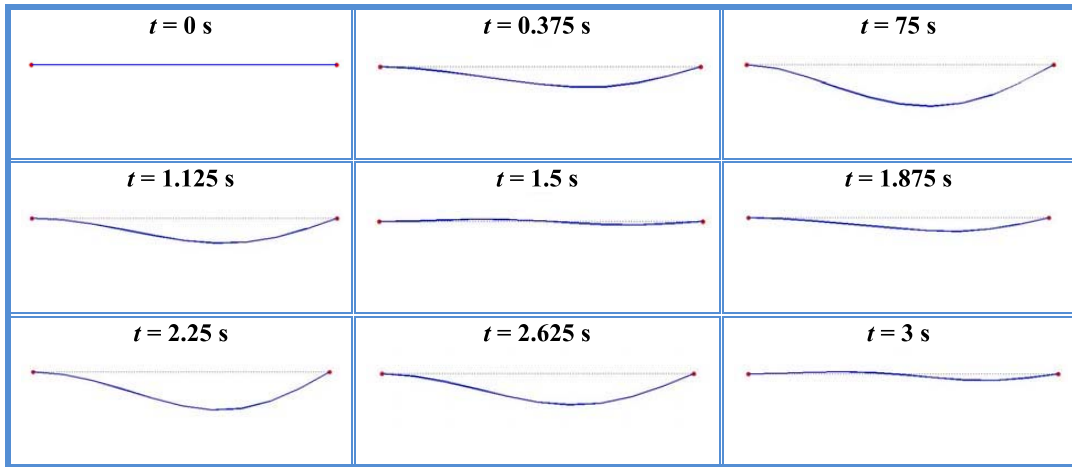


Slika 13: Model nosilca, ki je na eni strani togo, na drugi pa vrtljivo podprt in njegov prečni prerez.

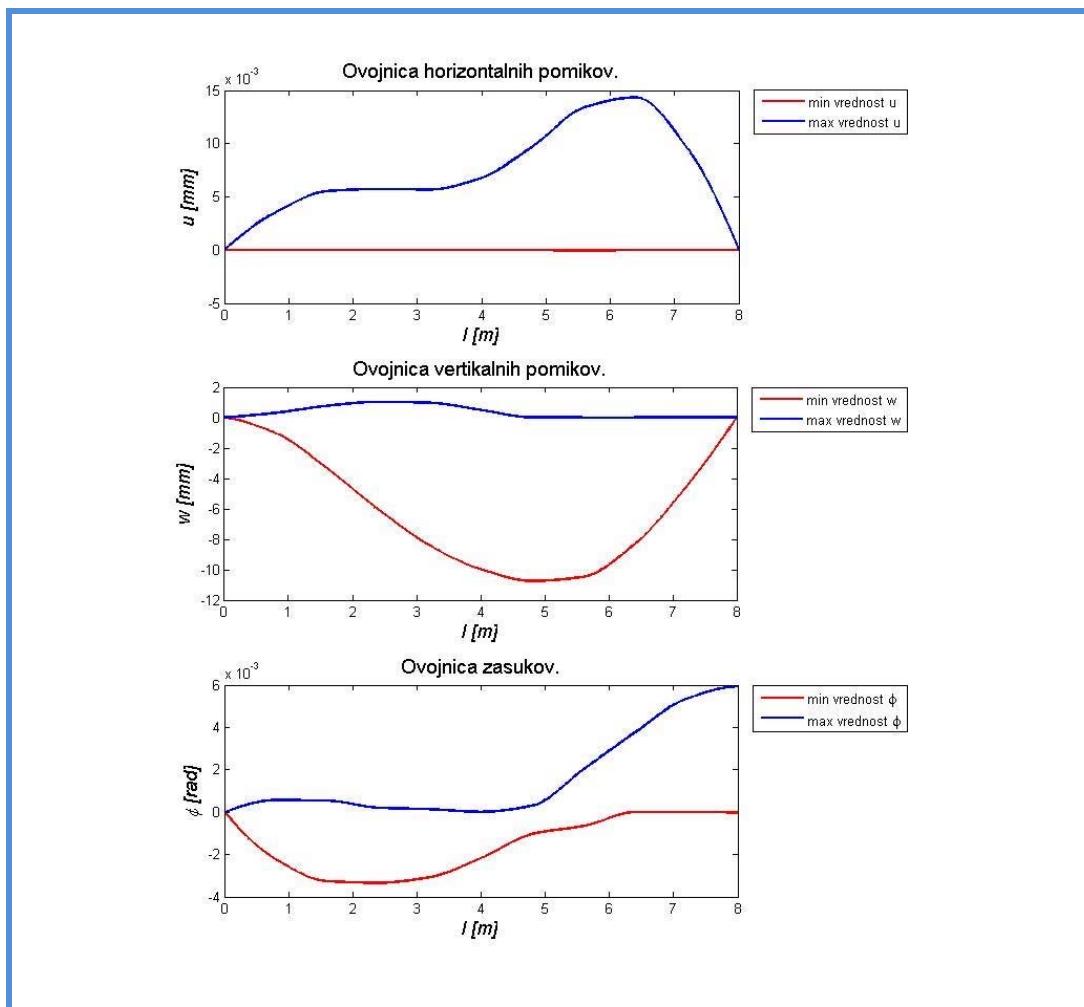
Preglednica 7: Podatki o nosilcu, ki je na eni strani togo, na drugi pa vrtljivo podprt.

Nosilec	Dolžina nosilca: $l = l$ Prijemališče obtežbe: $c = c$
Material	<u>Jeklo:</u> Elastični modul: $E = 21 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ Strižni modul: $G = 8.1 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ Specifična gostota materiala: $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$
Prečni prerez	SHS 200 Ploščina prečnega prereza A : $A = 59.8 \text{ cm}^2$ Ploščina strižnega prereza A_v (Beg, 1999): $A_v = A/2$ Vztrajnostni moment prečnega prereza I : $I = 3620 \text{ cm}^4$
Obtežba	$P_y = -10 \text{ kN}$
Končni čas računa	$T = 3 \text{ s}$

- dolžina nosilca in prijemališče obtežbe: $l = 8$ m, $c = 0.75 l$.

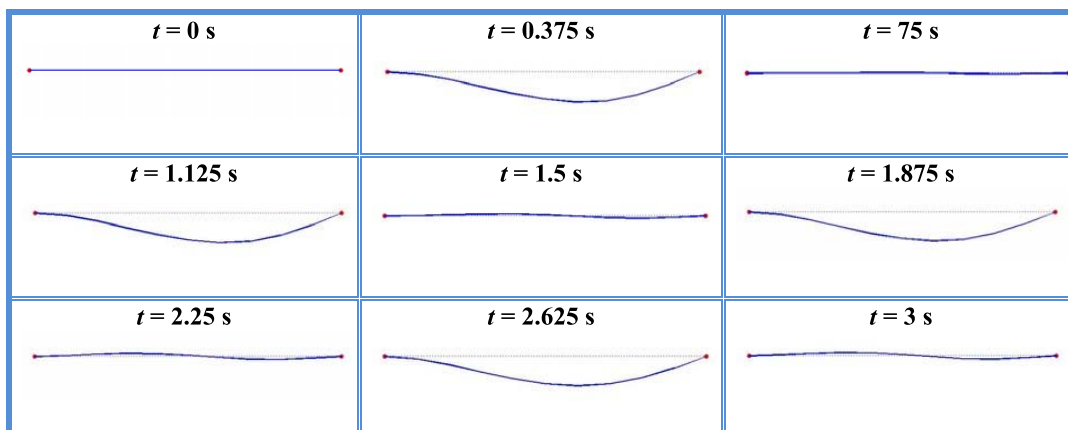


Slika 14: Deformirana oblika nosilca za $l = 8$ m in $c = 0.75 l$ pri fiksnih časih. Faktor povečave pomikov je enak 100.

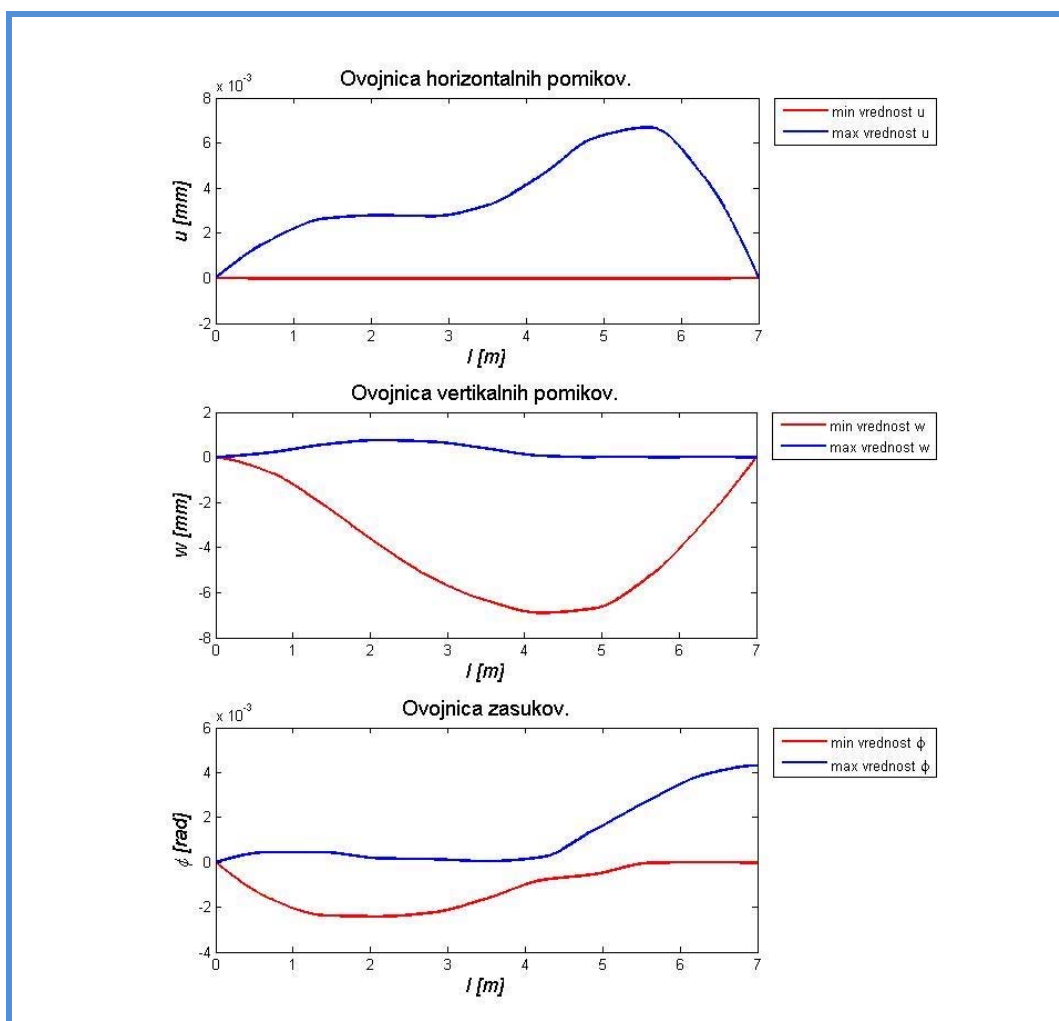


Slika 15: Ovojnice pomikov in zasukov nosilca za $l = 8$ m in $c = 0.75 l$.

- dolžina nosilca in prijemališče obtežbe: $l = 7$ m, $s = 0.75 l$.

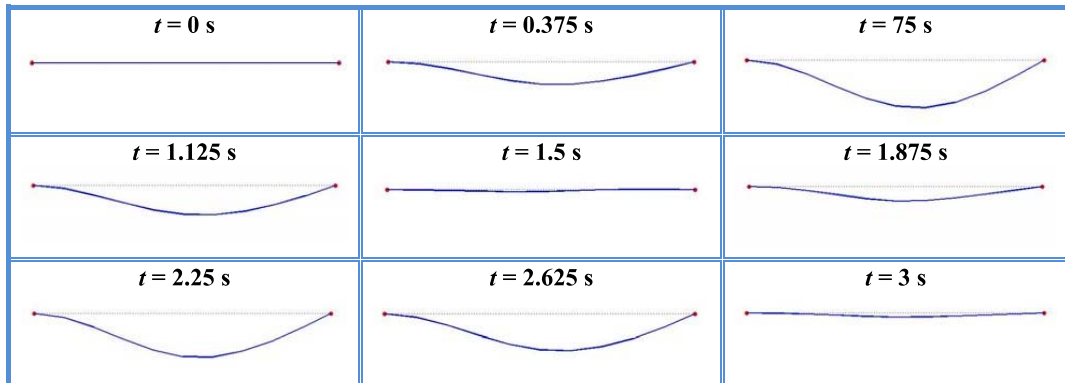


Slika 16: Deformirana oblika nosilca za $l = 7$ m in $c = 0.75 l$ pri fiksnih časih. Faktor povečave pomikov je enak 100.

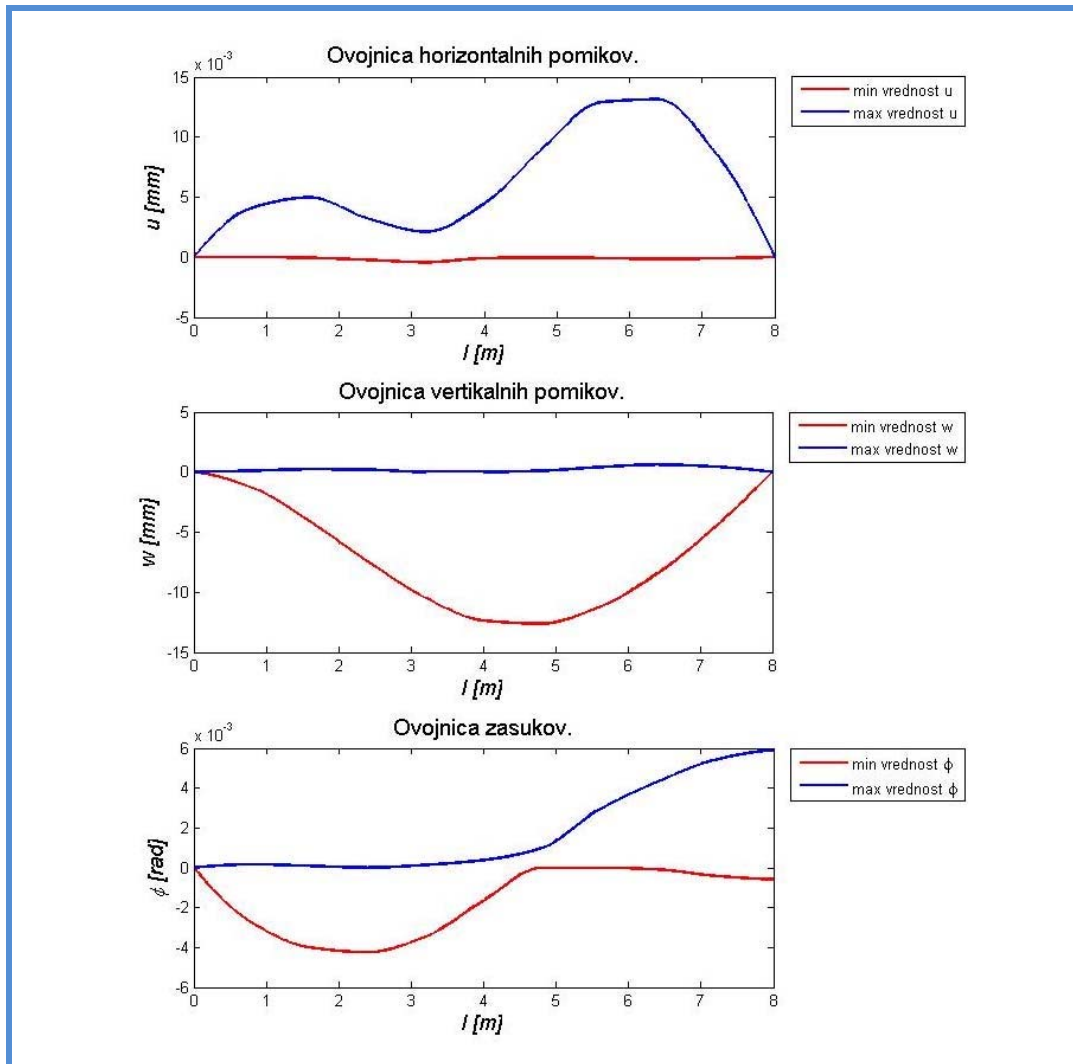


Slika 17: Ovojnice pomikov in zasukov nosilca za $l = 7$ m in $c = 0.75 l$.

- dolžina nosilca in prijemališče obtežbe: $l = 8$ m, $s = 0.5 l$.



Slika 18: Deformirana oblika nosilca za $l = 8$ m in $c = 0.5 l$ pri fiksnih časih. Faktor povečave pomikov je enak 100.



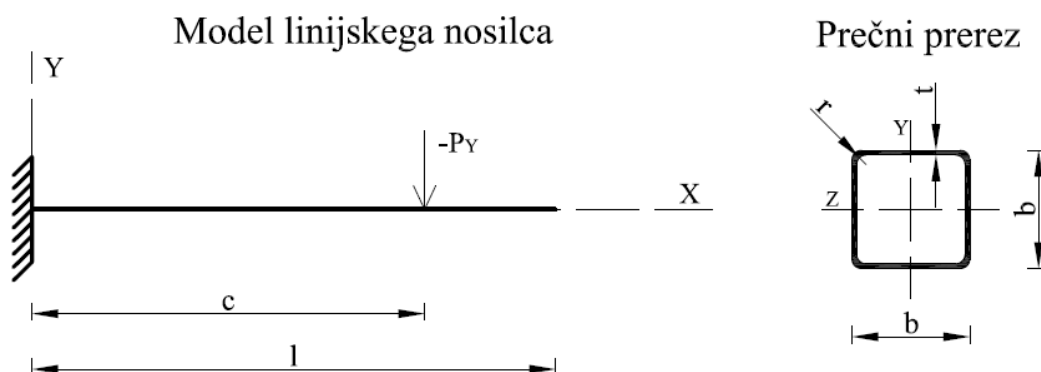
Slika 19: Ovojnice pomikov in zasukov nosilca za $l = 8$ m in $c = 0.5 l$.

Iz analize je razvidno, da ima na velikost pomikov pri analiziranih primerih precej večji vpliv dolžina nosilca, kot pa prijemališče sile. Vidimo, da se z zmanjšanjem dolžine nosilca za 1 m velikost vertikalnih pomikov skoraj prepolovi in tudi zasuki nosilca v desni podpori so za okoli 30 % manjši. Spremenjeno prijemališče sile pa na velikost pomikov ne vpliva dosti, nam pa v večji meri vpliva na deformacijsko obliko.

4.2.2 Previsni nosilec

V drugem primeru obravnavamo linijski nosilec prikazan na Sliki 20. Podatke, uporabljene v izračunu, navajamo v Preglednici 8. Kot rezultat numeričnega računanja prikazujemo deformacijsko obliko nosilca v posameznih časovnih intervalih ter grafe pomikov in zasukov linijskega nosilca. Analiziramo pa kakšen je vpliv prečnega prereza nosilca na obliko deformacijske oblike in velikost pomikov ter zasukov.

Tudi v tem primeru pri prikazu deformacijske oblike uporabimo faktor povečave, s katerim zmanjšamo razmerje med pomiki ter dolžino nosilca.

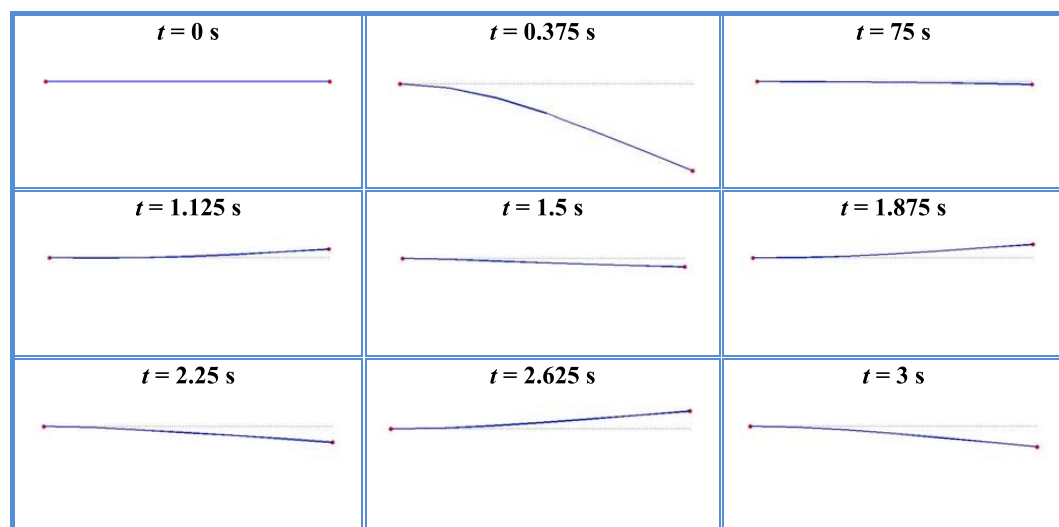


Slika 20: Model previsnega nosilca in njegov prečni prerez.

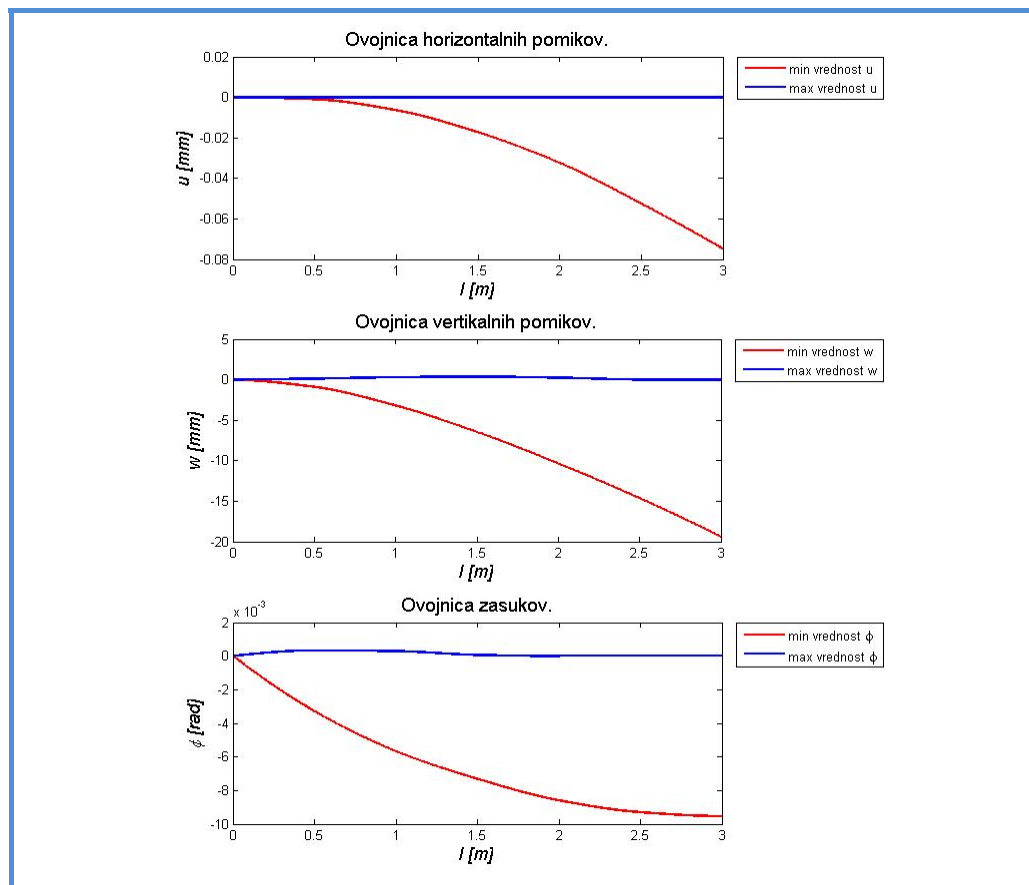
Preglednica 8: Podatki o previsnem nosilcu.

Nosilec	Dolžina nosilca: $l = 3$ m Prijemališče obtežbe: $c = l = 3$ m
Material	<u>Jeklo:</u> Elastični modul: $E = 21 \cdot 10^{10}$ N/m ² Strižni modul: $G = 8.1 \cdot 10^{10}$ N/m ² Specifična gostota materiala: $\rho = 7850$ kg/m ³
Prečni prerez	SHS Ploščina prečnega prereza: $A = A$ Ploščina strižnega prereza (Beg, 1999): $A_V = A/2$ Vztrajnostni moment prečnega prereza: $I = I$
Obtežba	$P_Y = -3$ kN za $t \leq 1.0$ s $P_Y = 0$ kN za 1.0 s $< t \leq T$
Končni čas računa	$T = 3$ s

- ploščina prečnega prereza in vztrajnostni moment prereza: $A=33.7$ cm², $I=1330$ cm⁴.

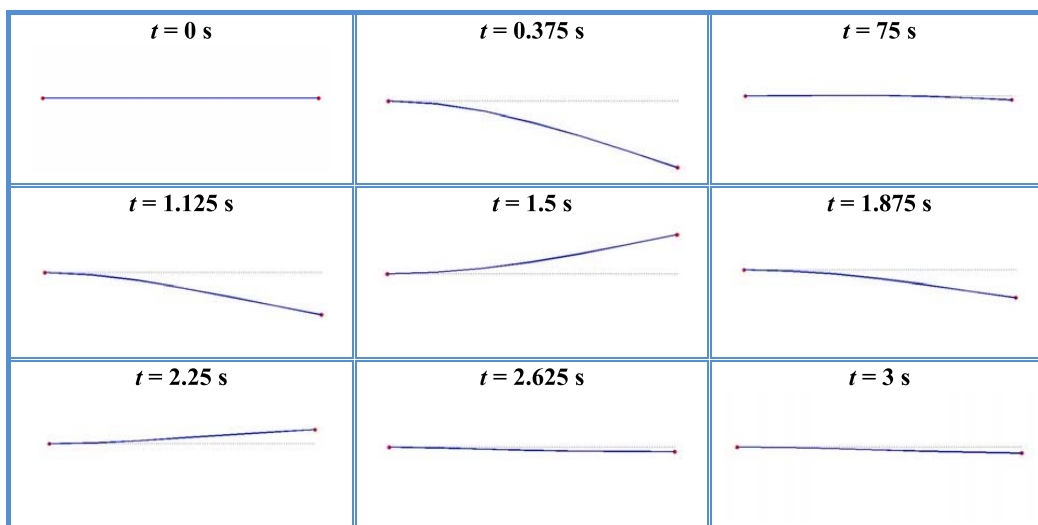


Slika 21: Deformirana oblika previsnega nosilca z $A= 33.7$ cm² in $I = 1330$ cm⁴ pri fiksnih časih. Faktor povečave pomikov je enak 50.

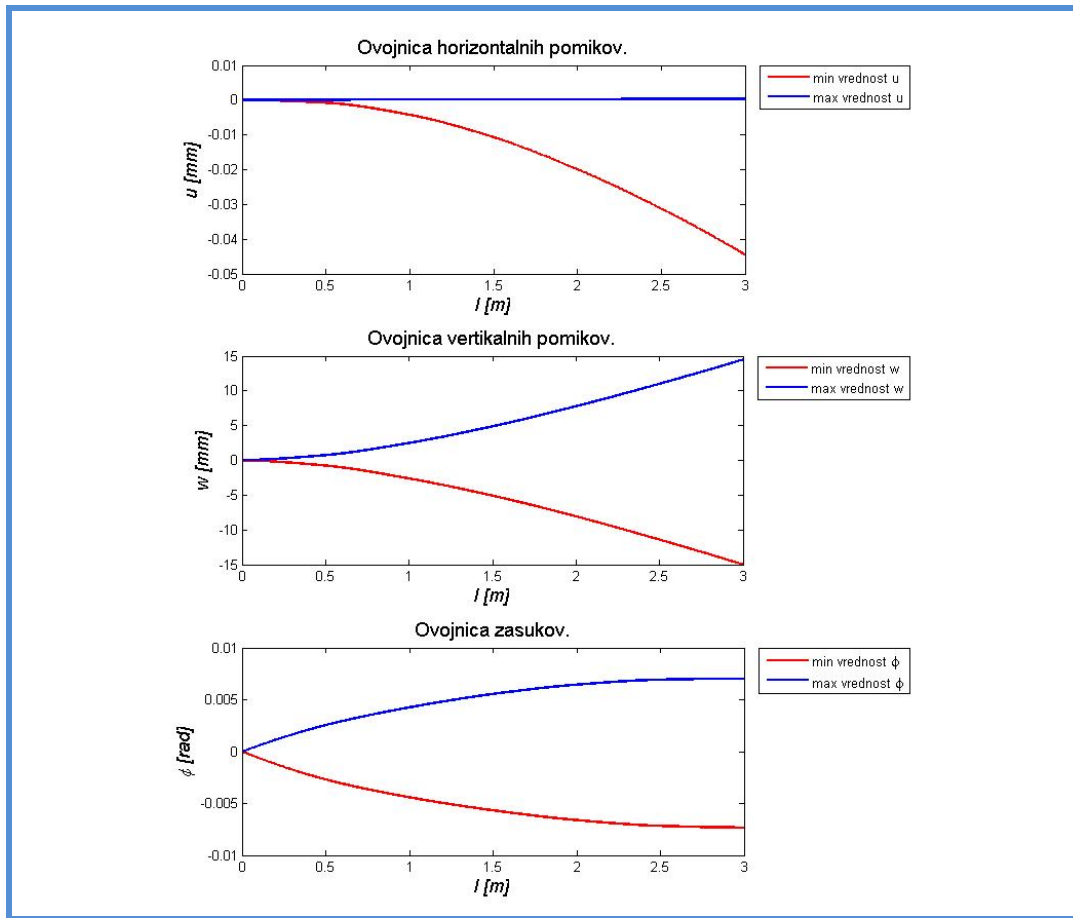


Slika 22: Ovojnica pomikov in zasukov previsnega nosilca z $A = 33.7 \text{ cm}^2$ in $I = 1330 \text{ cm}^4$.

- ploščina prečnega prereza in vztrajnostni moment prereza: $A = 33.9 \text{ cm}^2$, $I = 1700 \text{ cm}^4$.

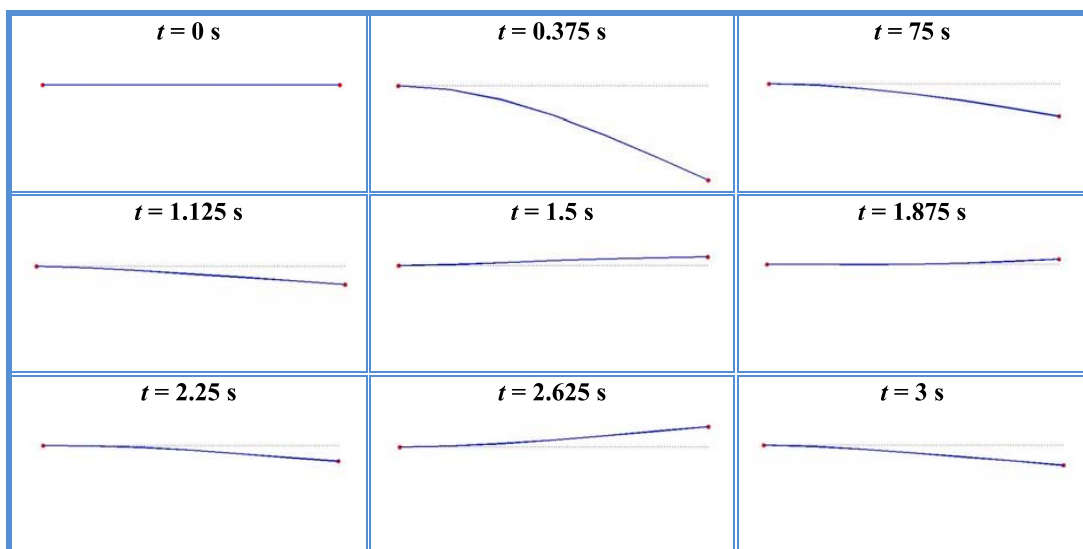


Slika 23: Deformirana oblika previsnega nosilca z $A = 33.9 \text{ cm}^2$ in $I = 1700 \text{ cm}^4$ pri fiksnih časih. Faktor povečave pomikov je enak 50.

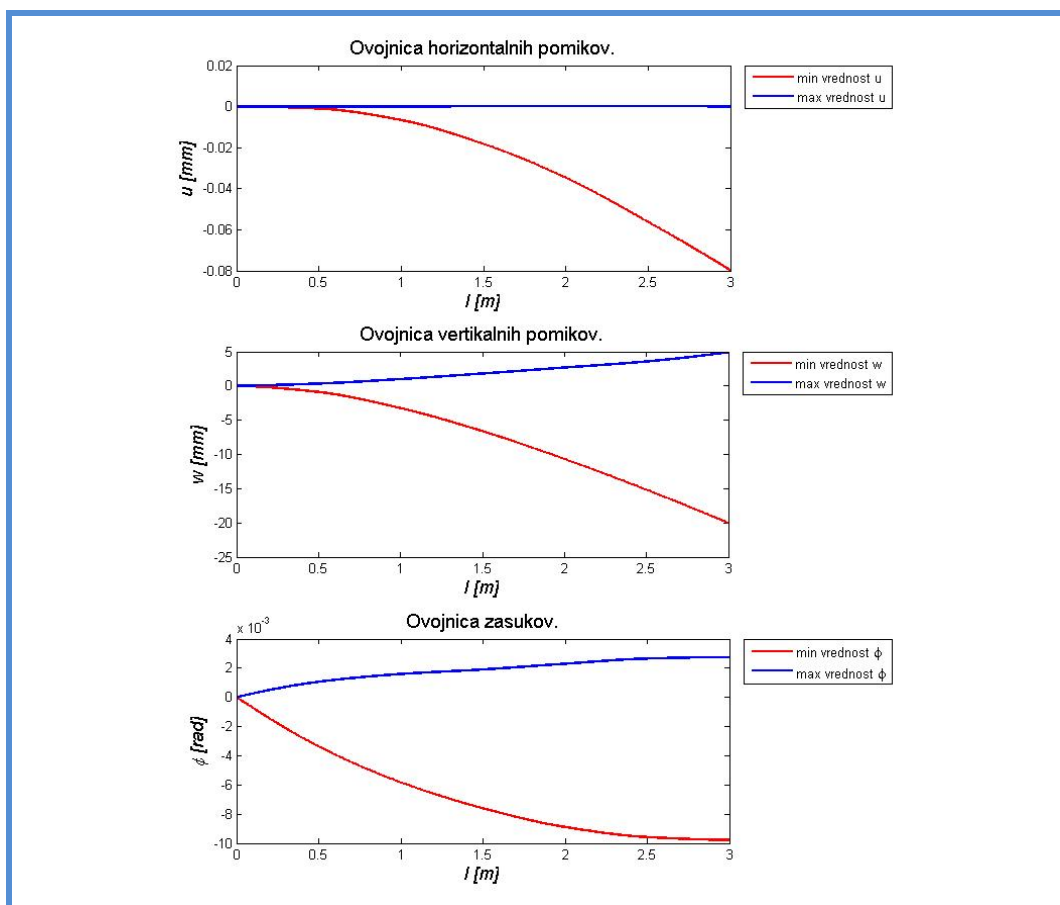


Slika 24: Ovojnica pomikov in zasukov previsnega nosilca z $A = 33.9 \text{ cm}^2$ in $I = 1700 \text{ cm}^4$.

- ploščina prečnega prereza in vztrajnostni moment prereza: $A = 45 \text{ cm}^2$, $I = 1280 \text{ cm}^4$.



Slika 25: Deformirana oblika previsnega nosilca z $A = 45 \text{ cm}^2$ in $I = 1280 \text{ cm}^4$ pri fiksnih časih. Faktor povečave pomikov je enak 50.



Slika 26: Ovojnica pomikov in zasukov previsnega nosilca z $A=45\text{ cm}^2$ in $I=1280\text{ cm}^4$.

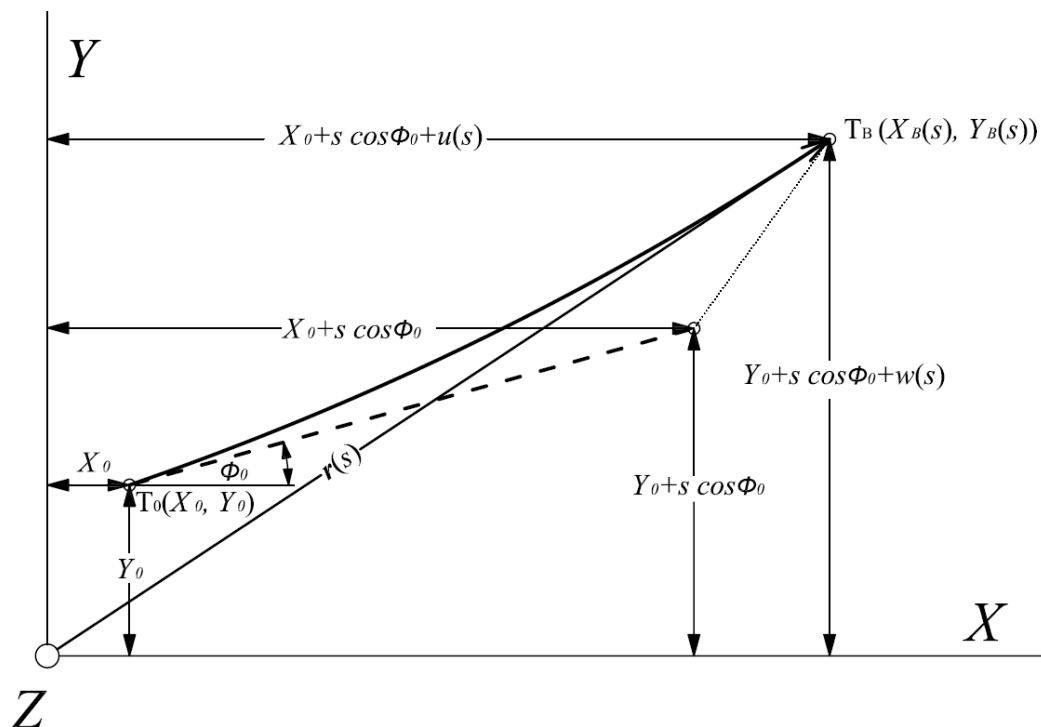
V zgornjih primerih smo želeli prikazati, kako ploščina prečnega prereza in vztrajnostni moment prečnega prereza vplivata na obnašanje nosilca. Opazimo, da ima pri taki obremenitvi na obnašanje nosilca ključno vlogo upogibna togost nosilca. V drugem primeru, ko izberemo prerez s podobno ploščino prereza in večjim vztrajnostim momentom prereza, ki je večji za okoli 28 % ima ta manjše pomike za približno 25 %, pa tudi iz deformacijske oblike opazimo drugačno obnašanje nosilca.

5 KOTALJENJE DISKA PO LINIJSKEM NOSILCU

V tretjem poglavju smo obravnavali kotaljenje diska po poljubni znani krivulji, ki jo podamo v parametrični obliki s parametrom s . V četrtem poglavju smo pripravili enačbe linijskega nosilca za numerično reševanje. Vse to smo storili z namenom, da lahko pridobljeno znanje učinkovito uporabimo za povezano reševanje obeh problemov. Nam pa ravno možnost, ki jo predstavimo v tem poglavju omogoča ustreznejše modeliranje problemov, ki se pojavljajo v naravi (simulacija vpliva potujočega vlaka na železniški most, simulacija vpliva bremena na žerjav,...).

Glede na to, da je disk togo telo, ki se s konstrukcijo dotika s tako majhno stično površino, da lahko stik reduciramo na eno točko, vpliv diska na nosilec nadomestimo s časovno spremenljivima obtežbama, lego diska na nosilcu pa določimo preko gibalnih enačb diska. Predpostavimo, da je masa diska konstantna in da se ne odlepi od nosilca po katerem potuje. Predpostavka je tudi, da je trenje med diskom in nosilcem zadostno, da disk ne podrsava. Predpostavimo še, da se disk kotali po težiščni osi linijskega nosilca.

5.1 Kotaljenje brez podrsavanja po linijskem nosilcu



Slika 27: Deformiranje težiščne osi linijskega nosilca.

Poljubno znano krivuljo, po kateri se kotali disk, predstavlja težiščna os linijskega nosilca v deformirani legi. Zapišemo koordinati dotikališča.

$$\begin{aligned} X_B(s) &= X_0 + s \cos \phi_0 + u(s) \\ Y_B(s) &= Y_0 + s \sin \phi_0 + w(s) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Tako lahko zapišemo težiščno os v parametrični obliki:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(s) &= (X_B(s), Y_B(s)) \\ \mathbf{r}(s) &= (X_0 + s \cos \phi_0 + u(s), Y_0 + s \sin \phi_0 + w(s)) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Ko poznamo krajevni vektor, lahko določimo tudi tangento po izrazu (2.76)

$$\mathbf{e}_t = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|} = \frac{\cos \phi_0 + u'}{\sqrt{(\cos \phi_0 + u')^2 + (\sin \phi_0 + w')^2}} \mathbf{E}_X + \frac{\sin \phi_0 + w'}{\sqrt{(\cos \phi_0 + u')^2 + (\sin \phi_0 + w')^2}} \mathbf{E}_Y \quad (5.3)$$

z upoštevanjem (5.3) ter zveze (2.78) lahko zapišemo

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_t &= \frac{\cos \phi_0 + u'}{\sqrt{(\cos \phi_0 + u')^2 + (\sin \phi_0 + w')^2}} \mathbf{E}_X + \frac{\sin \phi_0 + w'}{\sqrt{(\cos \phi_0 + u')^2 + (\sin \phi_0 + w')^2}} \mathbf{E}_Y \\ \mathbf{e}_n &= -\frac{\sin \phi_0 + w'}{\sqrt{(\cos \phi_0 + u')^2 + (\sin \phi_0 + w')^2}} \mathbf{E}_X + \frac{\cos \phi_0 + u'}{\sqrt{(\cos \phi_0 + u')^2 + (\sin \phi_0 + w')^2}} \mathbf{E}_Y \\ \mathbf{e}_b &= \mathbf{E}_Z \end{aligned} \quad (5.4)$$

Tako smo poiskali komponente baznih vektorjev:

$$\begin{aligned} e_{tX} &= \frac{\cos \phi_0 + u'}{\sqrt{(\cos \phi_0 + u')^2 + (\sin \phi_0 + w')^2}} = \cos \psi \\ e_{tY} &= \frac{\sin \phi_0 + w'}{\sqrt{(\cos \phi_0 + u')^2 + (\sin \phi_0 + w')^2}} = \sin \psi \end{aligned} \quad (5.5)$$

Ne pozabimo da sta e_{tX} in e_{tY} ravno smerna kosinusa: $\cos \psi$ in $\sin \psi$. V osnovnih enačbah diska nastopa količina ψ , ki smo jo izrazili s ψ' , le to pa z e_{tX} in njegovim odvodom. Za nadaljnje delo je pregledneje, če ψ' neposredno izrazimo s pomiki osi nosilca z nekaj matematičnimi manipulacijami dobimo:

$$\psi' = \frac{(\cos \phi_0 + u')w'' - (\sin \phi_0 + w')u''}{(\cos \phi_0 + u')^2 + (\sin \phi_0 + w')^2} \quad (5.6)$$

Gornje izraze lahko neposredno vstavimo v enačbe diska $[D_1]$ – $[D_5]$ in dobimo izraz za kotaljenje diska po težiščni osi deformiranega linijskega nosilca v ravnini. Ustrezno moramo prirediti še enačbo $[D_6]$, ki določa povezavo med koordinato težišča X_T in parametrom poti s .

Parameter s je sedaj neposredno povezan s parametrizacijo osi nosilca in se z njo povsem ujema. Tako s postane parameter, ki določa točko na osi nosilca "merjen" pa je na začetno nedeformirano lego osi nosilca.

Ob upoštevanju (3.10) in (5.5) lahko zapišemo:

$$\begin{aligned} X_B(s) &= X_T + ae_{iY} = X_T + a \frac{\sin \phi_0 + w'}{\sqrt{(\cos \phi_0 + u')^2 + (\sin \phi_0 + w')^2}} \\ Y_B(s) &= Y_T - ae_{iX} = Y_T - a \frac{\cos \phi_0 + u'}{\sqrt{(\cos \phi_0 + u')^2 + (\sin \phi_0 + w')^2}} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Desne strani (5.1) vstavimo v (5.8) in dobimo:

$$\begin{aligned} X_T + a \frac{\sin \phi_0 + w'}{\sqrt{(\cos \phi_0 + u')^2 + (\sin \phi_0 + w')^2}} &= X_0 + s \cos \phi_0 + u(s) \\ Y_T - a \frac{\cos \phi_0 + u'}{\sqrt{(\cos \phi_0 + u')^2 + (\sin \phi_0 + w')^2}} &= Y_0 + s \sin \phi_0 + w(s) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Iz enačb diska smo izločili Y_T kot osnovno neznanko problema, zato v nadaljevanju uporabimo le prvo enačbo. Ker pa ne želimo mešanega sistema enačb (algebrajske in diferencialne) prvo enačbo v (5.8) odvajamo po času:

$$\dot{X}_T + \frac{a(\cos \phi_0 + u')((\cos \phi_0 + u')w'' - (\sin \phi_0 + w')u'')}{\sqrt{((\cos \phi_0 + u')^2 + (\sin \phi_0 + w')^2)^3}} \dot{s} = \dot{s}(\cos \phi_0 + u') \quad (5.9)$$

Pri tem smo upoštevali posredno odvisnost pomikov osi nosilca od časa $\frac{d}{dt} = \frac{d}{ds}(\dot{s})$. Po urejanju členov dobimo:

$$\dot{X}_T + \left(\frac{a(\cos \phi_0 + u')((\cos \phi_0 + u')w'' - (\sin \phi_0 + w')u'')}{\sqrt{((\cos \phi_0 + u')^2 + (\sin \phi_0 + w')^2)^3}} - (\cos \phi_0 + u') \right) \dot{s} = 0 \quad (5.10)$$

Tako smo dobili še zadnjo enačbo $[D_6]$, ki določa zvezo med koordinato težišča in parametrom dotikališča s .

V skladu z metodo končnih elementov, pomike, njihove prve in druge odvode aproksimiramo z uporabo interpolacijskih polinomov in diskretnih vrednosti pomikov:

$$\begin{aligned} u(s, t) &= \sum_{i=1}^n P_i(s) U_i(t) \\ w(s, t) &= \sum_{i=1}^n P_i(s) W_i(t) \\ \phi(s, t) &= \phi_0 + \sum_{i=1}^n P_i(s) \Phi_i(t) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Iz (5.11) z odvajanjem interpolacijskega polinoma po s dobimo tudi prve in druge odvode pomikov:

$$\begin{aligned} u'(s, t) &= \sum_{i=1}^n P_i'(s) U_i(t) \\ w'(s, t) &= \sum_{i=1}^n P_i'(s) W_i(t) \\ u''(s, t) &= \sum_{i=1}^n P_i''(s) U_i(t) \\ w''(s, t) &= \sum_{i=1}^n P_i''(s) W_i(t) \end{aligned} \quad (5.12)$$

Izrazi (5.11) in (5.12) upoštevamo v osnovnih enačbah kotaljenja diska po nosilcu. Medsebojni vpliv med diskom in nosilcem predstavljajo kontaktne sile. Ob predpostavki toge podlage, smo jih imenovali reakcije podlage, vpliv diska na podlaga pa smo zanemarili. V primeru kotaljenja po nosilcu sile podlage, torej nosilca, še vedno upoštevamo na enak način in uporabimo enake oznake R_{x_K} in R_{y_K} . Upoštevati pa moramo, da vpliva disk na nosilec z enako velikima, nasprotno usmerjenima silama.

Zunanjo obtežbo tako predstavljata sili

$$\begin{aligned} P_X &= -(R_{x_K} \cos \phi - R_{y_K} \sin \phi) \\ P_Y &= -(R_{x_K} \sin \phi + R_{y_K} \cos \phi) \end{aligned} \quad (5.13)$$

ki delujeta v točki določeni z vrednostjo $x = s$:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_X &= P_X \delta(x-s) \\ \mathcal{P}_Y &= P_Y \delta(x-s)\end{aligned}\tag{5.14}$$

Pri enačbah $[N_{1i}] - [N_{3i}]$ linijskega nosilca pa je sprememba le ta, da nam zunanjo obtežbo tokrat predstavlja akcija diska na linijski nosilec.

5.1.1 Sistem enačb kotaljenja brez podrsavanja po linijskem nosilcu

Imamo nabor treh osnovnih neznank v vsaki diskretizacijski točki x_i , $i = 1, 2, \dots, n$:

- diskreten pomik (pomik odvisen od časa pri konstantni koordinati) v smeri X: U_j ;
- diskreten pomik (pomik odvisen od časa pri konstantni vrednosti) v smeri Y: W_j ;
- diskreten zasuk (zasuk odvisen od časa pri konstantni vrednosti) okrog osi Z: Φ_j ;

skupno torej $3n$ diskretnih vrednosti, kjer je

$x_1 = 0$ (levo krajišče),

$x_n = L$ (desno krajišče),

$n \geq 2$, lahko je tudi velik npr. $n = 8$. Take elemente imenujemo elementi višjega reda in so točnejši.

Ter še šest osnovnih neznank diferencialnih enačb, ki opisujejo gibanje diska po ravninski krivulji:

- koordinati težišča v globalnem koordinatnem sistemu: X_T, Y_T ;
- komponenta hitrosti težišča diska v izbranem koordinatnem sistemu: v_x ;
- parameter krivulje: s ;
- zasuk telesnega koordinatnega sistema: φ ;
- komponenta telesnega vektorja kotne hitrosti, zapisanega glede na izbrani koordinatni sistem: Ω_z .

Skupaj imamo torej $3n + 6$ neznank, kjer je n število diskretizacijskih točk osi nosilca.

Odvisne neznanke pa so:

- zvezni pomik v smeri X: $u(s, t)$;

- zvezni pomik v smeri Y: $w(s, t)$;
- zvezni zasuk okrog osi Z: $\phi(s, t)$;
- odvod pomika v smeri X: u' ;
- odvod pomika v smeri Y: w' ;
- odvod zasuk okrog osi Z: ϕ' ;
- normalna deformacija: ε ;
- strižna deformacija: γ ;
- ukrivljenost: κ ;
- osna sila: N ;
- prečna sila: Q ;
- upogibni moment okrog osi Z: M ;
- notranja sila v smeri X: R_x ;
- notranja sila v smeri Y: R_y ;
- komponenta vektorja kotne hitrosti izbranega koordinatnega sistema: ω_z ;
- komponenti kontaktnih sil med diskom in nosilcem: R_{x_K}, R_{y_K} .

Enačbe, ki jih imamo na voljo za izračun osnovnih neznank:

- n naborov po tri diferencialne enačbe drugega reda $[N_{1i}] - [N_{3i}]$, $i = 1, 2, \dots, n$, ki povezujejo pospeške in notranje statične količine linijskega nosilca;
- ter šest prilagojenih diferencialnih enačb kotaljenja diska $[D_1] - [D_6]$, ob upoštevanju izrazov od (5.1) do (5.12).

Za skupno $3n+6$ osnovnih neznank problema imam tako na voljo $3n+6$ enačb. Enačbe $[N_{1i}] - [N_{3i}]$ so diferencialne enačbe drugega reda. Torej potrebujemo za $6n$ začetnih pogojev. Enačbe $[D_1] - [D_6]$ pa so enačbe prvega reda, torej vse neznanke nastopajo v prvih odvodih in zanje potrebujemo toliko začetnih pogojev kot je neznank.

Začetne pogoje formalno označimo kot:

$$\begin{aligned}
 t = t_0: \quad & U_j(t_0) = U_j^0, \quad W_j(t_0) = W_j^0, \quad \Phi_j(t_0) = \Phi_j^0 \\
 & \dot{U}_j(t_0) = \dot{U}_j^0, \quad \dot{W}_j(t_0) = \dot{W}_j^0, \quad \dot{\Phi}_j(t_0) = \dot{\Phi}_j^0 \\
 \\
 & X_T(t_0) = X_T^0, \quad Y_T(t_0) = Y_T^0 \\
 & v_x(t_0) = v_x^0 \\
 & s(t_0) = s^0 \\
 & \varphi(t_0) = \varphi^0 \\
 & \Omega_z(t_0) = \Omega_z^0
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Vendar med seboj niso popolnoma neodvisni, temveč moramo upoštevati vezne enačbe. Tako mora tudi pri začetnih pogojih veljati kinematična vez (3.15), izraz (3.16) ter enačbi (3.17), kateri imata pri legi diska na osi nosilca obliko:

$$\begin{aligned}
 X_B^0 &= X_T^0 + a e_{iY}^0(s^0) = X_T^0 + a \frac{\sin \phi_0 + w_0'}{\sqrt{(\cos \phi_0 + u_0')^2 + (\sin \phi_0 + w_0')^2}} \\
 Y_B^0 &= Y_T^0 - a e_{iX}^0(s^0) = Y_T^0 - a \frac{\cos \phi_0 + u_0'}{\sqrt{(\cos \phi_0 + u_0')^2 + (\sin \phi_0 + w_0')^2}}
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Sistem enačb ravnega linijskega nosilca je tako podan v Preglednici 8. Začetni pogoji pa so prikazani v Preglednici 9.

Preglednica 9: Sistem enačb kotaljenja brez podrsavanja po linijskem nosilcu.

Osnovne neznanke: $U_j, W_j, \Phi_j, \quad X_T, Y_T, v_x, s, \varphi, \Omega_z, \quad j = 1, 2, \dots, n$	
$[ND_{1i}]:$	$\sum_{j=1}^n M_{ij}^u \ddot{U}_j = -\int_0^L (R_X P_i') dx + \bar{P}_X P_i(c)$
$[ND_{2i}]:$	$\sum_{j=1}^n M_{ij}^w \ddot{W}_j = -\int_0^L (R_Y P_i') dx + \bar{P}_Y P_i(c)$
$[ND_{3i}]:$	$\sum_{j=1}^n M_{ij}^\phi \ddot{\Phi}_j = -\int_0^L (M_c P_i' + ((\sin \phi_0 + w') R_X - (\cos \phi_0 + u') R_Y) P_i) dx \quad i = 1, 2, \dots, n$

se nadaljuje ...

... nadaljevanje Preglednice 9

$$[ND_{3n+1}]: \frac{\cos \phi_0 + u'}{\sqrt{(\cos \phi_0 + u')^2 + (\sin \phi_0 + w')^2}} \dot{X}_T + \frac{\sin \phi_0 + w'}{\sqrt{(\cos \phi_0 + u')^2 + (\sin \phi_0 + w')^2}} \dot{Y}_T = v_x$$

$$[ND_{3n+2}]: -\frac{\sin \phi_0 + w'}{\sqrt{(\cos \phi_0 + u')^2 + (\sin \phi_0 + w')^2}} \dot{X}_T + \frac{\cos \phi_0 + u'}{\sqrt{(\cos \phi_0 + u')^2 + (\sin \phi_0 + w')^2}} \dot{Y}_T = 0$$

$$[ND_{3n+3}]: \dot{v}_x + a \dot{\Omega}_z = 0$$

$$[ND_{3n+4}]: -ma \dot{v}_x + C \dot{\Omega}_z = mga \frac{\sin \phi_0 + w'}{\sqrt{(\cos \phi_0 + u')^2 + (\sin \phi_0 + w')^2}}$$

$$[ND_{3n+5}]: \frac{(\cos \phi_0 + u') w'' - (\sin \phi_0 + w') u''}{(\cos \phi_0 + u')^2 + (\sin \phi_0 + w')^2} \dot{s} + \dot{\phi} = \Omega_z$$

$$[ND_{3n+6}]: \dot{X}_T + \left(\frac{a(\cos \phi_0 + u')((\cos \phi_0 + u') w'' - (\sin \phi_0 + w') u'')}{\sqrt{((\cos \phi_0 + u')^2 + (\sin \phi_0 + w')^2)^3}} - (\cos \phi_0 + u') \right) \dot{s} = 0$$

Odvisne neznanke: $u, w, \phi, u', w', \phi', u'', w'', \phi'', \varepsilon, \gamma, \kappa, N_c, Q_c, M_c, R_x, R_y, R_{x_K}, R_{y_K}, \omega_z$

$$[ND_{O1}]: u = \sum_{j=1}^n P_j U_j$$

$$[ND_{O2}]: w = \sum_{j=1}^n P_j W_j$$

$$[ND_{O3}]: \phi = \phi_0 + \sum_{j=1}^n P_j \Phi_j$$

$$[ND_{O4}]: u' = \sum_{j=1}^n P'_j U_j$$

$$[ND_{O5}]: w' = \sum_{j=1}^n P'_j W_j$$

$$[ND_{O6}]: \phi' = \sum_{j=1}^n P'_j \Phi_j$$

se nadaljuje ...

... nadaljevanje Preglednice 9

$$[ND_{07}]: u'' = \sum_{j=1}^n P_j'' U_j$$

$$[ND_{08}]: w'' = \sum_{j=1}^n P_j'' W_j$$

$$[ND_{09}]: \phi'' = \sum_{j=1}^n P_j'' \Phi_j$$

$$[ND_{010}]: \varepsilon = (\cos \phi_0 + u') \cos \phi + (\sin \phi_0 + w') \sin \phi - 1$$

$$[ND_{011}]: \gamma = -(\cos \phi_0 + u') \sin \phi + (\sin \phi_0 + w') \cos \phi$$

$$[ND_{012}]: \kappa = \phi'$$

$$[ND_{013}]: N = EA\varepsilon$$

$$[ND_{014}]: Q = GA_s \gamma$$

$$[ND_{015}]: M = EI\kappa$$

$$[ND_{016}]: R_x = N \cos \phi - Q \sin \phi$$

$$[ND_{017}]: R_y = N \sin \phi + Q \cos \phi$$

$$[ND_{018}]: R_{x_K} = m\dot{v}_x + mg \frac{\sin \phi_0 + w'}{\sqrt{(\cos \phi_0 + u')^2 + (\sin \phi_0 + w')^2}}$$

$$[ND_{019}]: R_{y_K} = m\dot{v}_y \frac{(\cos \phi_0 + u') w'' - (\sin \phi_0 + w') u''}{(\cos \phi_0 + u')^2 + (\sin \phi_0 + w')^2} \dot{s} + mg \frac{\cos \phi_0 + u'}{\sqrt{(\cos \phi_0 + u')^2 + (\sin \phi_0 + w')^2}}$$

$$[ND_{020}]: \omega_z = \frac{(\cos \phi_0 + u') w'' - (\sin \phi_0 + w') u''}{(\cos \phi_0 + u')^2 + (\sin \phi_0 + w')^2} \dot{s}$$

$$[ND_{021}]: P_x = -(R_{x_K} \cos \phi - R_{y_K} \sin \phi)$$

$$[ND_{022}]: P_y = -(R_{x_K} \sin \phi + R_{y_K} \cos \phi)$$

Preglednica 10: Začetni pogoji enačb kotaljenja brez podrsavanja po linijskem nosilcu.

$$t = t_0: \quad U_j(t_0) = U_j^0, \quad W_j(t_0) = W_j^0, \quad \Phi_j(t_0) = \Phi_j^0$$

$$\dot{U}_j(t_0) = \dot{U}_j^0, \quad \dot{W}_j(t_0) = \dot{W}_j^0, \quad \dot{\Phi}_j(t_0) = \dot{\Phi}_j^0$$

$$\phi(t_0) = \phi_0$$

$$s(t_0) = s^0$$

$$\varphi(t_0) = \varphi^0$$

$$\Omega_z(t_0) = \Omega_z^0$$

Vezne enačbe:

$$\mathbf{r}(s^0) = (X_B^0(s^0), Y_B^0(s^0))$$

$$v_x^0 + a\Omega_z^0 = 0$$

$$X_T^0 = X_B^0 - a \frac{\sin \phi_0 + w_0'}{\sqrt{(\cos \phi_0 + u_0')^2 + (\sin \phi_0 + w_0')^2}}$$

$$Y_T^0 = Y_B^0 + a \frac{\cos \phi_0 + u_0'}{\sqrt{(\cos \phi_0 + u_0')^2 + (\sin \phi_0 + w_0')^2}}$$

5.1.2 Zapis sistema diferencialnih enačb kotaljenja brez podrsavanja po linijskem nosilcu v matrični obliki

Osnovni sistem diferencialnih enačb $[ND_{1i}] - [ND_{3n+6}]$ rešujemo numerično. Zaradi lažje priprave programov v *Matlab*-u sistem zapišemo še v matrični obliki. Kot smo pokazali v 4. poglavju, lahko enačbe $[ND_{1i}] - [ND_{3i}]$ zapišemo v obliki:

$$\mathbf{M}_N \ddot{\mathbf{X}}_N = \mathbf{F}_N, \quad (5.17)$$

pri čemer je $\ddot{\mathbf{X}}_N$ stolpec neznank

$$\ddot{\mathbf{X}}_N = [\ddot{U}_1 \quad \dots \quad \ddot{U}_n \quad \ddot{W}_1 \quad \dots \quad \ddot{W}_n \quad \ddot{\Phi}_1 \quad \dots \quad \ddot{\Phi}_n]^T, \quad (5.18)$$

in \mathbf{F}_N je stolpec desnih strani

$$\mathbf{F}_N = [F_{11} \quad \dots \quad F_{1n} \quad F_2 \quad \dots \quad F_{2n} \quad \Phi_3 \quad \dots \quad \Phi_{3n}]^T \quad (5.19)$$

\mathbf{M}_N pa je masna matrika sistema, katere komponente so neodvisne od časa

$$\mathbf{M}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ij}^u & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{ij}^w & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_{ij}^\phi \end{bmatrix}$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$
(5.20)

kjer upoštevamo posebnosti zaradi vpliva diska.

Izraze $[ND_{3n+1}] - [ND_{3n+6}]$ matrično zapišemo tako kot v 3. poglavju:

$$\mathbf{M}_D \dot{\mathbf{X}}_D = \mathbf{F}_D \quad (5.21)$$

Pri čemer je $\dot{\mathbf{X}}_D$ stolpec neznank

$$\dot{\mathbf{X}}_D = \begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \\ v_x \\ s \\ \varphi \\ \Omega_z \end{bmatrix}, \quad (5.22)$$

\mathbf{F}_D je stolpec desnih strani z upoštevanjem posebnosti zaradi kotaljenja po nosilcu

$$\mathbf{F}_D = \begin{bmatrix} v_x \\ 0 \\ 0 \\ mga \frac{\sin \phi_0 + w'}{\sqrt{(\cos \phi_0 + u')^2 + (\sin \phi_0 + w')^2}} \\ \Omega_z \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.23)$$

\mathbf{M}_D pa je masna matrika sistema. Zaradi preglednosti jo zapišemo shematsko (pika '.' označuje ničelno komponento, 'x' pa neničelno),

$$\mathbf{M}_D = \begin{bmatrix} \times & \times & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \times & \times & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \times & \cdot & \cdot & \times \\ \cdot & \cdot & \times & \cdot & \cdot & \times \\ \cdot & \cdot & \cdot & \times & \times & \cdot \\ \times & \cdot & \cdot & \times & \cdot & \cdot \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

Neničelne komponente so:

$$M_D(1,1) = \frac{\cos \phi_0 + u'}{\sqrt{(\cos \phi_0 + u')^2 + (\sin \phi_0 + w')^2}}$$

$$M_D(1,2) = \frac{\sin \phi_0 + w'}{\sqrt{(\cos \phi_0 + u')^2 + (\sin \phi_0 + w')^2}}$$

$$M_D(2,1) = -\frac{\sin \phi_0 + w'}{\sqrt{(\cos \phi_0 + u')^2 + (\sin \phi_0 + w')^2}}$$

$$M_D(2,2) = \frac{\cos \phi_0 + u'}{\sqrt{(\cos \phi_0 + u')^2 + (\sin \phi_0 + w')^2}}$$

$$M_D(3,3) = 1$$

$$M_D(3,6) = a$$

$$M_D(4,3) = -ma$$

$$M_D(4,6) = C$$

$$M_D(5,4) = \frac{(\cos \phi_0 + u')w'' - (\sin \phi_0 + w')u''}{(\cos \phi_0 + u')^2 + (\sin \phi_0 + w')^2}$$

$$M_D(5,5) = 1$$

$$M_D(6,1) = 1$$

$$M_D(6,4) = \left(\frac{a(\cos \phi_0 + u')((\cos \phi_0 + u')w'' - (\sin \phi_0 + w')u'')}{\sqrt{((\cos \phi_0 + u')^2 + (\sin \phi_0 + w')^2)^3}} - (\cos \phi_0 + u') \right)$$

Sedaj pa izraz (5.17) s substitucijo prevedemo na sistema diferencialnih enačb prvega reda Iz (4.37) tako sledi:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{1N} &= \mathbf{X}_N \\ \mathbf{Y}_{2N} &= \dot{\mathbf{X}}_N = \dot{\mathbf{Y}}_{1N} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Tako dobimo že znano obliko:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Y}}_{1N} &= \mathbf{Y}_{2N} \\ \mathbf{M}_N \dot{\mathbf{Y}}_{2N} &= \mathbf{F}_N \end{aligned} \quad (5.26)$$

Celoten sistem v matrični obliki zapišemo kot:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_N & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}}_N \\ \dot{\mathbf{Y}}_{2N} \\ \dot{\mathbf{X}}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{2N} \\ \mathbf{F}_N \\ \mathbf{F}_D \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Gre torej za povezan sistem, kjer so \mathbf{X}_N in \mathbf{X}_D osnovne neznanke nosilca diska, \mathbf{Y}_{2N} pa je nabor pomožnih količin, ki predstavljajo prve odvode osnovnih neznank nosilca po času. Povezanost je razvidna iz hkratne odvisnosti blokov masne matrike in členov desnih strani od neznank nosilca in od neznank diska.

5.2 Numerične študije: Kotaljenje diska po linijskem nosilcu

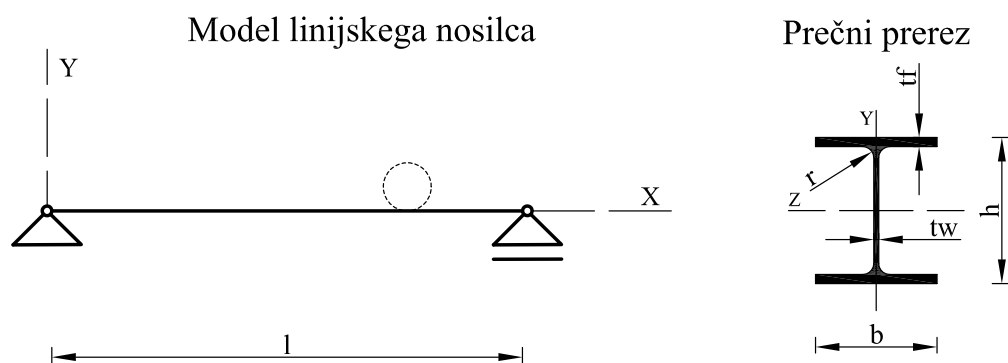
Pomemben del gradbenih objektov predstavljajo premostitveni objekti, ki so zgrajeni z namenom, da omogočajo prehod vozil. Ti objekti imajo velikokrat eno dimenzijo bistveno večjo od ostalih dveh in jih lahko modeliramo kot linijske konstrukcije.

Tukaj se omejimo na analizo enega samega linijskega elementa, po katerem se kotali disk brez podrsavanja, ki hkrati predstavlja spremenljivo dinamično obtežbo nosilca. Analiziramo bomo medsebojni vpliv linijskega nosilca in kotalečega se diska ter njuno obnašanje pri različnih vrednostih posameznih parametrov. Rezultate numeričnih študij zaradi preglednosti prikazujemo v grafični obliki.

Na koncu kot zanimivost prikazujemo še uporabnost numeričnega modela in izdelanega programa na primerih, ki mogoče nimajo neposredne povezave z gradbenimi konstrukcijami, so pa zaradi svoje narave zelo zanimivi.

5.2.1 Prostoležeči nosilec

Obravnavamo prostoležeči nosilec, po katerem se kotali disk konstantne mase. Analiziramo vpliv kotne hitrosti diska na skupen dinamičen odziv. Rezultate prikazujemo preko deformirane oblike linijskega nosilca pri fiksnih časih, grafov ovojníc pomikov in zasukov po času ter grafov, ki prikazujejo kako se posamezne količine diska spreminjajo s časom. Pomike smo za potrebe grafičnih prikazov povečali za **faktor povečave pomikov** in s tem zmanjšali razmerje med dolžino nosilca in velikostjo pomikov ter s tem omogočili grafični prikaz deformacijske oblike. Potrebno je tudi omeniti, da ko disk zapusti nosilec, sledi prosto gibanje linijskega nosilca.



Slika 28: Model prostoležečega nosilca in njegov prečni prerez.

Preglednica 11: Podatki o prostoležečem nosilcu.

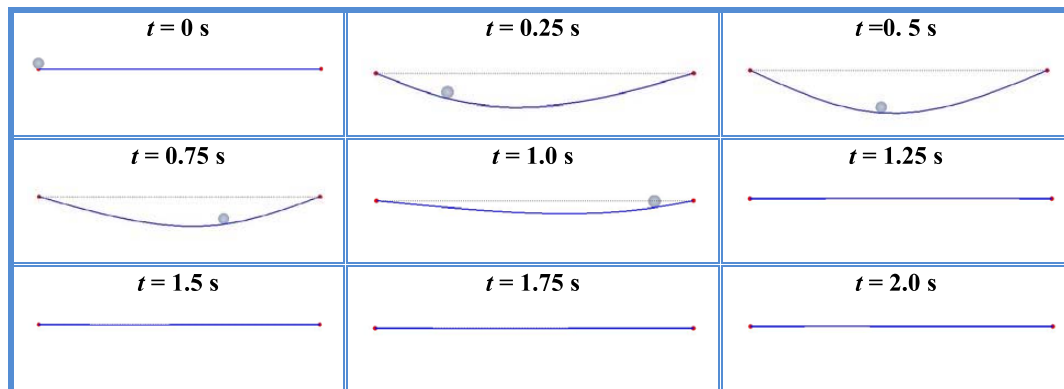
Nosilec	Dolžina nosilca: $l = 20$ m
Material	<p>Jeklo:</p> <p>Elastični modul: $E = 21 \cdot 10^{10}$ N/m²</p> <p>Strižni modul: $G = 8.1 \cdot 10^{10}$ N/m²</p> <p>Specifična gostota materiala: $\rho = 7850$ kg/m³</p>

se nadaljuje ...

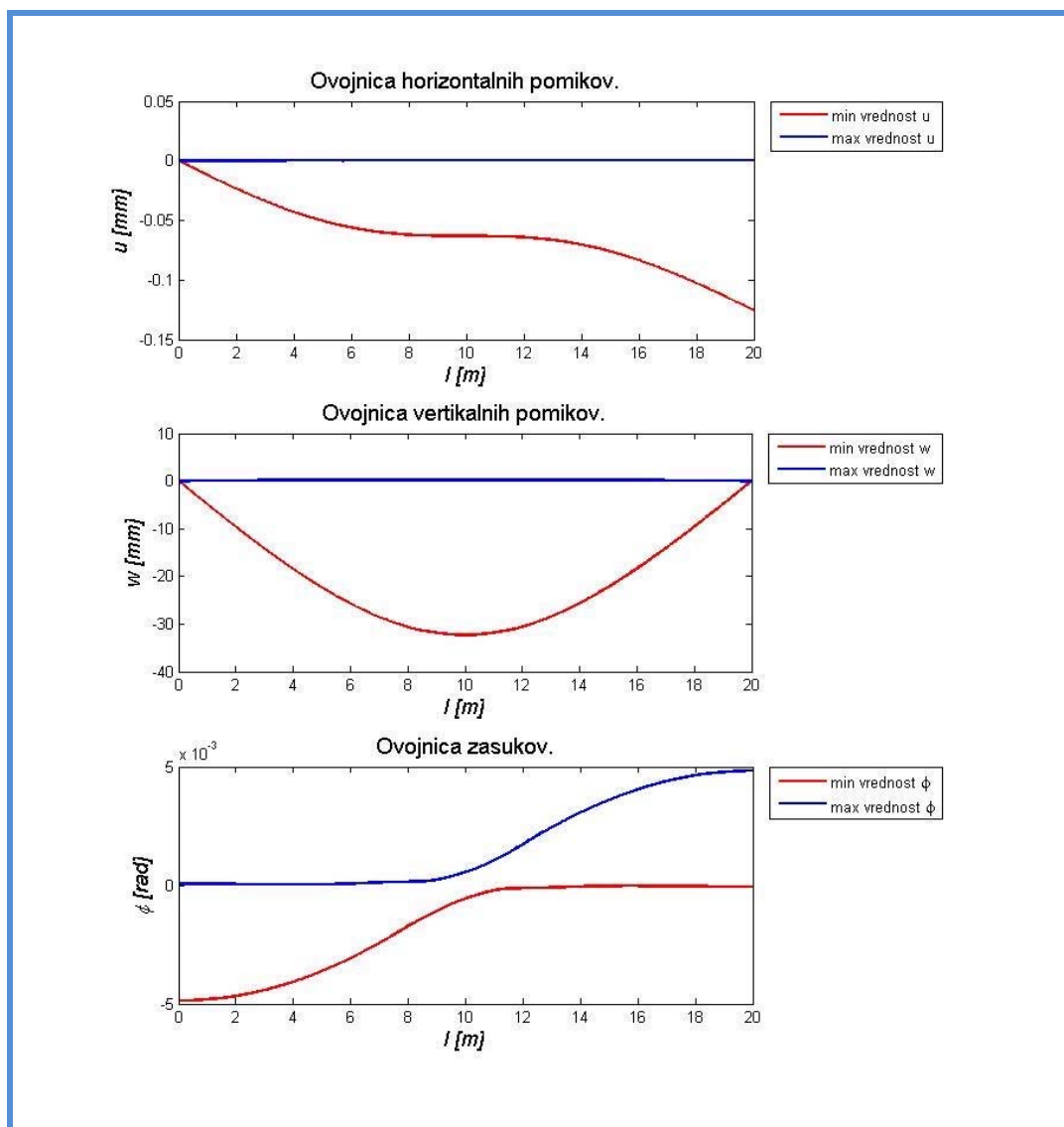
...nadaljevanje Preglednice 11

Prečni prerez	HEB 360 Ploščina prečnega prereza A : $A = 181 \text{ cm}^2$ Ploščina strižnega prereza A_V (Beg, 1999): $A_V = 46.8 \text{ cm}^2$ Vztrajnostni moment prečnega prereza I : $I = 43190 \text{ cm}^4$
Disk	Masa diska: $m = 1500 \text{ kg}$ Polmer diska: $a = 0.4 \text{ m}$ Začetna kotna hitrost diska: Ω_z
Končni čas računa	$T = 3 \text{ s}$

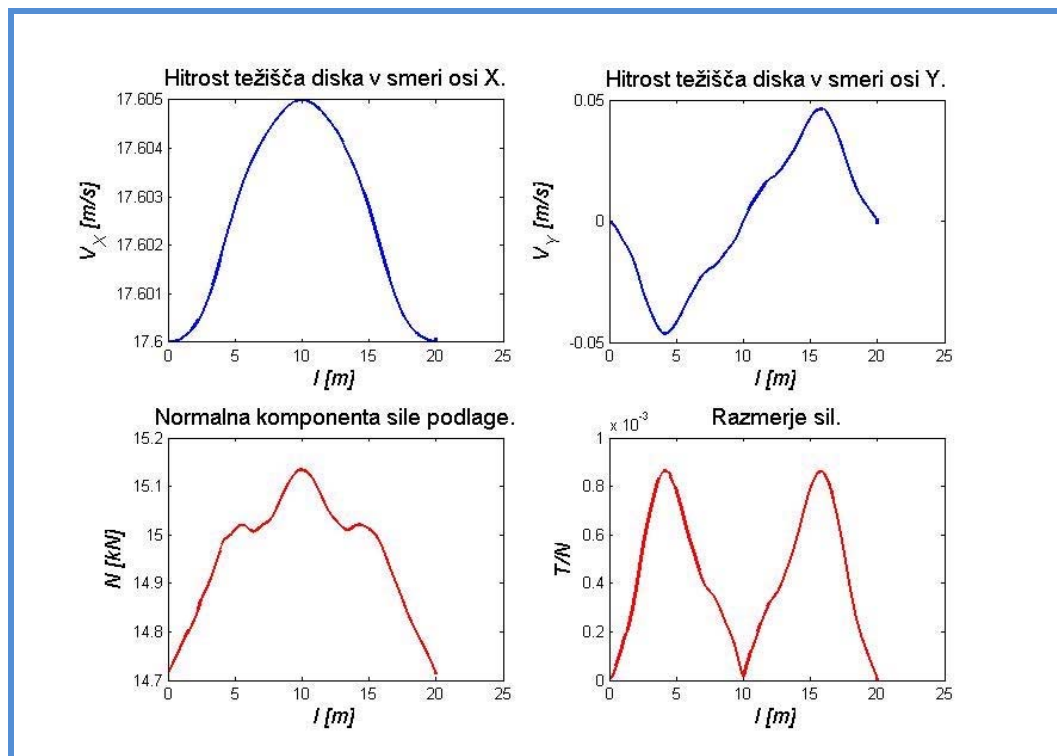
- začetna kotna hitrost in vrsta materiala: $\Omega_z = -44 \text{ s}^{-1}$



Slika 29: Deformirana oblika prostoležečega nosilca pri fiksnih časih in kotni hitrosti diska $\Omega_z = -44 \text{ s}^{-1}$
 Faktor povečave pomikov je enak 100.

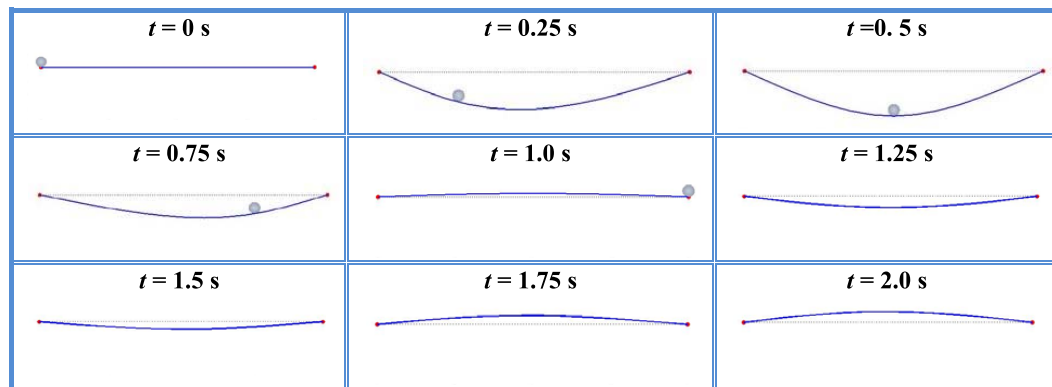


Slika 30: Ovojnica pomikov in zasukov prostoležečega nosilca pri kotni hitrosti diska $\Omega_z = -44 \text{ s}^{-1}$.

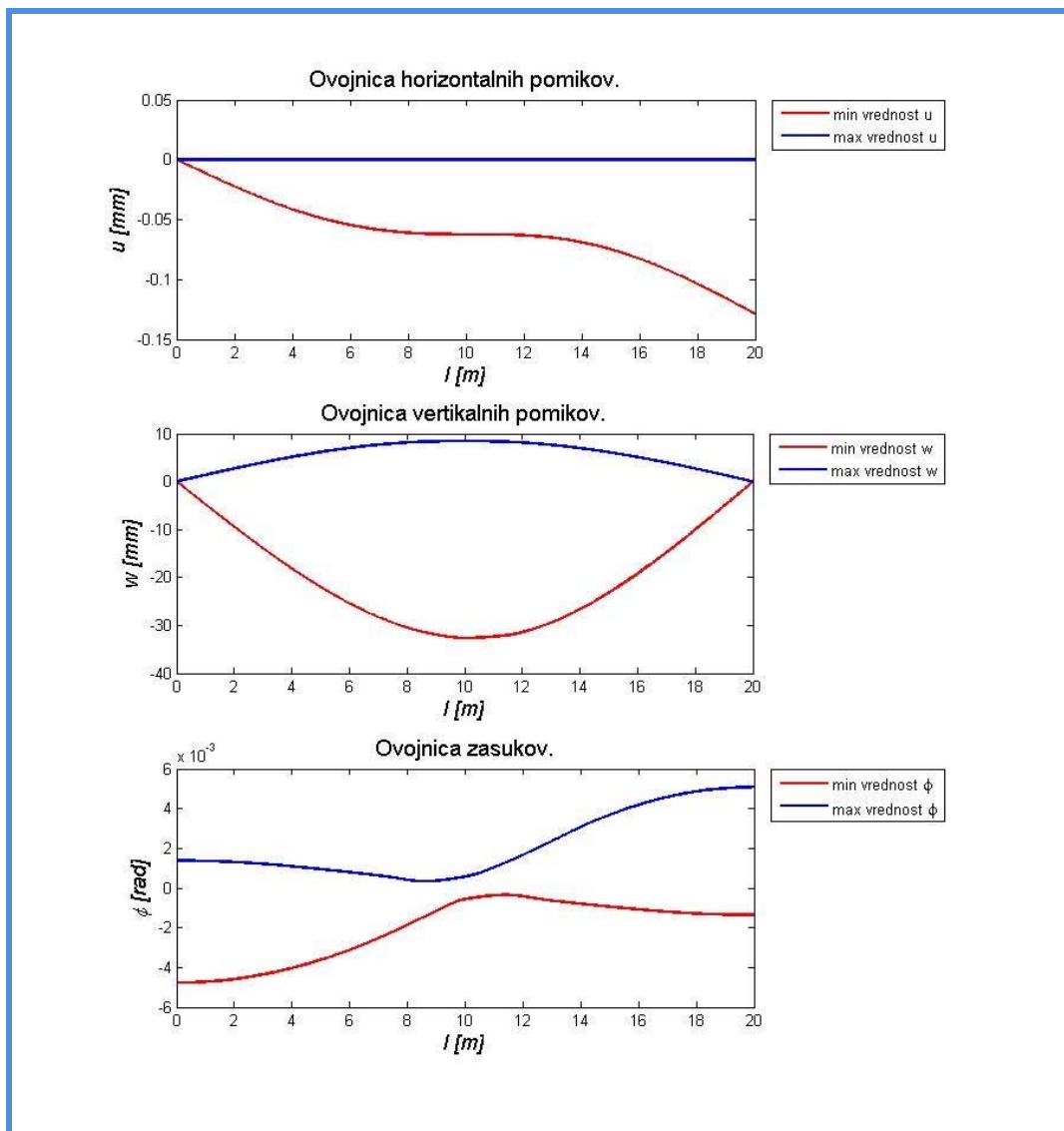


Slika 31: Spreminjanje količin diska s časom pri kotni hitrosti diska $\Omega_z = -44 \text{ s}^{-1}$.

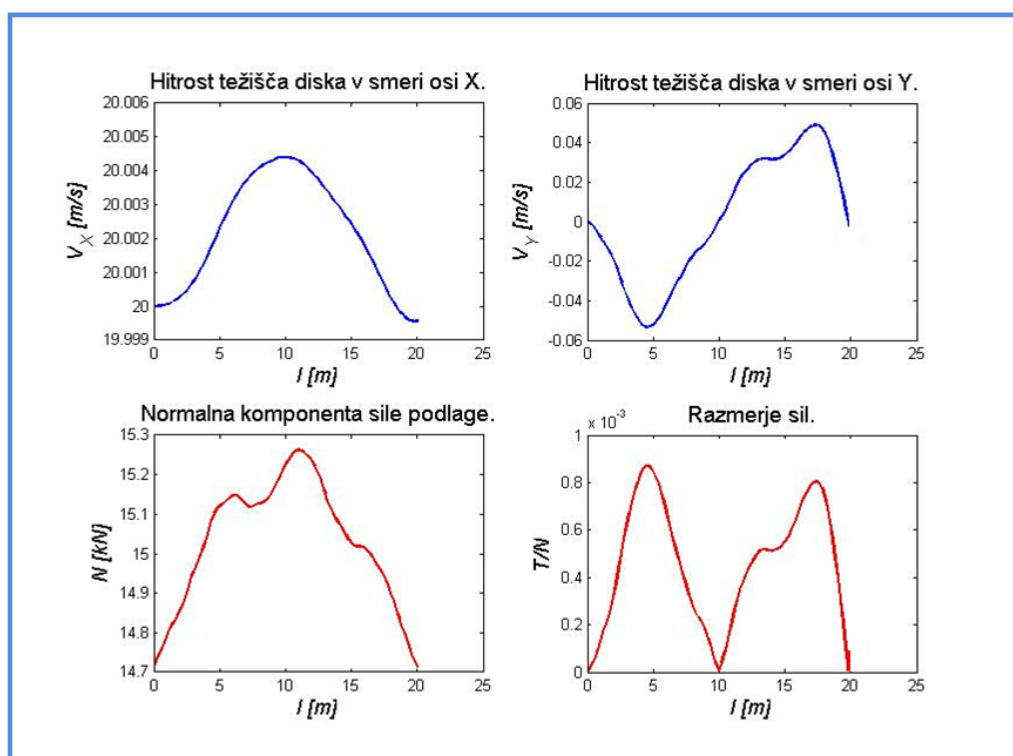
- začetna kotna hitrost in vrsta materiala: $\Omega_z = -50 \text{ s}^{-1}$



Slika 32: Deformirana oblika prostoležečega nosilca pri fiksnih časih in kotni hitrosti diska $\Omega_z = -50 \text{ s}^{-1}$
 Faktor povečave pomikov je enak 100.



Slika 33: Ovojnica pomikov in zasukov prostoležečega nosilca pri kotni hitrosti diska $\Omega_z = -50 \text{ s}^{-1}$.



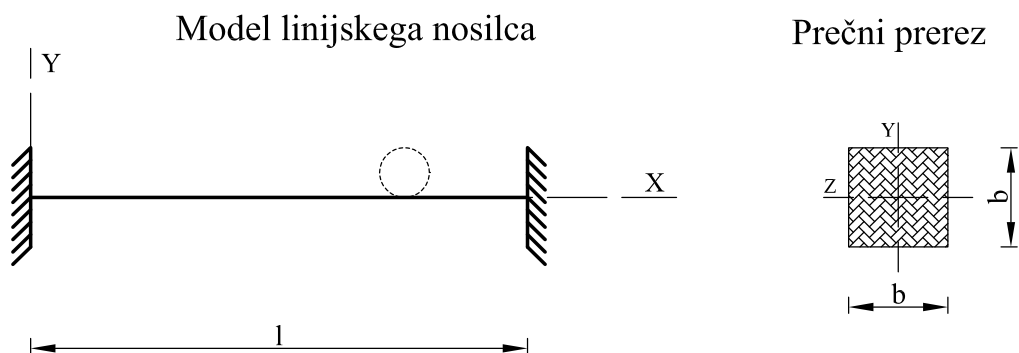
Slika 34: Spreminjanje količin diska s časom pri kotni hitrosti diska $\Omega_z = -50 \text{ s}^{-1}$.

Iz grafov je razvidno, da lahko malo povečana kotna hitrost povsem spremeni obnašanje nosilca, ki vpliva na obliko ovojnice pomikov in zasukov diska. Očitna razlika se pojavi predvsem po tem, ko disk že zapusti nosilec in nosilec prosto niha. V prvem primeru je umiritev nosilca zelo hitra, medtem ko je v drugem primeru nihanje nosilca, ko disk preide nosilec še vedno intenzivno. Tudi iz količin diska, lahko opazimo drugačno amplitudo nihanja. Iz primerov lahko opazimo, da že manjša sprememba kotne hitrosti lahko močno spremeni obnašanje nosilca.

Kot zanimivost pa na koncu prikazujemo delovanje programa še na konstrukcijah, katere ne sodijo ravno med tipične gradbene konstrukcije in tako njihove rezultate analize primerjamo z rezultati gradbenih konstrukcij.

5.2.2 Nosilec iz gume

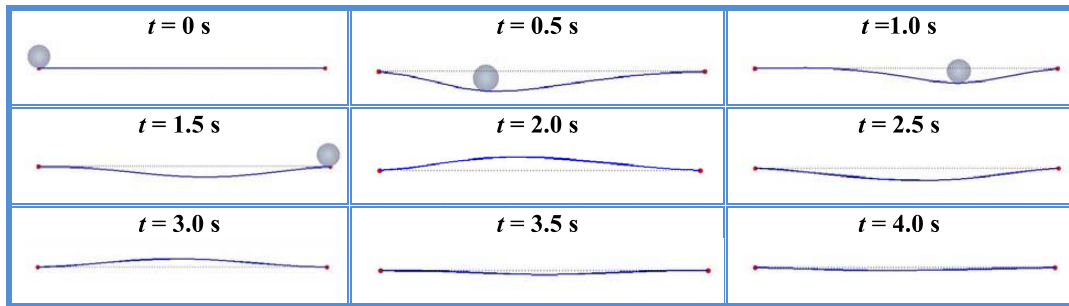
V tem primeru obravnavamo obojestransko togo vpeti linijski nosilec, kateri pa je narejen iz gume. Njegovi podatki so podani v Preglednici 12.



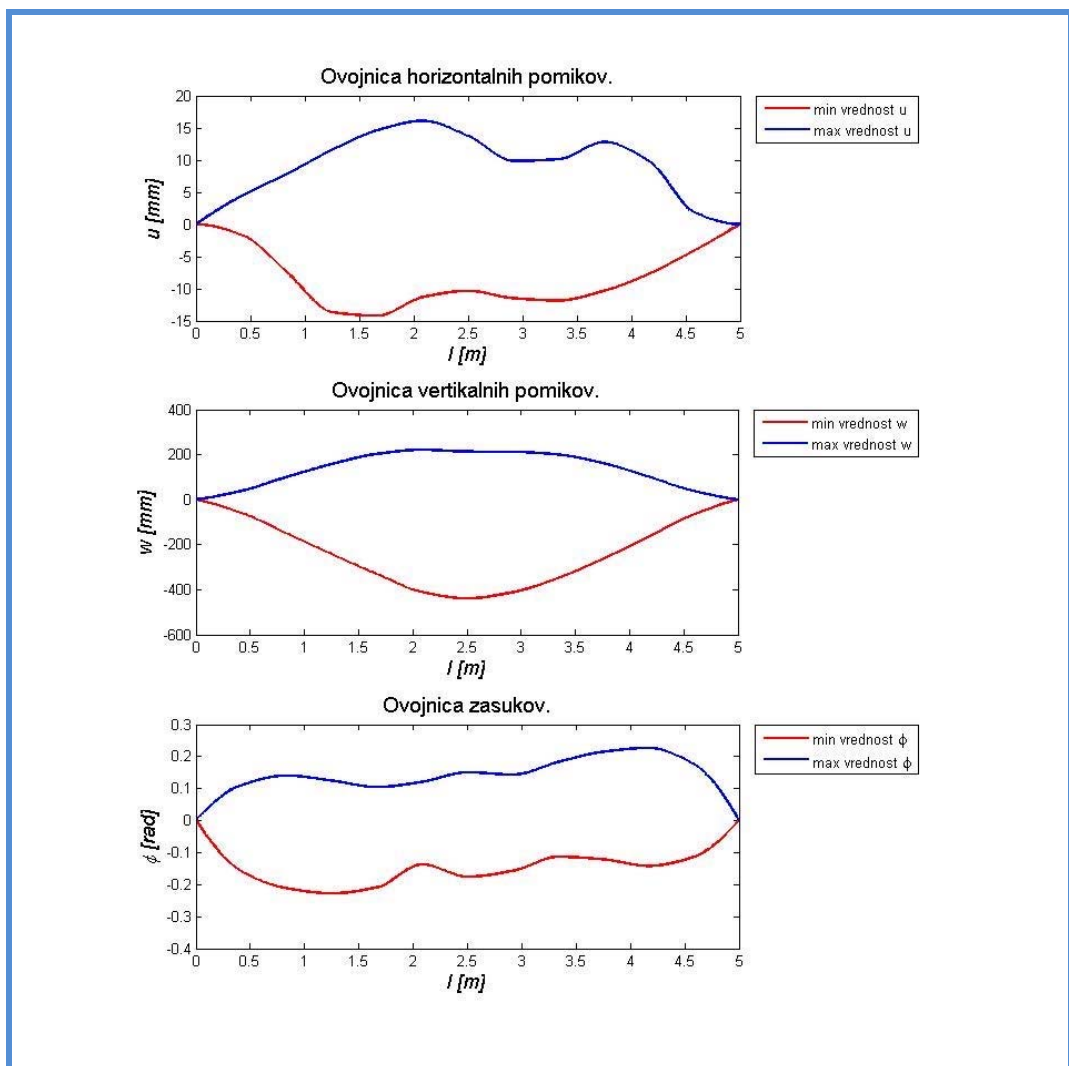
Slika 35: Model linijskega nosilca iz gume in njegov prečni prerez.

Preglednica 12: Podatki o linijskem nosilcu iz gume.

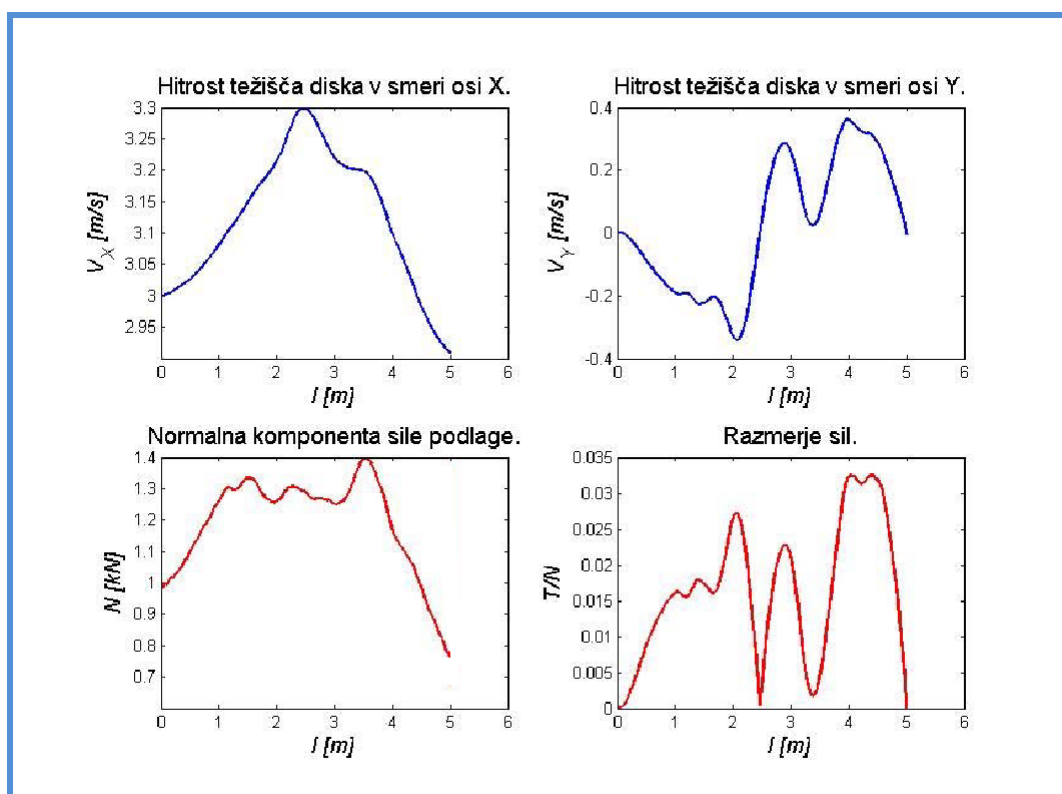
Nosilec	Dolžina nosilca: $l = 5 \text{ m}$
Material	<u>Guma:</u> Elastični modul: $E = 7 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ Strižni modul: $G = 0.6 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ Specifična gostota materiala: $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$
Prečni prerez	$b = 20 \text{ cm}$ Ploščina prečnega prereza A : $A = 400 \text{ cm}^2$ Ploščina strižnega prereza A_V : $A_V = 333.3 \text{ cm}^2$ Vztrajnostni moment prečnega prereza I : $I = 13333.3 \text{ cm}^4$
Disk	Masa diska: $m = 100 \text{ kg}$ Polmer diska: $a = 0.2 \text{ m}$ Začetna kotna hitrost diska: $\Omega_z = -15 \text{ s}^{-1}$
Končni čas računa	$T = 5 \text{ s}$



Slika 36: Deformirana oblika nosilca iz gume pri fiksnih časih. Faktor povečave pomikov je enak 1.



Slika 37: Ovojnica pomikov in zasukov nosilca iz gume.

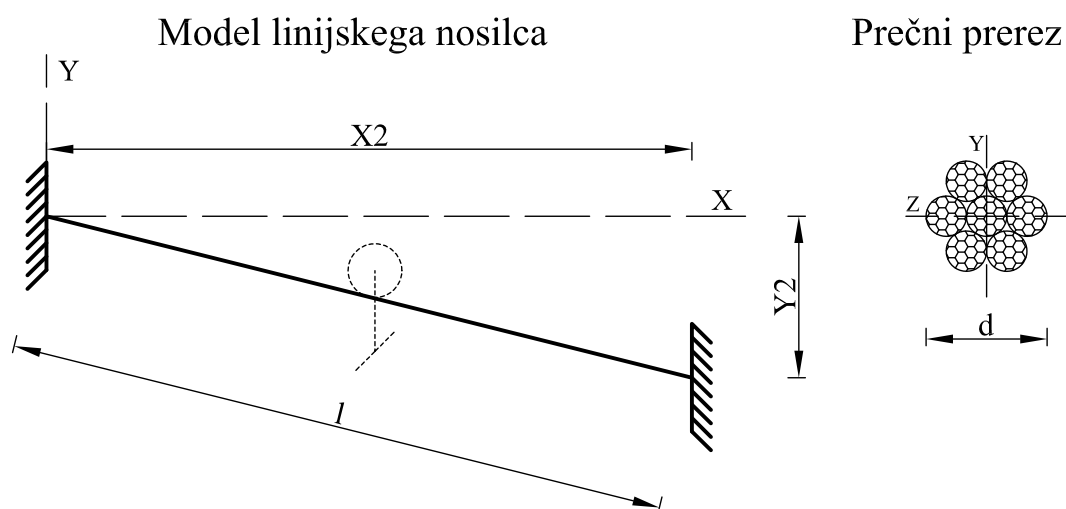


Slika 38: Spreminjanje količin diska pri kotaljenju po nosilcu iz gume.

Iz analize lahko opazimo, kako velik vpliv ima vrsta materiala na obnašanje nosilca, po katerem potuje togo telo. Kljub bistveno manjši dolžini nosilca in bistveno manjši obtežbi v primerjavi z nosilcem iz predhodnega primera je vrednost pomikov zelo velika. Vertikalni pomiki znašajo skoraj do 10% dolžine nosilca in tudi deformacijska linija nosilca je povsem drugačna od deformacijskih linij v prejšnjih primerih. Posledično so tudi amplitude večje in iz grafov je razvidno, da se zaradi oblike deformiranja hitrost diska v smeri osi X med kotaljenjem po nosilcu v določenem času poveča celo za 10 %. Tudi normalna komponenta podlage, ko se disk nahaja približno na $\frac{3}{4}$ dolžine nosilca, znaša 140% prvotne velikosti. Opazimo tudi, da so minimalne in maksimalne vrednosti pomikov v primerjavi z jeklenim nosilcem veliko večje.

5.2.3 Adrenalinska vrv

Drugi primer, ki ga prikazujemo kot zanimivost, je simulacija spusta po tako imenovani "adrenalinski" vrvi, ki jo lahko srečamo v skoraj vseh adrenalinskih parkih. Predpostavili smo, da linijski nosilec predstavlja spiralna jeklena vrv, po kateri se kotili disk in na katerega je pritrjeno breme. Vrv je na obeh straneh togo vpeta, naklon vrvi je 20%, njena dolžina pa znaša 15.3 m.



Slika 39: Model adrenalinske vrvi in njen prečni prerez.

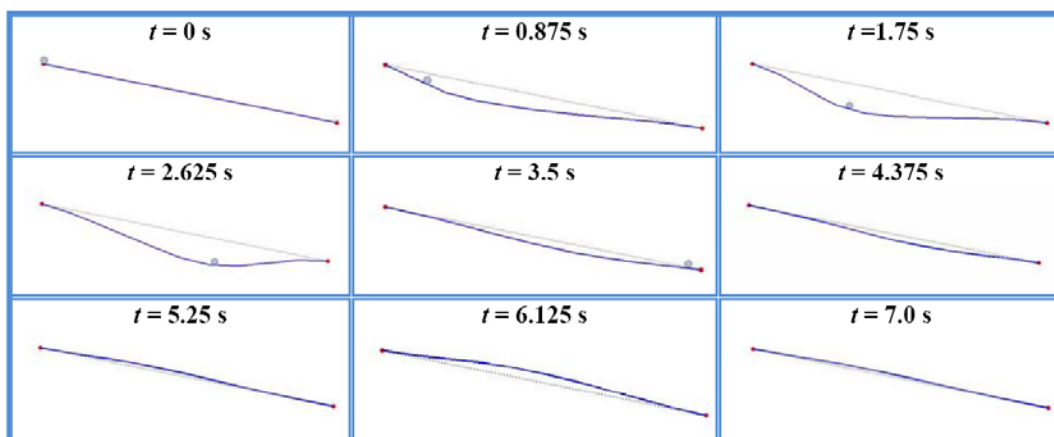
Preglednica 13: Podatki o adrenalinski vrvi.

Nosilec	Dolžina nosilca: $l = 15.3$ m $X2 = 15$ m $Y2 = -3$ m
Material	<u>Jeklo (spiralna vrv):</u> Elastični modul: $E = 19.5 \cdot 10^{10}$ N/m ² Strižni modul: $G = 7.5 \cdot 10^{10}$ N/m ² Specifična gostota materiala: $\rho = 7850$ kg/m ³
Prečni prerez	$d = 4$ cm Ploščina prečnega prereza A : $A = 12.6$ cm ² Ploščina strižnega prereza A_V : $A_V = 11.5$ cm ² Vztrajnostni moment prečnega prereza I : $I = 12.6$ cm ⁴

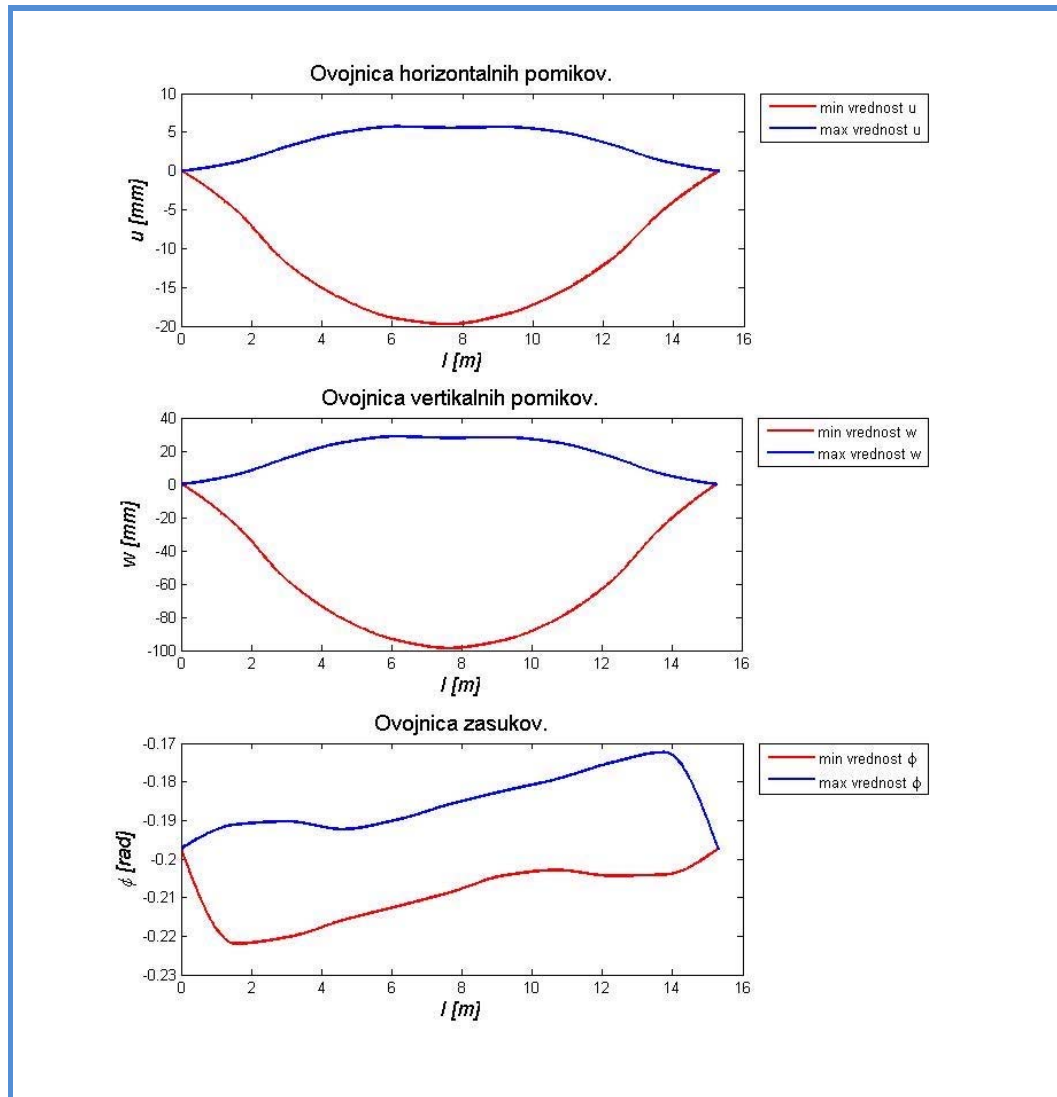
se nadaljuje ...

... nadaljevanje Preglednice 13

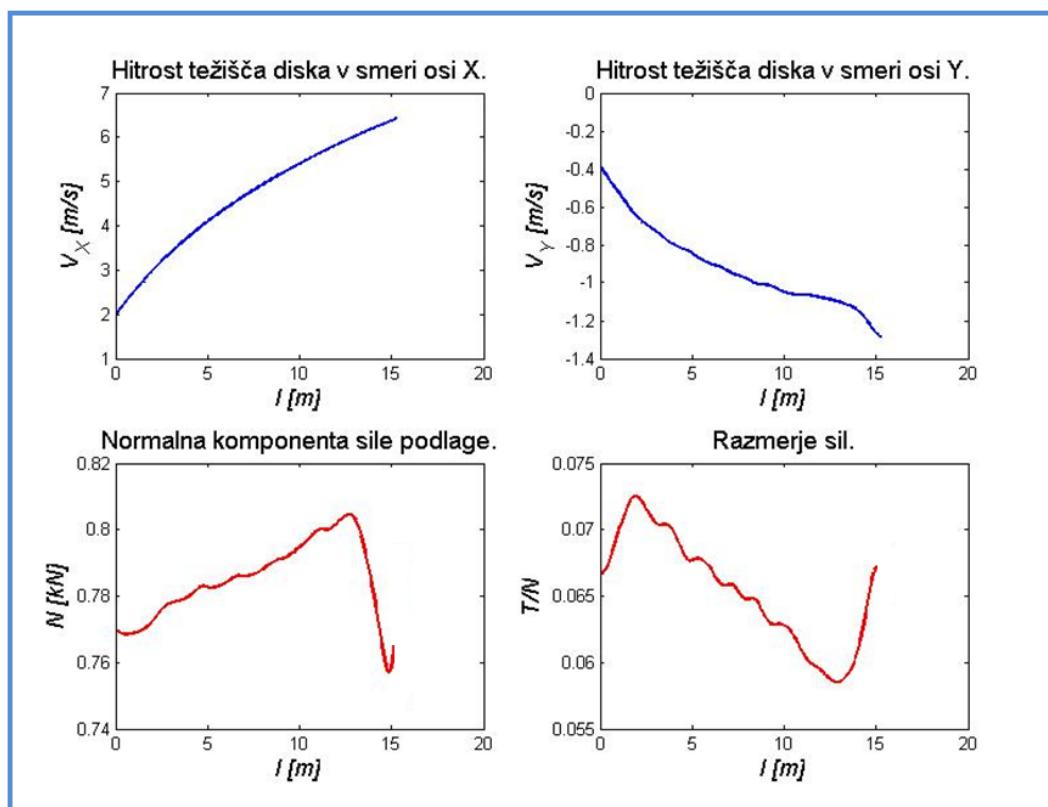
Disk	Masa diska: $m = 80$ kg Polmer diska: $a = 0.2$ m Začetna kotna hitrost diska: $\Omega_z = -10$ s ⁻¹
Končni čas računanja	$T = 7$ s



Slika 40: Deformirana oblika adrenalinske vrvi pri fiksnih časih. Faktor povečave pomikov je enak 15.



Slika 41: Ovojnica pomikov in zasukov adrenalinske vrvi.



Slika 42: Spreminjanje količin diska s časom pri kotaljenju po adrenalinski vrvi.

Opazimo, da je oblika grafov pomikov in zasukov podobna obliki nosilca iz gume, kar je tudi razumljivo saj oba primera predstavljata relativno zelo podajen primer nosilca. Vertikalni pomiki v tem primeru znašajo skoraj 10 cm, vrv se pa raztegne za približno 2 cm. Hitrost diska se v smeri osi X več kot podvoji, v smeri osi Y pa se poveča za faktor 3. Iz deformacijske oblike v posameznih časovnih intervalih lahko opazimo prosto nihanje vrvi. Dušenja v modelu nosilca nismo upoštevali.

6 REŠEVANJE ENAČB S PROGRAMOM MATLAB

Namen diplomske naloge je bil tudi izdelava programa v programskem paketu *Matlab*, ki bo omogočal reševanje in primeren prikaz rezultatov kotaljenja diska po linijskem geometrijsko nelinearnem nosilcu. Problem rešujemo numerično z metodami družine Runge-Kutta, ki so že vgrajene v program *Matlab*. Metode rešujejo sisteme diferencialnih enačb prvega reda, kar smo že upoštevali pri izpeljavi enačb.

Naloge smo se lotili po korakih tako, da smo najprej ločeno izdelali program za analizo kotaljenja diska brez podrsavanja po dani krivulji, ter program za analizo dinamičnega odziva linijskega nosilca na hipno obtežbo. Končni program za analizo kotaljenja diska po linijskem nosilcu pa dobim tako, da enačbe, ki opisujejo kotaljenje diska brez podrsavanja po dani krivulji dodamo v program za dinamično analizo linijskega nosilca na hipno obtežbo, pri čemer v enačbah upoštevamo medsebojen vpliv diska na linijski nosilec in obratno. Ker je končni program v večji meri le združitev prvih dveh v nadaljevanju predstavljamo zgolj strukturo končnega programa.

Program sestavljajo posamezne pomembnejše opisne datoteke:

- Datoteka, v kateri so zapisane diferencialne enačbe, njihovi osnovni pogoji (časovno območje, lastnosti, začetni pogoji) ter ustavitveni pogoji kotaljenja brez podrsavanja po linijskem nosilcu, se imenuje `NDE.m`.
- Datoteka, v kateri so zapisani začetni podatki o linijskem nosilcu, disku in podatki o numeričnem računu se imenuje `Podatki.m`.
- Datoteke, v katerih so definirani Lagrange-ovi interpolacijski polinomi, njihovi prvi in drugi odvodi, se imenujejo: `Lagrange.m`, `LagrangeOdv.m`, `LagrangeOdv2.m`.
- Datoteki, v katerih sta določeni Gauss-ova in Lobatto-va metoda numerične integracije, se imenujeta `GaussInt.m`, `LobattoInt.m`.
- Datoteka s programom, ki riše zelene grafe se imenuje `Nabori_grafov.m`.
- Programom, ki prikazuje animacijo kotaljenja diska po linijskem nosilcu se imenuje `Animacija.m`.

- Datoteka, v kateri so podani vsi potrebni začetni pogoji in glavni program, ki izvede celoten račun se imenuje `Racun.m`.

Tako smo navedli vse pomembnejše datoteke, ki sestavljajo kodo programa. Program sestavljajo še druge rutine, ki pa za razumevanje programa niso pomembne.

6.1 Shematski prikaz opisne datoteke za reševanje sistema navadnih diferencialnih enačb

```
function [t,x]= NDE(st_tock,fiks,indeks_ps,dolzina,wg,...\n
                xp_el,polinom,polinom_odv,Fi0,T,...\n
                zacetni,Em,Gm,ro,Ap,Asp,Jp,metoda,...\n
                natancnost,data)
```

% `st_tock` je število točk znotraj vsakega elementa
 % `fiks` so indeksi podprtih prostostnih stopenj
 % `indeks_ps` so indeksi prostih prostostnih stopenj
 % `dolzina` je dolžina nosilca
 % `wg` so uteži numerične integracije
 % `xp_el` so interpolacijske točke elementa
 % `polinom` so vrednosti Lagrange-ovih polinomov v integracijskih točkah
 % `polinom_odv` so vrednosti odvodov Lagrange-ovih polinomov v integracijskih točkah
 % `Fi0` je začetni zasuki elementa (naklon nosilca)
 % `T` je čas pri katerem ustavimo reševanje
 % `Em`, `Gm` sta elastični in strižni modul
 % `ro` je specifična gostota materiala
 % `Ap`, `As` sta prečni in strižni prerez linijskega nosilca
 % `Jp` je vztrajnostni moment prečnega prereza
 % `natancnost` je toleranca lokalne napake solverja
 % `metoda` je metoda iz družine Runge-Kutta za reševanje NDE
 % `data` so podatki o disku (masa, polmer, g)

% Nastavitev osnovnih parametrov naloge in lastnosti metode:

```
interval = [0 T];
zacetne_vrednosti = zacetni;
lastnosti = odeset('OutputFcn',@cakanje,'RelTol',...\n
                  natancnost,'AbsTol',natancnost,'Mass',...\n
                  @masa,'MStateDependence','strong',...\n
                  'MassSingular','Maybe','Events',@dogodki);
```

% Klic izbrane metode na problemu:

```
[t,x]=feval(metoda,@desne_strani,interval,...\n
           zacetne_vrednosti,lastnosti,...\n
           st_tock,fiks,indeks_ps,dolzina,wg,...\n
           xp_el,polinom,polinom_odv,...\n
           Fi0,T,zacetni,Em,Gm,ro,Ap,Asp,Jp,data);
```

% Upoštevanje masne matrike:

```
function M=masa(t,x,st_tock,fiks,indeks_ps,dolzina,...\n
              wg,xp_el,polinom,polinom_odv,Fi0,...\n
              T,zacetni,Em,Gm,ro,Ap,Asp,Jp,data)
```

% Desne strani sistema navadnih diferencialnih enačb:

```
function dxdt = desne_strani(t,x,st_tock,fiks,indeks_ps,...\n
                             dolzina,wg,xp_el,polinom,...\n
                             polinom_odv,Fi0,T,zacetni,...\n
                             Em,Gm,ro,Ap,Asp,Jp,data)
```

% Kontrola stanj, ko ustavimo integracijo:

```
function [vrednost,ustavitev,smer] = dogodki(t,x,st_tock,...\n
    fiks,indeks_ps,...\n
    dolzina,wg,xp_el,...\n
    polinom,polinom_odv,...\n
    Fi0,T,zacetni,Em,Gm,...\n
    ro,Ap,Asp,Jp,data)
```

```
vrednost = [»vektor vrednosti«];
```

```
ustavitev = [»vektor logičnih vrednosti«];
```

```
smer = [»s katere strani se "vektor vrednosti" približuje ničli«];
```

6.1.1 Zaznavanje posebnih dogodkov

Med reševanjem navadnih diferencialnih enačb, ki opisujejo kotaljenje diska brez podrsavanja po linijskem nosilcu zaznavamo dogodke, ko bi lahko prišlo do sprememb v naravi enačb. To izvajamo s pomočjo vgrajene funkcije `events`. V lastnostih numerične metode (funkcija `odeset`) parameter `events` vključimo tako, da pokličemo funkcijo s pomočjo ukaza `@`, v kateri so zapisani dogodki, katere bi radi zaznali (`@dogodki`). Tako numerični metodi omogočimo, da lahko poišče čas dogodka in njegove vrednosti. Funkcija `dogodki` vrne tri vektorje enakih velikosti:

- `vrednost` je vektor pogojev, ki jih kontroliramo
- `ustavitev` je vektor logičnih vrednosti 1 ali 0. Vrednost 1 pomeni, da želimo račun ustaviti ob zaznanem dogodku, vrednost 0 pa, da želimo dogodek samo zaznati, računa pa ne ustavimo.
- `smer` je vektor logičnih vrednosti -1, 0, 1, s katerim podrobneje opredelimo kak dogodek želimo zaznati. Vrednost -1 pomeni, da istoležna komponenta v vektorju `vrednost` spremeni predznak iz pozitivnega v negativnega. Vrednost 1 pomeni, da istoležna komponenta v vektorju `vrednost` spremeni predznak iz negativnega v pozitivnega. Vrednost 0 pa pomeni, da je vseeno v kateri smeri istoležna komponenta v vektorju `vrednost` spremeni predznak.

Pri kotaljenju diska brez podrsavanja po linijskem nosilcu zaznavamo dogodek, ko bi lahko nastopila odlepitev diska od podlage. Odlepitev diska od podlage pa nastopi, ko normalna komponenta podlage ($N = R_{y_K}$) postane negativna. Tako ima vektor vrednost samo eno komponento, ki je enaka R_{y_K} , komponenta vektorja ustavitve je enaka 1, komponenta vektorja smer pa -1.

vrednost = R_{y_K}

ustavitev = 1

smer = -1.

6.2 Shematski prikaz glavnega programa.

% Navedemo datoteko z vhodnimi podatki iz katere pokličemo vhodne podatke:

Podatki

% Nastavitev začetnih vrednosti kotaljenja diska po linijskem nosilcu:

zacetni=[pomiki_zasuki0;Dpomiki_zasuki0;zacetni_disk0_brez];

- `zacetni` je vektor začetnih pogojev navadnih diferencialnih enačb kotaljenja diska brez podrsavanja po linijskem nosilcu

% Reševanje sistema navadnih diferencialnih enačb z metodo Runge-Kutta:

```
[t,x]=NDE(st_tock,fiks,indeks_ps,dolzina,wg,xp_el,...\n
          polinom,polinom_odv,Fi0,T,zacetni,Em,Gm,ro,...\n
          Ap,Asp,Jp,metoda,natancnost,data);
```

- `t` je stolpec časov, v katerih je metoda izračunala numerične rešitve
- `x` je matrika numeričnih rešitev; vsak stolpec predstavlja rešitve pri nekem času (stolpec $x(:,i)$ so rešitve pri $t(i)$).

% Postavljanje rezultatov na prava mesta:

`x_nosilec = x(:,1:end-6)` je matrika numeričnih rešitev, ki pripadajo linijskemu nosilcu

`x_disk = x(:,end-5:end)` je matrika numeričnih rešitev, ki pripadajo disku

% Prikaz nabora grafov:

`Nabori_grafov`

% Prikaz animacije:

`Animacija`

6.3 Shematski prikaz opisne datoteke s podatki

Koordinate obeh vozlišč elementa, kjer je v vsaki vrstici najprej naveden indeks vozlišča, potem pa sta navedeni koordinati posameznega vozlišča.

```
voz=[
    1   x1   y1
    2   x2   y2
];
```

Podpore konstrukcije, kjer je v vsaki vrstici najprej naveden indeks vozlišča, potem pa so navedeni indeksi prostostnih stopenj, ki jih podpora ne dopušča. 1 je pomik v smeri osi X, 2 je pomik v smeri osi Y, 3 pa je zasuk okrog osi Z. Prostostne stopnje, ki jih podpora ne prepreči pišemo z 0.

```
podpore=[
    1   1 2 3
    2   1 2 0
];
```

Podatki o prerezu:

% A_p je ploščina prečnega prereza

% A_{sp} je ploščina strižnega prereza

% J_p je vztrajnostni moment prečnega prereza

Lastnosti elastičnega materiala:

%Em je elastični modul

%Gm je strižni modul

%rho je specifična gostota materiala

Podatki o numeričnem računanju:

% integracija je izbira metode numerične integracije po elementu

% st_int je stopnja integracije po elementu

% st_pol je stopnja interpolacije

% T je dolžina časovnega intervala

% natancnost je toleranca napake metode

% metoda je ena od vgrajenih metod za reševanje sistema diferencialnih enačb.

Za reševanje sistema enačb kotaljenja diska brez podrsavanja po linijskem nosilcu je najbolj učinkovita vgrajena metoda ode23tb. Ta je sposobna reševati toge sisteme z uporabo trapeznega pravila.

Podatki o disku:

% c so začetni pogoji

% c (1) = s_0 je začetna koordinata parametra poti i

% c (2) = φ je začetni zasuk okrog izbranega koordinatnega sistema

% c (3) = Ω_z^0 je začetna kotna hitrost okrog izbranega koordinatnega sistema

% data je stolpec podatkov o disku

% data (1) = m je masa diska

% data (2) = a je polmer diska

% data (3) = g je težnostni pospešek

7 ZAKLJUČEK

V diplomski nalogi smo predstavili povezan problem reševanja kotaljenja togega, rotacijsko simetričnega telesa po deformabilnem linijskem nosilcu v ravnini. Izpeljali smo enačbe problema, ki opisujejo kotaljenje diska brez podrsavanja po znani krivulji. Sledila je izpeljava vodilnih enačb linijskega nosilca na osnovi Reissnerjeve teorije nosilcev. Opisana sistema enačb smo združili v celoten povezan problem, ki opisuje kotaljenje togega telesa po deformabilnem geometrijsko nelinearnem linijskem nosilcu. Problem smo reševali numerično v programskem paketu *Matlab*, in izdelali lastno programsko okolje za reševanje omenjenih problemov.

Pristopi in izdelani programi omogočajo dinamično analizo kotaljenja diska po deformabilnem nosilcu in sočasen dinamičen odziv nosilca. V nalogi smo prikazali nekaj demonstracijskih primerov, ki prikazujejo delovanje izdelanih programov, seveda pa se pri tem moramo zavedati omejitev modela, ki smo jih predpostavili že v uvodu. Za zahtevnejše probleme bi potrebovali obširnejše študije, ki pa presegajo obseg te diplomske naloge. Cilje naloge je bil prikazati pomen povezanega reševanja, saj je le tak model ustrezen za mnoge probleme v dinamiki konstrukcij.

Zaključimo lahko, da je povezano reševanje problemov zahteven problem tako s stališča modeliranja, kot tudi s stališča numeričnega reševanja. Z uporabo natančnejših modelov postane problem še precej kompleksnejši. Ob enem pa razvoj numeričnih metod in računalnikov omogoča učinkovito reševanje tudi že zelo kompleksnih problemov. Tako lahko pričakujemo hitrejši razvoj tudi pri povezanem reševanju problemov.

VIRI

Beg, Darko. 1999. Projektiranje jeklenih konstrukcij po evropskem standardu ENV 1993-1-1. Ljubljana: Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo: str. 36, 82, 206.

Cevi kvadratne. 2006.

http://www.remos.si/media/Cevi_kvadratne.pdf (pridobljeno 10. 5. 2011).

Češarek, P. 2008. Vpliv gibajočih se teles na gradbene konstrukcije. Diplomsko naloga. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Oddelek za gradbeništvo, Konstrukcijska smer: str. 1 – 42, 90 – 98.

Program NODI. 2010.

<http://www.km.fgg.uni-lj.si/Nodi/Download.htm> (pridobljeno 05.08.2010)

Prožnostni modul. 2011.

http://sl.wikipedia.org/wiki/Pro%C5%BEnostni_modul (pridobljeno 17.5.2011).

Reissner, E. 1972. On One-Dimensional Finite-Strain Beam Theory: the Plane Problem. Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP) 23, 795-799.

Saje, M. 1999. Kotaljenje toge tanke okrogle ploščice po togi hrapavi ravnini 1. del: Osnovne enačbe. Interno poročilo katedre za mehaniko. 81 str.

Saje, M., Zupan, D. 2000. Kotaljenje toge ploščice po hrapavi vodoravni ravnini. V: ŠKERGET, Leopold (ur.). Kuhljevi dnevi 2000, Maribor, 21.-22. september 2000. Zbornik del. Ljubljana: Slovensko društvo za mehaniko: str.183-190.

Saje, M., Zupan, D. 2001. Kotaljenje toge tanke okrogle ploščice po togi hrapavi ravnini 4. del: Vpliv zračnega upora, vetra in podrsavanja. Interno poročilo katedre za mehaniko. 90 str.

Saje, M., Zupan, D. 2002. Kotaljenje toge ploščice po togi hrapavi ravnini: vpliv zračnega upora, vetra in podrsavanja. D. 1, Osnove. V: ŠKERGET, Leopold (ur.), MARN, Jure (ur.). Kuhljevi dnevi '02, Ribno pri Bledu, 26.-27. september 2002. Zbornik del. Ljubljana: Slovensko društvo za mehaniko: str. 1 – 8.

Saje, M., Zupan, D. 2006. The rattling of Euler's disk. Multidiscipline modeling in materials and structures 2, št. 1, 49 – 66.

Stanek, M., Turk, G. 2005. Statika 1. Ljubljana, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo: str. 25 – 32, 242 – 246.

Srpčič, S. 2003. Mehanika trdih teles. Ljubljana, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo: str.14 – 21, 500.

Strižni modul. 2011.

http://sl.wikipedia.org/wiki/Stri%C5%BEni_modul (pridobljeno 18. 5. 2011).

Zupan, D. 2000. Kotaljenje toge tanke okrogle ploščice po togi hrapavi ravnini 2. del: Numerično reševanje enačb. Interno poročilo katedre za mehaniko. 61 str.

Zupan, D., Saje, M. 2002. Kotaljenje toge ploščice po togi hrapavi ravnini: vpliv zračnega upora, vetra in podrsavanja. D. 2, Primeri. V: ŠKERGET, Leopold (ur.), MARN, Jure (ur.). Kuhljevi dnevi '02, Ribno pri Bledu, 26.-27. september 2002. Zbornik del. Ljubljana: Slovensko društvo za mehaniko: str. 9 – 16.

PRILOGA A: Algoritem v programu *Matlab* in animacije primerov

Celoten algoritem programov izdelanih v programu Matlab in animacije primerov, prikazanih v tej nalogi so zbrani na priloženi zgoščenci.