

Univerza  
v Ljubljani  
Fakulteta  
*za gradbeništvo  
in geodezijo*

*Janova 2  
1000 Ljubljana, Slovenija  
telefon (01) 47 68 500  
faks (01) 42 50 681  
fgg@fgg.uni-lj.si*



Podiplomski program Gradbeništvo  
Konstrukcijska smer

Kandidat:  
**Bojan Čas**

# **Nelinearna analiza kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med sloji**

**Doktorska disertacija št. 160**

**Mentor:**  
prof. dr. Igor Planinc

Ljubljana, 23. 2. 2004

Podpisani **Bojan ČAS** izjavljam, da sem avtor doktorske naloge z naslovom:  
**NELINEARNA ANALIZA KOMPOZITNIH NOSILCEV Z UPOŠTEVANJEM  
ZDRSA MED SLOJEMA.**

Ljubljana, 16.2.2004

## *Zahvala*

*Iskreno se zahvaljujem mentorju doc. dr. Igorju Planincu za nesebično in vsestransko pomoč pri izdelavi te naloge. Prav tako se zahvaljujem vsem sodelavcem s Katedre za masivne in lesene konstrukcije in kolegom s Katedre za mehaniko, še posebej Sebastjanu in Dejanu, za marsikatero koristno izmenjavo mnenj ter za prijetno delovno vzdušje. Hvala Ministrstvu za šolstvo, znanost in šport za dodeljena sredstva.*

*Iskrena hvala tudi staršem, ki so s številnimi koristnimi napotki pripomogli k nastanku te naloge!*

*Andreja, hvala za razumevanje, potrpežljivost in vso podporo!*

## *Povzetek*

V disertaciji izpeljemo računski postopek za statično nelinearno analizo dvoslojnih kompozitnih ravninskih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med slojema. Računski postopek je zasnovan na materialno in geometrijsko nelinearnem modelu ravninskega nosilca in je zato zelo splošen. Vsak sloj kompozitnega nosilca modeliramo s kinematično točno Reissnerjevo teorijo ravninskih nosilcev. Osnovni predpostavki te teorije sta: (i) Bernoullijeva hipoteza o ravnih prečnih prerezi, ki določa, da ravni prečni prerezi, pravokotni na nedeformirano referenčno os nosilca, ostanejo ravni, toda ne več pravokotni na deformirano referenčno os nosilca in (ii) oblika in velikost prečnih prerezov vsakega sloja kompozitnega nosilca se med deformiranjem ne spreminjata. Reissnerjeva teorija ravninskih kompozitnih nosilcev omogoča membransko, strižno in upogibno deformiranje vsakega sloja kompozitnega nosilca in ne omejuje velikosti pomikov, zasukov in deformacij. Ker je pri večini gradbenih konstrukcij vpliv strižnih deformacij na napetostno in deformacijsko stanje zanemarljiv, jih v predstavljenem računskem postopku zanemarimo. V splošnem se pri kompozitnih konstrukcijah pojavijo zamiki na stikih slojev v vseh fazah obremenitve konstrukcije, medtem ko se razslojevanje pojavi predvsem pri poružitvi. V disertaciji se pri izpeljavi računskega postopka omejimo samo na statično analizo kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med slojema do poružitve, zato razslojevanje zanemarimo.

Osnovne enačbe kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med slojema sestavlja sistem nelinearnih diferencialnih in algebrskih enačb z ustreznimi robnimi pogoji. Zaradi matematične zahtevnosti ta sistem rešujemo v diskretni obliki z metodo končnih elementov. Za določitev napetostnega in deformacijskega stanja kompozitnih nosilcev izpeljemo družino novih deformacijskih končnih elementov. Značilnost teh elementov, ki jih izpeljemo s pomočjo modificiranega Hu–Washizujevega funkcionala, je v tem, da vzdolž referenčne osi kompozitnega nosilca interpoliramo specifični spremembi dolžine spodnjega in zgornjega sloja, pseudoukrivljenost referenčne osi kompozitnega nosilca ter zaradi poenostavitve numeričnega algoritma tudi materialno koordinato  $x^*$  in normalno komponento linijske kontaktne obtežbe. Koordinata  $x^*$  identificira tisti delec zgornjega sloja kompozitnega nosilca na stiku, ki v deformirani legi solega z delcem spodnjega sloja z materialno koordinato  $x$ . Sistem diskretnih posplošenih ravnotežnih enačb kompozitne konstrukcije rešimo z Newton–Raphsonovo inkrementno–iteracijsko metodo.

V disertaciji prikazemo, s številnimi računskimi primeri, veliko natančnost in učinkovitost izpeljanih deformacijskih končnih elementov, tako za materialno kot tudi za geometrijsko nelinearno analizo kontinuirnih kompozitnih nosilcev. Zaradi svoje splošnosti je predstavljeni računski postopek za analizo kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med sloji primeren za analizo nosilnosti, togosti in duktilnosti vseh vrst kompozitnih kontinuirnih nosilcev, ki se uporabljajo v gradbeništvu.

## *Summary*

A numerical procedure for the non-linear analysis of composite two-layer planar beams subjected to static loads is presented, in which the interlayer slip is accounted for. The procedure is based on Reissner's geometrically exact planar beam model and non-linear constitutive laws for the material of the layers and for the contact between them. Reissner's beam theory is used to model each layer of the composite beam. The basic assumptions of Reissner's theory are: (i) the Bernoulli hypothesis, that plane cross-sections remain plane during the deformation, holds and (ii) the shape and the size of the cross-section do not change. Reissner's beam theory is capable of considering membrane, bending and shear strains. Yet, as shear strains are usually small in civil engineering structures, they are neglected in the present formulation. Reissner's theory does not set any restrictions regarding the magnitude of displacements, rotations, strains and interlayer slips. In general, the interlayer slips in the contact plane of the composite structure develop in early stages of the load level already, and have to be considered in the analysis. By contrast, the delamination of layers emerges only at the collapse of the composite structure. We do not study the post-collapse behaviour of the structure. The delamination between the layers of the composite beam is therefore neglected.

The system of non-linear differential and algebraic equations and the accompanying boundary conditions constitute the system of the basic equations of the composite beam with interlayer slips. In order to solve this system of equations, the standard finite element method is employed. The work introduces a new formulation which uses a new strain-based planar beam finite element for the non-linear analysis of composite beams with interlayer slips. The strain-based finite element for the non-linear analysis of composite beams where interlayer slips are taken into account is derived by using the modified Hu-Washizu functional. The following variables are interpolated along the beam axis: extensional strains (membrane deformations) of the reference axis of the lower and the upper layer, pseudocurvature (flexural deformation) of the reference axis, material coordinate  $x^*$ , and the normal component of the contact load vector. Coordinate  $x^*$  represents a material, undeformed coordinate of that particular contact particle of upper layer, that coincides in the deformed state with the particle of the lower layer having coordinate  $x$ . In order to find the solution of the system of discrete generalized equilibrium equations of the composite structure, the Newton–Raphson incremental–iterative method is used.

The effectiveness and accuracy of the present procedure is clearly illustrated by numerical examples. Due to the generality of the present numerical procedure, the developed finite elements can be applied in the analysis of load-capacity, ductility and stability of the majority of typical composite beam structures made from concrete, steel and/or wood that are used in civil engineering.

# Kazalo

1	<i>Uvod</i>	1
2	<i>Osnovne enačbe kompozitnih nosilcev</i>	7
2.1	<i>Kinematične enačbe</i>	7
2.2	<i>Ravnotežne enačbe</i>	16
2.3	<i>Konstitucijske enačbe</i>	20
2.4	<i>Izrek o virtualnem delu</i>	23
3	<i>Posplošene diskretne ravnotežne enačbe kompozitnih nosilcev</i>	25
3.1	<i>Modificirani izrek o virtualnem delu</i>	25
3.2	<i>Galerkinova metoda končnih elementov</i>	39
4	<i>Računski primeri</i>	47
4.1	<i>Girhammarjev kompozitni prostoležeči nosilec</i>	48
4.2	<i>Prostoležeči kompozitni nosilec obtežen s točkovno silo</i>	56
4.3	<i>Simetrično obtežen kontinuirni kompozitni nosilec</i>	62
4.4	<i>Stabilnostna analiza centrično tlačnih kompozitnih nosilcev</i>	71
4.5	<i>Eksperimentalna in numerična analiza lesenih kompozitnih nosilcev</i>	77
4.6	<i>Analiza nosilnosti sovprežnih nosilcev iz jekla in betona</i>	92
4.7	<i>Diferenčno krčenje dvoslojnega armiranobetonskega nosilca</i>	99
5	<i>Zaključki</i>	109

<i>Dodatek A Geometrijsko linearna teorija kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrs</i>	
<i>med slojema</i>	111
<i>A.1 Uvod</i>	111
<i>A.2 Osnovne enačbe kompozitnih nosilcev</i>	111
<i>Dodatek B Na pseudoukrivljenosti zasnovana teorija ravninskih ukrivljenih nosilcev</i>	121
<i>B.1 Uvod</i>	121
<i>B.2 Osnovne enačbe ukrivljenega ravninskega nosilca</i>	122
<i>Literatura</i>	131

# 1

---

## *Uvod*

### **Predstavitve problema in pregled stanja na obravnavanem področju**

Sestavljeni oziroma slojeviti ravninski nosilci, ki jih umeščamo med t.i. kompozitne konstrukcije in jih v nadaljevanju imenujemo kompozitni nosilci, sodijo med inovativnejše konstrukcijske elemente. Zato njihova uporaba tako v gradbeništvu kot tudi v letalski, ladijski in vesoljski industriji strmo narašča. V gradbeništvu nas do uporabe kompozitnih konstrukcijskih elementov pripeljejo tehnološki postopki gradnje, kot sta na primer montažna in polmontažna gradnja [21, 22, 26, 32, 33, 47, 48, 54, 76, 80, 83, 88, 94]. Pogosto pa uporabljamo kompozitne nosilce pri sanacijah in ojačitvah obstoječih dotrajanih in funkcionalno zastarelih konstrukcij [3, 10, 34, 56, 58, 67, 72, 87, 99]. Prav tako so kompozitni nosilci izredno uporabni kot nosilna konstrukcija pri premoščanju večjih razponov, saj z njimi enostavneje zagotovimo potrebno statično višino premostitvenih nosilnih konstrukcij. To lastnost kompozitnih nosilcev s pridom uporabimo predvsem pri lesenih konstrukcijah [37, 38, 54, 86, 96, 97]. Znano je, da se večina gradbenih materialov različno odziva pri tlačnih in nateznih obremenitvah. Zaradi tega je smiselno v tlačnih delih konstrukcije uporabiti materiale z dobrimi tlačnimi lastnostmi, v nateznih delih pa materiale z dobrimi nateznimi lastnostmi. Značilen primer takšne kombinirane uporabe materialov so armiranobetonske in sovprežne konstrukcije [6, 7, 21, 22, 26, 33, 32, 77, 80, 83, 88, 94]. Armiranobetonske konstrukcije so danes izjemno razširjene na vseh področjih gradnje, sovprežne konstrukcije pa večinoma uporabljamo v mostogradnji in pri izdelavi medetažnih konstrukcij stanovanjskih in poslovnih objektov. Postopek gradnje armiranobetonskih konstrukcij bistveno pospešimo ter precej poenostavimo z uporabo polmontažne gradnje. V primeru polmontažne gradnje mostov najprej premostimo razpon s prefabriciranimi armiranobetonskimi nosilci, nato pa preko njih zabetoniramo armiranobetonsko ploščo. Sanacijo poškodovanih armiranobetonskih delov konstrukcij pogosto izvedemo tako, da poškodovani betonski sloj odstranimo in ga nadomestimo z novim slojem betona [10, 72, 81]. Na ta način dobimo kompozitne nosilce, pri katerih se mehanske in reološke lastnosti različno starih betonskih slojev bistveno razlikujejo. Če pri projektiranju zanemarimo reološke lastnosti različno starih betonskih slojev, se sanirana betonska nosilna konstrukcija obnaša bistveno drugače, kot smo predvideli v fazi projektiranja sanacije. Predvsem zaradi eno-



stavne manipulacije in majhne lastne teže pa v zadnjem času poškodovne natezne cone armiranobetonskih konstrukcij saniramo kar z dolepljanjem jeklenih ali korozijsko odpornih polimernih ojačilnih trakov [4, 34, 49, 58, 65, 67, 87, 98]. Tudi sanacijski postopki v poškodovanih kulturno zgodovinskih objektih nas pogosto pripeljejo do uporabe kompozitnih nosilcev. Medetažne konstrukcije zgodovinskih objektov običajno predstavljajo leseni stropovi. Te enostavno saniramo z uporabo sestavljenih nosilnih elementov iz lesa in betona [42]. Postopek sanacije je običajno naslednji: najprej odstranimo dotrajane dele stropov, po potrebi ojačamo lesene stropnike, preko njih pa zabetoniramo armiranobetonsko ploščo. S tem postopkom povečamo togost in nosilnost medetažne konstrukcije, bistveno povečamo tudi hrupno in požarno zaščito stavbe, istočasno pa ohranimo nepoškodovane spodnje površine stropov, ki so pogosto zgodovinskega pomena (štukature, freske in podobno).

Iz povedanega ugotovimo, da je uporabnost kompozitnih nosilcev v gradbeništvu zelo velika. Vendar njihova uporaba ni brezpogojna, saj je pogojena s povezanim delovanjem vseh slojev kompozitnega nosilca. Potrebno togost stika med sloji kompozitnih konstrukcij dosežemo z uporabo ustreznih veznih sredstev. Le te se razlikujejo glede na vrsto uporabljenega materiala in glede na stopnjo povezanosti slojev. V splošnem so sloji kompozitnih nosilcev povezani togo, podajno ali pa so nepovezani. Povsem toge povezave slojev kompozitnih nosilcev v gradbeništvu praktično ne moremo zagotoviti, lahko pa se ji približamo z uporabo izredno togih veznih sredstev. Ta pri obremenitvi preprečujejo nastanek zamikov vzdolž stika slojev in s tem povečajo togost in nosilnost kompozitnih nosilcev. Večina povezav med sloji je podajnih, kar pomeni, da se zamikom na stikih slojev in s tem manjši togosti in nosilnosti kompozitnih nosilcev ne moremo izogniti.

Glede na dejstvo, da podajnost povezave med sloji bistveno vpliva na napetostno in deformacijsko stanje kompozitnega nosilca, v literaturi pogosto zasledimo raziskave, ki eksperimentalno analizirajo omenjeno problematiko [4, 22, 26, 32, 33, 37, 38, 43, 47, 48, 58, 65, 69, 70, 77, 81, 87, 88, 96, 98]. Kot vemo, so eksperimenti omejeni na preproste konstrukcije in so relativno dragi. Zato je razumljiva želja raziskovalcev in projektantov po učinkovitih računskih postopkih za analizo kompozitnih nosilcev. Večina raziskovalcev modelira obnašanje kompozitnih nosilcev v stanju uporabnosti konstrukcije, zato so razviti računski postopki omejeni z majhnimi pomiki in zasuki konstrukcije. V teh primerih govorimo, da kompozitne nosilce modeliramo s t.i. *geometrijsko linearno teorijo nosilcev* oziroma s *teorijo prvega reda*. Ta poenostavljena teorija kompozitnih nosilcev pa ima pomembno pomankljivost, saj ne omogoča stabilnostne analize kompozitnih nosilcev, kot so: uklon tlačnih elementov, bočna zvrnitev upogibnih nosilcev ali lokalno izbočenje vitkih podprerezov. Napredek v stabilnostni analizi kompozitnih nosilcev je predstavil Rassam s sodelavci [68, 69]. Izpeljali so analitične izraze za uklonsko silo centrično tlačnih troslojnih lesenih stebrov s podajnimi stiki med sloji. Pomemben napredek k geometrijsko nelinearni analizi upogibno obremenjenih kompozitnih nosilcev sta prikazala Girhammar in Gopu [41]. Dvoslojne kompozitne nosilce analizirata s t.i. *modificirano teorijo drugega reda*, ki sicer predstavlja geometrijsko poenostavljeno teorijo nosilcev, a je veliko bolj natančna kot teorija prvega reda. Podobno kot Rassam s sodelavci [68, 69], tudi Girhammar in Gopu [41] izpeljeta analitične izraze za uklonske sile različno podprtih kompozitnih nosilcev. Dodatno izpeljeta tudi točne izraze za kinematične in ravnotežne količine prostoležečega nosilca po modificirani teoriji drugega reda. *Geometrijsko točne teorije* kompozitnih nosilcev, ki omogoča nelinearno analizo upogibno obremenjenih kompozitnih nosilcev tudi v primeru velikih pomikov, zasukov in deformacij, v literaturi nismo zasledili. Za natančno določitev napetostnega in deformacijskega stanja kompozitnih nosilcev je poleg geometrijsko nelinearne teorije kompo-

zitivnih nosilcev bistvenega pomena tudi upoštevanje nelinearnega obnašanja materiala in stikov med sloji. Zato v zadnjem času zasledimo v literaturi veliko raziskav, ki kompozitne nosilce z upoštevanjem zdrsa analizirajo z geometrijsko linearnim in materialno nelinearnim modelom [2, 11, 25, 26, 41, 43, 45, 47, 54, 58, 67, 69, 68, 80, 81, 86, 87, 94].

Ker analitično rešitev za napetostno in deformacijsko stanje kompozitnih nosilcev poznamo samo za linearne modele kompozitnih nosilcev, in ker te rešitve v splošnem ne ustrezajo dejanskemu stanju, je razumljiv hiter razvoj različnih računskih postopkov za nelinearno analizo kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med sloji. Gotovo najbolj razširjen numerični postopek predstavlja *metoda končnih elementov*. Razvoj poteka v dveh smereh. Prva skupina raziskovalcev razvija lastne končne elemente za analizo kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med sloji [25, 26, 32, 33, 39, 76, 77, 86, 88], medtem ko druga skupina raziskovalcev uporablja ustrezno prirejene komercialne računalniške programe [45, 65]. Običajno raziskovalci s komercialnim računalniškim programom modelirajo vsak sloj kompozitnega nosilca posebej, za povezavo slojev oziroma za model stika pa pogosto uporabijo vzmeti [39, 76, 77, 88].

Kot smo povedali, je v zadnjem času večina raziskav o obnašanju kompozitnih nosilcev usmerjena v razvoj računskih modelov, ki kompozitne nosilce modelirajo z geometrijsko linearno teorijo, pri tem pa uporabljajo nelinearne modele materiala in stika med sloji. Največjo pomanjkljivost omenjenih raziskav predstavlja njihova premajhna splošnost. Večina raziskav je omejena na konkretne kompozitne nosilce, kot so kompozitni nosilci iz betona in jekla, iz lesa in podobno. V nadaljevanju na kratko opišemo dosedanje rezultate teh raziskav kompozitnih nosilcev, ki se najpogosteje uporabljajo v gradbeništvu.

Newmark s sodelavci [57] je med prvimi eksperimentalno analiziral kompozitne nosilce iz jekla in betona. Glede na omejene možnosti za raziskovanje v tistem času so ugotovili, da so zamiki med slojema obravnavanega kompozitnega nosilca zanemarljivi. Rezultate eksperimentov so primerjali z linearnim računskim modelom in ugotovili, da je za inženirsko analizo sovprežnih konstrukcij standardni račun z upoštevanjem togega stika dovolj natančen. Toda z nadaljnimi raziskavami so raziskovalci ugotovili, da ima zdrs med slojema kar pomemben vpliv na obnašanje kompozitnih nosilcev. Tako je Ansourian [5] preiskal več kontinuirnih sovprežnih nosilcev s prečnimi prerezi, ki so sodili v različne duktilnostne razrede in pri katerih je imel zdrs med slojema kompozitnega nosilca velik pomen na njihovo obnašanje. Dodatno je izdelal tudi računalniški program, ki jeklo in betonsko ploščo modelira z nelinearnima zakonoma ter v analizi upošteva zdrs med slojema sovprežnega nosilca. Nadaljni napredek v razumevanju obnašanja kompozitnih nosilcev iz jekla in betona predstavlja dela Fabbrocina [32, 33]. V [32] in [33] je predstavil nov končni element za nelinearno analizo prostoležčih kompozitnih nosilcev iz jekla in betona. Nelinearna materialna modela za jeklo in betonsko ploščo je upošteval v obliki moment-ukrivljenost, nelinearen konstitucijski zakon stika pa je upošteval po Ollgaardu [59]. Tudi Gattesco s sodelavci [39] razvije končni element za analizo kompozitnih nosilcev, ki temelji na geometrijsko linearni teoriji nosilcev in nelinearnih konstitutivnih zakonih materiala. Pri tem simulirajo stik med sloji z uporabo nelinearnih vzmeti. Med inženirji zasledimo tudi tendenco po preprostih računskih postopkih. Tako je Seracino [80] analiziral kompozitne nosilce iz jekla in betona po teoriji prvega reda, pri tem pa je za vpliv podajnosti stika na pomike vpeljal t.i. *povečevalni faktor pomikov*. Ta predstavlja razmerje med pomiki kompozitnega nosilca s podajno in s togo povezavo. Sodobnejši pristop za analizo nosilnosti sovprežnih nosilcev prikaže v svoji doktorski disertaciji Zona [89]. Predstavi nove, mešane končne elemente. Ti so zasnovani na interpolaciji pomikov in posplošenih ravnotežnih sil. Kot je dobro znano, je obnašanje kompozitnih nosilcev iz jekla in betona v veliki meri odvisno od reološkega obnašanja

betona. Analizo časovnega odziva sovprežnih nosilcev v mejnem stanju uporabnosti je opravil Dezi s sodelavci [25, 26]. Za prostoležeči sovprežni nosilec so ugotovili, da lezenje betona ugodno vpliva na napetostno stanje nosilca, saj zmanjša napetosti, ki so posledica krčenja betona, tudi do  $35\%$ .

Kot smo omenili že v uvodu, so kompozitni nosilci pogosto konstrukcijski elementi lesenih konstrukcij. Kljub temu, da je dejansko obnašanje stika v kompozitnih lesenih nosilcih nelinearno [37, 38], večina avtorjev analizira kompozitne lesene nosilce z uporabo linearnega konstitucijskega zakona stika [43, 47, 54, 69, 86]. Goodman [43] je med prvimi izpeljal analitične izraze za linearno obnašanje upogibno obremenjenih troslojnih kompozitnih lesenih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med sloji. Milner [54] je analiziral sestavljene lesene nosilce s pasnicama iz masivnega lesa na kateri sta z žebli bočno pritrjeni stojini iz vezanih plošč. V teoretičnih izpeljavah je razdelil pomike sestavljenega nosilca na pomike, ki so posledica upogibnih deformacij in na pomike, ki so posledica strižnih deformacij. Zdrs žebeljev je zelo preprosto zajel kar v nekoliko spremenjeni strižni površini prečnega prereza. Thompson [86] je za elastično analizo sestavljenih lesenih nosilcev razvil program FEAFLO, ki temelji na metodi končnih elementov. V nadaljevanju njegovega dela so Wheat, Vanderbilt in Goodman [96] program razširili tako, da omogoča tudi nelinearno modeliranje obnašanja stika. Ugotovili so, da je nelinearna analiza kompozitnih prostoležečih lesnih nosilcev bistveno natančnejša kot linearna, predvsem ko so obteženi z linijsko obtežbo. Več avtorjev je analiziralo tudi uklon lesenih kompozitnih stebrov [47, 48, 68, 69]. Rassam s sodelavci [68, 69] je v stabilnostni analizi lesenih kompozitnih stebrov predpostavil nelinearen zakon stika in elastičen konstitucijski zakon lesa. Da so zagotovili realno obnašanje modela so dimenzije podprerezov izbrali tako, da tudi tik pred uklonom niso presežene elastične deformacije. Tudi Kamiya [47, 48] je analiziral uklon kompozitnih lesenih elementov. Analiziral je kompozitni nosilec, ki ga sestavljata z žebli povezana lesen steber in lesena obloga. Za model lesa je izbral elastičen zakon, za stik pa linearen oziroma nelinearen konstitucijski zakon. V raziskavah je pokazal, da ima nelinearni konstitucijski zakon stika bistven vpliv na velikost uklonske sile obravnavanih kompozitnih nosilcev.

Pregled računskih postopkov in različne možne izvedbe upogibno obremenjenih kompozitnih nosilcev iz lesa in betona predstavi Van der Linden [88]. Na podlagi številnih eksperimentov ugotovi, da je z uporabo običajnih vrst lesa tip porušitve kompozitnih nosilcev krhek. Za kompozitne nosilce iz betona in iz lesa višje kvalitete ali lepljencev pa ugotovi, da nastopijo pred poružitvijo velike plastične deformacije. Te so posledica plastifikacije veznih sredstev.

Na koncu predstavimo raziskave o obnašanju kompozitnih nosilcev, ki se uporabljajo pri sanaciji gradbenih konstrukcij. Postopek sanacije oziroma dolepljanja t.i. FRP (*fiber reinforced plastic*) ojačitev na poškodovane natezne cone armiranobetonskih konstrukcij analizirajo številni avtorji [4, 34, 49, 56, 58, 65, 67, 87, 98]. Do nedavnega smo za ojačitve poškodovanih armiranobetonskih nosilcev uporabljali dolepljanje jeklenih trakov, z razvojem polimernih materialov pa smo jeklene trakove zamenjali s polimernimi. Ti so lažji, zato je tehnološki postopek dolepljanja preprostejši, so pa tudi odpornejši na agresivne vplive okolja. Ker pri tako saniranih armiranobetonskih nosilcih opazimo krhek tip porušitve, ki je v gradbeništvu nezaželen, je precej raziskav usmerjenih v eksperimentalno in numerično analizo njihovega obnašanja pri poružitvi. Tip porušitve s FRP ojačanih nosilcev je močno odvisen od mesta nameščenih ojačitev, saj te lahko namestimo vzdolž celotnega nosilca ali pa samo na določene odseke. Avtorji Yuan, Wu in Yoshizava [99] so na osnovi različnih nelinearnih konstitucijskih zakonov stika za povezovalni epoksi sloj predvideli šest različnih tipov porušitve ojačanih kompozitnih nosilcev. Med temi je najbolj problematična delaminacija oziroma odlepljanje FRP ojačitev. Večina raziskovalcev v svojih analizah s FRP

ojačanih nosilcev zanemari zamik med betonom in ojačitvijo, le redki ga upoštevajo in sicer podajnost stika modelirajo z linearnim zakonom [49, 67, 98, 99].

Zaključimo z ugotovitvijo, da so dosedanje raziskave o obnašanju kompozitnih nosilcev, ki jih pogosto uporabljamo v gradbeništvu, omejene predvsem na raziskave o razumevanju obnašanja konkretnih kompozitnih nosilcev, precej manj pa je poudarka na razvoju natančnih in učinkovitih računskih postopkov.

## Vsebina dela

Jedro disertacije predstavlja izdelava računskega postopka in računalniškega programa v programskem okolju `Matlab` za statično nelinearno analizo kompozitnih ravninskih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med sloji. Predstavljeni računski postopek je zelo splošen in je zasnovan na materialno in geometrijsko nelinearnem modelu ravninskega nosilca. Vsak sloj kompozitnega nosilca modeliramo s kinematično točno Reissnerjevo teorijo ravninskih nosilcev [71]. Ta upošteva membransko, strižno in upogibno deformiranje nosilca ter ne omejuje velikost pomikov, deformacij in zasukov. Znano je, da je Reissnerjev model ravninskega nosilca zasnovan na Bernoullijevi predpostavki o ravnih prečnih prerezih. Ta določa, da ravni prečni prerezi, pravokotni na nedeformirano referenčno os nosilca, ostanejo ravni tudi v deformirani legi, toda ne več pravokotni na deformirano referenčno os, ter na predpostavki, da se oblika in velikost prečnega prereza vsakega sloja kompozitnega nosilca med deformiranjem ne spreminjata. Ker je pri večini gradbenih konstrukcij vpliv strižnih deformacij na napetostno in deformacijsko stanje zanemarljiv, jih v analizi zanemarimo. V splošnem se pri kompozitnih gradbenih konstrukcijah pojavijo zamiki na stikih slojev v vseh fazah obremenitve konstrukcije, medtem ko se razslojevanje kompozitnega nosilca pojavi predvsem pri porušitvi. V disertaciji detajlneje prikažemo osnovne enačbe, s katerimi opišemo napetostno in deformacijsko stanje dvoslojnih kompozitnih kontinuirnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med slojema, razslojevanje med sloji pa zanemarimo. Razviti računski postopek je zelo splošen in zato omogoča geometrijsko in materialno nelinearno analizo različnih vrst kompozitnih nosilcev, ki se uporabljajo v gradbeništvu. Tako bo predstavljeni računski postopek omogočal analizirati napetostno in deformacijsko stanje kompozitnih nosilcev, ki so sestavljeni iz različnih materialov, kot so na primer: beton-beton, beton-jeklo, les-les, les-beton, beton v kombinaciji s polimernimi ali drugimi ojačitvami in podobno. Z uporabo ustreznih reoloških modelov pa omogoča razviti računski postopek tudi analizo časovnega razvoja napetostnega in deformacijskega stanja kompozitnih nosilcev.

Sistem nelinearnih diferencialnih in algebrajskih enačb, s katerimi opišemo napetostno in deformacijsko stanje dvoslojnega kompozitnega nosilca, izpeljemo oziroma formuliramo s pomočjo modificiranega Hu-Washizujevega funkcionala. Zaradi matematične zahtevnosti problema sistem nelinearnih enačb diskretiziramo z metodo končnih elementov. Za določitev napetostnega in deformacijskega stanja kompozitnih nosilcev izpeljemo družino novih deformacijskih končnih elementov. Značilnost razvitih deformacijskih končnih elementov je v tem, da vzdolž referenčne osi kompozitnega nosilca interpoliramo specifično spremembo dolžine zgornjega in spodnjega sloja  $\varepsilon^a$  in  $\varepsilon^b$  ter pseudoukrivljenost referenčne osi kompozitnega elementa  $\kappa^a$ . Zaradi poenostavitve numeričnega algoritma dodatno interpoliramo tudi materialno koordinato  $x^*$  in normalno komponento linijske kontaktne obtežbe  $q_n^b$ . Materialna koordinata  $x^*$  zgornjega sloja kompozitnega nosilca predstavlja tisti delec zgornjega sloja na stiku, ki v deformirani legi solega z delcem spodnjega sloja na stiku z materialno koordinato  $x$ . Obravnavano družino končnih elementov, kjer kot edina neznana funkcija nastopa samo pseudoukrivljenost težiščne osi  $\kappa$ , je v svoji do-

ktorski disertaciji za analizo vključitve lokalnih stabilnostnih pogojev v globalno tangentno togostno matriko konstrukcije predstavil že Planinc [60]. Prispevek te disertacije je prireditev deformacijskih končnih elementov za geometrijsko in materialno nelinearno analizo kompozitnih ravninskih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med slojema. Prednosti teh končnih elementov so v primerjavi s končnimi elementi, ki so zasnovani na interpolaciji kinematičnih količin, naslednje: neobčutljivost elementov na vse vrste blokiranja, konsistentno upoštevanje konstitucijskih enačb, osnovne enačbe končnega elementa so izjemno pregledne, odlikuje pa jih tudi velika natančnost.

V disertaciji rešimo sistem diskretnih posplošenih ravnotežnih enačb konstrukcije z Newton-Raphsonovo inkrementno-interacijsko metodo. Pri tej metodi za znan inkrement obtežbe iterativno izračunamo popravke inkrementov posplošenih vzdolžnih pomikov zaporedoma za  $i = 0, 1, 2, \dots$  do željene natančnosti. Učinkovitost in natančnost razvite računske metode in programske opreme preverimo s primerjavo naših računskih rezultatov z eksperimentalnimi in numeričnimi rezultati iz literature. S parametričnimi študijami ocenimo tudi ustreznost približnih računskih metod za analizo stabilnosti kompozitnih lesenih elementov po Eurocode 5 [31].

Disertacija ima poleg uvoda še štiri poglavja. V drugem poglavju izpeljemo osnovne enačbe ravninskih kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med slojema. V tretjem poglavju, s pomočjo modificiranega izreka o virtualnem delu, diskretiziramo sistem osnovnih enačb kompozitnega nosilca z upoštevanjem zdrsa med slojema in izpeljemo sistem diskretnih posplošenih ravnotežnih enačb kompozitne konstrukcije. V četrtem poglavju z računskimi primeri analiziramo natančnost in učinkovitost predstavljenega računskega postopka za vse značilne kompozitne konstrukcije, ki jih uporabljamo v gradbeništvu. Tako analiziramo dvoslojne lesene nosilce, sovprežne nosilce iz jekla in betona in zahteven problem diferenčnega krčenja dvoslojnega armiranobetonskega nosilca. Na koncu podamo še zaključke.

# 2

---

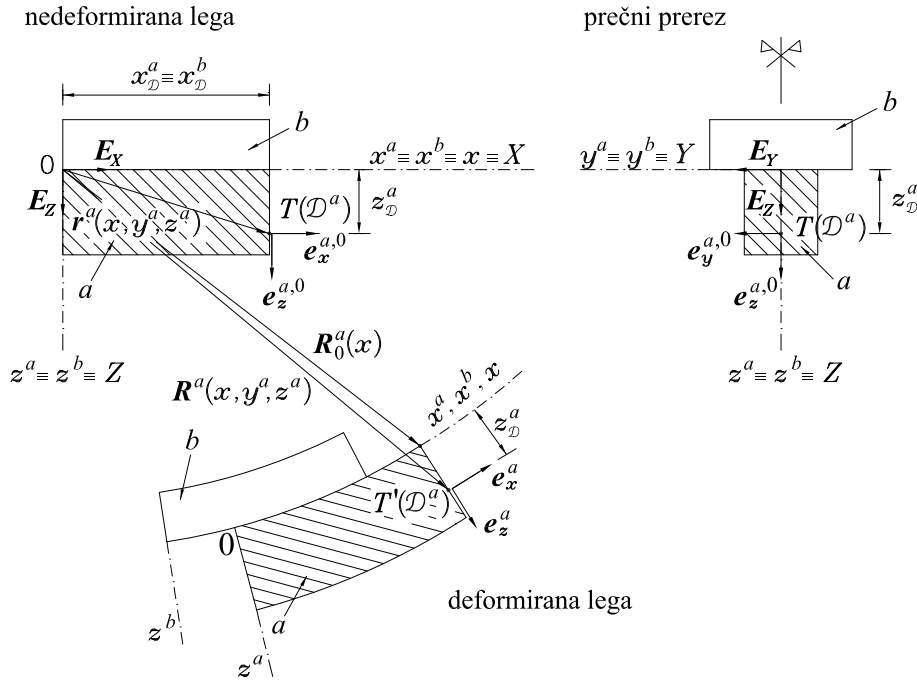
## Osnovne enačbe kompozitnih nosilcev

V disertaciji predstavimo analizo dvoslojnih kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med slojema. Vsak sloj kompozitnega nosilca modeliramo s kinematično točno Reissnerjevo teorijo ravninskih nosilcev [71]. Ta upošteva membransko, strižno in upogibno deformiranje nosilca ter ne omejuje velikost pomikov, deformacij in zasukov. Reissnerjev model ravninskega nosilca je zasnovan na znani Bernoullijevi predpostavki o ravnih prečnih prerezih, ki določa, da ravni prerezi, pravokotni na nedeformirano referenčno os nosilca, ostanejo ravni tudi v deformirani legi, toda ne več pravokotni na deformirano referenčno os, ter na predpostavki, da se oblika in velikost prečnega prereza med deformiranjem ne spreminja. Ker je pri večini gradbenih konstrukcij vpliv strižnih deformacij na napetostno in deformacijsko stanje majhen, jih v analizi zanemarimo. V splošnem se pri kompozitnih gradbenih konstrukcijah pojavijo zamiki na stikih slojev v vseh fazah obremenitve konstrukcije, medtem ko se razslojevanje kompozitnega nosilca pojavi predvsem pri poružitvi. Zato v disertaciji detajlneje prikažemo osnovne enačbe, s katerimi opišemo napetostno in deformacijsko stanje dvoslojnih kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med slojema, razslojevanje med sloji pa zanemarimo.

### 2.1 KINEMATIČNE ENAČBE

Obravnavamo dvoslojni kompozitni nosilec z začetno dolžino  $L$  in s konstantnima prečnima prerezoma  $A^b$  zgornjega in  $A^a$  spodnjega sloja. Spodnji sloj kompozitnega nosilca označimo z  $a$ , zgornjega pa z  $b$  (slika 2.1). Deformiranje kompozitnega nosilca analiziramo v ravnini  $(X, Z)$  evklidskega ambientnega prostora, kjer smo izbrali fiksni desnosučni kartezični koordinatni sistem  $(X, Y, Z)$  z ortonormiranimi baznimi vektorji  $\mathbf{E}_X$ ,  $\mathbf{E}_Z$  in  $\mathbf{E}_Y = \mathbf{E}_Z \times \mathbf{E}_X$ . Deformirano lego vsakega sloja kompozitnega nosilca opišemo z družino prečnih prerezov in z ravninsko krivuljo, ki jo imenujemo referenčna os. Relativno lego delcev na referenčni osi obeh slojev nosilca določata materialni koordinati  $x^a \in [0, L]$  in  $x^b \in [0, L]$ . Prečno ravnino spodnjega sloja kompozitnega nosilca določa enotski vektor  $\mathbf{e}_x^a$ , ki je pravokoten na prečni prerez. V ravnini prečnega prereza izberemo tudi enotska in pravokotna vektorja  $\mathbf{e}_y^a$  in  $\mathbf{e}_z^a$ , kjer je  $\mathbf{e}_y^a = \mathbf{E}_Y$ . Vektorji  $\mathbf{e}_x^a, \mathbf{e}_y^a$  in  $\mathbf{e}_z^a$  tvorijo bazo materialnega koordinatnega sistema spodnjega sloja kompozitnega

nosilca z materialnimi koordinatami  $x^a, y^a, z^a$ . Na ta način je poljubni delec  $\mathcal{D}^a$  prečnega prereza sloja  $a$  kompozitnega nosilca določen z materialnima koordinatama  $(y^a, z^a) \in A^a$ , njegovo lego vzdolž referenčne osi pa določa materialna koordinata  $x^a \in [0, L]$  (slika 2.1). Na podoben način definiramo z ortonormirano bazo  $\mathbf{e}_x^b, \mathbf{e}_y^b$  in  $\mathbf{e}_z^b$  tudi prečni prevez in materialni koordinatni sistem zgornjega sloja kompozitnega nosilca. Tako relativno lego poljubnega delca  $\mathcal{D}^b$  zgornjega sloja določajo materialne koordinate  $(x^b, y^b, z^b) \in L \times A^b$ . V nadaljevanju predpostavimo, da krivulja, ki jo določa presečišče simetrijske ravnine  $(X, Z)$  in stične ravnine slojev kompozitnega nosilca, določa referenčno os slojev  $a$  in  $b$  obravnavanega nosilca, torej  $x^a \equiv x^b \equiv x$  (slika 2.1). To krivuljo imenujemo referenčna os kompozitnega nosilca.



Slika 2.1: Nedeformirana in deformirana lega dvoslojnega kompozitnega nosilca.

Deformirano lego poljubnega delca  $\mathcal{D}^a$  sloja  $a$  in poljubnega delca  $\mathcal{D}^b$  sloja  $b$  kompozitnega nosilca glede na prostorski kartezični koordinatni sistem določata vektorski funkciji:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^a(\mathcal{D}^a) &= \mathbf{R}^a(x, y^a, z^a) = \mathbf{R}_0^a(x) + y^a \mathbf{e}_y^a(x) + z^a \mathbf{e}_z^a(x) = \\ &X(x, y^a, z^a) \mathbf{E}_X + Y(x, y^a, z^a) \mathbf{E}_Y + Z(x, y^a, z^a) \mathbf{E}_Z, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^b(\mathcal{D}^b) &= \mathbf{R}^b(x, y^b, z^b) = \mathbf{R}_0^b(x) + y^b \mathbf{e}_y^b(x) + z^b \mathbf{e}_z^b(x) = \\ &X(x, y^b, z^b) \mathbf{E}_X + Y(x, y^b, z^b) \mathbf{E}_Y + Z(x, y^b, z^b) \mathbf{E}_Z. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Z namenom poenostavitve nadaljnje izpeljave predpostavimo, da je začetna nedeformirana lega kompozitnega nosilca ravna, in da nedeformirana referenčna os nosilca sovпада s prostorsko koordinatno osjo  $X$ . V nedeformirani legi torej velja  $x^a \equiv x^b \equiv x \equiv X$ ,  $y^a \equiv y^b \equiv Y$  in  $z^a \equiv z^b \equiv Z$ , ter posledično  $\mathbf{E}_X \equiv \mathbf{e}_x^{a,0} \equiv \mathbf{e}_x^{b,0}$ ,  $\mathbf{E}_Y \equiv \mathbf{e}_y^{a,0} \equiv \mathbf{e}_y^{b,0}$  in  $\mathbf{E}_Z \equiv \mathbf{e}_z^{a,0} \equiv \mathbf{e}_z^{b,0}$ , kar

je tudi nazorno prikazano na sliki 2.1. Nedeformirana oziroma začetna lega poljubnega delca  $\mathcal{D}^a$  sloja  $a$  oziroma poljubnega delca  $\mathcal{D}^b$  sloja  $b$  kompozitnega nosilca je določena z vektorskima funkcijama:

$$\mathbf{r}^a(\mathcal{D}^a) = \mathbf{r}^a(x, y^a, z^a) = \mathbf{r}_0^a(x) + y^a \mathbf{e}_y^{a,0} + z^a \mathbf{e}_z^{a,0} = x \mathbf{E}_X + y^a \mathbf{E}_Y + z^a \mathbf{E}_Z, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{r}^b(\mathcal{D}^b) = \mathbf{r}^b(x, y^b, z^b) = \mathbf{r}_0^b(x) + y^b \mathbf{e}_y^{b,0} + z^b \mathbf{e}_z^{b,0} = x \mathbf{E}_X + y^b \mathbf{E}_Y + z^b \mathbf{E}_Z. \quad (2.4)$$

Pri tem je  $\mathbf{r}_0^a = \mathbf{r}_0^b = x \mathbf{E}_X$  lega delca na referenčni osi kompozitnega nosilca.

Pomike referenčne osi sloja  $a$  in sloja  $b$  kompozitnega nosilca definiramo z enačbama:

$$\mathbf{u}^a(x) = \mathbf{R}_0^a(x) - \mathbf{r}_0^a(x) = u^a(x) \mathbf{E}_X + v^a(x) \mathbf{E}_Y + w^a(x) \mathbf{E}_Z, \quad (2.5)$$

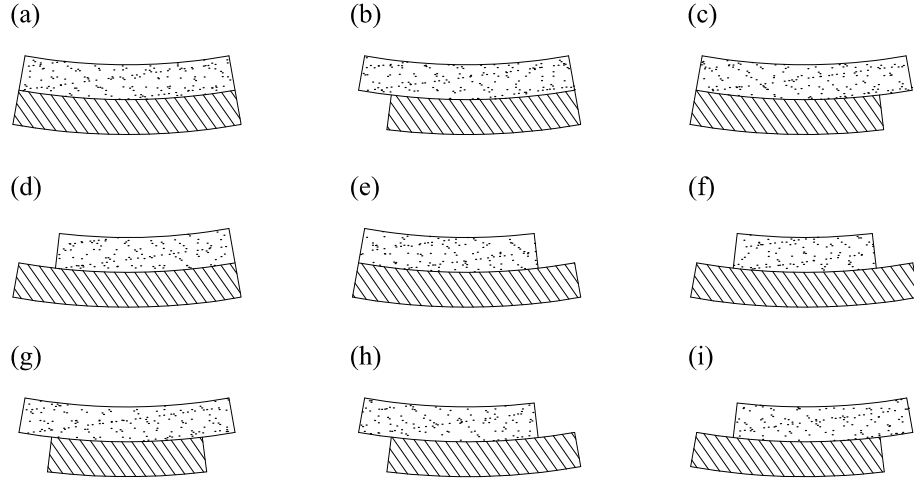
$$\mathbf{u}^b(x) = \mathbf{R}_0^b(x) - \mathbf{r}_0^b(x) = u^b(x) \mathbf{E}_X + v^b(x) \mathbf{E}_Y + w^b(x) \mathbf{E}_Z. \quad (2.6)$$

Ko upoštevamo ravninsko deformiranje kompozitnega nosilca, torej  $v^a = v^b = 0$ , je deformirana lega delcev referenčne osi sloja  $a$  oziroma sloja  $b$  kompozitnega nosilca določena z vektorskima funkcijama:

$$\mathbf{R}_0^a(x) = x \mathbf{E}_X + \mathbf{u}^a(x) = ((x + u^a(x)) \mathbf{E}_X + w^a(x) \mathbf{E}_Z), \quad (2.7)$$

$$\mathbf{R}_0^b(x) = x \mathbf{E}_X + \mathbf{u}^b(x) = ((x + u^b(x)) \mathbf{E}_X + w^b(x) \mathbf{E}_Z). \quad (2.8)$$

Definicijsko območje kinematičnih in deformacijskih funkcij, s katerimi opišemo deformiranje dvoslojnega kompozitnega nosilca, lahko v splošnem razdelimo na tri medsebojno povezane intervale.



Slika 2.2: Različne možne kombinacije definicijskih območij kinematičnih in deformacijskih funkcij dvoslojnega kompozitnega nosilca.

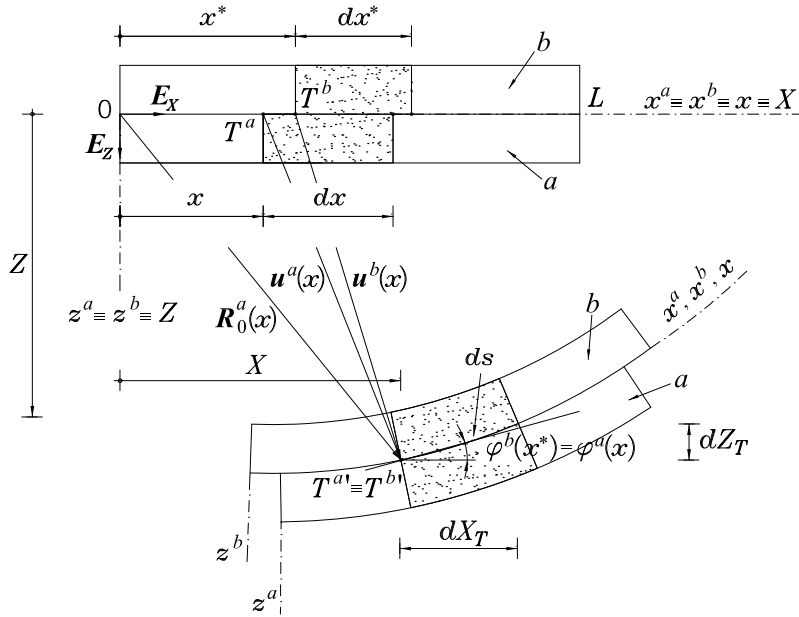
Levi in desni interval definicijskega območja funkcij predstavljata levi in desni previs sloja  $a$  oziroma sloja  $b$  kompozitnega nosilca. Definicijsko območje funkcij na levem previsu je  $x^a \equiv x \in \mathcal{I}_l^a = [0, l_l^a]$  oziroma  $x^b \equiv x \in \mathcal{I}_l^b = [0, l_l^b]$ , definicijsko območje na desnem previsu pa



$x^a \equiv x \in \mathcal{I}_d^a = [l_d^a, L]$  oziroma  $x^b \equiv x \in \mathcal{I}_d^b = [l_d^b, L]$ . Vmesni interval, ki predstavlja definicijsko območje funkcij na stiku obeh slojev kompozitnega nosilca, pa označimo z  $x^a \equiv x \in \mathcal{I}^a = [l_l^a, l_d^a]$  oziroma  $x^b \equiv x \in \mathcal{I}^b = [l_l^b, l_d^b]$ . Pri tem velja  $\mathcal{I}_l^a \cup \mathcal{I}^a \cup \mathcal{I}_d^a = [0, L]$  in  $\mathcal{I}_l^b \cup \mathcal{I}^b \cup \mathcal{I}_d^b = [0, L]$ . Glede na vrsto obtežbe in robne pogoje obstaja devet različnih deformiranih leg kompozitnega nosilca in s tem devet različnih kombinacij definicijskih območij kinematičnih in deformacijskih funkcij (slika 2.2). V nadaljevanju podrobno izpeljemo kinematične enačbe in kinematične vezne enačbe za Reissnerjev model dvoslojnega kompozitnega nosilca na stiku obeh slojev. Kinematične enačbe obeh previsov so dobro znane, zato jih povzamemo po literaturi [71].

### Kinematične enačbe dvoslojnega kompozitnega nosilca na stiku med slojema

Pri izpeljavi osnovnih enačb dvoslojnega kompozitnega nosilca na stiku med slojema se izkaže, da je primerno ustrezno reparametrizirati referenčno os sloja  $b$  kompozitnega nosilca. Z vpeljavo nove materialne koordinate  $x^*$  se izpeljava osnovnih enačb bistveno poenostavi in je bolj razumljiva. Koordinata  $x^*(x)$  določa delec  $\mathcal{D}^b$  zgorjnjega sloja  $b$  kompozitnega nosilca, ki v deformirani legi solega z delcem  $\mathcal{D}^a$  spodnjega sloja  $a$ , s koordinato  $x$ . Povezavo materialnih koordinat  $x$  in  $x^*$  prikazuje slika 2.3.



Slika 2.3: Reparametrizacija referenčne osi sloja  $b$  kompozitnega nosilca. Koordinata  $x^*(x)$  določa delec  $\mathcal{D}^b$  sloja  $b$  kompozitnega nosilca, ki v deformirani legi solega z delcem  $\mathcal{D}^a$  sloja  $a$ .

Deformirano lego poljubnega delca  $\mathcal{D}^a$  sloja  $a$  in poljubnega delca  $\mathcal{D}^b$  sloja  $b$  v referenčni osi kompozitnega nosilca določata enačbi (2.7) in (2.8). Z vpeljavo koordinate  $x^*(x)$  ter z zahtevo, da se sloja kompozitnega nosilca ne moreta razmakniti, dobimo kinematične vezne enačbe dvoslojnega kompozitnega nosilca:

$$\mathbf{R}_0^a(x) = \mathbf{R}_0^b(x^*) \rightarrow ((x + u^a(x))\mathbf{E}_X + w^a(x)\mathbf{E}_Z = ((x^* + u^b(x^*))\mathbf{E}_X + w^b(x^*)\mathbf{E}_Z, \quad (2.9)$$

oziroma v komponentni obliki:

$$x + u^a(x) = x^* + u^b(x^*), \quad (2.10)$$

$$w^a(x) = w^b(x^*). \quad (2.11)$$

Glede na predpostavko, da med deformiranjem sloja kompozitnega nosilca drsita drug po drugem, pri tem pa se ne moreta razmakniti oziroma razslojiti, velja, da sta ukrivljenosti referenčnih osi  $\chi^a$  in  $\chi^b$  obeh slojev kompozitnega nosilca enaki:

$$\chi^a(x) = \chi^b(x^*) \quad \rightarrow \quad \frac{d\varphi^a(x)}{ds^a(x)} = \frac{d\varphi^b(x^*)}{ds^b(x^*)}. \quad (2.12)$$

Pri tem smo s  $\varphi^a$  in  $s^a$  označili zasuk in dolžino deformirane referenčne osi sloja  $a$ , s  $\varphi^b$  in  $s^b$  pa zasuk in dolžino deformirane referenčne osi sloja  $b$  kompozitnega nosilca. Specifični spremembi dolžin referenčnih osi spodnjega in zgornjega sloja  $\varepsilon^a$  in  $\varepsilon^b$  definiramo z enačbama:

$$ds^a(x) = (1 + \varepsilon^a(x)) dx, \quad (2.13)$$

$$ds^b(x^*) = (1 + \varepsilon^b(x^*)) dx^*. \quad (2.14)$$

Če izraza za spremembo dolžine referenčne osi sloja  $a$  in sloja  $b$  kompozitnega nosilca (2.13) in (2.14) vstavimo v enačbo (2.12), dobimo zveze za t.i. psevdoukrivljenosti referenčne osi sloja  $a$  in sloja  $b$  (glej na primer Vratinar in Saje [91]):

$$\kappa^a(x) = \frac{d\varphi^a(x)}{dx} = (1 + \varepsilon^a(x)) \chi^a(x), \quad (2.15)$$

$$\kappa^b(x^*) = \frac{d\varphi^b(x^*)}{dx^*} = (1 + \varepsilon^b(x^*)) \chi^b(x^*). \quad (2.16)$$

Enačba (2.12) določa tudi zvezo med psevdoukrivljenostima sloja  $a$  in sloja  $b$  kompozitnega nosilca:

$$\kappa^b(x^*) = \frac{1 + \varepsilon^b(x^*)}{1 + \varepsilon^a(x)} \kappa^a(x). \quad (2.17)$$

V nadaljevanju izpeljemo še preostale kinematične enačbe Reissnerjeve teorije ravninskih dvoslojnih kompozitnih nosilcev. Pomoč pri izpeljavi teh enačb predstavlja slika 2.3. S pomočjo enačbe (2.9) ugotovimo, da za deformirano referenčno os sloja  $a$  kompozitnega nosilca velja  $X(x) = x + u^a(x)$  in  $Z(x) = w^a(x)$ , ter posledično tudi  $dX(x) = dx + du^a(x)$  in  $dZ(x) = dw^a(x)$ . Tako sta preostali kinematični enačbi sloja  $a$  kompozitnega nosilca naslednji:

$$\begin{aligned} \cos \varphi^a(x) &= \frac{dX(x)}{ds^a(x)} \quad \rightarrow \quad \cos \varphi^a(x) = \frac{dx + du^a(x)}{(1 + \varepsilon^a(x)) dx} \quad \rightarrow \\ 1 + \frac{du^a(x)}{dx} - (1 + \varepsilon^a(x)) \cos \varphi^a(x) &= 0, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\sin \varphi^a(x) = -\frac{dZ(x)}{ds^a(x)} \quad \rightarrow \quad \sin \varphi^a(x) = -\frac{dw^a(x)}{(1 + \varepsilon^a(x)) dx} \quad \rightarrow$$

$$\frac{dw^a(x)}{dx} + (1 + \varepsilon^a(x)) \sin \varphi^a(x) = 0. \quad (2.19)$$

Podobno izpeljemo tudi preostali dve kinematični enačbi sloja  $b$  kompozitnega nosilca. Najprej s pomočjo enačbe (2.9) ugotovimo, da za deformirano referenčno os sloja  $b$  kompozitnega nosilca velja  $X(x^*) = x^* + u^b(x^*)$  in  $Z(x^*) = w^b(x^*)$ , ter posledično tudi  $dX(x^*) = dx^* + du^b(x^*)$  in  $dZ(x^*) = dw^b(x^*)$ . Preostali kinematični enačbi sloja  $b$  kompozitnega nosilca sta tako:

$$\begin{aligned} \cos \varphi^b(x^*) = \frac{dX(x^*)}{ds^b(x^*)} &\rightarrow \cos \varphi^b(x^*) = \frac{dx^* + du^b(x^*)}{(1 + \varepsilon^b(x^*))dx^*} \rightarrow \\ 1 + \frac{du^b(x^*)}{dx^*} - (1 + \varepsilon^b(x^*)) \cos \varphi^b(x^*) &= 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \sin \varphi^b(x^*) = -\frac{dZ(x^*)}{ds^b(x^*)} &\rightarrow \sin \varphi^b(x^*) = -\frac{dw^b(x^*)}{(1 + \varepsilon^b(x^*))dx^*} \rightarrow \\ \frac{dw^b(x^*)}{dx^*} + (1 + \varepsilon^b(x^*)) \sin \varphi^b(x^*) &= 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Glede na povedano, so kinematične enačbe ter ustrezne kinematične vezne enačbe za Reissnerjevo teorijo dvoslojnih kompozitnih nosilcev naslednje:

sloj  $a$  kompozitnega nosilca  $x \in \mathcal{I}^a$ :

$$1 + \frac{du^a(x)}{dx} - (1 + \varepsilon^a(x)) \cos \varphi^a(x) = 0, \quad (2.22)$$

$$\frac{dw^a(x)}{dx} + (1 + \varepsilon^a(x)) \sin \varphi^a(x) = 0, \quad (2.23)$$

$$\frac{d\varphi^a(x)}{dx} - \kappa^a(x) = 0, \quad (2.24)$$

sloj  $b$  kompozitnega nosilca  $x^* \in \mathcal{I}^{b*}$ :

$$1 + \frac{du^b(x^*)}{dx^*} - (1 + \varepsilon^b(x^*)) \cos \varphi^b(x^*) = 0, \quad (2.25)$$

$$\frac{dw^b(x^*)}{dx^*} + (1 + \varepsilon^b(x^*)) \sin \varphi^b(x^*) = 0, \quad (2.26)$$

$$\frac{d\varphi^b(x^*)}{dx^*} - \kappa^b(x^*) = 0, \quad (2.27)$$

kinematični vezni enačbi  $x \in \mathcal{I}^a$  in  $x^* \in \mathcal{I}^{b*}$ :

$$x + u^a(x) = x^* + u^b(x^*), \quad (2.28)$$

$$w^a(x) = w^b(x^*). \quad (2.29)$$

Pri numerični analizi dvoslojnih kompozitnih nosilcev se izkaže, da je ugodno upoštevati vpliv kinematičnih veznih enačb (2.28) in (2.29) v kinematičnih enačbah (2.22)–(2.27). Pri tem

moramo enačbi (2.28) in (2.29) ustrezno preoblikovati. Najprej ju odvajamo po koordinati  $x$ :

$$1 + \frac{du^a(x)}{dx} = \frac{dx^*}{dx} + \frac{du^b(x^*)}{dx^*} \frac{dx^*}{dx}, \quad (2.30)$$

$$\frac{dw^a(x)}{dx} = \frac{dw^b(x^*)}{dx^*} \frac{dx^*}{dx}. \quad (2.31)$$

Nato v enačbah (2.30) in (2.31) upoštevamo kinematične enačbe (2.22), (2.23), (2.25) ter (2.26) in dobimo:

$$(1 + \varepsilon^a(x)) \cos \varphi^a(x) = \left( (1 + \varepsilon^b(x^*)) \cos \varphi^b(x^*) \right) \frac{dx^*}{dx}, \quad (2.32)$$

$$(1 + \varepsilon^a(x)) \sin \varphi^a(x) = \left( (1 + \varepsilon^b(x^*)) \sin \varphi^b(x^*) \right) \frac{dx^*}{dx}. \quad (2.33)$$

Na koncu enačbi (2.32) in (2.33) med seboj delimo in dobimo geometrijsko zelo nazorno zvezo med zasuki referenčnih osi sloja  $a$  in sloja  $b$  kompozitnega nosilca:

$$\tan \varphi^a(x) = \tan \varphi^b(x^*) \quad \rightarrow \quad \varphi^a(x) = \varphi^b(x^*). \quad (2.34)$$

S pomočjo enačb (2.32) in (2.34) dobimo tudi zvezo med specifičnima spremembama dolžin referenčnih osi slojev  $a$  in  $b$  kompozitnega nosilca ter materialnima koordinatama  $x$  in  $x^*$  v obliki enostavne diferencialne enačbe:

$$\frac{dx^*}{dx} = \frac{1 + \varepsilon^a(x)}{1 + \varepsilon^b(x^*)}. \quad (2.35)$$

Če enačbo (2.26) pomnožimo z izrazom (2.35), ter pri tem upoštevamo modificirane kinematične vezne enačbe (2.31), (2.34) in (2.35) se izkaže, da sta kinematični enačbi (2.23) in (2.26) identični:

$$\begin{aligned} \frac{dw^b(x^*)}{dx^*} + (1 + \varepsilon^b(x^*)) \sin \varphi^b(x^*) &= 0 \quad \rightarrow \\ \frac{dw^b(x^*)}{dx^*} \frac{dx^*}{dx} + (1 + \varepsilon^b(x^*)) \sin \varphi^b(x^*) \frac{dx^*}{dx} &= 0 \quad \rightarrow \\ \frac{dw^a(x)}{dx} + (1 + \varepsilon^a(x)) \sin \varphi^a(x) &= 0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Podobno s pomočjo enačb (2.17), (2.34) in (2.35) ugotovimo identiteto med enačbama (2.24) in (2.27):

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi^b(x^*)}{dx^*} - \kappa^b(x^*) &= 0 \quad \rightarrow \\ \frac{d\varphi^b(x^*)}{dx^*} \frac{dx^*}{dx} - \kappa^b(x^*) \frac{dx^*}{dx} &= 0 \quad \rightarrow \\ \frac{d\varphi^a(x)}{dx} - \kappa^a(x) &= 0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Glede na povedano, so modificirane kinematične enačbe kompozitnega nosilca na stiku med slojema  $x \in \mathcal{I}^a$  in  $x^* \in \mathcal{I}^{b^*}$  naslednje:

$$1 + \frac{du^a(x)}{dx} - (1 + \varepsilon^a(x)) \cos \varphi^a(x) = 0, \quad (2.38)$$

$$1 + \frac{du^b(x^*)}{dx^*} - (1 + \varepsilon^b(x^*)) \cos \varphi^b(x^*) = 0, \quad (2.39)$$

$$\frac{dw^a(x)}{dx} + (1 + \varepsilon^a(x)) \sin \varphi^a(x) = 0, \quad (2.40)$$

$$\frac{d\varphi^a(x)}{dx} - \kappa^a(x) = 0, \quad (2.41)$$

$$x + u^a(x) = x^* + u^b(x^*) \quad \text{ali} \quad \frac{dx^*}{dx} = \frac{1 + \varepsilon^a(x)}{1 + \varepsilon^b(x^*)}. \quad (2.42)$$

Ob enačbah (2.38)–(2.42) veljajo tudi geometrijsko zelo nazorne zveze med vertikalnimi pomiki in zasuki

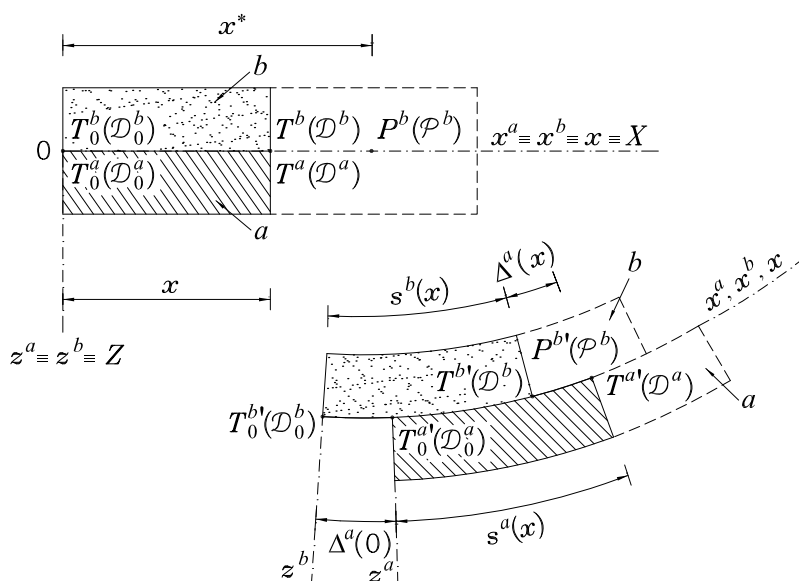
$$w^b(x^*) = w^a(x), \quad (2.43)$$

$$\varphi^b(x^*) = \varphi^a(x) \quad (2.44)$$

ter pseudoukrivljenostmi

$$\kappa^b(x^*) = \frac{1 + \varepsilon^b(x^*)}{1 + \varepsilon^a(x)} \kappa^a(x). \quad (2.45)$$

Kot smo že večkrat povedali, se pri deformiranju kompozitnega nosilca v splošnem pojavijo tudi zamiki na stiku slojev, ki jih imenujemo zdrsa sloja  $a$  in sloja  $b$  in jih označimo  $\Delta^a(x)$  in  $\Delta^b(x^*)$ . Geometrijski pomen zdrsa  $\Delta^a(x)$  med slojema kompozitnega nosilca prikazuje slika 2.4.



Slika 2.4: Geometrijski pomen zdrsa  $\Delta^a(x)$  pri dvoslojnem kompozitnem nosilcu.

S preprostim računom in s pomočjo slike 2.4 ugotovimo zvezo med zdrsom in deformacijskima količinama  $\varepsilon^a$  in  $\varepsilon^b$ :

$$\Delta^a(x) + s^b(x) = \Delta^a(0) + s^a(x) \quad \rightarrow \quad \Delta^a(x) = \Delta^a(0) + \int_0^x (\varepsilon^a(\xi) - \varepsilon^b(\xi)) d\xi \quad (2.46)$$

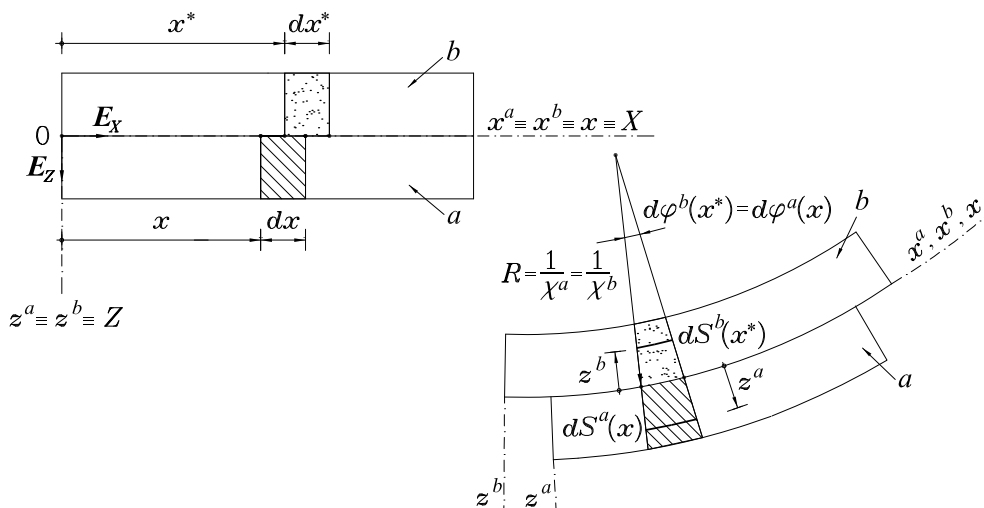
ali

$$\Delta^a(x) = \int_x^{x^*(x)} (1 + \varepsilon^b(\xi)) d\xi. \quad (2.47)$$

Podobno kot določa enačba (2.47) zdrs med delcema sloja  $a$  in sloja  $b$  z materialnima koordinatama  $x$ , je zdrs med delcema obeh slojev z materialnima koordinatama  $x^*$  določen z enačbo:

$$\Delta^b(x^*) = \int_{x(x^*)}^{x^*} (1 + \varepsilon^a(\xi)) d\xi. \quad (2.48)$$

V nadaljevanju definiramo tudi specifični spremembi dolžine poljubnega materialnega vlakna sloja  $a$  in sloja  $b$  kompozitnega nosilca  $D^a$  in  $D^b$ . Kot je dobro znano, vpeljemo z  $D^a$  in  $D^b$  konstitucijske enačbe ravninskih nosilcev.



Slika 2.5: Geometrijski pomen specifične spremembe dolžine poljubnega materialnega vlakna sloja  $a$  in sloja  $b$  kompozitnega nosilca.

S pomočjo slike 2.5 in enačbe (2.15) ugotovimo zvezo med specifično spremembo dolžine poljubnega materialnega vlakna sloja  $a$  kompozitnega nosilca  $D^a$  ter deformacijskima količinama referenčne osi  $\varepsilon^a$  in  $\kappa^a$ :

$$\begin{aligned} D^a(x, z^a) &= \frac{dS^a(x, z^a) - dx}{dx} \quad \rightarrow \quad D^a(x, z^a) = \frac{(R(x) + z^a) d\varphi^a(x)}{dx} - 1 \quad \rightarrow \\ D^a(x, z^a) &= \frac{\left(\frac{1}{\chi^a(x)} + z^a\right) d\varphi^a(x)}{dx} - 1 \quad \rightarrow \quad D^a(x, z^a) = \varepsilon^a(x) + z^a \kappa^a(x). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Podobno ugotovimo z enačbo (2.16) tudi zvezo med specifično spremembo dolžine poljubnega materialnega vlakna sloja  $b$  kompozitnega nosilca  $D^b$  ter deformacijskima količinama referenčne osi  $\varepsilon^b$  in  $\kappa^b$ :

$$D^b(x^*, z^b) = \frac{dS^b(x^*, z^b) - dx^*}{dx^*} \quad \rightarrow \quad D^b(x^*, z^b) = \varepsilon^b(x^*) + z^b \kappa^b(x^*). \quad (2.50)$$

## Kinematične enačbe previsov kompozitnega nosilca

Kinematične enačbe previsov kompozitnega nosilca so standardne kinematične enačbe Reissnerjevega modela ravninskega nosilca. Izpeljemo jih podobno, kot smo izpeljali kinematične enačbe kompozitnega nosilca na stiku. Ker so kinematične enačbe Reissnerjevega modela ravninskega nosilca dobro znane, jih tu povzamemo po literaturi [71]. Poudarimo pa geometrijsko nazorno dejstvo: če previs predstavlja sloj  $a$  kompozitnega nosilca, so kinematične enačbe previsa kompozitnega nosilca kinematične enačbe sloja  $a$  in obratno; če previs predstavlja sloj  $b$  kompozitnega nosilca, so kinematične enačbe previsa kompozitnega nosilca kinematične enačbe sloja  $b$ .

Kinematične enačbe levega previsa kompozitnega nosilca so:

$x \in \mathcal{I}_l^a$  :

$$1 + \frac{du^a(x)}{dx} - (1 + \varepsilon^a(x)) \cos \varphi^a(x) = 0, \quad (2.51)$$

$$\frac{dw^a(x)}{dx} + (1 + \varepsilon^a(x)) \sin \varphi^a(x) = 0, \quad (2.52)$$

$$\frac{d\varphi^a(x)}{dx} - \kappa^a(x) = 0 \quad (2.53)$$

ali

$x \in \mathcal{I}_l^b$  :

$$1 + \frac{du^b(x)}{dx} - (1 + \varepsilon^b(x)) \cos \varphi^b(x) = 0, \quad (2.54)$$

$$\frac{dw^b(x)}{dx} + (1 + \varepsilon^b(x)) \sin \varphi^b(x) = 0, \quad (2.55)$$

$$\frac{d\varphi^b(x)}{dx} - \kappa^b(x) = 0. \quad (2.56)$$

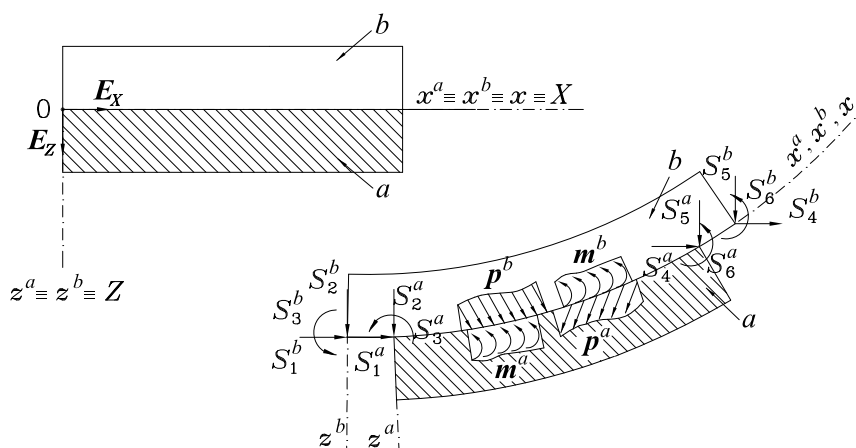
Kinematične enačbe desnega previsa dvoslojnega kompozitnega nosilca so povsem enake kinematičnim enačbam (2.51)–(2.56), le da je v tem primeru potrebno ustrezno spremeniti definicijsko območje funkcij. Tako spremenimo območje  $\mathcal{I}_l^a$  v  $\mathcal{I}_d^a$  in območje  $\mathcal{I}_l^b$  v  $\mathcal{I}_d^b$ .

Ker so vse kinematične enačbe dvoslojnega kompozitnega nosilca diferencialne enačbe 1. reda, jih rešimo z upoštevanjem predpisanih kinematičnih robnih pogojev. Pri tem je potrebno upoštevati tudi kompatibilnost pomikov in zasukov na stiku med previsoma in delom kompozitnega nosilca na stiku med slojema. Pri izpeljavah nismo omejevali velikosti kinematičnih in deformacijskih količin, zato imenujemo predstavljene kinematične enačbe kompozitnega nosilca *kinematično* oziroma *geometrijsko točne enačbe*. V nadaljevanju imenujemo količine  $\varepsilon^a$ ,  $\varepsilon^b$ ,  $\kappa^a$  in  $\kappa^b$  *deformacijske spremenljivke*, količine  $u^a$ ,  $u^b$ ,  $w^a$ ,  $w^b$ ,  $\varphi^a$  in  $\varphi^b$  pa *kinematične spremenljivke*.

## 2.2 RAVNOTEŽNE ENAČBE

Podobno kot smo izpeljali kinematične enačbe Reissnerjevega dvoslojnega kompozitnega nosilca, izpeljemo tudi ravnotežne enačbe. Tudi pri izpeljavi ravnotežnih enačb kompozitnega nosilca razpade definicijsko območje funkcij, ki nastopajo v ravnotežnih enačbah, na tri medsebojno povezane intervale in sicer; za sloj  $a$  na  $\mathcal{I}_l^a \cup \mathcal{I}^a \cup \mathcal{I}_d^a = [0, L]$  ter za sloj  $b$  na  $\mathcal{I}_l^b \cup \mathcal{I}^b \cup \mathcal{I}_d^b = [0, L]$ .

Kot je znano, predstavljajo ravnotežne enačbe zvezo med zunanjo obtežbo in notranjimi statičnimi količinami. Predpostavimo, da sta sloj  $a$  in sloj  $b$  v deformiranih referenčnih oseh obremenjena s konservativno linijsko zunanjo obtežbo  $\mathbf{p}^a = p_X^a \mathbf{E}_X + p_Z^a \mathbf{E}_Z$  in  $\mathbf{p}^b = p_X^b \mathbf{E}_X + p_Z^b \mathbf{E}_Z$ , s konservativnima linijskima zunanjima momentoma  $\mathbf{m}^a = m_Y^a \mathbf{E}_Y$  in  $\mathbf{m}^b = m_Y^b \mathbf{E}_Y$  ter s konservativno posplošeno robno obtežbo  $S_i^a$  in  $S_i^b$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ), kar prikažemo na sliki 2.6.



Slika 2.6: Zunanja obtežba kompozitnega nosilca.

Kjub temu, da linijske obtežbe  $\mathbf{p}^a$ ,  $\mathbf{p}^b$ ,  $\mathbf{m}^a$  in  $\mathbf{m}^b$  delujejo vzdolž deformiranih referenčnih osi, predpostavimo, da so merjene glede na nedeformirano dolžino kompozitnega nosilca.

Ker sloja kompozitnega nosilca obravnavamo kot dva ločena nosilca, katerih povezano delovanje zagotavljajo kinematične vezne enačbe, sta oba sloja na medsebojnem stiku vzdolž referenčnih osi  $x \in \mathcal{I}^a$  in  $x^* \in \mathcal{I}^{b*}$  obtežena tudi s t.i. kontaktnima linijskima obtežbama:

$$\mathbf{q}^a(x) = q_t^a(x) \mathbf{e}_x^a(x) + q_n^a(x) \mathbf{e}_z^a(x) = q_X^a(x) \mathbf{E}_X + q_Z^a(x) \mathbf{E}_Z, \quad (2.57)$$

$$\mathbf{q}^b(x^*) = q_t^b(x^*) \mathbf{e}_x^b(x^*) + q_n^b(x^*) \mathbf{e}_z^b(x^*) = q_X^b(x^*) \mathbf{E}_X + q_Z^b(x^*) \mathbf{E}_Z. \quad (2.58)$$

Podobno kot za linijsko zunanjo obtežbo tudi za kontaktni linijski obtežbi  $\mathbf{q}^a$  in  $\mathbf{q}^b$  prepostavimo, da sta merjeni glede na nedeformirano dolžino referenčne osi kompozitnega nosilca. Glede na predpostavko, da se sloja kompozitnega nosilca ne moreta razmakniti oziroma razslojiti, lahko pa drsita drug po drugem, velja po tretjem Newtonovem zakonu o akciji in reakciji za komponento kontaktne linijske obtežbe v smeri normale na stično ploskev zveza:

$$q_n^b(x^*) + q_n^a(x) = 0. \quad (2.59)$$

Podobno kot smo analizirali kinematične enačbe kompozitnega nosilca, analiziramo tudi ravnotežne enačbe. Tako izpeljemo ravnotežne enačbe le za del kompozitnega nosilca na stiku med slojema, medtem ko ravnotežne enačbe previsa kompozitnega nosilca povzamemo po literaturi [71].



### Ravnotežne enačbe kompozitnega nosilca na stiku med slojema

Posplošene notranje sile v deformiranih referenčnih oseh sloja  $a$  in sloja  $b$  kompozitnega nosilca predstavljajo vektorske funkcije:

$$\mathbf{N}^a(x) = \mathcal{R}_X^a(x)\mathbf{E}_X + \mathcal{R}_Z^a(x)\mathbf{E}_Z = \mathcal{N}^a(x)\mathbf{e}_x^a(x) + \mathcal{Q}^a(x)\mathbf{e}_z^a(x), \quad (2.60)$$

$$\mathbf{M}^a(x) = \mathcal{M}^a(x)\mathbf{E}_Y, \quad (2.61)$$

$$\mathbf{N}^b(x^*) = \mathcal{R}_X^b(x^*)\mathbf{E}_X + \mathcal{R}_Z^b(x^*)\mathbf{E}_Z = \mathcal{N}^b(x^*)\mathbf{e}_x^b(x^*) + \mathcal{Q}^b(x^*)\mathbf{e}_z^b(x^*), \quad (2.62)$$

$$\mathbf{M}^b(x^*) = \mathcal{M}^b(x^*)\mathbf{E}_Y. \quad (2.63)$$

Pri tem predstavlja  $\mathcal{N}^a$  ravnotežno osno silo,  $\mathcal{Q}^a$  ravnotežno prečno silo in  $\mathcal{M}^a$  ravnotežni upogibni moment sloja  $a$  kompozitnega nosilca. Podobno predstavljajo  $\mathcal{N}^b$ ,  $\mathcal{Q}^b$  in  $\mathcal{M}^b$  posplošene ravnotežne količine sloja  $b$ . Zveze med komponentami notranjih sil  $\mathbf{N}^a$  in  $\mathbf{N}^b$  v prostorski in materialni bazi so:

$$\mathcal{N}^a(x) = \mathcal{R}_X^a(x) \cos \varphi^a(x) - \mathcal{R}_Z^a(x) \sin \varphi^a(x), \quad (2.64)$$

$$\mathcal{Q}^a(x) = \mathcal{R}_X^a(x) \sin \varphi^a(x) + \mathcal{R}_Z^a(x) \cos \varphi^a(x), \quad (2.65)$$

$$\mathcal{N}^b(x^*) = \mathcal{R}_X^b(x^*) \cos \varphi^b(x^*) - \mathcal{R}_Z^b(x^*) \sin \varphi^b(x^*), \quad (2.66)$$

$$\mathcal{Q}^b(x^*) = \mathcal{R}_X^b(x^*) \sin \varphi^b(x^*) + \mathcal{R}_Z^b(x^*) \cos \varphi^b(x^*). \quad (2.67)$$

Za oba sloja kompozitnega nosilca na stiku med slojema izpeljemo ravnotežne enačbe po standardnem postopku. Najprej izrežemo del kompozitnega nosilca dolžine  $\Delta X$  in vpliv odstranjenega dela kompozitnega nosilca nadomestimo z notranjimi silami. Nato izrezani del kompozitnega nosilca razslojimo, medsebojni vpliv obeh slojev pa nadomestimo z linijsko kontaktno obtežbo  $\mathbf{q}^a$  in  $\mathbf{q}^b$  (slika 2.7).

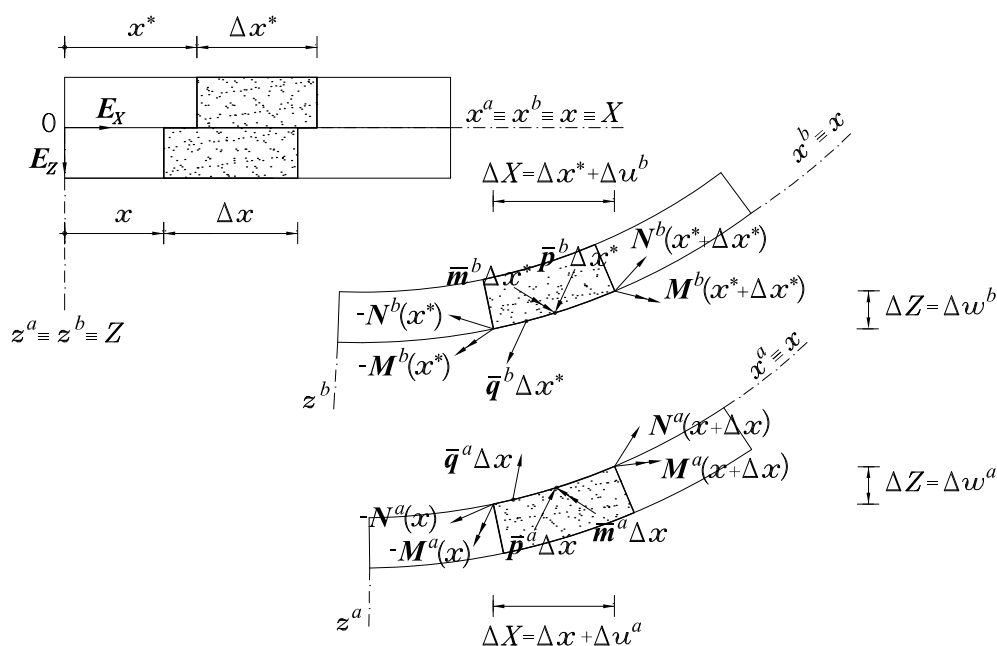
Ravnotežne enačbe za izrezani del sloja  $a$  kompozitnega nosilca dolžine  $\Delta X$  so:

$$\mathbf{N}^a(x + \Delta x) - \mathbf{N}^a(x) + \bar{\mathbf{p}}^a \Delta x + \bar{\mathbf{q}}^a \Delta x = \mathbf{0}, \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^a(x + \Delta x) - \mathbf{M}^a(x) + \Delta \mathbf{R}_0^a(x) \times \mathbf{N}^a(x + \Delta x) + \bar{\mathbf{m}}^a \Delta x + \\ \Delta \mathbf{R}_0^p(x) \times \bar{\mathbf{p}}^a \Delta x + \Delta \mathbf{R}_0^q(x) \times \bar{\mathbf{q}}^a \Delta x = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

V enačbah (2.68) in (2.69) črtica nad funkcijo ( $\bar{\bullet}$ ) predstavlja povprečno vrednost funkcije na izrezanem in razslojenem delu kompozitnega nosilca, vektorja  $\Delta \mathbf{R}_0^p$  in  $\Delta \mathbf{R}_0^q$  predstavljata ročico rezultante zunanje linijske obtežbe oziroma rezultante linijske kontaktne obtežbe v referenčni osi sloja  $a$  kompozitnega nosilca. Če enačbi (2.68) in (2.69) delimo z  $\Delta x$  in na dobljenih enačbah opravimo limitni proces, pri katerem gre  $\Delta x \rightarrow 0$ , dobimo ravnotežne enačbe sloja  $a$ :

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{\mathbf{N}^a(x + \Delta x) - \mathbf{N}^a(x)}{\Delta x} + \bar{\mathbf{p}}^a + \bar{\mathbf{q}}^a \right] = \mathbf{0} \quad \rightarrow \\ \frac{d\mathbf{N}^a(x)}{dx} + \mathbf{p}^a(x) + \mathbf{q}^a(x) = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (2.70)$$



Slika 2.7: Obremenitev izrezanega in razslojenega dela dvoslojnega kompozitnega nosilca dolžine  $\Delta X$ .

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{M^a(x + \Delta x) - M^a(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta R_0^a(x)}{\Delta x} \times N^a(x + \Delta x) + \bar{m}^a + \Delta R_0^p(x) \times \bar{p}^a + \Delta R_0^q(x) \times \bar{q}^a \right] = \mathbf{0} \quad \rightarrow$$

$$\frac{dM^a(x)}{dx} + \frac{dR_0^a(x)}{dx} \times N^a(x) + m^a(x) = \mathbf{0}, \quad (2.71)$$

Podobno izpeljemo tudi ravnotežne enačbe sloja b:

$$\frac{dN^b(x^*)}{dx^*} + p^b(x^*) + q^b(x^*) = \mathbf{0}, \quad (2.72)$$

$$\frac{dM^b(x^*)}{dx^*} + \frac{dR_0^b(x^*)}{dx^*} \times N^b(x^*) + m^b(x^*) = \mathbf{0}. \quad (2.73)$$

Glede na prostorske bazne vektorje  $\mathbf{E}_X$ ,  $\mathbf{E}_Y$  in  $\mathbf{E}_Z$  so ravnotežne enačbe kompozitnega nosilca v komponentni obliki sledeče:

sloj a kompozitnega nosilca  $x \in \mathcal{I}^a$  :

$$\frac{d\mathcal{R}_X^a(x)}{dx} + p_X^a(x) + q_X^a(x) = 0, \quad (2.74)$$

$$\frac{d\mathcal{R}_Z^a(x)}{dx} + p_Z^a(x) + q_Z^a(x) = 0, \quad (2.75)$$

$$\frac{dM^a(x)}{dx} - (1 + \varepsilon^a(x)) Q^a(x) + m_Y^a(x) = 0, \quad (2.76)$$

sloj  $b$  kompozitnega nosilca  $x^* \in \mathcal{I}^{b*}$  :

$$\frac{d\mathcal{R}_X^b(x^*)}{dx^*} + p_X^b(x^*) + q_X^b(x^*) = 0, \quad (2.77)$$

$$\frac{d\mathcal{R}_Z^b(x^*)}{dx^*} + p_Z^b(x^*) + q_Z^b(x^*) = 0, \quad (2.78)$$

$$\frac{d\mathcal{M}^b(x^*)}{dx^*} - (1 + \varepsilon^b(x^*)) \mathcal{Q}^b(x^*) + m_Y^b(x^*) = 0. \quad (2.79)$$

### Ravnotežne enačbe previsov kompozitnega nosilca

Ravnotežne enačbe previsov kompozitnega nosilca so standardne ravnotežne enačbe Reissnerjevega modela ravninskega nosilca. Izpeljemo jih podobno, kot smo izpeljali ravnotežne enačbe kompozitnega nosilca na stiku med slojema. Ravnotežne enačbe levega previsa dvoslojnega kompozitnega nosilca so:

$x \in \mathcal{I}_l^a$  :

$$\frac{d\mathcal{R}_X^a(x)}{dx} + p_X^a(x) = 0, \quad (2.80)$$

$$\frac{d\mathcal{R}_Z^a(x)}{dx} + p_Z^a(x) = 0, \quad (2.81)$$

$$\frac{d\mathcal{M}^a(x)}{dx} - (1 + \varepsilon^a(x)) \mathcal{Q}^a(x) + m_Y^a(x) = 0 \quad (2.82)$$

ali

$x \in \mathcal{I}_l^b$  :

$$\frac{d\mathcal{R}_X^b(x)}{dx} + p_X^b(x) = 0, \quad (2.83)$$

$$\frac{d\mathcal{R}_Z^b(x)}{dx} + p_Z^b(x) = 0, \quad (2.84)$$

$$\frac{d\mathcal{M}^b(x)}{dx} - (1 + \varepsilon^b(x)) \mathcal{Q}^b(x) + m_Y^b(x) = 0. \quad (2.85)$$

Podobno kot v primeru kinematičnih enačb previsov, so tudi ravnotežne enačbe na desnem previsu dvoslojnega kompozitnega nosilca enake enačbam (2.80)–(2.85). Tudi sedaj je potrebno le ustrezno spremeniti definicijska območja funkcij. Tako spremenimo območje  $\mathcal{I}_l^a$  v  $\mathcal{I}_d^a$  in območje  $\mathcal{I}_l^b$  v  $\mathcal{I}_d^b$ .

## 2.3 KONSTITUCIJSKE ENAČBE

S konstitucijskimi enačbami sloja  $a$  kompozitnega nosilca povežemo ravnotežno osno silo  $\mathcal{N}^a$  in upogibni ravnotežni moment  $\mathcal{M}^a$  s specifično spremembo dolžine referenčne osi  $\varepsilon^a$  in pseudoukrivljenostjo referenčne osi  $\kappa^a$  kompozitnega nosilca. Pri tem vpeljemo konstitucijsko osno

silo  $\mathcal{N}_c^a$  ter konstitucijski upogibni moment  $\mathcal{M}_c^a$  spodnjega sloja kompozitnega nosilca. S konstitucijskimi enačbami zahtevamo, da so vzdolž celotne referenčne osi sloja  $a$  kompozitnega nosilca,  $x \in [0, L]$ , ravnotežne statične količine enake konstitucijskim statičnim količinam:

$$\mathcal{N}^a(x) = \mathcal{N}_c^a(x, \varepsilon^a(x), \kappa^a(x)), \quad (2.86)$$

$$\mathcal{M}^a(x) = \mathcal{M}_c^a(x, \varepsilon^a(x), \kappa^a(x)). \quad (2.87)$$

Konstitucijsko osno silo  $\mathcal{N}_c^a$  in konstitucijski moment  $\mathcal{M}_c^a$  izračunamo z enačbama:

$$\mathcal{N}_c^a(x, \varepsilon^a, \kappa^a) = \int_{A^a} \sigma^a(x, y^a, z^a) dA^a, \quad (2.88)$$

$$\mathcal{M}_c^a(x, \varepsilon^a, \kappa^a) = \int_{A^a} z^a \sigma^a(x, y^a, z^a) dA^a. \quad (2.89)$$

V enačbah (2.88) in (2.89) predstavlja  $\sigma^a$  fizikalno normalno napetost sloja  $a$  kompozitnega nosilca in je glede na predstavljeno enoosno napetostno in deformacijsko stanje kompozitnega nosilca povezana s specifično spremembo dolžine poljubnega materialnega vlakna sloja  $a$  kompozitnega nosilca

$$\sigma^a = \mathcal{F}^a(D^a). \quad (2.90)$$

Funkcija  $\mathcal{F}^a$  je poljubna in je podrejena materialu, ki sestavlja sloj  $a$  kompozitnega nosilca. Določimo jo z ustreznimi preiskavami materiala. S tako splošno opisanim materialnim modelom lahko opišemo elastično, hiperelastično, plastično ali viskoplastično obnašanje materiala. V primeru elastičnega obnašanja materiala je konstitucijski zakon določen samo z enim parametrom, ki ga imenujemo elastični modul materiala in ga običajno označimo z  $E^a$ , torej  $\sigma^a = E^a D^a$ .

Podobno s konstitucijskimi enačbami sloja  $b$  kompozitnega nosilca povežemo ravnotežno osno silo  $\mathcal{N}^b$  in ravnotežni upogibni moment  $\mathcal{M}^b$  z deformacijskimi količinami zgornjega sloja kompozitnega nosilca, torej z  $\varepsilon^b$  in  $\kappa^b$ . Vpeljemo konstitucijsko osno silo  $\mathcal{N}_c^b$  in konstitucijski upogibni moment  $\mathcal{M}_c^b$  zgornjega sloja kompozitnega nosilca in za vsak  $x^* \in [0^*, L^*]$  zahtevamo:

$$\mathcal{N}^b(x^*) = \mathcal{N}_c^b(x^*, \varepsilon^b(x^*), \kappa^b(x^*)), \quad (2.91)$$

$$\mathcal{M}^b(x^*) = \mathcal{M}_c^b(x^*, \varepsilon^b(x^*), \kappa^b(x^*)). \quad (2.92)$$

Ko definiramo materialni model sloja  $b$  kompozitnega nosilca z enačbo

$$\sigma^b = \mathcal{F}^b(D^b), \quad (2.93)$$

kjer je  $\sigma^b$  fizikalna normalna napetost sloja  $b$  kompozitnega nosilca in  $D^b$  specifična deformacija poljubnega materialnega vlakna, izračunamo  $\mathcal{N}_c^b$  in  $\mathcal{M}_c^b$  z enačbama:

$$\mathcal{N}_c^b(x^*, \varepsilon^b, \kappa^b) = \int_{A^b} \sigma^b(x^*, y^b, z^b) dA^b, \quad (2.94)$$

$$\mathcal{M}_c^b(x^*, \varepsilon^b, \kappa^b) = \int_{A^b} z^b \sigma^b(x^*, y^b, z^b) dA^b. \quad (2.95)$$

Tudi z materialnim modelom (2.93) lahko opišemo obnašanje večine materialov, ki jih uporabljamo pri kompozitnih konstrukcijah. V nadaljevanju bomo pri implementaciji računskega postopka za analizo kompozitnih konstrukcij potrebovali tudi variacije konstitucijskih količin  $\mathcal{N}_c^a$ ,  $\mathcal{M}_c^a$ ,  $\mathcal{N}_c^b$  in  $\mathcal{M}_c^b$ . Zaradi preglednosti izrazov v nadaljevanju zapišemo funkcije brez argumentov. Z variiranjem enačb (2.88)–(2.89) in (2.94)–(2.95) dobimo:

$$\delta \mathcal{N}_c^a = \left( \int_{A^a} \frac{\partial \sigma^a}{\partial D^a} dA^a \right) \delta \varepsilon^a + \left( \int_{A^a} z^a \frac{\partial \sigma^a}{\partial D^a} dA^a \right) \delta \kappa^a = C_{11}^a \delta \varepsilon^a + C_{12}^a \delta \kappa^a, \quad (2.96)$$

$$\delta \mathcal{M}_c^a = \left( \int_{A^a} z^a \frac{\partial \sigma^a}{\partial D^a} dA^a \right) \delta \varepsilon^a + \left( \int_{A^a} (z^a)^2 \frac{\partial \sigma^a}{\partial D^a} dA^a \right) \delta \kappa^a = C_{21}^a \delta \varepsilon^a + C_{22}^a \delta \kappa^a, \quad (2.97)$$

in

$$\delta \mathcal{N}_c^b = \left( \int_{A^b} \frac{\partial \sigma^b}{\partial D^b} dA^b \right) \delta \varepsilon^b + \left( \int_{A^b} z^b \frac{\partial \sigma^b}{\partial D^b} dA^b \right) \delta \kappa^b = C_{11}^b \delta \varepsilon^b + C_{12}^b \delta \kappa^b, \quad (2.98)$$

$$\delta \mathcal{M}_c^b = \left( \int_{A^b} z^b \frac{\partial \sigma^b}{\partial D^b} dA^b \right) \delta \varepsilon^b + \left( \int_{A^b} (z^b)^2 \frac{\partial \sigma^b}{\partial D^b} dA^b \right) \delta \kappa^b = C_{21}^b \delta \varepsilon^b + C_{22}^b \delta \kappa^b. \quad (2.99)$$

Funkcije  $C_{11}^a(x)$ ,  $C_{12}^a(x) = C_{21}^a(x)$ ,  $C_{22}^a(x)$  in  $C_{11}^b(x^*)$ ,  $C_{12}^b(x^*) = C_{21}^b(x^*)$ ,  $C_{22}^b(x^*)$  predstavljajo komponente tangentne konstitucijske matrike  $\mathbf{C}^a(x)$  prečnega prereza sloja  $a$ , oziroma komponente tangentne konstitucijske matrike  $\mathbf{C}^b(x^*)$  prečnega prereza sloja  $b$  kompozitnega nosilca. V splošnem so te komponente odvisne od trenutne razporeditve tangentnega materialnega modula  $E_t^a = \partial \sigma^a / \partial D^a$  oziroma  $E_t^b = \partial \sigma^b / \partial D^b$  po prečnem prerezu in od dimenzij prerezov zgornjega oziroma spodnjega sloja kompozitnega nosilca. Za stabilne materiale oziroma prečne prereze mora biti tangentna konstitucijska matrika prečnega prereza sloja  $a$   $\mathbf{C}^a(x)$  oziroma prečnega prereza sloja  $b$   $\mathbf{C}^b(x^*)$  pozitivno definitna pri poljubnem  $x$  oziroma  $x^*$ . To pomeni, da morajo biti njeni glavni minorji pozitivni:

$$C_{11}^a > 0, \quad \det \mathbf{C}^a = C_{11}^a C_{22}^a - (C_{12}^a)^2 > 0, \quad (2.100)$$

$$C_{11}^b > 0, \quad \det \mathbf{C}^b = C_{11}^b C_{22}^b - (C_{12}^b)^2 > 0. \quad (2.101)$$

Materiale oziroma prečne prereze, ki ne zadoščajo zahtevam (2.100) in (2.101) imenujemo *nestabilni materiali* oziroma *nestabilni prečni prerezi*. Značilen primer takšnega nestabilnega materiala predstavlja beton v fazi mehčanja.

V primeru kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med slojema ima poleg ustreznih materialnih konstitucijskih enačb zgornjega in spodnjega sloja velik vpliv na nosilnost in togost tudi ustrezna tangencialna konstitucijska zveza stične površine med slojema. V splošnem zapišemo konstitucijsko enačbo stika vzdolž referenčne osi kompozitnega nosilca z enačbama:

$$q_t^a(x) = \mathcal{H}^a(x, \Delta^a(x), q_n^a(x), \dots), \quad (2.102)$$

$$q_t^b(x^*) = \mathcal{H}^b(x^*, \Delta^b(x^*), q_n^b(x^*), \dots). \quad (2.103)$$

S konstitucijskim zakonom stika torej povežemo tangencialno komponento linijske kontaktne obtežbe z značilnimi količinami na stiku med slojema kompozitnega nosilca kot so: zamik, normalna komponenta linijske kontaktne obtežbe in podobno. Funkciji  $\mathcal{H}^a$  in  $\mathcal{H}^b$  določimo z eksperimentalnimi raziskavami. Tangencialni komponenti linijske kontaktne obtežbe  $q_t^a$  in  $q_t^b$  sta s koeficientom lepenja in trenja stične površine povezani z normalnima komponentama linijske kontaktne obtežbe  $q_n^a$  in  $q_n^b$ , vendar številni raziskovalci, kot na primer [35, 42, 59], ta medsebojni vpliv običajno zanemarijo oziroma predpišejo kar zvezi med tangencialnima komponentama linijske kontaktne obtežbe in zdrsoma z enačbama:

$$q_t^a(x) = \mathcal{G}^a(\Delta^a(x)) \quad \text{in} \quad q_t^b(x^*) = \mathcal{G}^b(\Delta^b(x^*)). \quad (2.104)$$

To obliko konstitucijskega zakona stika med tangencialno komponento linijske kontaktne obtežbe in pripadajočim zamikom oziroma zdrsom pogosto imenujemo zveza *strižni tok-zamik*. Pri tem strižni tok predstavlja tangencialno komponento linijske kontaktne obtežbe.

Tako formuliran konstitucijski zakon stika pa ja nekoliko dvoumen. Glede na enačbi (2.104 a) in (2.104 b) velja v ravnotežni deformirani legi kompozitnega nosilca neenakost:

$$q_t^a(x) \neq q_t^b(x^*). \quad (2.105)$$

Glede na to, da velja

$$q_t^a(x) + q_t^b(x) = 0, \quad (2.106)$$

sklepamo, da sta v tangencialni smeri pri tako vpeljanem konstitucijskem zakonu stika v ravnotežju tista delca kompozitnega nosilca, ki solegata v nedeformirani legi. Prav gotovo bo potrebno v nadaljnih raziskavah to neskladje detajlneje analizirati.

S konstitucijskim zakonom stika (2.104) lahko opišemo večino načinov izvedbe stika med slojema kompozitnega nosilca. Najenostavnejši in zato pri analizi kompozitnih konstrukcij tudi največkrat uporabljen je linearen konstitucijski zakon stika, ki je:

$$q_t^a(x) = K \Delta^a(x) \quad \text{in} \quad q_t^b(x^*) = K \Delta^b(x^*). \quad (2.107)$$

Konstanto  $K$  v enačbi (2.107) imenujemo *koeficient togosti stika*.

## 2.4 IZREK O VIRTUALNEM DELU

Standardno ali Galerkinovo metodo končnih elementov pogosto izpeljemo s pomočjo izreka o virtualnem delu. Znano je, da izrek o virtualnem delu nadomešča ravnotežne pogoje in ustrezne statične robne pogoje. Ker je izpeljava izreka o virtualnem delu dobro znana, v disertaciji povzamemo izrek po literaturi [95]. Tudi sedaj zaradi preglednosti funkcijske argumente izpustimo. Izreka o virtualnem delu sloja  $a$  in sloja  $b$  kompozitnega nosilca sta:

$$\begin{aligned} \delta W^a = & \int_0^L \mathcal{N}^a \delta \varepsilon^a d\xi + \int_0^L \mathcal{M}^a \delta \kappa^a d\xi - \int_0^L (q_X^a + p_X^a) \delta u^a d\xi \\ & - \int_0^L (q_Z^a + p_Z^a) \delta w^a d\xi - \int_0^L m_y^a \delta \varphi^a d\xi - \sum_{i=1}^6 S_i^a \delta u_i^a = 0, \end{aligned} \quad (2.108)$$

$$\begin{aligned} \delta W^b &= \int_{0^*}^{L^*} \mathcal{N}^b \delta \varepsilon^b d\xi^* + \int_{0^*}^{L^*} \mathcal{M}^b \delta \kappa^b d\xi^* - \int_{0^*}^{L^*} (q_X^b + p_X^b) \delta u^b d\xi^* \\ &\quad - \int_{0^*}^{L^*} (q_Z^b + p_Z^b) \delta w^b d\xi^* - \int_{0^*}^{L^*} m_y^b \delta \varphi^b d\xi^* - \sum_{i=1}^6 S_i^b \delta u_i^b = 0. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Kot smo že povedali v predhodnih poglavjih, je pri formulaciji osnovnih enačb kompozitnega nosilca smiselno referenčno os sloja  $b$  reparametrizirati, nezveznost kinematičnih, ravnotežnih in konstitucijskih količin, ki je posledica previsov kompozitnega nosilca, pa obravnavati z ustrezno razdelitvijo definicijskega območja funkcij. Ne izgubimo na splošnosti, precej pa pridobimo na preglednosti, če v nadaljevanju zapišemo na primer izrek o virtualnem delu za deformirano obliko kompozitnega nosilca, kot jo prikazujemo na sliki 2.2(f). Predpostavimo tudi, da je z linijsko zunanjo obtežbo v referenčni osi obtežen samo sloj  $b$  kompozitnega nosilca. S temi predpostavkami dobi izrek o virtualnem delu dvoslojnega kompozitnega nosilca obliko:

$$\begin{aligned} \delta W &= \delta W^a + \delta W^b = \int_0^{l_a^a} \mathcal{N}^a \delta \varepsilon^a d\xi + \int_{l_1^a}^{l_d^a} \mathcal{N}^a \delta \varepsilon^a d\xi + \int_{l_d^a}^L \mathcal{N}^a \delta \varepsilon^a d\xi + \\ &\quad \int_0^{l_1^a} \mathcal{M}^a \delta \varepsilon^a d\xi + \int_{l_1^a}^{l_d^a} \mathcal{M}^a \delta \varepsilon^a d\xi + \int_{l_d^a}^L \mathcal{M}^a \delta \varepsilon^a d\xi + \\ &\quad \int_{0^*}^{L^*} \mathcal{N}^b \delta \varepsilon^b d\xi + \int_{0^*}^{L^*} \mathcal{M}^b \delta \kappa^b d\xi - \\ &\quad - \int_{l_1^a}^{l_d^a} q_X^a \delta u^a d\xi - \int_{l_1^a}^{l_d^a} q_Z^a \delta w^a d\xi - \\ &\quad - \int_{0^*}^{L^*} (q_X^b + p_X^b) \delta u^b d\xi^* - \int_{0^*}^{L^*} (q_Z^b + p_Z^b) \delta w^b d\xi^* - \int_{0^*}^{L^*} m_y^b \delta \varphi^b d\xi^* - \\ &\quad - \sum_{i=1}^6 S_i^a \delta u_i^a - \sum_{i=1}^6 S_i^b \delta u_i^b = 0. \end{aligned} \quad (2.110)$$

V enačbi (2.110) predstavljajo količine  $\delta u^a$ ,  $\delta u^b$ ,  $\delta w^a$ ,  $\delta w^b$ ,  $\delta \varphi^b$  virtualne spremembe pomikov in zasukov, količine  $\delta \varepsilon^a$ ,  $\delta \varepsilon^b$ ,  $\delta \kappa^a$ ,  $\delta \kappa^b$  pa virtualne spremembe deformacijskih količin referenčne osi kompozitnega nosilca. Variacije  $\delta u_i^a$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) so virtualne spremembe robnih kinematičnih količin spodnjega sloja  $a$  kompozitnega nosilca:

$$\begin{aligned} \delta u_1^a &= \delta u^a(0), & \delta u_2^a &= \delta w^a(0), & \delta u_3^a &= \delta \varphi^a(0), \\ \delta u_4^a &= \delta u^a(L), & \delta u_5^a &= \delta w^a(L), & \delta u_6^a &= \delta \varphi^a(L), \end{aligned}$$

variacije  $\delta u_i^b$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) pa so virtualne spremembe robnih kinematičnih količin sloja  $b$  kompozitnega nosilca:

$$\begin{aligned} \delta u_1^b &= \delta u^b(0), & \delta u_2^b &= \delta w^b(0), & \delta u_3^b &= \delta \varphi^b(0), \\ \delta u_4^b &= \delta u^b(L), & \delta u_5^b &= \delta w^b(L), & \delta u_6^b &= \delta \varphi^b(L). \end{aligned}$$

# 3

## *Posplošene diskretne ravnotežne enačbe kompozitnih nosilcev*

Točno rešitev sistema kinematičnih, ravnotežnih in konstitucijskih enačb z ustreznimi robnimi pogoji za analizo kompozitnih nosilcev v splošnem ne poznamo. Poznamo jo samo v primeru, ko kompozitni nosilec modeliramo z geometrijsko linearno teorijo ravninskih nosilcev in z linearnimi konstitucijskimi zakoni [41, 81]. Zato moramo osnovne enačbe kompozitnih nosilcev v splošnem rešiti numerično. Najpogosteje jih rešimo z metodo končnih elementov. V disertaciji predstavimo nov računski postopek za analizo kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med sloji. Postopek je zasnovan na t.i. deformacijski metodi končnih elementov. Družino deformacijskih končnih elementov in pripadajočih posplošenih diskretnih ravnotežnih enačb kompozitnega nosilca vpeljemo s pomočjo modificiranega izreka o virtualnem delu.

### 3.1 MODIFICIRANI IZREK O VIRTUALNEM DELU

Pri izpeljavi modificiranega izreka o virtualnem delu za kompozitne nosilce bomo predpostavili, da se kompozitni nosilec zaradi zunanjih vplivov deformira tako, kot je prikazano na sliki 2.2(f). S tem ne izgubimo veliko na splošnosti, pridobimo pa na preglednosti izpeljave. V primeru, da se kompozitni nosilec deformira drugače, je pri izpeljavi potrebno ustrezno spremeniti le integracijske meje. Preglednost izpeljave povečamo tudi s tem, da pri zapisu opustimo funkcijske argumente, in da z zunanjo zvezno obtežbo obtežimo samo sloj  $b$  kompozitnega nosilca. Izhodišče izpeljave modificiranega izreka o virtualnem delu predstavlja izrek o virtualnem delu (2.110). Ko v funkcionalu (2.110) upoštevamo konstitucijske enačbe (2.86), (2.87), (2.91) in (2.92), dobi obliko:

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_0^{l_i^a} \mathcal{N}_c^a \delta \varepsilon^a d\xi + \int_{l_i^a}^{l_d^a} \mathcal{N}_c^a \delta \varepsilon^a d\xi + \int_{l_d^a}^L \mathcal{N}_c^a \delta \varepsilon^a d\xi + \\ & \int_0^{l_i^a} \mathcal{M}_c^a \delta \varepsilon^a d\xi + \int_{l_i^a}^{l_d^a} \mathcal{M}_c^a \delta \varepsilon^a d\xi + \int_{l_d^a}^L \mathcal{M}_c^a \delta \varepsilon^a d\xi + \\ & \int_{0^*}^{L^*} \mathcal{N}_c^b \delta \varepsilon^b d\xi + \int_{0^*}^{L^*} \mathcal{M}_c^b \delta \kappa^b d\xi - \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& - \int_{l_i^a}^{l_d^a} q_X^a \delta u^a d\xi - \int_{l_i^a}^{l_d^a} q_Z^a \delta w^a d\xi - \\
& - \int_{0^*}^{L^*} (q_X^b + p_X^b) \delta u^b d\xi^* - \int_{0^*}^{L^*} (q_Z^b + p_Z^b) \delta w^b d\xi^* - \int_{0^*}^{L^*} m_y^b \delta \varphi^b d\xi - \\
& - \sum_{i=1}^6 S_i^a \delta u_i^a - \sum_{i=1}^6 S_i^b \delta u_i^b = 0.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

V funkcionalu (3.1) morajo deformacijske in geometrijske spremenljivke zadostiti kinematičnim enačbam (2.22)–(2.27) in (2.51)–(2.56), torej:

$x \in [0, l_l^a] \cup [l_l^a, l_d^a] \cup [l_d^a, L]$  :

$$1 + \frac{du^a}{dx} - (1 + \varepsilon^a) \cos \varphi^a = 0, \tag{3.2}$$

$$\frac{dw^a}{dx} + (1 + \varepsilon^a) \sin \varphi^a = 0, \tag{3.3}$$

$$\frac{d\varphi^a}{dx} - \kappa^a = 0, \tag{3.4}$$

$x^* \in [0^*, L^*]$  :

$$1 + \frac{du^b}{dx^*} - (1 + \varepsilon^b) \cos \varphi^b = 0, \tag{3.5}$$

$$\frac{dw^b}{dx^*} + (1 + \varepsilon^b) \sin \varphi^b = 0, \tag{3.6}$$

$$\frac{d\varphi^b}{dx^*} - \kappa^b = 0. \tag{3.7}$$

Dodatno so kinematične količine kompozitnega nosilca na stiku med slojema povezane tudi s kinematičnima veznima enačbama:

$x \in [l_l^a, l_d^a]$  in  $x^* \in [0^*, L^*]$  :

$$x + u^a(x) = x^* + u^b(x^*), \tag{3.8}$$

$$w^a(x) = w^b(x^*). \tag{3.9}$$

Ko s pomočjo kinematičnih enačb (3.2)–(3.7) izrazimo deformacijske količine s kinematičnimi in dobljene izraze vstavimo v funkcional (3.1), postane funkcional odvisen od kinematičnih količin. V tem primeru govorimo o končnih elementih zasnovanih na pomikih. Kot pa je dobro znano, imajo ti elementi velike pomankljivosti, kot so strižno in membransko blokiranje, oscilacije napetosti in podobno [60, 74, 75]. V tej disertaciji se omenjenim problemom izognemo z uporabo t.i. deformacijskih končnih elementov [13, 60]. Te vpeljemo, podobno kot sta jih v svojih disertacijah za stabilnostno analizo ravninskih nosilcev oziroma za analizo armiranobetonskih okvirjev vpeljala Planinc [60] in Bratina [13], z uporabo modificiranega izreka o virtualnem delu.

Enačbe (3.2)–(3.7) predstavljajo v funkcionalu (3.1) vezi za dvanajst neodvisnih kinematičnih in deformacijskih funkcij. Podobno kot v metodi Lagrangevih množiteljev pri vezanih nalogah variacijskega računa, tudi tu kinematične enačbe (3.2)–(3.7) pomnožimo z vsaj enkrat odvedljivimi zaenkrat poljubnimi funkcijami  $\mathcal{R}_X^a$ ,  $\mathcal{R}_Z^a$ ,  $\mathcal{M}^a$  in  $\mathcal{R}_X^b$ ,  $\mathcal{R}_Z^b$  in  $\mathcal{M}^b$ . Nato produkte

integriramo po osi kompozitnega nosilca, dobljene enačbe variiramo po  $u^a$ ,  $u^b$ ,  $w^a$ ,  $w^b$ ,  $\varphi^a$ ,  $\varphi^b$ ,  $\varepsilon^a$ ,  $\varepsilon^b$ ,  $\kappa^a$ ,  $\kappa^b$ ,  $\mathcal{R}_X^a$ ,  $\mathcal{R}_Z^a$ ,  $\mathcal{M}^a$ ,  $\mathcal{R}_X^b$ ,  $\mathcal{R}_Z^b$  in  $\mathcal{M}^b$  ter dobimo:

$$\begin{aligned}
 \delta D_1 = & \int_0^{l_i^a} (1 + u^{aI} - (1 + \varepsilon^a) \cos \varphi^a) \delta \mathcal{R}_X^a d\xi + \\
 & \int_0^{l_i^a} \mathcal{R}_X^a (\delta u^{aI} - \cos \varphi^a \delta \varepsilon^a + (1 + \varepsilon^a) \sin \varphi^a \delta \varphi^a) d\xi + \\
 & \int_{l_i^a}^{l_d^a} (1 + u^{aI} - (1 + \varepsilon^a) \cos \varphi^a) \delta \mathcal{R}_X^a d\xi + \\
 & \int_{l_i^a}^{l_d^a} \mathcal{R}_X^a (\delta u^{aI} - \cos \varphi^a \delta \varepsilon^a + (1 + \varepsilon^a) \sin \varphi^a \delta \varphi^a) d\xi + \\
 & \int_{l_d^a}^L (1 + u^{aI} - (1 + \varepsilon^a) \cos \varphi^a) \delta \mathcal{R}_X^a d\xi + \\
 & \int_{l_d^a}^L \mathcal{R}_X^a (\delta u^{aI} - \cos \varphi^a \delta \varepsilon^a + (1 + \varepsilon^a) \sin \varphi^a \delta \varphi^a) d\xi + \\
 & \int_{0^*}^{L^*} (1 + u^{bI} - (1 + \varepsilon^b) \cos \varphi^b) \delta \mathcal{R}_X^b d\xi^* + \\
 & \int_{0^*}^{L^*} \mathcal{R}_X^b (\delta u^{bI} - \cos \varphi^b \delta \varepsilon^b + (1 + \varepsilon^b) \sin \varphi^b \delta \varphi^b) d\xi^* = 0, \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta D_2 = & \int_0^{l_i^a} (w^{aI} + (1 + \varepsilon^a) \sin \varphi^a) \delta \mathcal{R}_Z^a d\xi + \\
 & \int_0^{l_i^a} \mathcal{R}_Z^a (\delta w^{aI} + \sin \varphi^a \delta \varepsilon^a + (1 + \varepsilon^a) \cos \varphi^a \delta \varphi^a) d\xi + \\
 & \int_{l_i^a}^{l_d^a} (w^{aI} + (1 + \varepsilon^a) \sin \varphi^a) \delta \mathcal{R}_Z^a d\xi + \\
 & \int_{l_i^a}^{l_d^a} \mathcal{R}_Z^a (\delta w^{aI} + \sin \varphi^a \delta \varepsilon^a + (1 + \varepsilon^a) \cos \varphi^a \delta \varphi^a) d\xi + \\
 & \int_{l_d^a}^L (w^{aI} + (1 + \varepsilon^a) \sin \varphi^a) \delta \mathcal{R}_Z^a d\xi + \\
 & \int_{l_d^a}^L \mathcal{R}_Z^a (\delta w^{aI} + \sin \varphi^a \delta \varepsilon^a + (1 + \varepsilon^a) \cos \varphi^a \delta \varphi^a) d\xi + \\
 & \int_{0^*}^{L^*} (w^{bI} + (1 + \varepsilon^b) \sin \varphi^b) \delta \mathcal{R}_Z^b d\xi^* + \\
 & \int_{0^*}^{L^*} \mathcal{R}_Z^b (\delta w^{bI} + \sin \varphi^b \delta \varepsilon^b + (1 + \varepsilon^b) \cos \varphi^b \delta \varphi^b) d\xi^* = 0, \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta D_3 = & \int_0^{l_i^a} ((\varphi^{a'} - \kappa^a) \delta \mathcal{M}^a + \mathcal{M}^a \delta \varphi^{a'} - \mathcal{M}^a \delta \kappa^a) d\xi + \\
& \int_{l_i^a}^{l_d^a} ((\varphi^{a'} - \kappa^a) \delta \mathcal{M}^a + \mathcal{M}^a \delta \varphi^{a'} - \mathcal{M}^a \delta \kappa^a) d\xi + \\
& \int_{l_d^a}^L ((\varphi^{a'} - \kappa^a) \delta \mathcal{M}^a + \mathcal{M}^a \delta \varphi^{a'} - \mathcal{M}^a \delta \kappa^a) d\xi + \\
& \int_{0^*}^{L^*} ((\varphi^{b'} - \kappa^b) \delta \mathcal{M}^b + \mathcal{M}^b \delta \varphi^{b'} - \mathcal{M}^b \delta \kappa^b) d\xi^* = 0. \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Izraze (3.10)–(3.12) prištejemo k funkcionalu (3.1), integrale  $\int \mathcal{R}_X^a \delta u^{a'} d\xi$ ,  $\int \mathcal{R}_Z^a \delta w^{a'} d\xi$ ,  $\int \mathcal{M}^a \delta \varphi^{a'} d\xi$  ter  $\int \mathcal{R}_X^b \delta u^{b'} d\xi^*$ ,  $\int \mathcal{R}_Z^b \delta w^{b'} d\xi^*$ ,  $\int \mathcal{M}^b \delta \varphi^{b'} d\xi^*$  v enačbah (3.10)–(3.12) pa preuredimo z integracijo po delih. Za sloj  $a$  kompozitnega nosilca prikažemo integracijo po delih le za interval  $[0, l_i^a]$ , saj je za preostala intervala  $[l_i^a, l_d^a]$  in  $[l_d^a, L]$  postopek povsem enak, le integracijske meje ustrezno spremenimo. Torej:

$$\begin{aligned}
\int_0^{l_i^a} \mathcal{R}_X^a \delta u^{a'} d\xi &= \mathcal{R}_X^a \delta u^a \Big|_0^{l_i^a} - \int_0^{l_i^a} \mathcal{R}_X^{a'} \delta u^a d\xi, \\
\int_0^{l_i^a} \mathcal{R}_Z^a \delta w^{a'} d\xi &= \mathcal{R}_Z^a \delta w^a \Big|_0^{l_i^a} - \int_0^{l_i^a} \mathcal{R}_Z^{a'} \delta w^a d\xi, \\
\int_0^{l_i^a} \mathcal{M}^a \delta \varphi^{a'} d\xi &= \mathcal{M}^a \delta \varphi^a \Big|_0^{l_i^a} - \int_0^{l_i^a} \mathcal{M}^{a'} \delta \varphi^a d\xi
\end{aligned} \tag{3.13}$$

in

$$\begin{aligned}
\int_{0^*}^{L^*} \mathcal{R}_X^b \delta u^{b'} d\xi^* &= \mathcal{R}_X^b \delta u^b \Big|_{0^*}^{L^*} - \int_{0^*}^{L^*} \mathcal{R}_X^{b'} \delta u^b d\xi^*, \\
\int_{0^*}^{L^*} \mathcal{R}_Z^b \delta w^{b'} d\xi^* &= \mathcal{R}_Z^b \delta w^b \Big|_{0^*}^{L^*} - \int_{0^*}^{L^*} \mathcal{R}_Z^{b'} \delta w^b d\xi^*, \\
\int_{0^*}^{L^*} \mathcal{M}^b \delta \varphi^{b'} d\xi^* &= \mathcal{M}^b \delta \varphi^b \Big|_{0^*}^{L^*} - \int_{0^*}^{L^*} \mathcal{M}^{b'} \delta \varphi^b d\xi^*.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Pri integraciji po delih smo za sloj  $a$  kompozitnega nosilca vpeljali naslednje oznake:

$$\mathcal{R}_X^a \delta u^a \Big|_0^{l_i^a} = \mathcal{R}_X^{a,l} (l_i^a) \delta u^a (l_i^a) - \mathcal{R}_X^a (0) \delta u^a (0), \tag{3.15}$$

$$\mathcal{R}_X^a \delta u^a \Big|_{l_i^a}^{l_d^a} = \mathcal{R}_X^{a,l} (l_d^a) \delta u^a (l_d^a) - \mathcal{R}_X^{a,d} (l_i^a) \delta u^a (l_i^a), \tag{3.16}$$

$$\mathcal{R}_X^a \delta u^a \Big|_{l_d^a}^L = \mathcal{R}_X^a (L) \delta u^a (L) - \mathcal{R}_X^{a,l} (l_d^a) \delta u^a (l_d^a). \tag{3.17}$$

Podobno kot smo v enačbah (3.15)–(3.17) označili robne vrednosti ravnotežnih količin  $\mathcal{R}_X^a$ , označimo tudi robne vrednosti ravnotežnih količin  $\mathcal{R}_Z^a$  in  $\mathcal{M}^a$ . S tem poudarimo razliko med robnimi ravnotežnimi količinami na previsih ter na delu kompozitnega nosilca na stiku med slojema.

Ko izraze v funkcionalu uredimo po neodvisnih variacijah in upoštevamo zveze med komponentami ravnotežnih sil:

$$\mathcal{N}^a = \mathcal{R}_X^a \cos \varphi^a - \mathcal{R}_Z^a \sin \varphi^a, \quad (3.18)$$

$$\mathcal{Q}^a = \mathcal{R}_X^a \sin \varphi^a + \mathcal{R}_Z^a \cos \varphi^a, \quad (3.19)$$

$$\mathcal{N}^b = \mathcal{R}_X^b \cos \varphi^b - \mathcal{R}_Z^b \sin \varphi^b, \quad (3.20)$$

$$\mathcal{Q}^b = \mathcal{R}_X^b \sin \varphi^b + \mathcal{R}_Z^b \cos \varphi^b, \quad (3.21)$$

dobimo *Hu-Washizujev funkcional* oziroma *razširjeni izrek o virtualnem delu*:

$$\begin{aligned} \delta \bar{W}^* = & \int_0^{l_i^a} \left( (\mathcal{N}_c^a - \mathcal{N}^a) \delta \varepsilon^a + (\mathcal{M}_c^a - \mathcal{M}^a) \delta \kappa^a - \right. \\ & \mathcal{R}_X^{aI} \delta u^a - \mathcal{R}_Z^{aI} \delta w^a + (-\mathcal{M}^{aI} + (1 + \varepsilon^a) \mathcal{Q}^a) \delta \varphi^a + \\ & \left. (1 + u^{aI} - (1 + \varepsilon^a) \cos \varphi^a) \delta \mathcal{R}_X^a + (w^{aI} + (1 + \varepsilon^a) \sin \varphi^a) \delta \mathcal{R}_Z^a + (\varphi^{aI} - \kappa^a) \delta \mathcal{M}^a \right) d\xi + \\ & \int_{l_i^a}^{l_d^a} \left( (\mathcal{N}_c^a - \mathcal{N}^a) \delta \varepsilon^a + (\mathcal{M}_c^a - \mathcal{M}^a) \delta \kappa^a - \right. \\ & (\mathcal{R}_X^{aI} + q_X^a) \delta u^a - (\mathcal{R}_Z^{aI} + q_Z^a) \delta w^a + (-\mathcal{M}^{aI} + (1 + \varepsilon^a) \mathcal{Q}^a) \delta \varphi^a + \\ & \left. (1 + u^{aI} - (1 + \varepsilon^a) \cos \varphi^a) \delta \mathcal{R}_X^a + (w^{aI} + (1 + \varepsilon^a) \sin \varphi^a) \delta \mathcal{R}_Z^a + (\varphi^{aI} - \kappa^a) \delta \mathcal{M}^a \right) d\xi + \\ & \int_{l_d^a}^L \left( (\mathcal{N}_c^a - \mathcal{N}^a) \delta \varepsilon^a + (\mathcal{M}_c^a - \mathcal{M}^a) \delta \kappa^a - \right. \\ & \mathcal{R}_X^{aI} \delta u^a - \mathcal{R}_Z^{aI} \delta w^a + (-\mathcal{M}^{aI} + (1 + \varepsilon^a) \mathcal{Q}^a) \delta \varphi^a + \\ & \left. (1 + u^{aI} - (1 + \varepsilon^a) \cos \varphi^a) \delta \mathcal{R}_X^a + (w^{aI} + (1 + \varepsilon^a) \sin \varphi^a) \delta \mathcal{R}_Z^a + (\varphi^{aI} - \kappa^a) \delta \mathcal{M}^a \right) d\xi + \\ & \int_{0^*}^{L^*} \left( (\mathcal{N}_c^b - \mathcal{N}^b) \delta \varepsilon^b + (\mathcal{M}_c^b - \mathcal{M}^b) \delta \kappa^b - \right. \\ & (\mathcal{R}_X^{bI} + p_X + q_X^b) \delta u^b - (\mathcal{R}_Z^{bI} + p_Z + q_Z^b) \delta w^b + (-\mathcal{M}^{bI} + (1 + \varepsilon^b) \mathcal{Q}^b - m_Y) \delta \varphi^b + \\ & \left. (1 + u^{bI} - (1 + \varepsilon^b) \cos \varphi^b) \delta \mathcal{R}_X^b + (w^{bI} + (1 + \varepsilon^b) \sin \varphi^b) \delta \mathcal{R}_Z^b + (\varphi^{bI} - \kappa^b) \delta \mathcal{M}^b \right) d\xi^* + \\ & (-S_1^a - \mathcal{R}_X^a(0)) \delta u^a(0) + (-S_2^a - \mathcal{R}_Z^a(0)) \delta w^a(0) + (-S_3^a - \mathcal{M}^a(0)) \delta \varphi^a(0) + \\ & (-S_4^a + \mathcal{R}_X^a(L)) \delta u^a(L) + (-S_5^a + \mathcal{R}_Z^a(L)) \delta w^a(L) + (-S_6^a + \mathcal{M}^a(L)) \delta \varphi^a(L) + \\ & (\mathcal{R}_X^{a,l}(l_i^a) - \mathcal{R}_X^{a,d}(l_i^a)) \delta u^a(l_i^a) + (\mathcal{R}_Z^{a,l}(l_i^a) - \mathcal{R}_Z^{a,d}(l_i^a)) \delta w^a(l_i^a) + \\ & (\mathcal{M}^{a,l}(l_i^a) - \mathcal{M}^{a,d}(l_i^a)) \delta \varphi^a(l_i^a) + (\mathcal{R}_X^{a,l}(l_d^a) - \mathcal{R}_X^{a,d}(l_d^a)) \delta u^a(l_d^a) + \\ & (\mathcal{R}_Z^{a,l}(l_d^a) - \mathcal{R}_Z^{a,d}(l_d^a)) \delta w^a(l_d^a) + (\mathcal{M}^{a,l}(l_d^a) - \mathcal{M}^{a,d}(l_d^a)) \delta \varphi^a(l_d^a) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (-S_1^b - \mathcal{R}_X^b(0^*))\delta u^b(0^*) + (-S_2^b - \mathcal{R}_Z^b(0^*))\delta w^b(0^*) + (-S_3^b - \mathcal{M}^b(0^*))\delta\varphi^b(0^*) + \\ & (-S_4^b + \mathcal{R}_X^b(L^*))\delta u^b(L^*) + (-S_5^b + \mathcal{R}_Z^b(L^*))\delta w^b(L^*) + (-S_6^b + \mathcal{M}^b(L^*))\delta\varphi^b(L^*) = 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

V funkcionalu (3.22) predstavljajo variacije  $\delta u^a$ ,  $\delta u^b$ ,  $\delta w^a$ ,  $\delta w^b$ ,  $\delta\varphi^a$ ,  $\delta\varphi^b$ ,  $\delta\varepsilon^a$ ,  $\delta\varepsilon^b$ ,  $\delta\kappa^a$ ,  $\delta\kappa^b$ ,  $\delta\mathcal{R}_X^a$ ,  $\delta\mathcal{R}_Z^a$ ,  $\delta\mathcal{M}^a$ ,  $\delta\mathcal{R}_X^b$ ,  $\delta\mathcal{R}_Z^b$  in  $\delta\mathcal{M}^b$  poljubne neodvisne funkcije, variacije vozliščnih kinematičnih količin  $\delta u^a(0)$ ,  $\delta w^a(0)$ ,  $\delta\varphi^a(0)$ ,  $\delta u^a(x_l^a)$ ,  $\dots$ ,  $\delta u^b(L)$ ,  $\delta w^b(L)$ ,  $\delta\varphi^b(L)$  pa poljubne neodvisne parametre. Osnovna lema variacijskega računa zahteva, da so izrazi pri neodvisnih variacijah enaki nič. Pripadajoče *Euler-Lagrangeve enačbe* ravninskega dvoslojnega kompozitnega nosilca so sestavljene iz *konstitucijskih*, *kinematičnih* in *ravnotežnih* enačb in so:

*konstitucijske enačbe*

$$x \in [0, l_l^a] \cup [l_l^a, l_d^a] \cup [l_d^a, L] :$$

$$f_1(\varepsilon^a, \kappa^a, \varphi^a, \mathcal{R}_X^a, \mathcal{R}_Z^a) = \mathcal{N}_c^a - \mathcal{N}^a = 0, \quad (3.23)$$

$$f_2(\varepsilon^a, \kappa^a, \mathcal{M}^a) = \mathcal{M}_c^a - \mathcal{M}^a = 0, \quad (3.24)$$

$$x^* \in [0^*, L^*] :$$

$$f_3(\varepsilon^b, \kappa^b, \varphi^b, \mathcal{R}_X^b, \mathcal{R}_Z^b) = \mathcal{N}_c^b - \mathcal{N}^b = 0, \quad (3.25)$$

$$f_4(\varepsilon^b, \kappa^b, \mathcal{M}^b) = \mathcal{M}_c^b - \mathcal{M}^b = 0, \quad (3.26)$$

*kinematične enačbe*

$$x \in [0, l_l^a] \cup [l_l^a, l_d^a] \cup [l_d^a, L] :$$

$$f_5(\varepsilon^a, u^{a'l}, \varphi^a) = 1 + u^{a'l} - (1 + \varepsilon^a) \cos \varphi^a = 0, \quad (3.27)$$

$$f_6(\varepsilon^a, w^{a'l}, \varphi^a) = w^{a'l} + (1 + \varepsilon^a) \sin \varphi^a = 0, \quad (3.28)$$

$$f_7(\kappa^a, \varphi^{a'l}) = \varphi^{a'l} - \kappa^a = 0, \quad (3.29)$$

$$x^* \in [0^*, L^*] :$$

$$f_8(\varepsilon^b, u^{b'l}, \varphi^b) = 1 + u^{b'l} - (1 + \varepsilon^b) \cos \varphi^b = 0, \quad (3.30)$$

$$f_9(\varepsilon^b, w^{b'l}, \varphi^b) = w^{b'l} + (1 + \varepsilon^b) \sin \varphi^b = 0, \quad (3.31)$$

$$f_{10}(\kappa^b, \varphi^{b'l}) = \varphi^{b'l} - \kappa^b = 0, \quad (3.32)$$

*ravnotežne enačbe*

$$x \in [0, l_l^a] :$$

$$f_{11}(\mathcal{R}_X^{a'l}) = -\mathcal{R}_X^{a'l} = 0, \quad (3.33)$$

$$f_{12}(\mathcal{R}_Z^{a'l}) = -\mathcal{R}_Z^{a'l} = 0, \quad (3.34)$$

$$f_{13}(\varepsilon^a, \varphi^a, \mathcal{R}_X^a, \mathcal{R}_Z^a, \mathcal{M}^{a'l}) = -\mathcal{M}^{a'l} + (1 + \varepsilon^a) \mathcal{Q}^a = 0, \quad (3.35)$$

$$x \in [l_l^a, l_d^a] :$$

$$f_{14}(\mathcal{R}_X^{a'l}, q_X^a) = -\mathcal{R}_X^{a'l} - q_X^a = 0, \quad (3.36)$$

$$f_{15}(\mathcal{R}_Z^{a'l}, q_Z^a) = -\mathcal{R}_Z^{a'l} - q_Z^a = 0, \quad (3.37)$$

$$f_{16}(\varepsilon^a, \varphi^a, \mathcal{R}_X^a, \mathcal{R}_Z^a, \mathcal{M}^{a'l}) = -\mathcal{M}^{a'l} + (1 + \varepsilon^a) \mathcal{Q}^a = 0, \quad (3.38)$$

$x \in [l_d^a, L]$  :

$$f_{17}(\mathcal{R}_X^{a'}) = -\mathcal{R}_X^{a'} = 0, \quad (3.39)$$

$$f_{18}(\mathcal{R}_Z^{a'}) = -\mathcal{R}_Z^{a'} = 0, \quad (3.40)$$

$$f_{19}(\varepsilon^a, \varphi^a, \mathcal{R}_X^a, \mathcal{R}_Z^a, \mathcal{M}^{a'}) = -\mathcal{M}^{a'} + (1 + \varepsilon^a)\mathcal{Q}^a = 0, \quad (3.41)$$

$x^* \in [0^*, L^*]$  :

$$f_{20}(\mathcal{R}_X^{b'}, \lambda, q_x^b) = -\mathcal{R}_X^{b'} - p_X - q_x^b = 0, \quad (3.42)$$

$$f_{21}(\mathcal{R}_Z^{b'}, \lambda, q_z^b) = -\mathcal{R}_Z^{b'} - p_Z - q_z^b = 0, \quad (3.43)$$

$$f_{22}(\varepsilon^b, \varphi^b, \mathcal{R}_X^b, \mathcal{R}_Z^b, \mathcal{M}^{b'}, \lambda) = -\mathcal{M}^{b'} + (1 + \varepsilon^b)\mathcal{Q}^b - m_Y = 0. \quad (3.44)$$

Pripadajoči naravni ali statični robni pogoji so:

$x = 0$  :

$$-S_1^a - \mathcal{R}_X^a(0) = 0, \quad (3.45)$$

$$-S_2^a - \mathcal{R}_Z^a(0) = 0, \quad (3.46)$$

$$-S_3^a - \mathcal{M}^a(0) = 0, \quad (3.47)$$

$x = l_l^a$  :

$$\mathcal{R}_X^{a,l}(l_l^a) - \mathcal{R}_X^{a,d}(l_l^a) = 0, \quad (3.48)$$

$$\mathcal{R}_Z^{a,l}(l_l^a) - \mathcal{R}_Z^{a,d}(l_l^a) = 0, \quad (3.49)$$

$$\mathcal{M}^{a,l}(l_l^a) - \mathcal{M}^{a,d}(l_l^a) = 0, \quad (3.50)$$

$x = l_d^a$  :

$$\mathcal{R}_X^{a,l}(l_d^a) - \mathcal{R}_X^{a,d}(l_d^a) = 0, \quad (3.51)$$

$$\mathcal{R}_Z^{a,l}(l_d^a) - \mathcal{R}_Z^{a,d}(l_d^a) = 0, \quad (3.52)$$

$$\mathcal{M}^{a,l}(l_d^a) - \mathcal{M}^{a,d}(l_d^a) = 0, \quad (3.53)$$

$x = L$  :

$$-S_4^a + \mathcal{R}_X^a(L) = 0, \quad (3.54)$$

$$-S_5^a + \mathcal{R}_Z^a(L) = 0, \quad (3.55)$$

$$-S_6^a + \mathcal{M}^a(L) = 0, \quad (3.56)$$

$x^* = 0^*$  :

$$-S_1^b - \mathcal{R}_X^b(0^*) = 0, \quad (3.57)$$

$$-S_2^b - \mathcal{R}_Z^b(0^*) = 0, \quad (3.58)$$

$$-S_3^b - \mathcal{M}^b(0^*) = 0, \quad (3.59)$$

$x^* = L^*$  :

$$-S_4^b + \mathcal{R}_X^b(L^*) = 0, \quad (3.60)$$

$$-S_5^b + \mathcal{R}_Z^b(L^*) = 0, \quad (3.61)$$

$$-S_6^b + \mathcal{M}^b(L^*) = 0. \quad (3.62)$$

Napetostno in deformacijsko stanje dvoslojnega kompozitnega nosilca tako določajo Euler–Lagran-geve enačbe (3.23)–(3.62) in posplošene vezne enačbe:

$$x + u^a(x) = x^* + u^b(x^*), \quad (3.63)$$

$$w^a(x) = w^b(x^*), \quad (3.64)$$

$$q_n^a(x) + q_n^b(x^*) = 0, \quad (3.65)$$

$$q_t^a(x) = \mathcal{H}^a(x, \Delta^a, q_n^a, \dots), \quad (3.66)$$

$$q_t^b(x^*) = \mathcal{H}^b(x^*, \Delta^b, q_n^b, \dots). \quad (3.67)$$

Sistem enačb (3.23)–(3.44) in (3.63)–(3.67) predstavlja sistem 21 nelinearnih algebraičnih in diferencialnih enačb, s katerimi določimo 21 neznanih funkcij:  $u^a$ ,  $w^a$ ,  $\varphi^a$ ,  $\varepsilon^a$ ,  $\kappa^a$ ,  $\mathcal{R}_X^a$ ,  $\mathcal{R}_Z^a$ ,  $\mathcal{M}^a$ ,  $u^b$ ,  $w^b$ ,  $\varphi^b$ ,  $\varepsilon^b$ ,  $\kappa^b$ ,  $\mathcal{R}_X^b$ ,  $\mathcal{R}_Z^b$ ,  $\mathcal{M}^b$  ter  $q_n^a$ ,  $q_n^b$ ,  $q_t^a$ ,  $q_t^b$ ,  $x^*$ . Zdrsa  $\Delta^a(x)$  in  $\Delta^b(x^*)$ , ki nastopata v sistemu enačb, izračunamo z enačbama (2.47) in (2.48).

Kot smo pokazali v podpoglavju *Kinematične enačbe*, lahko kinematične enačbe kompozitnega nosilca na stiku med slojema (3.27)–(3.32) enakovredno nadomestimo z modificiranimi kinematičnimi enačbami:

$x \in [0, l_l^a] \cup [l_l^a, l_d^a] \cup [l_d^a, L]$  :

$$f_5(\varepsilon^a, u^{a'}, \varphi^a) = 1 + u^{a'} - (1 + \varepsilon^a) \cos \varphi^a = 0, \quad (3.68)$$

$$f_6(\varepsilon^a, w^{a'}, \varphi^a) = w^{a'} + (1 + \varepsilon^a) \sin \varphi^a = 0, \quad (3.69)$$

$$f_7(\kappa^a, \varphi^{a'}) = \varphi^{a'} - \kappa^a = 0, \quad (3.70)$$

$x \in [l_l^a, l_d^a]$  in  $x^* \in [0^*, L^*]$  :

$$f_8(\varepsilon^b, u^{b'}, \varphi^b) = 1 + u^{b'} - (1 + \varepsilon^b) \cos \varphi^b = 0, \quad (3.71)$$

$$f_9(x, x^*, \varphi^a, \varphi^b) = \varphi^a(x) - \varphi^b(x^*) = 0, \quad (3.72)$$

$$f_{10}(x, x^*, \varepsilon^a, \varepsilon^b, \kappa^a, \kappa^b) = \kappa^b(x^*) - \kappa^a(x) \frac{1 + \varepsilon^b(x^*)}{1 + \varepsilon^a(x)} = 0. \quad (3.73)$$

Enačbe (3.64), (3.66), (3.67), (3.72) in (3.73) so zelo preproste, zato jim v nadaljevanju točno zadostimo. Relativno preproste so tudi kinematične enačbe (3.68)–(3.71), ki jih rešimo z integracijo:

$x \in [0, l_l^a]$  :

$$u^a(x) = u^a(0) + \int_0^x ((1 + \varepsilon^a) \cos \varphi^a - 1) d\xi, \quad (3.74)$$

$$w^a(x) = w^a(0) - \int_0^x ((1 + \varepsilon^a) \sin \varphi^a) d\xi, \quad (3.75)$$

$$\varphi^a(x) = \varphi^a(0) + \int_0^x \kappa^a d\xi, \quad (3.76)$$

$x \in [l_l^a, l_d^a] :$

$$u^a(x) = u^a(l_l^a) + \int_{l_l^a}^x ((1 + \varepsilon^a) \cos \varphi^a - 1) d\xi, \quad (3.77)$$

$$w^a(x) = w^a(l_l^a) - \int_{l_l^a}^x ((1 + \varepsilon^a) \sin \varphi^a) d\xi, \quad (3.78)$$

$$\varphi^a(x) = \varphi^a(l_l^a) + \int_{l_l^a}^x \kappa^a d\xi, \quad (3.79)$$

$x \in [l_d^a, L] :$

$$u^a(x) = u^a(l_d^a) + \int_{l_d^a}^x ((1 + \varepsilon^a) \cos \varphi^a - 1) d\xi, \quad (3.80)$$

$$w^a(x) = w^a(l_d^a) - \int_{l_d^a}^x ((1 + \varepsilon^a) \sin \varphi^a) d\xi, \quad (3.81)$$

$$\varphi^a(x) = \varphi^a(l_d^a) + \int_{l_d^a}^x \kappa^a d\xi, \quad (3.82)$$

$x^* \in [0^*, L^*] :$

$$u^b(x^*) = u^b(0^*) + \int_{0^*}^{x^*} ((1 + \varepsilon^b) \cos \varphi^b - 1) d\xi^*. \quad (3.83)$$

Tako smo kinematične količine  $u^a$ ,  $u^b$ ,  $w^a$ ,  $\varphi^a$  izrazili v odvisnosti od deformacijskih količin  $\varepsilon^a$ ,  $\varepsilon^b$  in  $\kappa^a$ . Podobno rešimo tudi ravnotežne enačbe (3.33)–(3.44). Z integracijo izrazimo ravnotežne sile  $\mathcal{R}_X^a$ ,  $\mathcal{R}_Z^a$ ,  $\mathcal{R}_X^b$ ,  $\mathcal{R}_Z^b$  in ravnotežna upogibna momenta  $\mathcal{M}^a$  ter  $\mathcal{M}^b$  z deformacijskimi količinami  $\varepsilon^a$ ,  $\varepsilon^b$  in  $\kappa^a$ , torej:

$x \in [0, l_l^a] :$

$$\mathcal{R}_X^a(x) = \mathcal{R}_X^a(0), \quad (3.84)$$

$$\mathcal{R}_Z^a(x) = \mathcal{R}_Z^a(0), \quad (3.85)$$

$$\mathcal{M}^a(x) = \mathcal{M}^a(0) + \int_0^x ((1 + \varepsilon^a) \mathcal{Q}^a) d\xi, \quad (3.86)$$

$x \in [l_l^a, l_d^a] :$

$$\mathcal{R}_X^a(x) = \mathcal{R}_X^{a,d}(l_l^a) - \int_{l_l^a}^x q_X^a d\xi, \quad (3.87)$$

$$\mathcal{R}_Z^a(x) = \mathcal{R}_Z^{a,d}(l_l^a) - \int_{l_l^a}^x q_Z^a d\xi, \quad (3.88)$$

$$\mathcal{M}^a(x) = \mathcal{M}^{a,d}(l_l^a) + \int_{l_l^a}^x ((1 + \varepsilon^a) \mathcal{Q}^a) d\xi, \quad (3.89)$$

$x \in [l_d^a, L] :$

$$\mathcal{R}_X^a(x) = \mathcal{R}_X^{a,d}(l_d^a), \quad (3.90)$$

$$\mathcal{R}_Z^a(x) = \mathcal{R}_Z^{a,d}(l_d^a), \quad (3.91)$$

$$\mathcal{M}^a(x) = \mathcal{M}^{a,d}(l_d^a) + \int_{l_d^a}^x ((1 + \varepsilon^a) \mathcal{Q}^a) d\xi, \quad (3.92)$$



$x^* \in [0^*, L^*]$  :

$$\mathcal{R}_X^b(x^*) = \mathcal{R}_X^b(0^*) - \int_{0^*}^{x^*} (p_X + q_X^b) d\xi^*, \quad (3.93)$$

$$\mathcal{R}_Z^b(x^*) = \mathcal{R}_Z^b(0^*) - \int_{0^*}^{x^*} (p_Z + q_Z^b) d\xi^*, \quad (3.94)$$

$$\mathcal{M}^b(x^*) = \mathcal{M}^b(0^*) + \int_{0^*}^{x^*} ((1 + \varepsilon^b) \mathcal{Q}^b - m_y) d\xi^*. \quad (3.95)$$

Ko rešene modificirane kinematične enačbe (3.74)–(3.83) in rešene ravnotežne enačbe (3.84)–(3.95) vstavimo v razširjeni izrek o virtualnem delu (3.22), je faktorjem pri variacijah kinematičnih količin  $\delta u^a$ ,  $\delta u^b$ ,  $\delta w^a$ ,  $\delta w^b$ ,  $\delta \varphi^a$ ,  $\delta \varphi^b$  in ravnotežnih količin  $\delta \mathcal{R}_X^a$ ,  $\delta \mathcal{R}_Z^a$ ,  $\delta \mathcal{M}^a$ ,  $\delta \mathcal{R}_X^b$ ,  $\delta \mathcal{R}_Z^b$  in  $\delta \mathcal{M}^b$  v funkcionalu identično zadoščeno in zato odpadejo. Ker smo identično zadostili tudi enačbama (3.64) in (3.72), združimo tudi ustrezne robne pogoje. Glede na povedano se sistem enačb (3.23)–(3.67) bistveno zmanjša in je:

*konstitucijske enačbe*

$x \in [0, l_l^a] \cup [l_l^a, l_d^a] \cup [l_d^a, L]$  :

$$f_1(\varepsilon^a, \kappa^a, \varphi^a, \mathcal{R}_X^a, \mathcal{R}_Z^a) = \mathcal{N}_c^a - \mathcal{N}^a = 0, \quad (3.96)$$

$$f_2(\varepsilon^a, \kappa^a, \mathcal{M}^a) = \mathcal{M}_c^a - \mathcal{M}^a = 0, \quad (3.97)$$

$x^* \in [0^*, L^*]$  :

$$f_3(\varepsilon^b, \kappa^b, \varphi^b, \mathcal{R}_X^b, \mathcal{R}_Z^b) = \mathcal{N}_c^b - \mathcal{N}^b = 0, \quad (3.98)$$

$$f_4(\varepsilon^b, \kappa^b, \mathcal{M}^b) = \mathcal{M}_c^b - \mathcal{M}^b = 0. \quad (3.99)$$

Pripadajoči naravni ali statični robni pogoji so:

$x = 0$  :

$$-S_1^a - \mathcal{R}_X^a(0) = 0, \quad (3.100)$$

$$-S_2^a - \mathcal{R}_Z^a(0) = 0, \quad (3.101)$$

$$-S_3^a - \mathcal{M}^a(0) = 0, \quad (3.102)$$

$x = l_l^a$  in  $x^* = 0^*$  :

$$\mathcal{R}_X^{a,l}(l_l^a) - \mathcal{R}_X^{a,d}(l_l^a) = 0, \quad (3.103)$$

$$-S_1^b - \mathcal{R}_X^b(0^*) = 0, \quad (3.104)$$

$$-S_2^b - \mathcal{R}_Z^b(0^*) + \mathcal{R}_Z^{a,l}(l_l^a) - \mathcal{R}_Z^{a,d}(l_l^a) = 0, \quad (3.105)$$

$$-S_3^b - \mathcal{M}^b(0^*) + \mathcal{M}^{a,l}(l_l^a) - \mathcal{M}^{a,d}(l_l^a) = 0, \quad (3.106)$$

$x = l_d^a$  in  $x^* = L^*$  :

$$\mathcal{R}_X^{a,l}(l_d^a) - \mathcal{R}_X^{a,d}(l_d^a) = 0, \quad (3.107)$$

$$-S_4^b + \mathcal{R}_X^b(L^*) = 0, \quad (3.108)$$

$$-S_5^b + \mathcal{R}_Z^b(L^*) + \mathcal{R}_Z^{a,l}(l_d^a) - \mathcal{R}_Z^{a,d}(l_d^a) = 0, \quad (3.109)$$

$$-S_6^b + \mathcal{M}^b(L^*) + \mathcal{M}^{a,l}(l_d^a) - \mathcal{M}^{a,d}(l_d^a) = 0, \quad (3.110)$$

$x = L$ :

$$-S_4^a + \mathcal{R}_X^a(L^*) = 0, \quad (3.111)$$

$$-S_5^a + \mathcal{R}_Z^a(L^*) = 0, \quad (3.112)$$

$$-S_6^a + \mathcal{M}^a(L^*) = 0. \quad (3.113)$$

Bistveno se zmanjša tudi sistem posplošenih veznih enačb (3.68)–(3.73). Sestavljata ga le še enačbi:

$x \in [l_l^a, l_d^a]$  in  $x^* \in [0^*, L^*]$ :

$$x + u^a(x) = x^* + u^b(x^*), \quad (3.114)$$

$$q_n^a(x) + q_n^b(x^*) = 0. \quad (3.115)$$

Poenostavljeni sistem nelinearnih algebraičnih in diferencialnih enačb (3.96)–(3.99) in (3.114)–(3.115) sedaj sestavlja samo šest enačb za šest neznanih funkcij:  $\varepsilon^a$ ,  $\varepsilon^b$ ,  $\kappa^a$ ,  $q_n^a$ ,  $q_n^b$  in  $x^*$ . Poudarimo, da pseudoukrivljenost  $\kappa^b$  ne predstavlja osnovne neznanke problema, saj je določena z enačbo (3.73).

Konstitucijska enačba (3.99) nam omogoča izračunati tudi normalno komponento linijske kontaktne obtežbe  $q_n^b$ . S tem namenom konstitucijsko enačbo (3.99) odvajamo po koordinati  $x^*$ :

$$\mathcal{M}_c^b - \mathcal{M}^b = 0 \rightarrow \mathcal{M}_c^{b'} - \mathcal{M}^{b'} = 0 \rightarrow \mathcal{M}_c^{b'} = \mathcal{M}^{b'}. \quad (3.116)$$

Ko v ravnotežni enačbi (3.44) sloja  $b$  kompozitnega nosilca upoštevamo enačbo (3.116), dobimo:

$$-\mathcal{M}_c^{b'} + (1 + \varepsilon^b)Q^b - m_y = 0 \rightarrow Q^b = Q_c^b = \frac{\mathcal{M}_c^{b'} + m_y}{(1 + \varepsilon^b)}. \quad (3.117)$$

V enačbi (3.117) smo prečno sili označili s  $Q_c^b$ . S tem poudarimo, da jo izračunamo s pomočjo konstitucijskega in ne ravnotežnega upogibnega momenta, kot smo običajno navajeni. Z odvajanjem prečne sile  $Q_c^b$  po koordinati  $x^*$  dobimo:

$$Q_c^{b'} = \frac{(\mathcal{M}_c^{b''} + m_y')(1 + \varepsilon^b) - (\mathcal{M}_c^{b'} + m_y)\varepsilon^{b'}}{(1 + \varepsilon^b)^2}. \quad (3.118)$$

V nadaljevanju izračunamo odvod prečne sile  $Q^b$  tudi s pomočjo zveze

$$Q^b = \mathcal{R}_X^b \sin \varphi^b + \mathcal{R}_Z^b \cos \varphi^b \rightarrow Q^{b'} = \mathcal{R}_X^{b'} \sin \varphi^b + \mathcal{R}_Z^{b'} \cos \varphi^b + \mathcal{N}^b \kappa^b, \quad (3.119)$$

kjer je

$$\mathcal{R}_X^{b'} = -p_X - q_X^b \quad \text{in} \quad \mathcal{R}_Z^{b'} = -p_Z - q_Z^b. \quad (3.120)$$

Zvezo med komponentami linijske kontaktne obtežbe sloja  $b$  v materialni in prostorski bazi določata enačbi:

$$q_X^b = q_t^b \cos \varphi^b + q_n^b \sin \varphi^b \quad \text{in} \quad q_Z^b = -q_t^b \sin \varphi^b + q_n^b \cos \varphi^b. \quad (3.121)$$

Ko enačbi (3.120) in (3.121) upoštevamo v enačbi (3.119) in ko upoštevamo  $Q^{bl} = Q_c^{bl}$ , lahko izrazimo normalno komponento linijske kontaktne obtežbe sloja  $b$  kompozitnega nosilca z enačbo:

$$q_n^b = -Q_c^{bl} + \mathcal{N}^b \kappa^b - p_X \sin \varphi^b - p_Z \cos \varphi^b \quad (3.122)$$

oziroma z upoštevanjem izraza (3.118) z enačbo:

$$q_n^b = -\frac{(\mathcal{M}_c^{bl} + m_y^l)(1 + \varepsilon^b) - (\mathcal{M}_c^{bl} + m_y)\varepsilon^{bl}}{(1 + \varepsilon^b)^2} + \mathcal{N}^b \kappa^b - p_X \sin \varphi^b - p_Z \cos \varphi^b. \quad (3.123)$$

Ker smo z enačbo (3.122) oziroma z enačbo (3.123) točno zadostili tudi enačbi (3.99), ta odpade iz sistema enačb (3.96)–(3.115). S pomočjo enačbe (3.115) preprosto izračunamo tudi  $q_n^a(x) = -q_n^b(x^*)$ , ki tako tudi odpade iz sistema enačb (3.96)–(3.115).

Na koncu z integriranjem točno zadostimo tudi enačbi (3.114):

$$x + u^a(x) = x^* + u^b(x^*) \rightarrow \frac{dx^*}{dx} = \frac{1 + \varepsilon^a(x)}{1 + \varepsilon^b(x^*)} \rightarrow \quad (3.124)$$

$$\int_{x^*(0)}^{x^*(x)} (1 + \varepsilon^b(\xi^*)) d\xi^* = \int_0^x (1 + \varepsilon^a(\xi)) d\xi. \quad (3.125)$$

Enačba (3.125) nam določa zvezo med koordinatama  $x^*$  in  $x$ , torej  $x^*(x)$ , pri tem pa  $x^*(0)$  izračunamo z enačbo:

$$x^*(0) = u^a(0) - u^b(x^*(0)). \quad (3.126)$$

Neodvisne deformacijske funkcije  $\varepsilon^a$ ,  $\varepsilon^b$ ,  $\kappa^a$  morajo zadostiti tudi kinematičnim pogojem na robovih kompozitnega nosilca. S temi pogoji geometrijsko povežemo kompozitni nosilec v konstitucijo in zadostimo kinematičnim robnim pogojem. Zato zaradi večje preglednosti enačbe (3.74)–(3.83), ki jih izračunamo na robovih kompozitnega nosilca, prištejemo k razširjenemu izreku o virtualnem delu (3.22). Ker smo točno zadostili tudi kinematičnim enačbam (3.74)–(3.83) in ravnotežnim enačbam (3.84)–(3.95), ti členi v funkcionalu odpadejo. Poenostavljen in razširjen funkcional (3.22) dobi obliko:

$$\begin{aligned} \delta W^* = & \int_0^{l_i^a} ((\mathcal{N}_c^a - \mathcal{N}^a)\delta\varepsilon^a + (\mathcal{M}_c^a - \mathcal{M}^a)\delta\kappa^a) d\xi + \\ & \int_{l_i^a}^{l_d^a} ((\mathcal{N}_c^a - \mathcal{N}^a)\delta\varepsilon^a + (\mathcal{M}_c^a - \mathcal{M}^a)\delta\kappa^a) d\xi + \\ & \int_{l_d^a}^L ((\mathcal{N}_c^a - \mathcal{N}^a)\delta\varepsilon^a + (\mathcal{M}_c^a - \mathcal{M}^a)\delta\kappa^a) d\xi + \\ & \int_{0^*}^{L^*} (\mathcal{N}_c^b - \mathcal{N}^b)\delta\varepsilon^b d\xi^* + \\ & \left( u^a(l_i^a) - u^a(0) - \int_0^{l_i^a} ((1 + \varepsilon^a) \cos \varphi^a - 1) d\xi \right) \delta \mathcal{R}_X^a(0) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left( w^a(l_l^a) - w^a(0) + \int_0^{l_l^a} ((1 + \varepsilon^a) \sin \varphi^a) d\xi \right) \delta \mathcal{R}_Z^a(0) + \\
 & \quad \left( \varphi^a(l_l^a) - \varphi^a(0) - \int_0^{l_l^a} \kappa^a d\xi \right) \delta \mathcal{M}^a(0) + \\
 & \left( u^a(l_d^a) - u^a(l_l^a) - \int_{l_l^a}^{l_d^a} ((1 + \varepsilon^a) \cos \varphi^a - 1) d\xi \right) \delta \mathcal{R}_X^a(l_l^a) + \\
 & \quad \left( w^a(l_d^a) - w^a(l_l^a) + \int_{l_l^a}^{l_d^a} ((1 + \varepsilon^a) \sin \varphi^a) d\xi \right) \delta \mathcal{R}_Z^a(l_l^a) + \\
 & \quad \left( \varphi^a(l_d^a) - \varphi^a(l_l^a) - \int_{l_l^a}^{l_d^a} \kappa^a d\xi \right) \delta \mathcal{M}^a(l_l^a) + \\
 & \left( u^a(L) - u^a(l_d^a) - \int_{l_d^a}^L ((1 + \varepsilon^a) \cos \varphi^a - 1) d\xi \right) \delta \mathcal{R}_X^a(l_d^a) + \\
 & \quad \left( w^a(L) - w^a(l_d^a) + \int_{l_d^a}^L ((1 + \varepsilon^a) \sin \varphi^a) d\xi \right) \delta \mathcal{R}_Z^a(l_d^a) + \\
 & \quad \left( \varphi^a(L) - \varphi^a(l_d^a) - \int_{l_d^a}^L \kappa^a d\xi \right) \delta \mathcal{M}^a(l_d^a) + \\
 & \left( u^b(L^*) - u^b(0^*) - \int_{0^*}^{L^*} ((1 + \varepsilon^b) \cos \varphi^b - 1) d\xi^* \right) \delta \mathcal{R}_X^b(0^*) + \\
 & \left( -S_1^a - \mathcal{R}_X^a(0) \right) \delta u^a(0) + \left( -S_2^a - \mathcal{R}_Z^a(0) \right) \delta w^a(0) + \left( -S_3^a - \mathcal{M}^a(0) \right) \delta \varphi^a(0) + \\
 & \left( -S_4^a + \mathcal{R}_X^a(L) \right) \delta u^a(L) + \left( -S_5^a + \mathcal{R}_Z^a(L) \right) \delta w^a(L) + \left( -S_6^a + \mathcal{M}^a(L) \right) \delta \varphi^a(L) + \\
 & \left( \mathcal{R}_X^{a,l}(l_l^a) - \mathcal{R}_X^{a,d}(l_l^a) \right) \delta u^a(l_l^a) + \left( -S_1^b - \mathcal{R}_X^b(0^*) \right) \delta u^b(0^*) + \\
 & \left( \mathcal{R}_X^{a,l}(l_d^a) - \mathcal{R}_X^{a,d}(l_d^a) \right) \delta u^a(l_d^a) + \left( -S_4^b + \mathcal{R}_X^b(L^*) \right) \delta u^b(L^*) + \\
 & \quad \left( -S_2^b - \mathcal{R}_Z^b(0^*) + \mathcal{R}_Z^{a,l}(l_l^a) - \mathcal{R}_Z^{a,d}(l_l^a) \right) \delta w^b(0^*) + \\
 & \quad \left( -S_3^b - \mathcal{M}^b(0^*) + \mathcal{M}^{a,l}(l_l^a) - \mathcal{M}^{a,d}(l_l^a) \right) \delta \varphi^b(0^*) + \\
 & \quad \left( -S_5^b + \mathcal{R}_Z^b(L^*) + \mathcal{R}_Z^{a,l}(l_d^a) - \mathcal{R}_Z^{a,d}(l_d^a) \right) \delta w^b(L^*) + \\
 & \quad \left( -S_6^b + \mathcal{M}^b(L^*) + \mathcal{M}^{a,l}(l_d^a) - \mathcal{M}^{a,d}(l_d^a) \right) \delta \varphi^b(L^*) = 0. \tag{3.127}
 \end{aligned}$$

Funkcional (3.127), ki ga imenujemo *modificirani izrek o virtualnem delu*, je odvisen samo od deformacijskih količin  $\varepsilon^a(x)$ ,  $\varepsilon^b(x^*)$ ,  $\kappa^a(x)$ , začetnih robnih posplošenih ravnotežnih sil  $\mathcal{R}_X^a(0)$ ,  $\mathcal{R}_Z^a(0)$ ,  $\mathcal{M}^a(0)$ ,  $\mathcal{R}_X^{a,d}(l_l^a)$ ,  $\mathcal{R}_Z^{a,d}(l_l^a)$ ,  $\mathcal{M}^{a,d}(l_l^a)$ ,  $\mathcal{R}_X^{a,d}(l_d^a)$ ,  $\mathcal{R}_Z^{a,d}(l_d^a)$ ,  $\mathcal{M}^{a,d}(l_d^a)$ ,  $\mathcal{R}_X^b(0^*)$ ,  $\mathcal{R}_Z^b(0^*)$ ,  $\mathcal{M}^b(0^*)$  in kinematičnih robnih količin  $u^a(0)$ ,  $u^a(l_l^a)$ ,  $u^a(l_d^a)$ ,  $u^a(L)$ ,  $u^b(0^*)$ ,  $u^b(L^*)$ ,  $w^a(0)$ ,  $w^a(L)$ ,  $w^b(0^*)$ ,  $w^b(L^*)$ ,  $\varphi^a(0)$ ,  $\varphi^a(L)$ ,  $\varphi^b(0^*)$ ,  $\varphi^b(L^*)$ . Euler-Lagrangeve enačbe funkcionala (3.127) so:

$x \in [0, l_l^a] \cup [l_l^a, l_d^a] \cup [l_d^a, L]$  :

$$f_1 = \mathcal{N}_c^a - \mathcal{N}^a = 0, \quad (3.128)$$

$$f_2 = \mathcal{M}_c^a - \mathcal{M}^a = 0, \quad (3.129)$$

$$f_3 = u^a(l_l^a) - u^a(0) - \int_0^{l_l^a} ((1 + \varepsilon^a) \cos \varphi^a - 1) d\xi = 0, \quad (3.130)$$

$$f_4 = w^a(l_l^a) - w^a(0) + \int_0^{l_l^a} ((1 + \varepsilon^a) \sin \varphi^a) d\xi = 0, \quad (3.131)$$

$$f_5 = \varphi^a(l_l^a) - \varphi^a(0) - \int_0^{l_l^a} \kappa^a d\xi = 0, \quad (3.132)$$

$$f_6 = u^a(l_d^a) - u^a(l_l^a) - \int_{l_l^a}^{l_d^a} ((1 + \varepsilon^a) \cos \varphi^a - 1) dx = 0, \quad (3.133)$$

$$f_7 = w^a(l_d^a) - w^a(l_l^a) + \int_{l_l^a}^{l_d^a} ((1 + \varepsilon^a) \sin \varphi^a) d\xi = 0, \quad (3.134)$$

$$f_8 = \varphi^a(l_d^a) - \varphi^a(l_l^a) - \int_{l_l^a}^{l_d^a} \kappa^a d\xi = 0, \quad (3.135)$$

$$f_9 = u^a(L) - u^a(l_d^a) - \int_{l_d^a}^L ((1 + \varepsilon^a) \cos \varphi^a - 1) d\xi = 0, \quad (3.136)$$

$$f_{10} = w^a(L) - w^a(l_d^a) + \int_{l_d^a}^L ((1 + \varepsilon^a) \sin \varphi^a) d\xi = 0, \quad (3.137)$$

$$f_{11} = \varphi^a(L) - \varphi^a(l_d^a) - \int_{l_d^a}^L \kappa^a d\xi = 0, \quad (3.138)$$

$x^* \in [0^*, L^*]$  :

$$f_{12} = \mathcal{N}_c^b - \mathcal{N}^b = 0, \quad (3.139)$$

$$f_{14} = u^b(L^*) - u^b(0^*) - \int_{0^*}^{L^*} ((1 + \varepsilon^b) \cos \varphi^b - 1) d\xi^* = 0. \quad (3.140)$$

Pripadajoči naravni (statični) robni pogoji so:

$x = 0$  :

$$-S_1^a - \mathcal{R}_X^a(0) = 0, \quad (3.141)$$

$$-S_2^a - \mathcal{R}_Z^a(0) = 0, \quad (3.142)$$

$$-S_3^a - \mathcal{M}^a(0) = 0, \quad (3.143)$$

$x = l_l^a$  in  $x^* = 0^*$  :

$$\mathcal{R}_X^{a,l}(l_l^a) - \mathcal{R}_X^{a,d}(l_l^a) = 0, \quad (3.144)$$

$$-S_1^b - \mathcal{R}_X^b(0^*) = 0, \quad (3.145)$$

$$-S_2^b - \mathcal{R}_Z^b(0^*) + \mathcal{R}_Z^{a,l}(l_l^a) - \mathcal{R}_Z^{a,d}(l_l^a) = 0, \quad (3.146)$$

$$-S_3^b - \mathcal{M}^b(0^*) + \mathcal{M}^{a,l}(l_l^a) - \mathcal{M}^{a,d}(l_l^a) = 0, \quad (3.147)$$

$x = l_d^a$  in  $x^* = L^*$  :

$$\mathcal{R}_X^{a,l}(l_d^a) - \mathcal{R}_X^{a,d}(l_d^a) = 0, \quad (3.148)$$

$$-S_4^b + \mathcal{R}_X^b(L^*) = 0, \quad (3.149)$$

$$-S_5^b + \mathcal{R}_Z^b(L^*) + \mathcal{R}_Z^{a,l}(l_d^a) - \mathcal{R}_Z^{a,d}(l_d^a) = 0, \quad (3.150)$$

$$-S_6^b + \mathcal{M}^b(L^*) + \mathcal{M}^{a,l}(l_d^a) - \mathcal{M}^{a,d}(l_d^a) = 0, \quad (3.151)$$

$x = L$  :

$$-S_4^a + \mathcal{R}_X^a(L) = 0, \quad (3.152)$$

$$-S_5^a + \mathcal{R}_Z^a(L) = 0, \quad (3.153)$$

$$-S_6^a + \mathcal{M}^a(L) = 0. \quad (3.154)$$

V funkcionalu (3.127) oziroma v sistemu enačb (3.128)–(3.154) so neznane funkcije le  $\varepsilon^a(x)$ ,  $\varepsilon^b(x^*)$ ,  $\kappa^a(x)$ . Te določajo konstitucijske enačbe  $\mathcal{N}_c^a - \mathcal{N}^a = 0$ ,  $\mathcal{M}_c^a - \mathcal{M}^a = 0$  in  $\mathcal{N}_c^b - \mathcal{N}^b = 0$ . Če bi znali točno rešiti tudi te enačbe, bi bil problem točno rešen v celoti, ker bi s tem poznali točne vrednosti za deformacijske, kinematične in statične količine kompozitnega nosilca. Teh enačb v splošnem za kompozitne nosilce ne znamo rešiti točno, zato se zatečemo k uporabi približnih metod. Dodamo naj tudi, da pomiki  $u^a(x)$ ,  $u^b(x^*)$ ,  $w^a(x)$  in zasuk  $\varphi^a(x)$  ter ravnotežne sile  $\mathcal{R}_X^a(x)$ ,  $\mathcal{R}_Z^a(x)$ ,  $\mathcal{R}_X^b(x^*)$ ,  $\mathcal{R}_Z^b(x^*)$  in momenta  $\mathcal{M}^a(x)$ ,  $\mathcal{M}^b(x^*)$  nastopajo v (3.127) le s svojimi vrednostmi na robu kompozitnega nosilca in z vrednostmi na stiku previsov s preostalim delom kompozitnega nosilca. V nadaljevanju bomo modificirani izrek o virtualnem delu (3.127) uporabili za analizo kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med slojema s standardno ali Galerkinovo metodo končnih elementov. Ker v funkcionalu (3.127) ni zahtev glede odvedljivosti neznanih funkcij, to bistveno razširi možnosti interpolacijskih nastavkov za deformacijske količine.

## 3.2 GALERKINOVA METODA KONČNIH ELEMENTOV

Tudi pri izpeljavi diskretnih posplošenih ravnotežnih enačb za dvoslojni kompozitni nosilec z Galerkinovo metodo končnih elementov upoštevamo vse poenostavitve, ki smo jih predpostavili v podpoglavju *Modificirani izrek o virtualnem delu*. Predpostavimo torej, da se kompozitni nosilec deformira tako, kot prikazuje slika 2.2(f). Previsa sta tako sestavna dela sloja  $a$  kompozitnega nosilca. V skladu z metodo končnih elementov razdelimo nosilec na končne elemente in sicer na obeh previsih in na stiku med slojema. Tako nastopijo pri diskretizaciji kompozitnega nosilca interpolacijske funkcije za deformacijske količine  $\varepsilon^a$ ,  $\varepsilon^b$  in  $\kappa^a$  na previsih in na stiku med slojema. Za aproksimacijo le-teh izberemo Lagrangeve interpolacijske polinome. V splošnem je lahko stopnja Lagrangevih interpolacijskih polinomov poljubna, toda zaradi večje preglednosti smo za aproksimacijo deformacijskih količin na previsih izbrali polinome iste stopnje, torej  $P_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ). Podobno aproksimiramo tudi deformacijske količine na stiku med slojema kompozitnega nosilca z Lagrangevimi polinomi iste stopnje, torej  $P_m(x)$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ). Deformacijske količine  $\varepsilon^a(x)$ ,  $\varepsilon^b(x^*)$  in  $\kappa^a(s)$  po osi kompozitnega nosilca aproksimiramo tako z nastavki:

$x \in [0, l_l^a]$  in  $[l_d^a, L]$  :

$$\varepsilon^a(x) = \sum_{n=1}^N P_n(x) \varepsilon_n^{a,l(d)}, \quad \kappa^a(x) = \sum_{n=1}^N P_n(x) \kappa_n^{a,l(d)}, \quad (3.155)$$

$x \in [l_l^a, l_d^a]$  in  $x^* \in [0^*, L^*]$  :

$$\varepsilon^a(x) = \sum_{m=1}^M P_m(x) \varepsilon_m^a, \quad \varepsilon^b(x^*) = \sum_{m=1}^M P_m(x^*) \varepsilon_m^b, \quad \kappa^a(x) = \sum_{m=1}^M P_m(x) \kappa_m^a. \quad (3.156)$$

Pri tem vrednosti  $\varepsilon_n^{a,l(d)}$ ,  $\kappa_n^{a,l(d)}$ ,  $\varepsilon_m^a$ ,  $\varepsilon_m^b$  in  $\kappa_m^a$  predstavljajo vozliščne vrednosti deformacijskih količin na previsih in na stiku slojev kompozitnega nosilca. Z uporabo nastavkov (3.155) in (3.156) izpeljemo tudi nastavke za variacije deformacijskih količin:

$x \in [0, l_l^a]$  in  $[l_d^a, L]$  :

$$\delta \varepsilon^a(x) = \sum_{n=1}^N P_n(x) \delta \varepsilon_n^{a,l(d)}, \quad \delta \kappa^a(x) = \sum_{n=1}^N P_n(x) \delta \kappa_n^{a,l(d)}, \quad (3.157)$$

$x \in [l_l^a, l_d^a]$  in  $x^* \in [0^*, L^*]$  :

$$\delta \varepsilon^a(x) = \sum_{m=1}^M P_m(x) \delta \varepsilon_m^a, \quad \delta \varepsilon^b(x^*) = \sum_{m=1}^M P_m(x^*) \delta \varepsilon_m^b, \quad \delta \kappa^a(x) = \sum_{m=1}^M P_m(x) \delta \kappa_m^a. \quad (3.158)$$

Povedali smo že, da lahko materialno koordinato  $x^*(x)$  točno izračunamo z enačbo (3.125)

$$\int_{x^*(0)}^{x^*(x)} (1 + \varepsilon^b(\xi^*)) d\xi^* = \int_0^x (1 + \varepsilon^a(\xi)) d\xi, \quad (3.159)$$

in da lahko normalno komponento linijske kontaktne obtežbe  $q_n^b$  sloja  $b$  kompozitnega nosilca točno izračunamo z enačbo (3.122)

$$q_n^b = -Q_c^{b'} + \mathcal{N}^b \kappa^b - p_X \sin \varphi^b - p_Z \cos \varphi. \quad (3.160)$$

Toda izkaže se, da je numerično ugodno, če aproksimiramo tudi potek  $x^*(x)$  in  $q_n^b(x^*)$ . Pri tem aproksimiramo  $x^*(x)$  in  $q_n^b(x^*)$  z Lagrangevimi interpolacijskimi nastavki iste stopnje, kot smo jih izbrali za aproksimacijo deformacijskih funkcij  $\varepsilon^a(x)$ ,  $\varepsilon^b(x^*)$  in  $\kappa^a(x)$ , torej:

$$x^*(x) = \sum_{m=1}^M P_m(x) x_m^*, \quad q_n^b(x^*) = \sum_{m=1}^M P_m(x^*) q_{n,m}^b. \quad (3.161)$$

Formulacija posplošenih diskretnih ravnotežnih enačb kompozitnega nosilca pri poljubnem številu končnih elementov je podobna kot pri homogenih nosilcih in je zato dobro znana. Zato v disertaciji zaradi preglednosti predpostavimo, da kompozitni nosilec modeliramo samo s tremi končnimi elementi in sicer z dvema elementoma na previsih in z enim elementom na stiku

med slojema. Tako v nadaljevanju interpolacijske nastavke (3.155), (3.156), (3.157) in (3.158) vstavimo v modificirani izrek o virtualnem delu (3.127) in dobimo:

$$\begin{aligned}
 \delta W^* = & \sum_{n=1}^N \left( \int_0^{l_i^a} (\mathcal{N}_c^a - \mathcal{N}^a) P_n d\xi \right) \delta \varepsilon_n^{a,l} + \sum_{n=1}^N \left( \int_0^{l_i^a} (\mathcal{M}_c^a - \mathcal{M}^a) P_n d\xi \right) \delta \kappa_n^{a,l} + \\
 & \sum_{m=1}^M \left( \int_{l_i^a}^{l_d^a} (\mathcal{N}_c^a - \mathcal{N}^a) P_m d\xi \right) \delta \varepsilon_m^a + \sum_{m=1}^M \left( \int_{l_i^a}^{l_d^a} (\mathcal{M}_c^a - \mathcal{M}^a) P_m d\xi \right) \delta \kappa_m^a + \\
 & \sum_{n=1}^N \left( \int_{l_d^a}^L (\mathcal{N}_c^a - \mathcal{N}^a) P_n d\xi \right) \delta \varepsilon_n^{a,d} + \sum_{n=1}^N \left( \int_{l_d^a}^L (\mathcal{M}_c^a - \mathcal{M}^a) P_n d\xi \right) \delta \kappa_n^{a,d} + \\
 & \sum_{m=1}^M \left( \int_{0^*}^{L^*} (\mathcal{N}_c^b - \mathcal{N}^b) P_m d\xi^* \right) \delta \varepsilon_m^b + \\
 & \left( u^a(l_i^a) - u^a(0) - \int_0^{l_i^a} ((1 + \varepsilon^a) \cos \varphi^a - 1) d\xi \right) \delta \mathcal{R}_X^a(0) + \\
 & \left( w^a(l_i^a) - w^a(0) + \int_0^{l_i^a} ((1 + \varepsilon^a) \sin \varphi^a) d\xi \right) \delta \mathcal{R}_Z^a(0) + \\
 & \left( \varphi^a(l_i^a) - \varphi^a(0) - \int_0^{l_i^a} \kappa^a d\xi \right) \delta \mathcal{M}^a(0) + \\
 & \left( u^a(l_d^a) - u^a(l_i^a) - \int_{l_i^a}^{l_d^a} ((1 + \varepsilon^a) \cos \varphi^a - 1) d\xi \right) \delta \mathcal{R}_X^a(l_i^a) + \\
 & \left( w^a(l_d^a) - w^a(l_i^a) + \int_{l_i^a}^{l_d^a} ((1 + \varepsilon^a) \sin \varphi^a) d\xi \right) \delta \mathcal{R}_Z^a(l_i^a) + \\
 & \left( \varphi^a(l_d^a) - \varphi^a(l_i^a) - \int_{l_i^a}^{l_d^a} \kappa^a d\xi \right) \delta \mathcal{M}^a(l_i^a) + \\
 & \left( u^a(L) - u^a(l_d^a) - \int_{l_d^a}^L ((1 + \varepsilon^a) \cos \varphi^a - 1) d\xi \right) \delta \mathcal{R}_X^a(l_d^a) + \\
 & \left( w^a(L) - w^a(l_d^a) + \int_{l_d^a}^L ((1 + \varepsilon^a) \sin \varphi^a) d\xi \right) \delta \mathcal{R}_Z^a(l_d^a) + \\
 & \left( \varphi^a(L) - \varphi^a(l_d^a) - \int_{l_d^a}^L \kappa^a d\xi \right) \delta \mathcal{M}^a(l_d^a) + \\
 & \left( u^b(L^*) - u^b(0^*) - \int_{0^*}^{L^*} ((1 + \varepsilon^b) \cos \varphi^b - 1) d\xi^* \right) \delta \mathcal{R}_X^b(0^*) + \\
 & \left( -S_1^a - \mathcal{R}_X^a(0) \right) \delta u^a(0) + \left( -S_2^a - \mathcal{R}_Z^a(0) \right) \delta w^a(0) + \left( -S_3^a - \mathcal{M}^a(0) \right) \delta \varphi^a(0) + \\
 & \left( -S_4^a + \mathcal{R}_X^a(L) \right) \delta u^a(L) + \left( -S_5^a + \mathcal{R}_Z^a(L) \right) \delta w^a(L) + \left( -S_6^a + \mathcal{M}^a(L) \right) \delta \varphi^a(L) +
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& (\mathcal{R}_X^{a,l}(l_l^a) - \mathcal{R}_X^{a,d}(l_l^a))\delta u^a(l_l^a) + (-S_1^b - \mathcal{R}_X^b(0^*))\delta u^b(0^*) + \\
& (\mathcal{R}_X^{a,l}(l_d^a) - \mathcal{R}_X^{a,d}(l_d^a))\delta u^a(l_d^a) + (-S_4^b + \mathcal{R}_X^b(L^*))\delta u^b(L^*) + \\
& (-S_2^b - \mathcal{R}_Z^b(0^*) + \mathcal{R}_Z^{a,l}(l_l^a) - \mathcal{R}_Z^{a,d}(l_l^a))\delta w^b(0^*) + \\
& (-S_3^b - \mathcal{M}^b(0^*) + \mathcal{M}^{a,l}(l_l^a) - \mathcal{M}^{a,d}(l_l^a))\delta\varphi^b(0^*) + \\
& (-S_5^b + \mathcal{R}_Z^b(L^*) + \mathcal{R}_Z^{a,l}(l_d^a) - \mathcal{R}_Z^{a,d}(l_d^a))\delta w^b(L^*) + \\
& (-S_6^b + \mathcal{M}^b(L^*) + \mathcal{M}^{a,l}(l_d^a) - \mathcal{M}^{a,d}(l_d^a))\delta\varphi^b(L^*) = 0.
\end{aligned} \tag{3.162}$$

Glede na osnovno lemo variacijskega računa so koeficienti pri neodvisnih variacijah v funkcionalu (3.162) enaki nič. Iz te zahteve izpeljemo Euler–Lagrangeve enačbe kompozitnega nosilca. Ker smo z Lagrangevimi polinomi interpolirali tudi funkciji  $x^*(x)$  in  $q_n^b(x^*)$ , dodamo k Euler–Lagrangevim enačbam kompozitnega nosilca še  $2M$  enačb za račun vozliščnih vrednosti količin  $x_m^*$  in  $q_{n,m}^b$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ). Urejen sistem diskretnih posplošenih ravnotežnih enačb kompozitnega nosilca je tako enak:

$x \in [l_l^a, l_d^a]$  in  $x^* \in [0^*, L^*]$ :

$$\int_{l_l^a}^{l_d^a} (\mathcal{N}_c^a - \mathcal{N}^a)P_m d\xi = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M \tag{3.163}$$

$$\int_{l_l^a}^{l_d^a} (\mathcal{M}_c^a - \mathcal{M}^a)P_m d\xi = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M \tag{3.164}$$

$$\int_0^L (\mathcal{N}_c^b - \mathcal{N}^b)P_m d\xi = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M \tag{3.165}$$

$$x_m + u^a(x_m) = x_m^* + u^b(x_m^*), \quad m = 1, 2, \dots, M \tag{3.166}$$

$$\begin{aligned}
& q_{n,m}^b + \mathcal{Q}_c^{b'}(x_m^*) - \mathcal{N}^b(x_m^*)\kappa^b(x_m^*) + \\
& p_X(x_m^*)\sin\varphi^b(x_m^*) + p_Z(x_m^*)\cos\varphi^b(x_m^*) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M
\end{aligned} \tag{3.167}$$

$$u^a(l_d^a) - u^a(l_l^a) - \int_{l_l^a}^{l_d^a} ((1 + \varepsilon^a)\cos\varphi^a - 1)d\xi = 0, \tag{3.168}$$

$$w^a(l_d^a) - w^a(l_l^a) + \int_{l_l^a}^{l_d^a} ((1 + \varepsilon^a)\sin\varphi^a)d\xi = 0, \tag{3.169}$$

$$\varphi^a(l_d^a) - \varphi^a(l_l^a) - \int_{l_l^a}^{l_d^a} \kappa^a d\xi = 0, \tag{3.170}$$

$$u^b(L^*) - u^b(0^*) - \int_{0^*}^{L^*} ((1 + \varepsilon^b)\cos\varphi^b - 1)d\xi^* = 0. \tag{3.171}$$

$x \in [0, l_l^a] :$

$$\int_0^{l_l^a} (\mathcal{N}_c^a - \mathcal{N}^a) P_n d\xi = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (3.172)$$

$$\int_0^{l_l^a} (\mathcal{M}_c^a - \mathcal{M}^a) P_n d\xi = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (3.173)$$

$$u^a(l_l^a) - u^a(0) - \int_0^{l_l^a} ((1 + \varepsilon^a) \cos \varphi^a - 1) d\xi = 0, \quad (3.174)$$

$$w^a(l_l^a) - w^a(0) + \int_0^{l_l^a} ((1 + \varepsilon^a) \sin \varphi^a) d\xi = 0, \quad (3.175)$$

$$\varphi^a(l_l^a) - \varphi^a(0) - \int_0^{l_l^a} \kappa^a d\xi = 0, \quad (3.176)$$

$x \in [l_d^a, L] :$

$$\int_{l_d^a}^L (\mathcal{N}_c^a - \mathcal{N}^a) P_n d\xi = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (3.177)$$

$$\int_{l_d^a}^L (\mathcal{M}_c^a - \mathcal{M}^a) P_n d\xi = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (3.178)$$

$$u^a(L) - u^a(l_d^a) - \int_{l_d^a}^L ((1 + \varepsilon^a) \cos \varphi^a - 1) d\xi = 0, \quad (3.179)$$

$$w^a(L) - w^a(l_d^a) + \int_{l_d^a}^L ((1 + \varepsilon^a) \sin \varphi^a) d\xi = 0, \quad (3.180)$$

$$\varphi^a(L) - \varphi^a(l_d^a) - \int_{l_d^a}^L \kappa^a d\xi = 0. \quad (3.181)$$

Pripadajoči naravni (statični) robni pogoji so:

$x = 0 :$

$$-S_1^a - \mathcal{R}_X^a(0) = 0, \quad (3.182)$$

$$-S_2^a - \mathcal{R}_Z^a(0) = 0, \quad (3.183)$$

$$-S_3^a - \mathcal{M}^a(0) = 0, \quad (3.184)$$

$x = l_l^a$  in  $x^* = 0^* :$

$$\mathcal{R}_X^{a,l}(l_l^a) - \mathcal{R}_X^{a,d}(l_l^a) = 0, \quad (3.185)$$

$$-S_1^b - \mathcal{R}_X^b(0^*) = 0, \quad (3.186)$$

$$-S_2^b - \mathcal{R}_Z^b(0^*) + \mathcal{R}_Z^{a,l}(l_l^a) - \mathcal{R}_Z^{a,d}(l_l^a) = 0, \quad (3.187)$$

$$-S_3^b - \mathcal{M}^b(0^*) + \mathcal{M}^{a,l}(l_l^a) - \mathcal{M}^{a,d}(l_l^a) = 0, \quad (3.188)$$

$x = l_d^a$  in  $x^* = L^* :$

$$\mathcal{R}_X^{a,l}(l_d^a) - \mathcal{R}_X^{a,d}(l_d^a) = 0, \quad (3.189)$$

$$-S_4^b + \mathcal{R}_X^b(L^*) = 0, \quad (3.190)$$

$$-S_5^b + \mathcal{R}_Z^b(L^*) + \mathcal{R}_Z^{a,l}(l_d^a) - \mathcal{R}_Z^{a,d}(l_d^a) = 0, \quad (3.191)$$

$$-S_6^b + \mathcal{M}^b(L^*) + \mathcal{M}^{a,l}(l_d^a) - \mathcal{M}^{a,d}(l_d^a) = 0, \quad (3.192)$$

$x = L$  :

$$-S_4^a + \mathcal{R}_X^a(L) = 0, \quad (3.193)$$

$$-S_5^a + \mathcal{R}_Z^a(L) = 0, \quad (3.194)$$

$$-S_6^a + \mathcal{M}^a(L) = 0. \quad (3.195)$$

Glede na izpeljavo posplošenih diskretnih ravnotežnih enačb (3.163)–(3.195) se moramo zavdati, da enačbe (3.163)–(3.171) predstavljajo sistem diskretnih posplošenih ravnotežnih enačb za del kompozitnega nosilca na stiku med slojema, medtem ko enačbe (3.172)–(3.176) in (3.177)–(3.181) predstavljajo diskretne posplošene ravnotežne enačbe obeh previsov kompozitnega nosilca. Torej lahko pri formulaciji kompozitnih nosilcev z metodo končnih elementov govorimo o dveh ‘vrstah’ končnih elementov in sicer, končni elementi, s katerimi modeliramo previsne dele kompozitnega nosilca in končni elementi za modeliranje dela kompozitnega nosilca na stiku med slojema. Povezano delovanje obeh previsov in dela kompozitnega nosilca na stiku med slojema zagotavlja sistem enačb (3.182)–(3.195). Za znano obtežbo predstavljajo enačbe (3.163)–(3.195) sistem  $5M + 4N + 24$  enačb za določitev  $5M + 4N + 24$  neznank. Med neznankami je  $5M + 4N + 10$  t.i. *notranjih prostostnih stopenj* in sicer:  $3M$  deformacijskih vozliščnih količin  $\varepsilon_m^a$ ,  $\varepsilon_m^b$  in  $\kappa_m^a$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ),  $2M$  vozliščnih količin  $x_m^*$ ,  $q_{n,m}^b$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ),  $4N$  deformacijskih vozliščnih količin  $\varepsilon_n^{a,l}$ ,  $\varepsilon_n^{a,d}$ ,  $\kappa_n^{a,l}$  in  $\kappa_n^{a,d}$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) in dodatnih 10 količin  $\mathcal{R}_X^a(0)$ ,  $\mathcal{R}_Z^a(0)$ ,  $\mathcal{M}^a(0)$ ,  $\mathcal{R}_X^{a,d}(l_l^a)$ ,  $\mathcal{R}_Z^{a,d}(l_l^a)$ ,  $\mathcal{M}^{a,d}(l_l^a)$ ,  $\mathcal{R}_X^{a,d}(l_d^a)$ ,  $\mathcal{R}_Z^{a,d}(l_d^a)$ ,  $\mathcal{M}^{a,d}(l_d^a)$  in  $\mathcal{R}_X^b(0^*)$ . Preostalih 14 neznank predstavljajo t.i. *zunanje prostostne stopnje* kompozitnega nosilca:  $u^a(0)$ ,  $u^a(l_l^a)$ ,  $u^a(l_d^a)$ ,  $u^a(L)$ ,  $u^b(0^*)$ ,  $u^b(L^*)$ ,  $w^a(0)$ ,  $w^a(L)$ ,  $w^b(0^*)$ ,  $w^b(L^*)$ ,  $\varphi^a(0)$ ,  $\varphi^a(L)$ ,  $\varphi^b(0^*)$ ,  $\varphi^b(L^*)$ . Te predstavljajo pomike in zasuke na robovih previsov in dela kompozitnega nosilca na stiku med slojema. Funkcije  $u^a(x)$ ,  $u^b(x)$ ,  $w^a(x)$ ,  $\varphi^a(x)$  in  $\varphi^b(x)$  izračunamo z izrazi (3.74)–(3.83) in (3.72), funkcije  $\mathcal{N}^a(x)$ ,  $\mathcal{N}^b(x)$ ,  $\mathcal{M}^a(x)$ ,  $\mathcal{R}_X^a(x)$ ,  $\mathcal{R}_Z^a(x)$ ,  $\mathcal{R}_X^b(x^*)$  in  $\mathcal{Q}_c^{bl}(x^*)$  pa z izrazi (3.18), (3.20), (3.84)–(3.93) in (3.118). Velikost upogibnega momenta  $\mathcal{M}^b$  v poljubni točki referenčne osi zgornjega sloja kompozitnega nosilca izračunamo s konstitucijsko enačbo:

$$\mathcal{M}^b = \mathcal{M}_c^b = \int_{A^b} z \sigma(D^b) dA. \quad (3.196)$$

Med neznankami kompozitnega nosilca je tudi  $\mathcal{R}_Z^b(0^*)$ . Izračunamo jo podobno kot  $\mathcal{M}^b$  in sicer z enačbo:

$$\mathcal{R}_Z^b(0^*) = \mathcal{Q}_c^b(0^*) \cos \varphi^b(0^*) - \mathcal{N}_c^b(0^*) \sin \varphi^b(0^*). \quad (3.197)$$

V nadaljevanju notranje prostostne stopnje končnih elementov na previsih in na stiku kompozitnega nosilca kondenziramo s postopkom numerične kondenzacije, medtem ko zunanje prostostne stopnje po znanem postopku združimo v *enačbo konstrukcije*:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{0}. \quad (3.198)$$

Vektor neznank  $\mathbf{x}$  v enačbi (3.198) imenujemo vektor posplošenih pomikov. V njem so zbrani vozliščni pomiki in zasuki kompozitnega nosilca. Parameter  $\lambda$  predstavlja obtežni faktor. Enačbe (3.198) imenujemo *diskretne posplošene ravnotežne enačbe konstrukcije*. Rešimo jih z inkremen-

tno-iteracijskimi metodami [60]. V disertaciji smo diskretne posplošene ravnotežne enačbe konstrukcije rešili z najpreprostejšo inkrementno-iteracijsko metodo, z Newton-Raphsonovo metodo. Za dani obtežni faktor  $\lambda = \lambda_z$  sistem (3.198) lineariziramo okrog  $\lambda_z$  in linearizirani sistem rešujemo zaporedoma za  $i = 0, 1, 2, \dots$

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{G}(\mathbf{x}_i, \lambda_z) \Delta \mathbf{x}_{i+1} = \frac{d}{d\alpha} [\mathbf{G}(\mathbf{x}_i + \alpha \Delta \mathbf{x}_{i+1}, \lambda_z)] \Big|_{\alpha=0} = -\mathbf{G}(\mathbf{x}_i, \lambda_z). \quad (3.199)$$

Newton-Raphsonova metoda odpove, ko postane tangentna togostna matrika konstrukcije  $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{G}_i \equiv \mathbf{K}_{T,i}$  singularna. To je tudi kriterij za določitev kritičnih oziroma uklonskih sil kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med slojema.

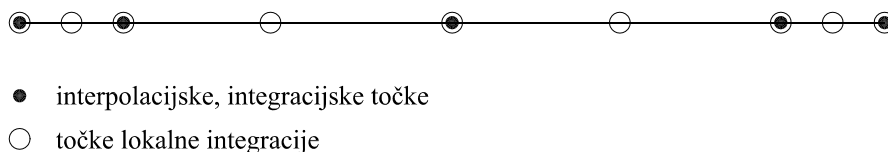


# 4

## Računski primeri

V prejšnjih poglavjih smo predstavili nov računski postopek za nelinearno analizo kompozitnih konstrukcij z upoštevanjem zdrsa med sloji. Postopek je zasnovan na metodi končnih elementov. Za reševanje posplošenih diskretnih ravnotežnih enačb konstrukcije smo razvili računalniški program v programskem okolju `Matlab`. V tem poglavju analiziramo natančnost, učinkovitost in primernost razvitega računskega postopka za analizo napetostnega in deformacijskega stanja kompozitnih nosilcev, ki se pogosto uporabljajo v gradbeništvu. Računski primeri so razdeljeni na dva smiselna sklopa. V prvem analiziramo predvsem natančnost in učinkovitost predstavljenih deformacijskih končnih elementov za analizo geometrijsko nelinearnega obnašanja kompozitnih nosilcev. V drugem sklopu računskih primerov analiziramo vpliv materialne nelinearnosti na nosilnost in togost značilnih gradbenih kompozitnih nosilcev. S tem namenom podrobno analiziramo dvoslojni leseni kompozitni nosilec, sovprežne kontinuirne nosilce iz jekla in betona in vpliv diferenčnega krčenja na napetostno in deformacijsko stanje dvoslojnih armiranobetonskih nosilcev.

V vseh računskih primerih smo uporabljali različne tipe končnih elementov na stiku med sloji in na previsih kompozitnih nosilcev. Ti so se razlikovali po številu glavnih integracijskih vozlov - točk in po številu točk lokalne integracije med dvema glavnima integracijskima vozlova. Pri tem smo predpostavili, da so vozli integracije vzdolž elementa na stiku med slojema kompozitnega nosilca (glavni integracijski vozli) hkrati tudi interpolacijske točke za interpolacijo  $\varepsilon^a$ ,  $\varepsilon^b$ ,  $\kappa^a$ ,  $x^*$  in  $p_n^b$ . Govorimo o poenotenju integracijskih in interpolacijskih točk. Primer izbire glavnih vozlov elementa in točk lokalne integracije prikazuje slika 4.1.



Slika 4.1: Primer izbire glavnih in lokalnih integracijskih točk ( $i = 5$ ,  $j = 3$ ).

Na tej sliki je prikazana izbira petih točk globalne Lobattove integracije in treh točk rekurzivne lokalne Lobattove integracije. Temu ustrezno označimo različne tipe končnih elementov kot  $E_{i-j}$ . Pri tem predstavlja indeks  $i$  število glavnih vozlov končnega elementa in indeks  $j$  število točk lokalne integracije. Namesto *število glavnih točk elementa* v besedilu uporabljamo tudi izraz *red elementa*, kar je v tesni povezavi z interpolacijo neznanih količin končnega elementa. Element z  $M$  glavnimi točkami je interpoliran z Lagrangevimi polinomi reda  $M - 1$ . Element najnižjega reda je  $E_{3-3}$  s tremi globalnimi Lobattovimi točkami in kvadratno interpolacijo med njimi. Navzgor z redom elementa nismo omejeni, vendar se zaradi nenatančnosti aproksimacije s polinomi visokega reda izogibamo zelo visokemu številu glavnih točk.

Vsi računi so bili opravljeni na osebem računalniku, računali smo z dvojno dolžino števil (15 decimalnih mest) in osnovno zaokrožitveno napako velikostnega reda  $2.22 \cdot 10^{-16}$ . Tako so vsi rezultati izvednoteni na petnajst mest, vendar jih v nadaljevanju zaradi večje preglednosti ne podajamo tako natančno. Kot kriterij za ustaveitev Newton–Raphsonove metode smo uporabili dva pogoja: velikost evklidske norme stolpca neznanek in evklidsko normo desnih strani sistema enačb v trenutni iteraciji. Račun smo ustavili, ko sta bili obe normi manjši od vnaprej določenega majhnega števila, ki je bilo običajno  $10^{-5}$ . V vseh računskih primerih smo v okolici rešitve opazili kvadratično konvergenco razvitega Newton–Raphsonovega algoritma, potem ko smo se dovolj približali rešitvi.

#### 4.1 GIRHAMMARJEV KOMPOZITNI PROSTOLEŽEČI NOSILEC

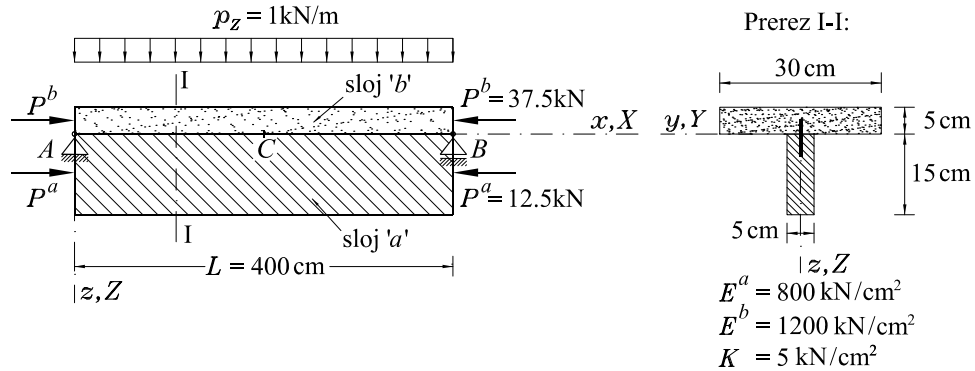
V prvem računskem primeru analiziramo natančnost, učinkovitost in konvergenco predstavljene družine deformacijskih končnih elementov za geometrijsko nelinearno analizo kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med slojema. Analiziramo dvoslojni prostoležeči kompozitni nosilec. V tem računskem primeru dodatno analiziramo tudi vpliv podajnosti stika na napetostno in deformacijsko stanje obravnavanega kompozitnega nosilca. Za dvoslojni prostoležeči kompozitni nosilec obstajajo v literaturi tudi točne rešitve. Te so prvi predstavili Girhammar in sodelavci [41]. Zato ta nosilec v nadaljevanju imenujemo Girhammarjev nosilec. Točne rešitve za napetostno in deformacijsko stanje kompozitnega nosilca so izpeljali s poenostavljeno teorijo ravninskih kompozitnih nosilcev. Za kinematične enačbe in ustrezne ravnotežne enačbe so uporabili enačbe t.i. modificirane teorije drugega reda, za konstitucijske enačbe obeh slojev in stika med slojema kompozitnega nosilca pa so uporabili linearne zveze. Te zapišemo v naslednji obliki:

$$\begin{aligned}\sigma^a(x, z^a) &= E^a D^a = E^a (\varepsilon^a(x) + z^a \kappa^a(x)), \\ \sigma^b(x, z^b) &= E^b D^b = E^b (\varepsilon^b(x) + z^b \kappa^b(x)), \\ q_t^a(x) &= K \Delta^a(x),\end{aligned}$$

kjer predstavljata  $E^a$  in  $E^b$  elastična modula sloja  $a$  oziroma sloja  $b$  kompozitnega nosilca, parameter  $K$  pa je togost stika. Kompozitni nosilec obtežimo z enakomerno linijsko obtežbo  $p_z$  in z robnima točkovnima tlačnima silama  $P^a$  in  $P^b$ , ki delujeta v težiščni osi zgornjega oziroma spodnjega sloja. Geometrijske in materialne podatke ter podatke o načinu podpiranja in o velikosti in legi obtežbe prikazuje slika 4.2.

#### Analiza natančnosti deformacijskih končnih elementov

Kot smo že povedali, so Girhammar in sodelavci [41] podali točne rešitve za napetostno in deformacijsko stanje obravnavanega dvoslojnega nosilca. Zato najprej s primerjavo med točnimi in nu-



Slika 4.2: Geometrijski in materialni podatki ter podatki o načinu podpiranja in obtežbi za Girhammarjev dvoslojni prostoležeči nosilec.

meričnimi rešitvami, ki smo jih izračunali s predstavljenimi končnimi elementi, analiziramo natančnost razvitega računskega postopka. Primerjavo med rezultati za značilne količine Girhammarjevega nosilca prikazuje preglednica 4.1. Vse rezultate značilnih količin, ki so prikazani v preglednici 4.1, smo izračunali z elementi  $E_{5-5}$ . Dodamo naj, da je vertikalni pomik  $w_C$  izvrednoten glede na referenčno os kompozitnega nosilca, osni sili  $\mathcal{N}_C^a$  in  $\mathcal{N}_C^b$  ter upogibna momenta  $\mathcal{M}_C^a$  in  $\mathcal{M}_{c,C}^b$  pa glede na težiščno os obeh slojev kompozitnega nosilca.

Preglednica 4.1: Primerjava med točnimi in numeričnimi rezultati za značilne količine Girhammarjevega nosilca.

količina	točno [41]		en KE $E_{5-5}$		dva KE $E_{5-5}$	
	GLT <sup>1</sup>	TDR <sup>2</sup>	GLT <sup>3</sup>	GNT <sup>4</sup>	GLT <sup>3</sup>	GNT <sup>4</sup>
$w_C$ [mm]	7.560	9.276	7.561	9.268	7.560	9.273
$\mathcal{N}_C^a$ [kN]	0.863	3.897	0.872	4.007	0.863	3.924
$\mathcal{N}_C^b$ [kN]	-50.863	-53.897	-50.872	-54.003	-50.863	-53.920
$\mathcal{M}_C^a$ [kNm]	0.4977	0.6162	0.4971	0.6086	0.4978	0.6155
$\mathcal{M}_{c,C}^b$ [kNm]	0.1659	0.2054	0.1657	0.2034	0.1659	0.2052
$q_{t,A}^a$ [kN]	11.444	13.878	11.397	13.950	11.442	13.862

- 1 geometrijsko linearna teorija
- 2 modificirana teorija drugega reda
- 3 geometrijsko linearna teorija
- 4 geometrijsko nelinearna teorija

Opazimo veliko natančnost predstavljenih končnih elementov, saj že z enim oziroma dvema končnima elementoma  $E_{5-5}$  izračunamo praktično točne vrednosti značilnih količin tako za geometrijsko linearno kot tudi za geometrijsko nelinearno teorijo kompozitnih nosilcev.

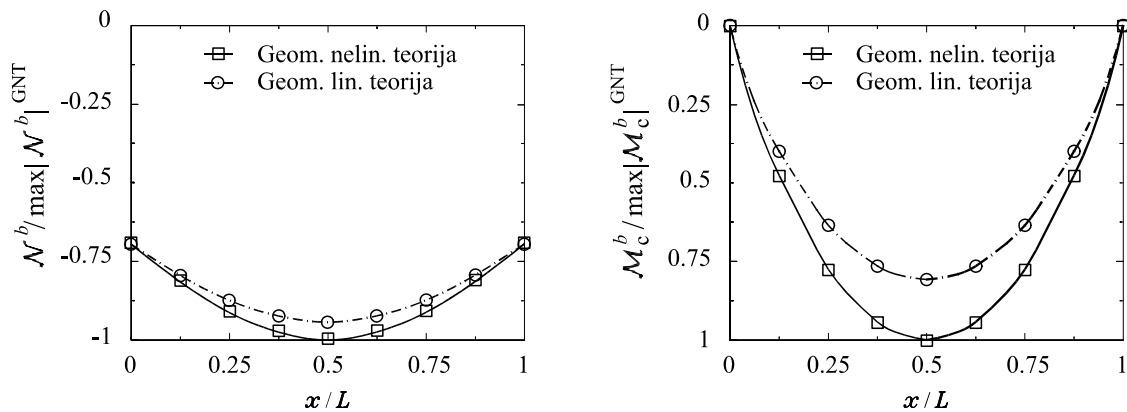


V nadaljevanju, s pomočjo rezultatov, ki so zbrani v preglednici 4.1, analiziramo, kako geometrijsko nelinearna teorija ravninskih nosilcev vpliva na napetostno in deformacijsko stanje kompozitnih nosilcev. Vpliv ocenimo s primerjavo rezultatov značilnih količin Girhammarjevega nosilca, ki jih izračunamo z geometrijsko linearnim in geometrijsko nelinearnim modelom nosilca. Razliko med teorijama ocenimo s pomočjo relativne napake  $\epsilon$ :

$$\epsilon(\bullet) = \left| \frac{(\bullet)^{\text{GLT}} - (\bullet)^{\text{GNT}}}{(\bullet)^{\text{GNT}}} \right|. \quad (4.1)$$

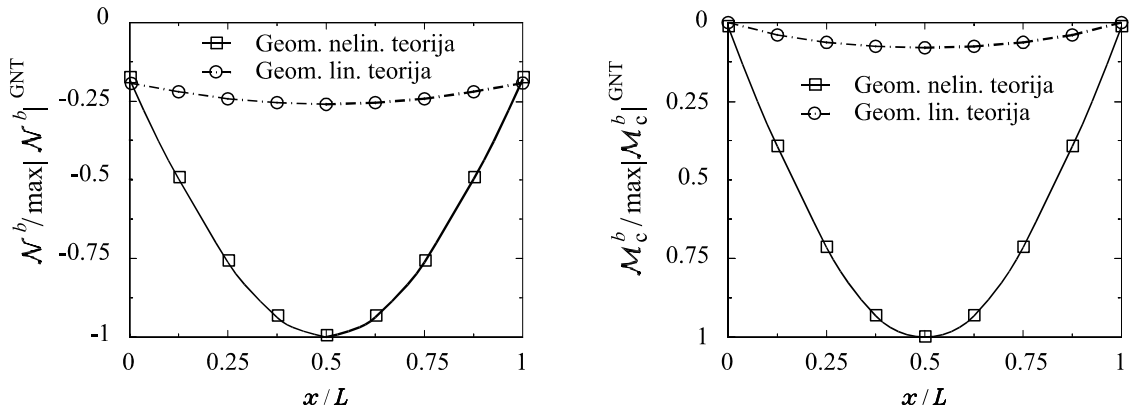
Razlike med rezultati za značilne količine Girhammarjevega nosilca, ki smo jih izračunali z geometrijsko linearno in geometrijsko nelinearno teorijo kompozitnih nosilcev, so: 18.5% za maksimalni vertikalni pomik  $w_C$ , 17.5% za maksimalno tangencialno komponento linijske kontaktne obtežbe  $q_{t,A}^a$ , kar 78% za osno silo spodnjega sloja kompozitnega nosilca  $\mathcal{N}_C^a$ , 6% za osno silo zgornjega sloja  $\mathcal{N}_C^b$  ter 19% za upogibna momenta spodnjega in zgornjega sloja kompozitnega nosilca  $\mathcal{M}_C^a$  in  $\mathcal{M}_{c,C}^b$ .

V nadaljevanju smo primerjali rezultate tudi pri petkrat večji obtežbi ( $\lambda = 5$ ). Relativna napaka za vertikalni pomik  $w_C$  se ob petkratnem povečanju obtežbe poveča z 18.5% kar na 91%, za maksimalno tangencialno komponento linijske kontaktne obtežbe  $q_{t,A}^a$  s 17.5% na 90%, za osno silo spodnjega sloja  $\mathcal{N}_C^a$  z 78% na 99%, za osno silo zgornjega sloja  $\mathcal{N}_C^b$  s 6% na 74% ter za upogibna momenta spodnjega in zgornjega sloja  $\mathcal{M}_C^a$  in  $\mathcal{M}_{c,C}^b$  z ocenjenih 19% na 92%. Sliki 4.3 in 4.4 zelo dobro prikazujeta omenjeno povečanje osne sile in upogibnega momenta zgornjega sloja, ki je posledica izbranega računskega modela kompozitnega nosilca.



Slika 4.3: Potek normiranih osnih sil  $\mathcal{N}^b$  in upogibnih momentov  $\mathcal{M}_c^b$  po osi zgornjega sloja Girhammarjevega nosilca. Primerjava med rezultati geometrijsko linearne in nelinearne teorije ravninskih kompozitnih nosilcev za  $\lambda = 1$  in 4 KE  $E_{5-5}$ .

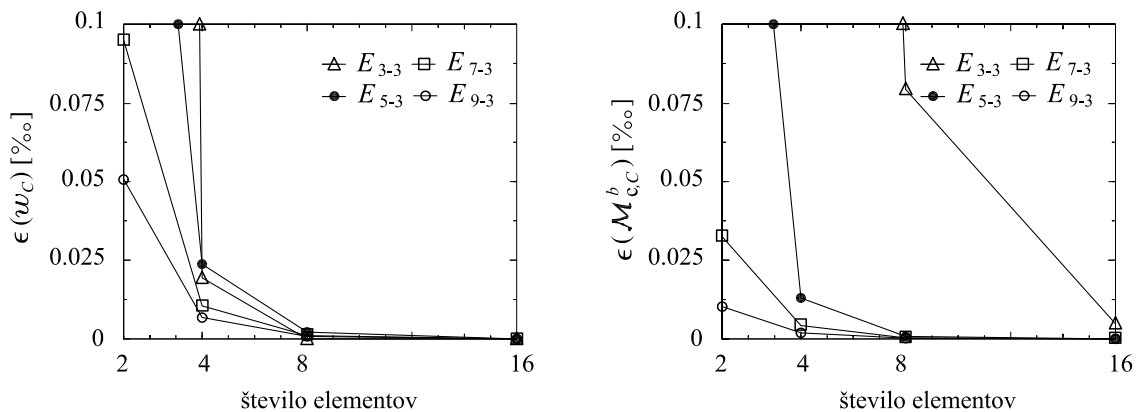
Ker izbira računskega modela kompozitnega nosilca bistveno vpliva na napetostno in deformacijsko stanje kompozitnega nosilca že pri nizkem nivoju obtežbe ( $\lambda = 1$ ), in ker smo za analizo uporabili materialne parametre lesa, sklepamo, da ima geometrijsko nelinearna teorija ravninskih nosilcev pri določenih lesenih kompozitnih nosilcih velik vpliv na natančnost izračunanega napetostnega in deformacijskega stanja. Zelo pomembna ugotovitev je, da so količine, dobljene z geometrijsko nelinearno teorijo, večje od dobljenih z geometrijsko linearno teorijo. To pomeni, da izračun z geometrijsko linearno teorijo ni na varni strani.



Slika 4.4: Potek normiranih osnih sil  $\mathcal{N}^b$  in upogibnih momentov  $\mathcal{M}_c^b$  po osi zgornjega sloja Girhammarjevega nosilca. PrIMERJAVA med rezultati geometrijsko linearne in nelinearne teorije ravninskih kompozitnih nosilcev za  $\lambda = 5$  in 4 KE  $E_{5-5}$ .

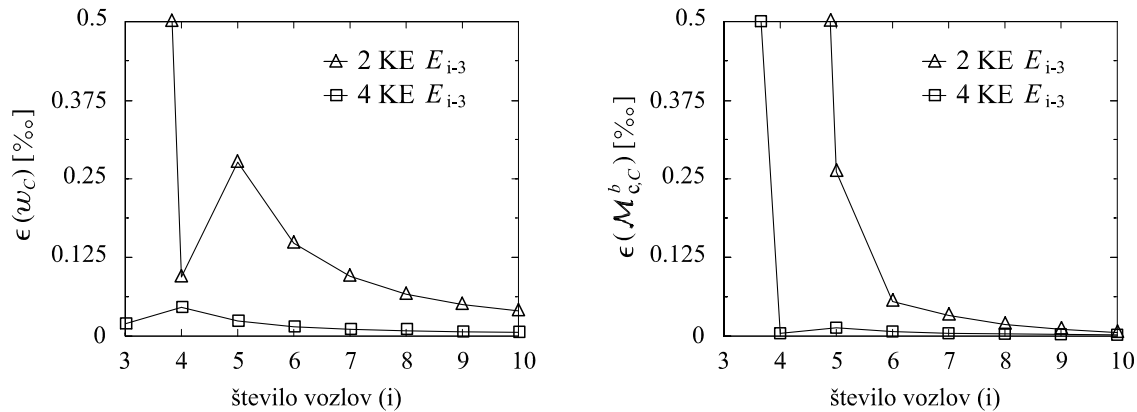
### Analiza konvergence deformacijskih končnih elementov

V nadaljevanju računskega primera analiziramo konvergenco izpeljanih deformacijskih končnih elementov. Pri tem spreminjamo število vozlov uporabljenih končnih elementov (oziroma stopnjo interpolacijskega polinoma za  $\varepsilon^a$ ,  $\varepsilon^b$ ,  $\kappa^a$ ,  $x^*$  ter  $q_n^b$ , ki je za ena manjša od števila vozlov elementa!) ter število končnih elementov. Glede na ugotovitve in priporočila Zupana [90] izberemo tri točke rekurzivne lokalne Lobattove integracije. Tako so vsi uporabljeni končni elementi tipa  $E_{i-3}$ , kjer  $i$  predstavlja število vozlov elementa. Rezultate medsebojno primerjamo pri osnovnem nivoju obtežbe ( $\lambda = 1$ ), kot primerjalne oziroma točne pa privzamemo rezultate, dobljene s šestnajstimi končnimi elementi tipa  $E_{9-3}$ . Konvergenco numeričnih rešitev ocenimo s pomočjo relativne napake, ki smo jo definirali z enačbo 4.1.



Slika 4.5: Analiza konvergence za vertikalni pomik  $w_C$  in upogibni moment  $\mathcal{M}_{c,C}^b$  glede na izbrano število končnih elementov.

Na slikah 4.5 in 4.6 prikazujemo vpliv števila končnih elementov in vpliv števila vozlov na velikost relativne napake vertikalnega pomika  $w_C$  in upogibnega momenta  $\mathcal{M}_{c,C}$  na sredini razpona Girhammarjevega kompozitnega nosilca.



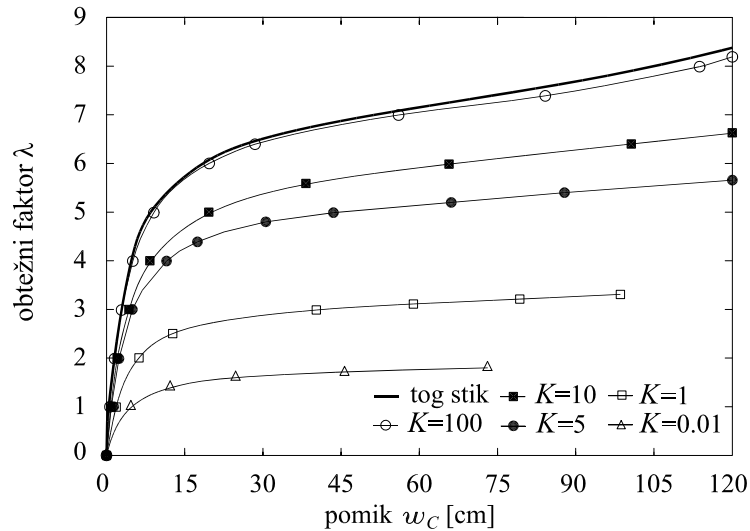
Slika 4.6: Analiza konvergence za vertikalni pomik  $w_C$  in upogibni moment  $\mathcal{M}_{c,C}^b$  glede na izbrano število vozlov končnega elementa.

Kot vidimo na slikah 4.5 in 4.6, se relativni napaki za vertikalni pomik  $w_C$  in za upogibni moment  $\mathcal{M}_{c,C}$  hitro manjšata s povečevanjem števila končnih elementov kot tudi s povečevanjem števila vozlov elementa. Opozorimo pa, da povečevanje števila vozlov elementa še ne pomeni nujno tudi večje natančnosti (slika 4.6). Podobno je za analizo armiranobetonskih konstrukcij z deformacijskimi končnimi elementi v svoji doktorski nalogi ugotovil tudi Bratina [13]. Kljub tem ugotovitvam pa poudarimo, da so rezultati izjemno natančni že ob uporabi samo dveh končnih elementov s tremi vozli. Za dva končna elementa tipa  $E_{3-3}$  sta relativni napaki  $\epsilon(w_C) = 2.54^\circ/\text{‰}$  in  $\epsilon(\mathcal{M}_{c,C}) = 35.21^\circ/\text{‰}$ . Z uporabo dveh končnih elementov nekoliko višjega reda ( $E_{5-3}$ ) pa sta relativni napaki le še  $\epsilon(w_C) = 0.27^\circ/\text{‰}$  in  $\epsilon(\mathcal{M}_{c,C}) = 0.26^\circ/\text{‰}$ .

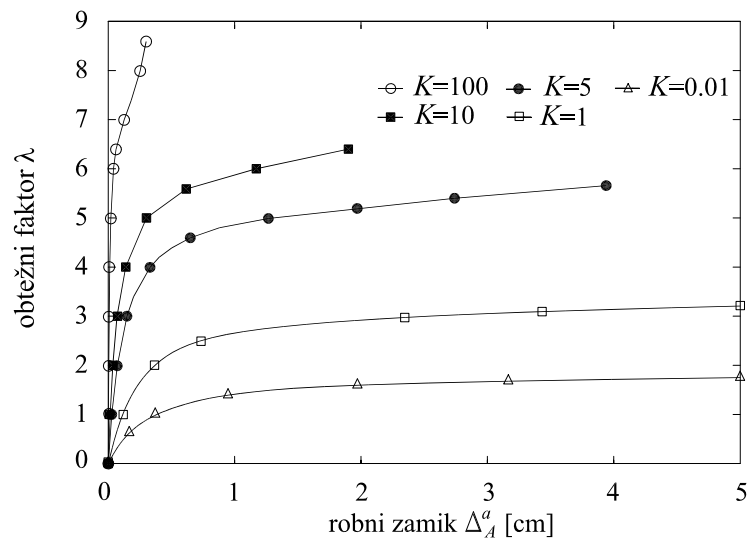
### Vpliv togosti stika na obnašanje Girhammarjevega kompozitnega nosilca

Dobro je znano, da ima togost stika velik vpliv na obnašanje kompozitnih nosilcev že pri nizkem nivoju obtežbe, t.j. v primeru, ko za računski model kompozitnega nosilca upravičeno izberemo geometrijsko linearno teorijo ravninskih nosilcev. Zato v nadaljevanju analiziramo vpliv togosti stika na obnašanje kompozitnih nosilcev tudi pri visokem nivoju obtežbe. Seveda moramo v tem primeru kompozitni nosilec modelirati z geometrijsko nelinearno teorijo. Glede na predhodno analizo natančnosti deformacijskih končnih elementov smo za parametrično analizo vpliva togosti stika na obnašanje Girhammarjevega kompozitnega nosilca uporabili štiri končne elemente tipa  $E_{5-3}$ . Obtežno-deformacijske krivulje vertikalnega pomika na sredini Girhammarjevega nosilca  $w_C$  za različne vrednosti parametra stika  $K$  prikazuje slika 4.7.

Vrednost parametra  $K = 100 \text{ kN/cm}^2$  predstavlja praktično povsem tog stik med slojema. To ugotovimo s pomočjo slike 4.7, kjer se obtežno-deformacijska krivulja za  $K = 100 \text{ kN/cm}^2$  skoraj povsem prilega obtežno-deformacijski krivulji kompozitnega nosilca s togim stikom. To smo izračunali z deformacijskimi končnimi elementi za nelinearno analizo ukrivljenih kompozitnih nosilcev brez upoštevanja zdrsa med sloji. Te predstavljamo v dodatku B. Nasprotno



Slika 4.7: Vpliv togosti stika na potek obtežno-deformacijske krivulje vertikalnega pomika  $w_C$  Girhammarjevega nosilca. Enota za  $K$  v  $\text{kN}/\text{cm}^2$ , nosilec smo analizirali s štirimi elementi tipa  $E_{5-3}$ .

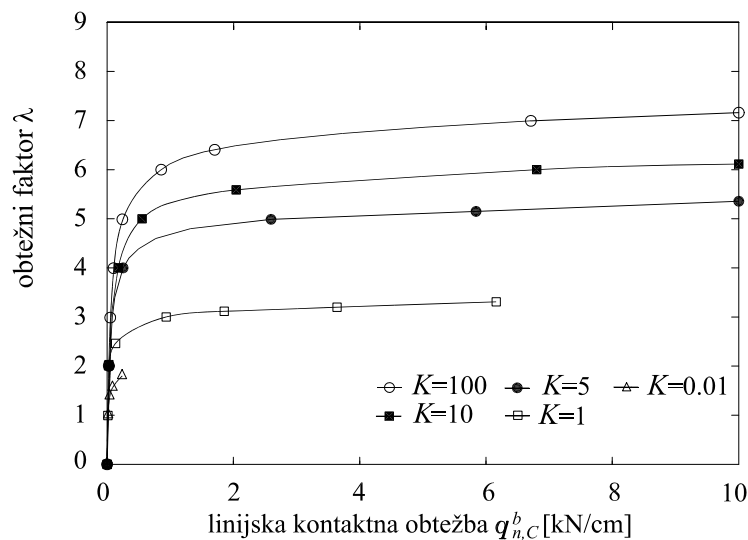


Slika 4.8: Vpliv togosti stika na potek obtežno-deformacijske krivulje robnega zamika  $\Delta_A^a$  Girhammarjevega nosilca. Enota za  $K$  v  $\text{kN}/\text{cm}^2$ , nosilec smo analizirali s štirimi elementi tipa  $E_{5-3}$ .

pa vrednost parametra  $K = 0.01 \text{ kN}/\text{cm}^2$  predstavlja praktično povsem podajen stik med slojema, saj so numerične analize pokazale, da dodatno zmanjševanje parametra  $K$  bistveno ne spremeni rezultatov. Slika 4.7 nazorno prikazuje, kako pomemben vpliv ima togost stika na vertikalni pomik  $w_C$  in s tem tudi na togost kompozitne konstrukcije. Če primerjamo rezultate pri obtežnem faktorju  $\lambda = 5$ , je vertikalni pomik točke  $C$  kompozitnega nosilca s togostjo stika  $K = 5 \text{ kN}/\text{cm}^2$  za 2.5 krat tolikšen od primerljivega pomika kompozitnega nosilca s togostjo

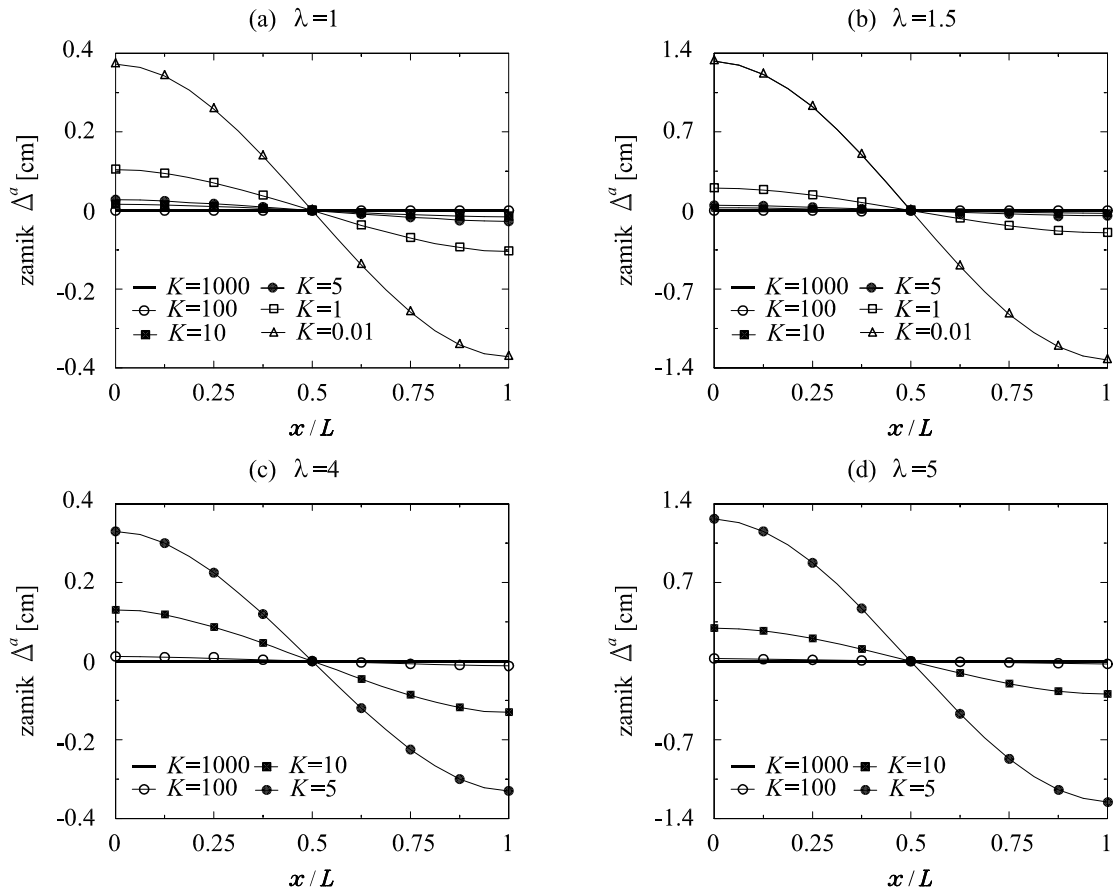
stika  $K = 10 \text{ kN/cm}^2$  in kar za 4.7 krat tolikšen od primerljivega pomika kompozitnega nosilca s togostjo stika  $K = 100 \text{ kN/cm}^2$ .

Na slikah 4.8 in 4.9 prikazujemo vpliv vrednosti parametra stika  $K$  na velikost robnega zamika  $\Delta_A^a$  in na vrednost normalne komponente linijske kontaktne obtežbe na sredini razpona  $q_{n,C}^b$  za različne nivoje obtežbe. Kot pričakujemo je, ne glede na velikost obtežnega faktorja  $\lambda$ , zamik točke  $A$  tem večji, čim bolj je stik podajen. Za zelo tog stik ( $K = 100 \text{ kN/cm}^2$ ) je robni zamik  $\Delta_A^a$  za vse nivoje obtežbe praktično zanemarljiv. Glede na rezultate na sliki 4.9 lahko zaključimo, da se velikost normalne komponente linijske kontaktne obtežbe na sredini Girhammarjevega nosilca  $q_{n,C}^b$  pri danem nivoju obtežbe povečuje, če se togost stika zmanjšuje.



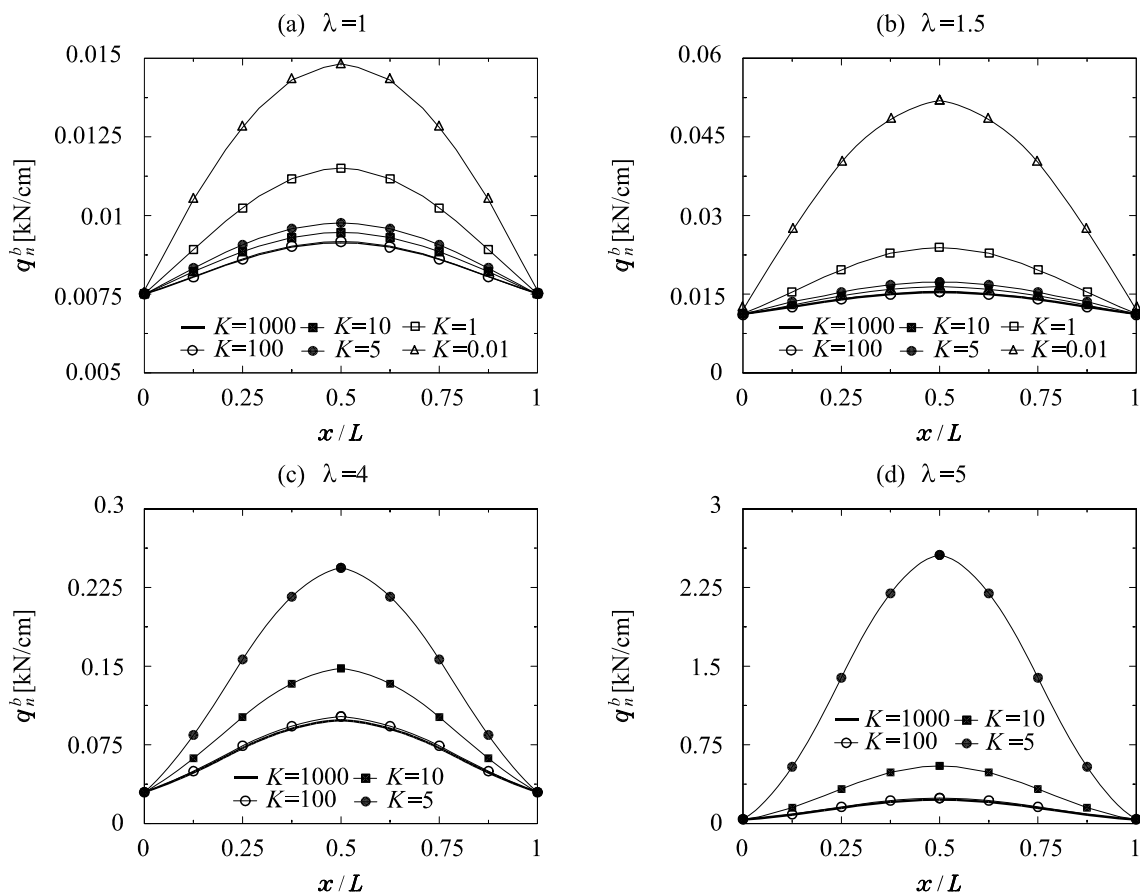
Slika 4.9: Vpliv togosti stika na potek obtežno-deformacijske krivulje normalne komponente linijske kontaktne obtežbe  $q_{n,C}^b$  Girhammarjevega nosilca. Enota za  $K$  je  $\text{kN/cm}^2$ , nosilec smo analizirali s štirimi elementi tipa  $E_5-3$ .

Vpliv togosti stika na potek zamikov po osi Girhammarjevega kompozitnega nosilca za štiri različne nivoje obtežbe ( $\lambda = 1, 1.5, 4$  ter  $5$ ) prikazuje slika 4.10. Tudi tu nastopijo največji zamiki na robovih nosilca. Zaradi simetrije nosilca in obtežbe je potek zamikov po osi Girhammarjevega nosilca antisimetričen. Na slikah 4.10(a) in 4.10(b) so zamiki, ki pripadajo nosilcem z bolj togim stikom, praktično nič, saj sta obtežna faktorja  $\lambda = 1$  in  $\lambda = 1.5$  majhna v primerjavi z 'mejnimi' obtežnimi faktorji teh nosilcev (glej sliko 4.7). Za kompozitne nosilce s podajnejšim stikom, na primer za  $K = 1 \text{ kN/cm}^2$  ali za  $K = 0.01 \text{ kN/cm}^2$ , pa se ob robovih kompozitnega nosilca pojavijo opazni zamiki. To je posledica dejstva, da sta obtežna faktorja  $\lambda = 1$  in  $\lambda = 1.5$  za kompozitne nosilce s podajnim stikom že v bližini 'mejne' nosilnosti. Na slikah 4.10(c) in 4.10(d) prikazujemo potek zamikov za obtežbo  $\lambda = 4$  in  $\lambda = 5$  in sicer le za nosilce z bolj togimi stiki. Za kompozitne nosilce s togostjo stika  $K = 5 \text{ kN/cm}^2$  ali  $K = 10 \text{ kN/cm}^2$  predstavljata  $\lambda = 4$  in  $\lambda = 5$  visok nivo obtežbe, kar se odraža tudi v vidnih zamikih na stiku med slojema.



Slika 4.10: Vpliv velikosti obtežnega faktorja in togosti stika na potek zamikov vzdolž stika Girhammarjevega nosilca. Enota za  $K$  je  $\text{kN}/\text{cm}^2$ , nosilec smo analizirali s štirimi elementi tipa  $E_{5-3}$ .

Na sliki 4.11 primerjamo potek normalne komponente linijske kontaktne obtežbe  $q_n^b$  po osi Girhammarjevega kompozitnega nosilca za različne nivoje obtežbe in za različne vrednosti parametra stika  $K$ . Opazimo, da je normalna komponenta linijske kontaktne obtežbe na sredini Girhammarjevega nosilca  $q_{n,C}^b$  bistveno večja, kot je na robovih nosilca, ne glede na velikost obtežbe in togost stika. Za  $K = 5 \text{ kN}/\text{cm}^2$  in obtežni faktor  $\lambda = 1$  je  $q_{n,C}^b$  za 1.3-krat večja od njene robne vrednosti. S povečevanjem obtežbe pa se to razmerje še povečuje: za  $\lambda = 2$  na 1.54, za  $\lambda = 4$  na 8.14 in za  $\lambda = 5$  kar na 61.70. S pomočjo slike 4.11 ugotovimo tudi, da se s povečevanjem obtežnega faktorja normalna komponenta kontaktne obtežbe  $q_{n,C}^b$  v polju povečuje bistveno hitreje kot na robovih kompozitnega nosilca. To velja za vse togosti stika. Tako lahko v bližini 'mejnega' obtežnega faktorja obravnavanega kompozitnega nosilca govorimo o 'koncentraciji' normalne komponente linijske kontaktne obtežbe  $q_n^b$  na sredini razpona prostoležečega kompozitnega nosilca. To je seveda posledica t.i. 'obešene' deformirane lege kompozitnega nosilca.

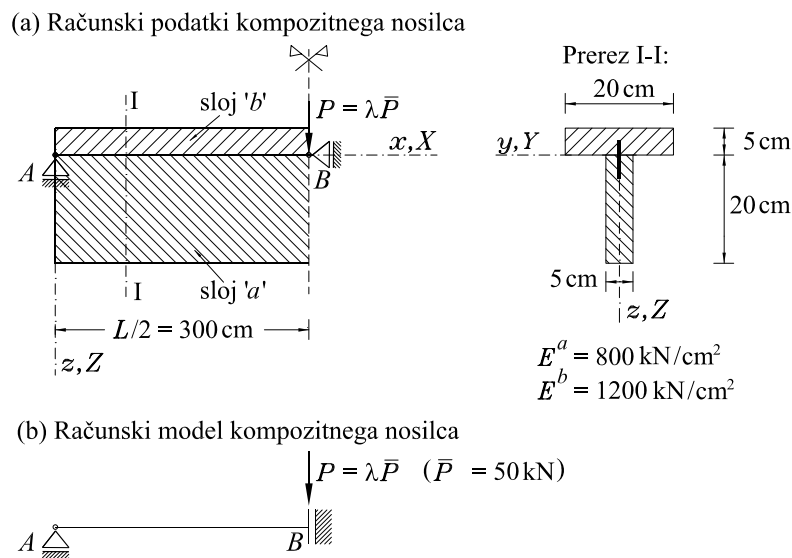


Slika 4.11: Vpliv velikosti obtežnega faktorja in togosti stika na potek normalne komponente linijske kontaktne obtežbe  $q_n^b$  po osi Girhammarjevega nosilca. Enota za  $K$  je  $\text{kN/cm}^2$ , nosilec smo analizirali s štirimi elementi tipa  $E_5-3$ .

## 4.2 PROSTOLEŽEČI KOMPOZITNI NOSILEC OBTEŽEN S TOČKOVNO SILO

V drugem računskem primeru analiziramo obnašanje prostoležečega kompozitnega nosilca, ki je obtežen s točkovno silo na sredini razpona. Nosilec podpremo tako, kot je to običajno pri eksperimentalnih preiskavah prostoležečih nosilcev. Med eksperimentom je nosilec položen na dva jeklena valjčka, ki omogočata zasuke in horizontalne pomike obeh robov nosilca, preprečujeta pa vertikalne pomike. Mirovanje nosilca v horizontalni smeri zagotovimo s pomočjo horizontalno nepomičnega obremenilnega bata, ki nalega na sredini razpona. Med preiskavo se razvije trenje oziroma lepenje med nosilcem in batom, ki preprečuje horizontalne pomike sredine nosilca. Poudariti pa je potrebno, da je med preiskavo nosilec podprt na nivoju spodnjega roba, v naši analizi pa na nivoju referenčne osi oziroma stika. Kljub temu, pa glede na numerične izkušnje, ne pričakujemo bistvenih odstopanj rezultatov. Glede na povedano, je način podpiranja kompozitnega nosilca naslednji: leva in desna podpora nosilca sta vrtljivi in vodoravno pomični, na sredini razpona pa nosilcu preprečimo vodoravni pomik. Geometrijske in materialne podatke ter podatke o legi obtežbe in načinu podpiranja kompozitnega nosilca prikazuje slika 4.12(a). Obravnavani kompozitni prostoležeči nosilec je na sredini razpona obremenjen s

točkovno silo 100 kN. Zaradi simetrije analiziramo le polovico prostoležečega nosilca, uporabljen računski model prikazujemo na sliki 4.12(b). Uporabljeni konstitucijski zakon za oba sloja in za stik med slojema kompozitnega nosilca je enak kot v prvem računskem primeru (Girhammarjev prostoležeči kompozitni nosilec), torej linearno elastična modela za oba sloja in linearni zakon stika med slojema kompozitnega nosilca.



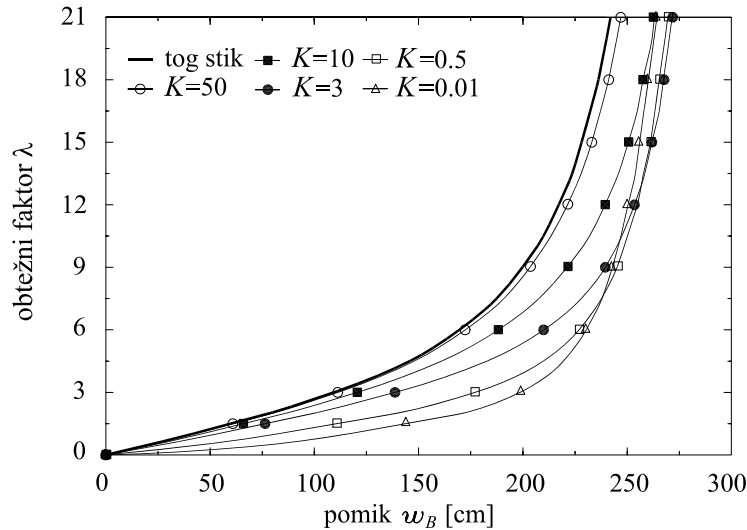
Slika 4.12: (a) Geometrijski in materialni podatki ter podatki o obtežbi in načinu podpiranja prostoležečega kompozitnega nosilca. (b) Računski model prostoležečega kompozitnega nosilca obteženega s točkovno silo na sredini razpona.

Tudi v tem računskem primeru nas bo podrobno zanimalo, kako togost stika in velikost točkovne sile vplivata na napetostno in deformacijsko stanje prostoležečega kompozitnega nosilca. Z numeričnim eksperimentiranjem smo ugotovili, da izračunamo zelo natančne kinematične, statične in deformacijske količine kompozitnega nosilca že samo s šestimi elementi tipa  $E_{5-4}$ . Zato v vseh nadaljnjih analizah modeliramo kompozitni nosilec s šestimi elementi tipa  $E_{5-4}$ .

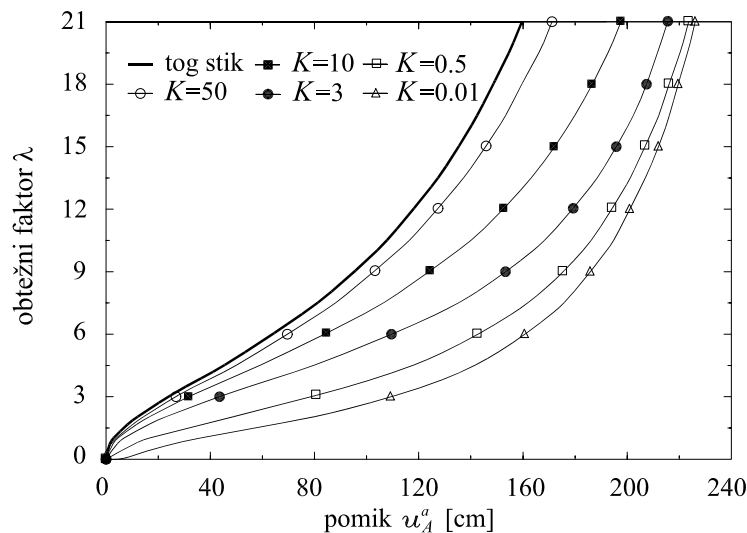
Slika 4.13 prikazuje vpliv togosti stika na potek obtežno-deformacijske krivulje vertikalnega pomika sredine razpona  $w_B$ . Pri tem smo zelo podajen stik modelirali s togostjo stika  $K = 0.01 \text{ kN/cm}^2$ , tog stik pa s  $K = 50 \text{ kN/cm}^2$ . Obtežno-deformacijsko krivuljo, ki pripada togemu stiku, smo tudi v tem računskem primeru določili s končnimi elementi za nelinearno analizo ukrivljenih kompozitnih nosilcev (dodatek B). Obtežno-deformacijska krivulja vertikalnega pomika  $w_B$ , ki jo prikazuje slika 4.13, je v nasprotju z inženirskimi pričakovanji. Pričakovali bi, da so pomiki kompozitnega nosilca z bolj podajnim stikom večji od pomikov, ki pripadajo kompozitnemu nosilcu z bolj togim stikom med slojema. Toda takšno inženirsko sklepanje velja le pri nizkem nivoju obtežbe (slika 4.13). Če primerjamo obtežno-deformacijski krivulji kompozitnega nosilca s togostmi stika bodisi  $K = 0.01 \text{ kN/cm}^2$  ali  $K = 0.5 \text{ kN/cm}^2$ , ugotovimo, da se krivulji sekata pri obtežnem faktorju  $\lambda \cong 7.5$ . Podobno ugotovimo tudi za kompozitna nosilca s togostjo stika  $K = 3 \text{ kN/cm}^2$  in  $K = 0.01 \text{ kN/cm}^2$ . V tem primeru se obtežno-deformacijski krivulji sekata pri  $\lambda \cong 10.5$ . Pri kompozitnih nosilcih s togostmi stika  $K = 3 \text{ kN/cm}^2$  ali  $K = 0.5 \text{ kN/cm}^2$  pa se obtežno-deformacijski krivulji sekata pri  $\lambda \cong 13$ . Ugotovimo lahko, da obtežno-deformacijska krivulja kompozitnega nosilca z izbrano togostjo stika seka vse obtežno-deformacijske krivulje, ki pripadajo kompozitnim nosilcem z višjo togostjo stika. Ta pojav pri kompozitnih nosilcih



pojasnimo s pomočjo slike 4.14, ki prikazuje vpliv togosti stika na potek obtežno-deformacijske krivulje horizontalnega pomika točke  $A$  spodnjega sloja  $u_A^a$  analiziranega kompozitnega nosilca.



Slika 4.13: Vpliv togosti stika na potek obtežno-deformacijske krivulje vertikalnega pomika  $w_B$  kompozitnega nosilca. Enota za  $K$  je  $\text{kN}/\text{cm}^2$ , nosilec smo analizirali s šestimi elementi tipa  $E_{5-4}$ .

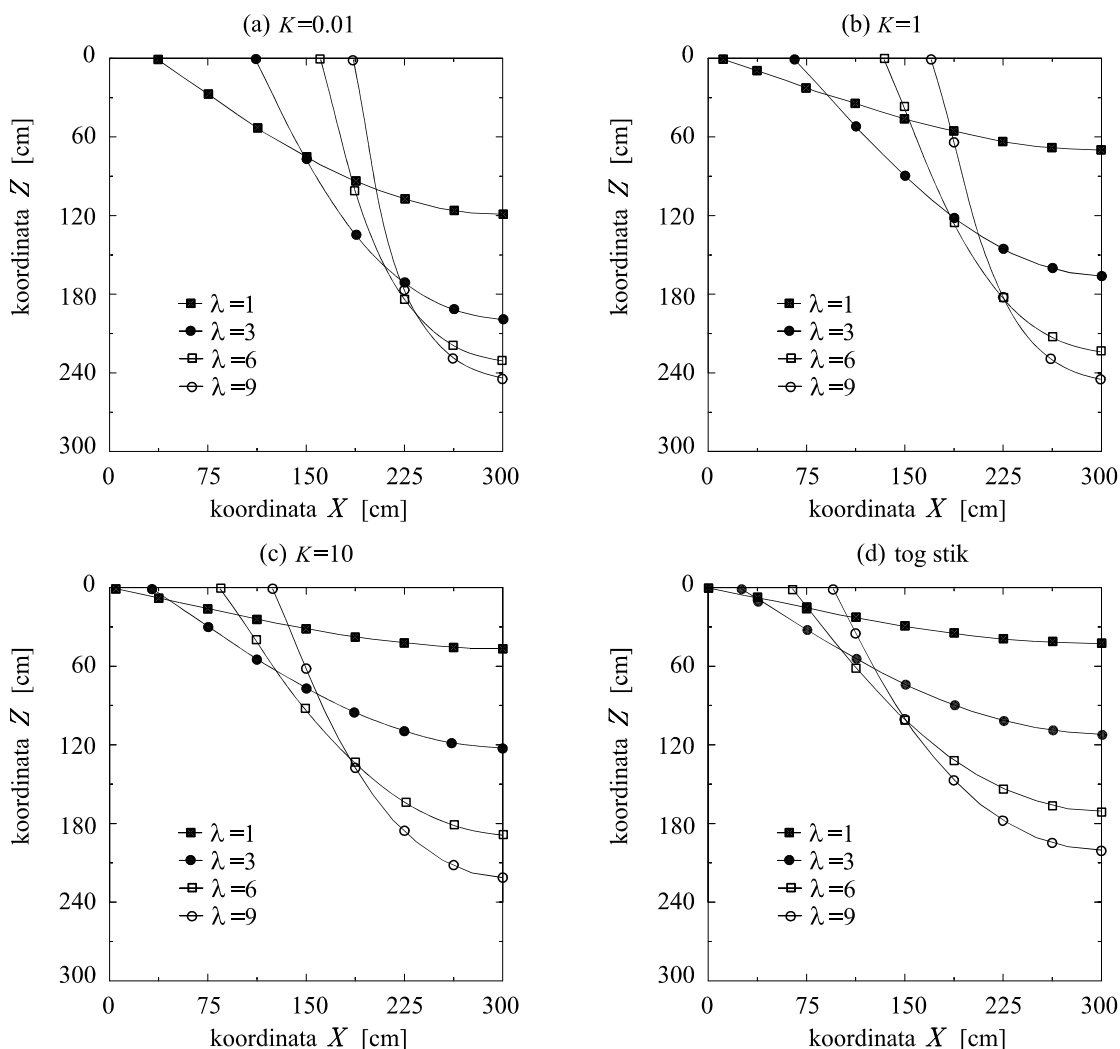


Slika 4.14: Vpliv togosti stika na potek obtežno-deformacijske krivulje horizontalnega pomika  $u_A^a$  spodnjega sloja kompozitnega nosilca. Enota za  $K$  je  $\text{kN}/\text{cm}^2$ , nosilec smo analizirali s šestimi elementi tipa  $E_{5-4}$ .

Na sliki 4.14 ne opazimo presečišč obtežno-deformacijskih krivulj. To pomeni, da se horizontalni pomik kompozitnega nosilca  $u_A^a$  povečuje z manjšanjem togosti stika med slojema kompozitnega nosilca, neglede na nivo obtežbe. Za ilustracijo opazujemo kompozitni nosilec s togostmi stika

$K = 0.01 \text{ kN/cm}^2$  ali  $K = 3 \text{ kN/cm}^2$ . Ker je horizontalni pomik  $u_A^a$  nosilca s togostjo stika  $K = 0.01 \text{ kN/cm}^2$  za vse obtežbe vedno večji kot pri nosilcu s togostjo stika  $K = 3 \text{ kN/cm}^2$ , je deformirana lega nosilca z manjšo togostjo stika bolj 'obešena', kot pa je pri nosilcu z večjo togostjo stika. Za t.i. 'obešeno' deformirano lego kompozitnih nosilcev je značilno, da moramo izjemno povečati obtežbo, pri tem pa se vertikalni pomik  $w_B$  minimalno poveča. Ker dosežemo pri kompozitnem nosilcu s togostjo stika  $K = 3 \text{ kN/cm}^2$  'obešeno' deformirano lego pri višjem nivoju obtežbe, kot jo dosežemo pri kompozitnem nosilcu s togostjo stika  $K = 0.01 \text{ kN/cm}^2$ , se obtežno-deformacijski krivulji na sliki 4.13 sekata.

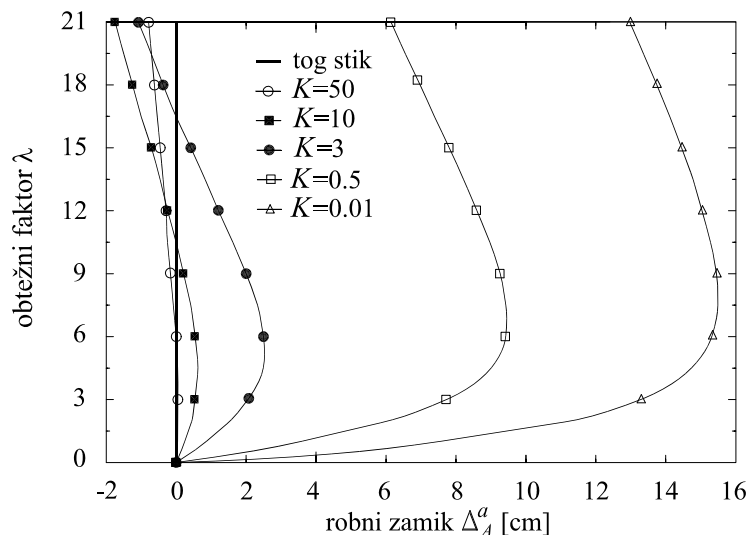
Opisani pojav še podrobneje opišemo s sliko 4.15, kjer prikažemo deformirane lege spodnjega sloja kompozitnega nosilca za štiri različne nivoje obtežbe ( $\lambda = 1, 3, 9$  in  $15$ ). Zaradi simetrije konstrukcije prikažemo deformirane lege le za levo polovico kompozitnega nosilca.



Slika 4.15: Vpliv togosti stika in nivoja obtežbe na deformirano lego spodnjega sloja prostoležечеega kompozitnega nosilca. Enota za  $K$  je  $\text{kN/cm}^2$ , nosilec smo analizirali s šestimi elementi tipa  $E_{5-4}$ .

Slika 4.15 nazorno prikazuje, da se kompozitni nosilci z manjšo togostjo stika 'obesijo' pri nižjem nivoju obtežbe kot kompozitni nosilci z večjo togostjo stika.

V nadaljevanju analiziramo vpliv podajnosti stika na potek zamikov med slojema kompozitnega nosilca in na potek normalne komponente linijske kontaktne obtežbe po osi kompozitnega nosilca. Najprej na sliki 4.16 prikažemo obtežno-deformacijske krivulje robnega zamika  $\Delta_A^a$  za različne togosti stika.

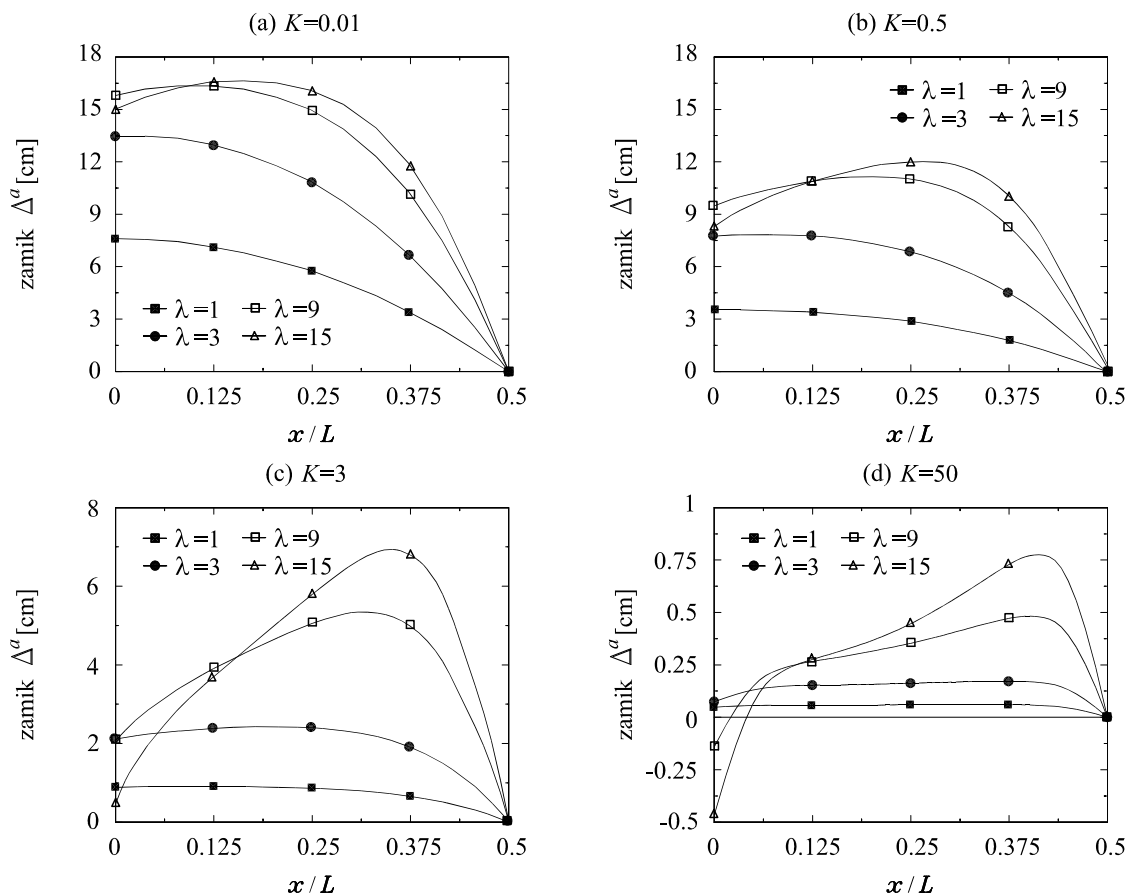


Slika 4.16: Vpliv togosti stika na potek obtežno-deformacijske krivulje robnega zamika  $\Delta_A^a$  kompozitnega nosilca. Enota za  $K$  je  $\text{kN}/\text{cm}^2$ , nosilec smo analizirali s šestimi elementi tipa  $E_{5-4}$ .

Tudi sedaj opazimo dokaj nenavadno spreminjanje robnega zamika  $\Delta_A^a$ . Na sliki 4.16 vidimo, da je do nivoja obtežbe  $\lambda \cong 1.5$  spreminjanje zamika  $\Delta_A^a$  pričakovano: (a) robni zamik  $\Delta_A^a$  je pozitiven, kar pomeni, da se točka  $A$  zgornjega sloja kompozitnega nosilca premakne v levo, glede na soležno točko spodnjega sloja v nedeformirani legi in (b) s povečevanjem togosti stika se robni zamik manjša. Nenavadno pa je spreminjanje  $\Delta_A^a$  pri višjem nivoju obtežbe. Tako na sliki 4.16 opazimo, da se pri višjem nivoju obtežbe  $\Delta_A^a$  prične manjšati, neglede na togost stika, in pri določenem obtežnem faktorju doseže celo negativno vrednost. Negativen robni zamik  $\Delta_A^a$  pomeni, da se točka  $A$  zgornjega sloja premakne v desno, glede na soležno točko spodnjega sloja v nedeformirani legi. Negativni robni zamik  $\Delta_A^a$  doseže kompozitni nosilec pri relativno velikih vertikalnih pomikih sredine razpona, t.j. pri  $w_B > 150$  cm.

Zanimiv in nenavaden je tudi potek zamikov  $\Delta^a$  po osi spodnjega sloja kompozitnega nosilca. Tega za različne togosti stika ( $K = 0.01, 0.5, 3$  in  $50 \text{ kN}/\text{cm}^2$ ) ter za različne nivoje obtežb ( $\lambda = 1, 3, 9$  in  $15$ ) prikazuje slika 4.17. Zaradi simetrične geometrije, podpiranja in obtežbe kompozitnega nosilca je potek zamikov vzdolž osi kompozitnega prostoležečega nosilca antisimetričen. Zato na sliki 4.17 prikažemo  $\Delta^a$  le za levo polovico nosilca. Pri nižjih nivojih obtežbe vrednost zamikov narašča od sredine razpona proti robu kompozitnega nosilca neodvisno od togosti stika. Pri visokih nivojih obtežbe pa ugotovimo (glej sliko 4.17): (a) robni zamik  $\Delta_A^a$  ni več največji zamik, kot to velja pri nižjem nivoju obtežbe in (b) mesto največjega zamika se pomika od roba kompozitnega nosilca oziroma od točke  $A$  proti sredini razpona. Pri tem pa velja, da se lega

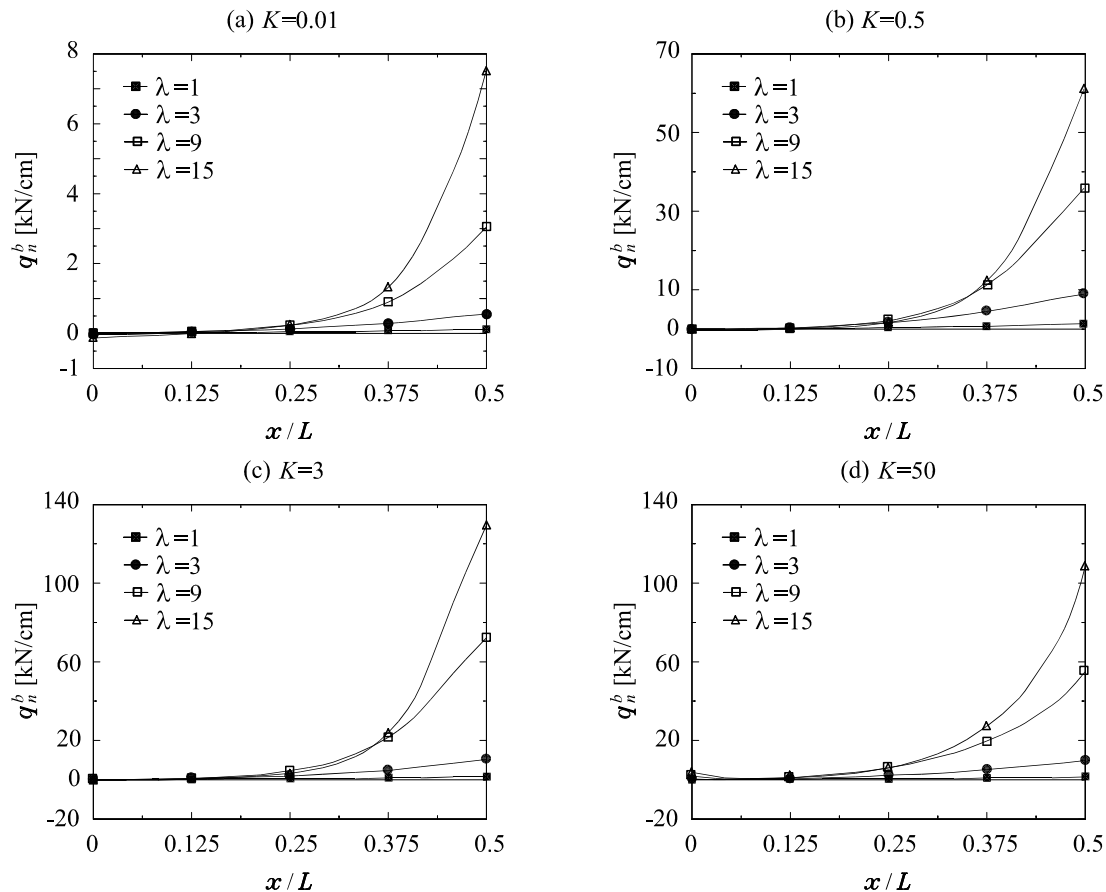
največjega zamika približuje sredini razpona kompozitnega nosilca in sicer, bolj tog kot je stik, bližje sredini razpona je največji zamik.



Slika 4.17: Vpliv togosti stika in nivoja obtežbe na potek zamikov  $\Delta^a$  po osi spodnjega sloja kompozitnega nosilca. Enota za  $K$  je  $\text{kN}/\text{cm}^2$ , nosilec smo analizirali s šestimi elementi tipa  $E_{5-4}$ .

Na koncu tega računskega primera analiziramo tudi vpliv togosti stika na potek normalne komponente linijske kontaktne obtežbe  $q_n^b$  po osi obravnavanega kompozitnega nosilca. Zaradi simetrije konstrukcije je potek normalne komponente linijske kontaktne obtežbe po osi kompozitnega nosilca simetričen. Zato na sliki 4.18 prikažemo potek  $q_n^b$  le za levo polovico kompozitnega nosilca. Na sliki 4.18 prikažemo potek  $q_n^b$  za različne nivoje obtežbe ter za različne togosti stika kompozitnega nosilca. Opazimo, da se  $q_n^b$  koncentrira pod točkovno silo, ter da se velikost  $q_{n,B}^b$  pod točkovno silo  $P$  povečuje z velikostjo obtežbe. Tudi sedaj so rezultati nekoliko nepričakovani. Na sliki 4.18 vidimo, da se za izbrano obtežbo kompozitnega nosilca vrednost  $q_{n,B}^b$  strmo povečuje s povečevanjem togosti stika. Toda to velja le do določene togosti stika, saj se od te togosti stika dalje prične vrednost  $q_{n,B}^b$  manjšati. To ugotovitev ponazorimo pri obtežnem faktorju  $\lambda = 15$ , kjer je vrednost  $q_{n,B}^b$  pri kompozitnem nosilcu s togostjo stika  $K = 0.5 \text{ kN}/\text{cm}^2$  približno 8-krat večja kot je pri kompozitnem nosilcu s togostjo stika  $K = 0.01 \text{ kN}/\text{cm}^2$ . S povečanjem togosti

stika na  $K = 3 \text{ kN/cm}^2$  se razmerje poveča kar na 17, pri togosti stika  $K = 50 \text{ kN/cm}^2$  pa pade na 14. Z drugimi besedami to pomeni, da bolj tog stik med slojema kompozitnega nosilca bolj 'razmaže' točkovno obtežbo.



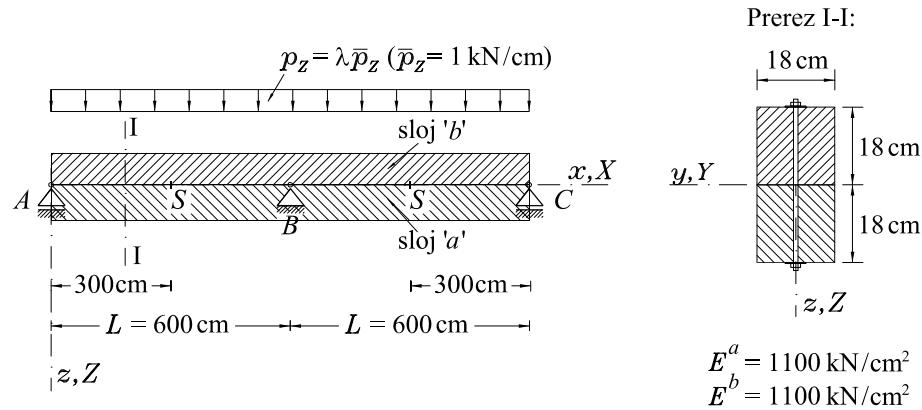
Slika 4.18: Vpliv togosti stika in nivoja obtežbe na potek normalne komponente linijske kontaktne obtežbe  $q_n^b$  po osi kompozitnega nosilca. Enota za  $K$  je  $\text{kN/cm}^2$ , nosilec smo analizirali s šestimi elementi tipa  $E_{5-4}$ .

Kjub temu, da na sliki 4.18 ni dobro vidno, pa je smiselno poudariti, da se pri podajnih stikih ter pri višjih nivojih obtežbe na robu kompozitnega nosilca pojavi natezna oziroma po predznaku negativna normalna komponenta linijske kontaktne obtežbe. Ta lahko ob nepravilno dimenzioniranem kontaktu povzroči razslojevanje slojev kompozitnega nosilca in porušitev.

### 4.3 SIMETRIČNO OBTEŽEN KONTINUIRNI KOMPOZITNI NOSILEC

V predhodnih računskih primerih smo obravnavali izključno 'statično določene' kompozitne nosilce. V tem računskem primeru analiziramo obnašanje 'statično nedoločenega' kompozitnega kontinuirnega nosilca preko dveh polj z enakima razponoma. Pri uporabi lesenih konstrukcij je takšna izvedba kontinuirnih nosilcev preko dveh ali več polj nekaj povsem običajnega. Kot smo

že uvodoma povedali, potrebujemo za premoščanje večjih razponov tudi večjo statično višino prečnih prereзов nosilnih elementov. To zagotovimo s sestavljanjem lesenih nosilcev z manjšimi prečnimi prerezi. Geometrijske in materialne podatke ter podatke o načinu podpiranja in obliki obtežbe obravnavanega kontinuirnega dvoslojnega lesenega nosilca prikazuje slika 4.19.



Slika 4.19: Geometrijski in materialni podatki ter način podpiranja in oblika obtežbe kompozitnega kontinuirnega nosilca.

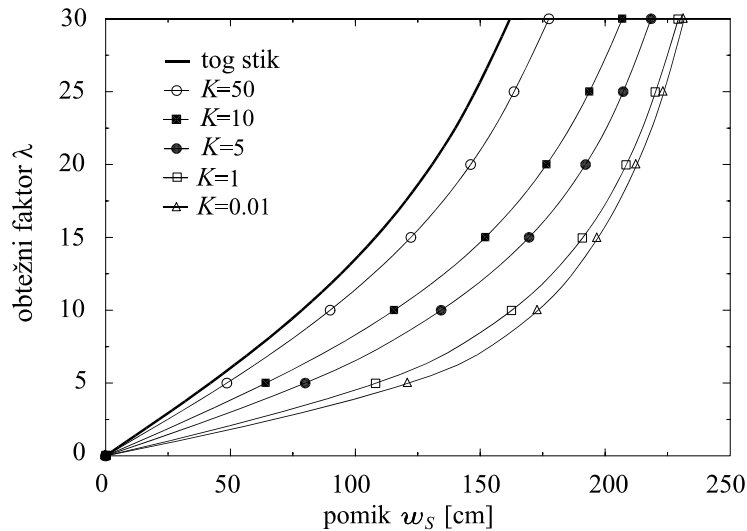
Tudi v tem računskem primeru analiziramo vpliv togosti stika na obnašanje kontinuirnega kompozitnega nosilca. Dodatno pa analiziramo tudi vpliv razmerja vztrajnostnih momentov prečnih prereзов sloja *a* in sloja *b* kompozitnega kontinuirnega nosilca na značilne kinematične in statične količine. Tudi tokrat oba sloja kompozitnega nosilca modeliramo z linearno elastičnim konstitucijskim zakonom, stik med slojema pa z linearnim konstitucijskim zakonom stika.

### Vpliv togosti stika na obnašanje kompozitnega kontinuirnega nosilca

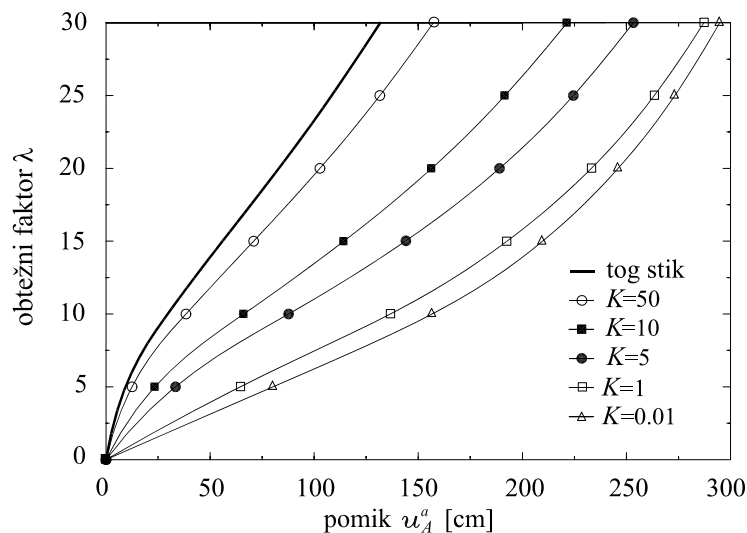
Kot smo že povedali, najprej analiziramo vpliv togosti stika na obnašanje kompozitnega kontinuirnega nosilca. Tudi sedaj vrednost parametra  $K = 0.01 \text{ kN/cm}^2$  predstavlja praktično povsem podajen stik. Podajna povezava med sloji kompozitnih nosilcev nastopi takrat, ko sta sloja kompozitnega nosilca preprosto, brez veznih sredstev, položena eden na drugega, oziroma ko je trenje med slojema minimalno. V nasprotju pa vrednost parametra  $K = 50 \text{ kN/cm}^2$  opisuje zelo togo povezavo slojev. Vemo pa, da se vrednost parametra  $K$  v realnih lesenih kompozitnih konstrukcijah giblje med obema mejnima vrednostima. Tudi sedaj smo kontinuirni kompozitni nosilec s povsem togim stikom ( $K = \infty$ ) analizirali z lastnim računalniškim programom za analizo ravninskih ukrivljenih kompozitnih nosilcev brez upoštevanja zdrsa med sloji (dodatek B).

Z numeričnim eksperimentiranjem smo ugotovili, da izračunamo napetostno in deformacijsko stanje kompozitnega nosilca pri nizkem nivoju obtežbe zelo natančno že z nekaj končnimi elementi tipa  $E_{5-4}$ . Pri višjih nivojih obtežbe, ko postane vpliv geometrijsko nelinearne teorije kompozitnih nosilcev zelo izrazit, se rezultati analize obravnavane konstrukcije stabilizirajo, ko kompozitni nosilec modeliramo z desetimi končnimi elementi tipa  $E_{5-4}$ . Zaradi simetričnosti geometrije, podpiranja in obtežbe kompozitnega nosilca smo analizirali le levo polovico kompozitnega kontinuirnega nosilca. V računskem modelu smo ohranili obliko podpore vozlišča *A*, vozlišče *B* pa smo togo vpeli.

Vpliv togosti stika na obtežno-deformacijsko krivuljo vertikalnega pomika  $w_S$  točke  $S$  ter na obtežno-deformacijsko krivuljo horizontalnega pomika  $u_A^a$  spodnjega sloja kompozitnega nosilca v točki  $A$  prikazujeta sliki 4.20 in 4.21.



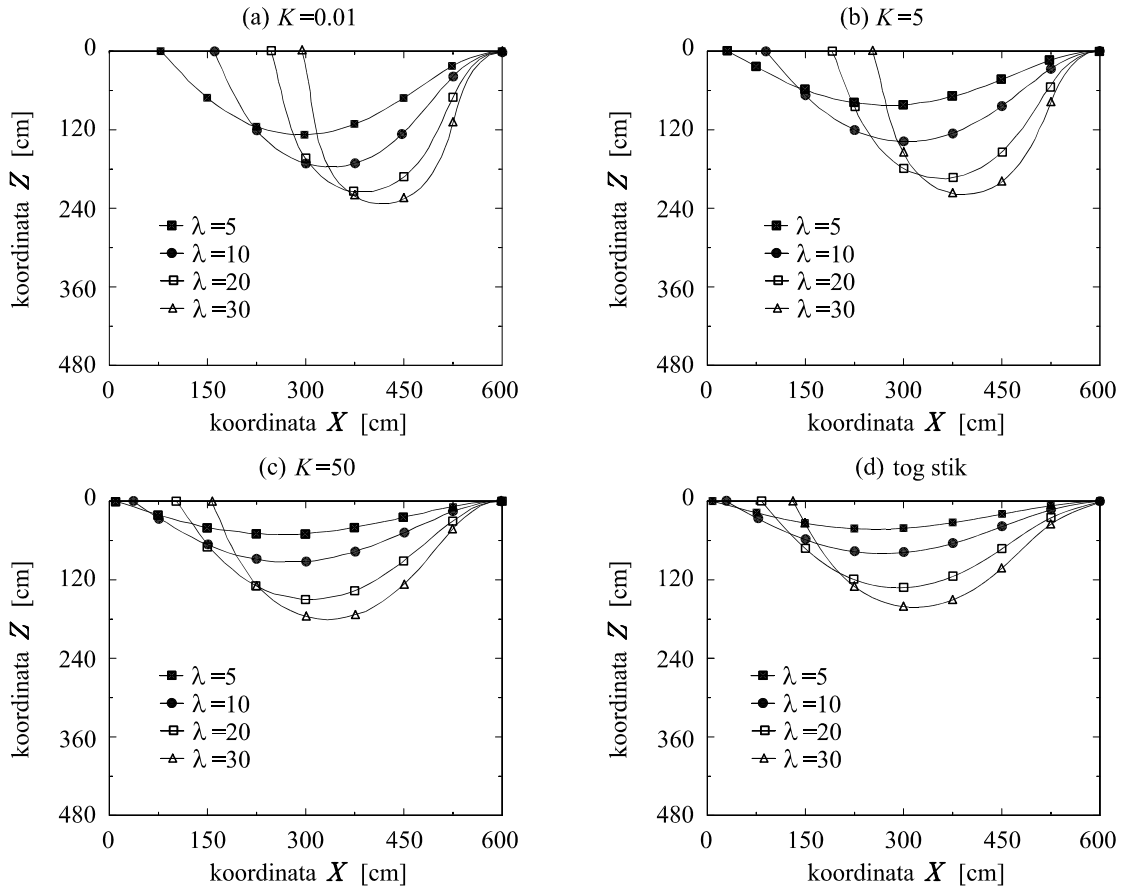
Slika 4.20: Vpliv togosti stika na vertikalni pomik  $w_S$  kompozitnega kontinuirnega nosilca. Enota za  $K$  je  $\text{kN/cm}^2$ , za analizo uporabimo deset končnih elementov tipa  $E_{5-4}$ .



Slika 4.21: Vpliv togosti stika na horizontalni pomik  $u_A^a$  spodnjega sloja v točki  $A$  kompozitnega kontinuirnega nosilca. Enota za  $K$  je  $\text{kN/cm}^2$ , za analizo uporabimo deset končnih elementov tipa  $E_{5-4}$ .

Oblika obtežno-deformacijskih krivulj je pričakovana. Tako se velikost prečnega pomika  $w_S$  in vodoravnega pomika  $u_A^a$  manjšata, ko se togost stika povečuje. To opazimo tako pri nizkem kot tudi pri visokem nivoju obtežbe. Tudi v primeru kontinuirnega kompozitnega nosilca opazimo

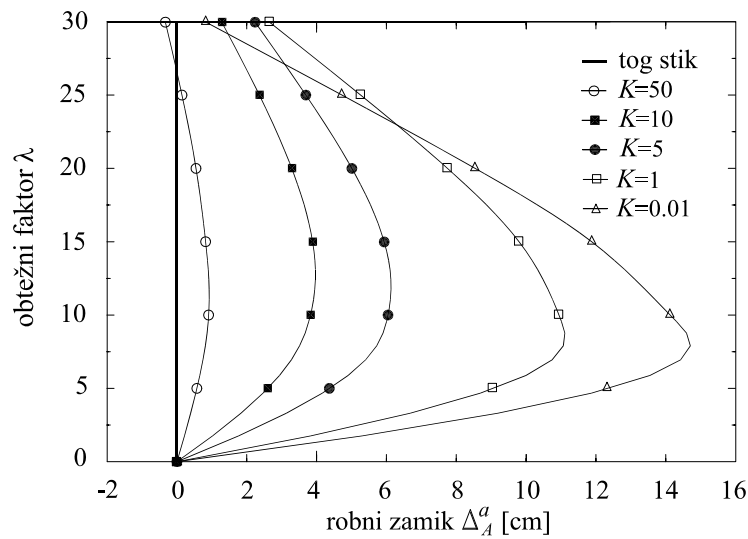
pojav t.i. 'obešanja'. Tega pri visokem nivoju obtežbe prikazuje slika 4.22. Na tej sliki prikazujemo deformirane lege sloja  $a$  kontinuirnega kompozitnega nosilca za različne togosti stika ter za različne nivoje obtežbe.



Slika 4.22: Vpliv togosti stika in nivoja obtežbe na deformirane lege kompozitnega kontinuirnega nosilca. Enota za  $K$  je  $\text{kN}/\text{cm}^2$ , nosilec smo analizirali z desetimi končnimi elementi tipa  $E_5-4$ .

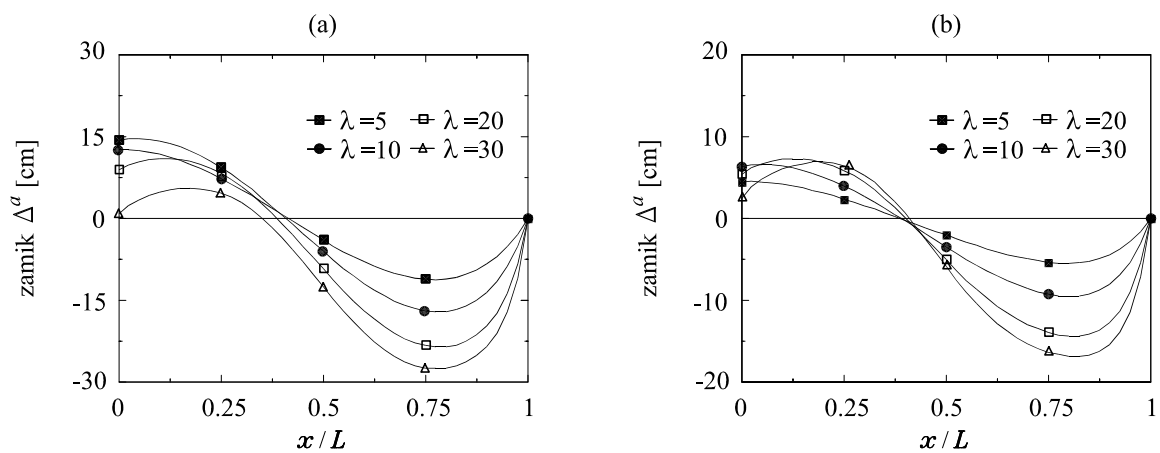
Poleg vertikalnih in horizontalnih pomikov kompozitnega nosilca pa v nadaljevanju analiziramo tudi zamike vzdolž stika obravnavanega kompozitnega nosilca. Spreminjanje robnega zamika  $\Delta_A^a$  v točki  $A$  s spreminjanjem obtežnega faktorja  $\lambda$  in togostnih karakteristik stika prikazuje slika 4.23. Na tej sliki vidimo, da se pri nižjih nivojih obtežnega faktorja  $\lambda$  robni zamik  $\Delta_A^a$  obnaša podobno kot vertikalni pomik  $w_S$  in horizontalni pomik  $u_A^a$  in sicer so za podajnejše stike robni zamiki  $\Delta_A^a$  večji. Z naraščanjem obtežbe se pri 'mejnem' obtežnem faktorju robni zamik  $\Delta_A^a$ , neglede na togost stika, prične zmanjševati in pri določenem obtežnem faktorju postane celo negativen. Iz poteka obtežno-deformacijskih krivulj robnega zamika  $\Delta_A^a$  zaključimo, da od 'mejnega' obtežnega faktorja dalje robni zamik  $\Delta_A^a$  pada tem hitreje, čim manjša je togost stika. Pri dovolj visokem obtežnem faktorju se pravilo glede medsebojne povezave togosti stika in velikosti robnega zamika  $\Delta_A^a$  spremeni, saj se z naraščanjem obtežbe in z manjšanjem togosti stika robni zamik  $\Delta_A^a$  manjša.





Slika 4.23: Vpliv togosti stika na obtežno-deformacijsko krivuljo robnega zamika  $\Delta_A^a$  kompozitnega kontinuirnega nosilca. Enota za  $K$  je  $\text{kN}/\text{cm}^2$ , nosilec smo analizirali z desetimi končnimi elementi tipa  $E_{5-4}$ .

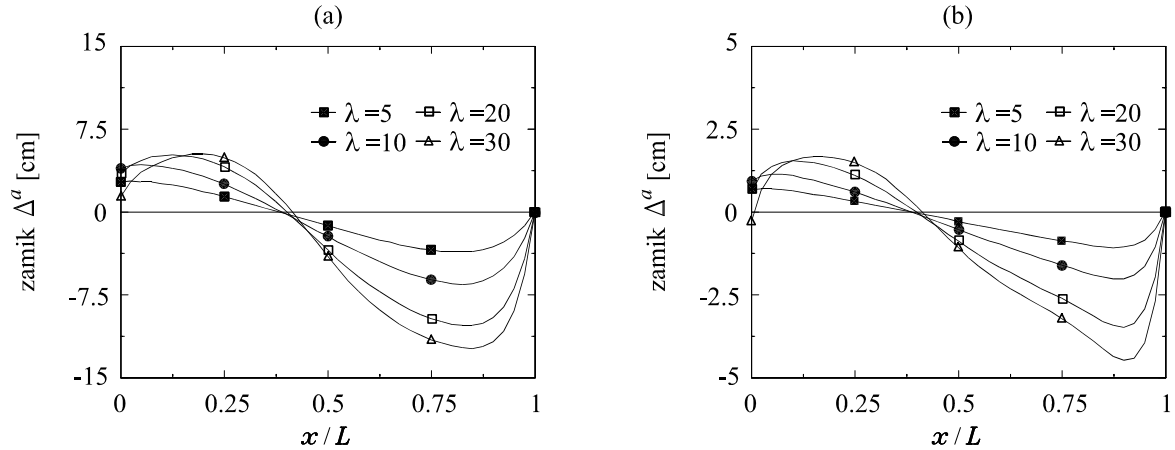
Kot pri ostalih dosedaj obravnavanih simetrično obteženih kompozitnih konstrukcijah, je tudi v tem primeru potek zamikov vzdolž stika kompozitnega nosilca antisimetričen. Za različne nivoje obtežbe in vrednosti parametra stika  $K$  prikazemo potek zamikov  $\Delta^a$  na slikah 4.24 in 4.25. Zaradi preglednosti prikazemo potek zamikov le za levo polovico kompozitnega kontinuirnega nosilca.



Slika 4.24: Vpliv togosti stika in obtežbe na potek zamikov  $\Delta^a$  vzdolž stika kompozitnega kontinuirnega nosilca: (a)  $K = 0.01 \text{ kN}/\text{cm}^2$ , (b)  $K = 5 \text{ kN}/\text{cm}^2$ . Nosilec smo analizirali z desetimi končnimi elementi tipa  $E_{5-4}$ .

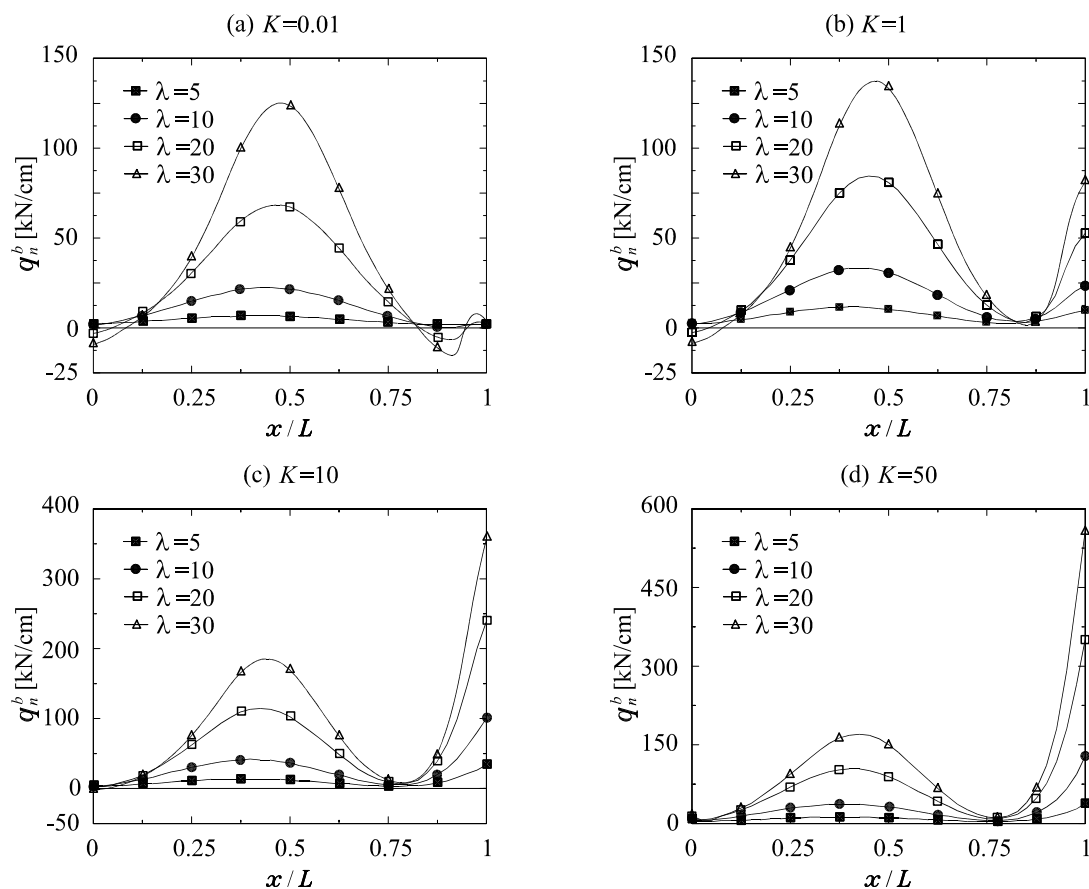
Pri nižjih nivojih obtežbe, se neglede na togost stika, pojavijo največji zamiki ravno na robovih kompozitnega kontinuirnega nosilca, torej v točkah  $A$  in  $C$ . Z nadaljnim naraščanjem obtežbe se

prične robni zamik  $\Delta_A^a$  manjšati, zamiki v bližini podpore  $B$  pa naraščati. Pri dovolj visokem nivoju obtežbe dosežejo zamiki v absolutnem smislu največje vrednosti v bližini podpore  $B$ , kar je dobro razvidno s slik 4.24 in 4.25.



Slika 4.25: Vpliv togosti stika in obtežbe na potek zamikov  $\Delta^a$  vzdolž stika kompozitnega kontinuirnega nosilca: (a)  $K = 10 \text{ kN/cm}^2$ , (b)  $K = 50 \text{ kN/cm}^2$ . Nosilec smo analizirali z desetimi končnimi elementi tipa  $E_{5-4}$ .

V nadaljevanju analiziramo vpliv togosti stika na potek normalne komponente linijske kontaktne obtežbe  $q_n^b$ . Zaradi že omenjene simetrične geometrije kompozitnega nosilca, podpiranja in obtežbe, je potek  $q_n^b$  vzdolž stika kontinuirnega kompozitnega nosilca simetričen. Zaradi tega prikazemo na sliki 4.26 spreminjanje  $q_n^b$  po osi kompozitnega nosilca za različne vrednosti parametra  $K$  in obtežnega faktorja  $\lambda$  le na levi polovici kompozitnega kontinuirnega nosilca. Kot vidimo s slike 4.26, ima togost stika velik vpliv na potek normalne komponente linijske kontaktne obtežbe. Pri podajnem stiku se  $q_n^b$  koncentrira na sredini obeh razponov kontinuirnega kompozitnega nosilca. V tem primeru opazimo, da se  $q_n^b$  spreminja po osi nosilca podobno, kot se spreminja v primeru prostoležečega nosilca, obremenjenega z enakomerno linijsko prečno obtežbo (glej prvi računski primer). Za nosilec s togostjo stika  $K = 0.01 \text{ kN/cm}^2$  se pri določenem nivoju obtežbe v bližini podpor pojavijo tudi natezne oziroma negativne vrednosti za  $q_n^b$ . Z večanjem togosti stika se natezne vrednosti za  $q_n^b$  pojavijo samo še na mestu zunanjih podpor kompozitnega kontinuirnega nosilca. Za nosilec s togostjo stika  $K = 50 \text{ kN/cm}^2$  pa opazimo le še tlačne vrednosti normalne komponente linijske kontaktne obtežbe  $q_n^b$ . Pri visokih nivojih obtežbe in togih stikih kompozitnega nosilca pa opazimo koncentracijo  $q_n^b$  tudi na mestu srednje podpore. Tako vrednosti za  $q_n^b$  v točki  $B$  celo presežejo vrednosti za  $q_n^b$  na sredini obeh razponov, kar je razvidno s slik 4.26(c) in 4.26(d). Opazimo tudi, da so vrednosti za  $q_n^b$  bistveno večje pri kompozitnih nosilcih z bolj togimi stiki. Tako je pri nivoju obtežbe  $\lambda = 30$  in togosti stika  $K = 50 \text{ kN/cm}^2$  vrednost normalne komponente linijske kontaktne obtežbe  $q_{n,B}^b$  približno za faktor 7 večja, kot je primerljiva vrednost za  $q_{n,B}^b$  pri nosilcu s togostjo stika  $K = 1 \text{ kN/cm}^2$ .

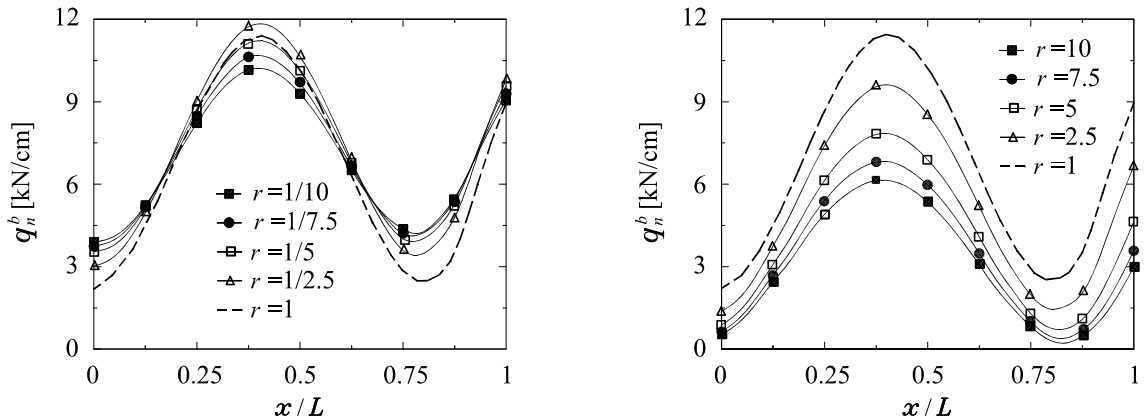


Slika 4.26: Vpliv togosti stika in nivoja obtežbe na potek normalne komponente linijske kontaktne obtežbe  $q_n^b$  vzdolž stika kompozitnega kontinuirnega nosilca. Enota za  $K$  je  $\text{kN}/\text{cm}^2$ , nosilec smo analizirali z desetimi končnimi elementi tipa  $E_{5-4}$ .

### Vpliv razmerja med vztrajnostnima momentoma zgornjega in spodnjega podpreza na obnašanje kompozitnega kontinuirnega nosilca

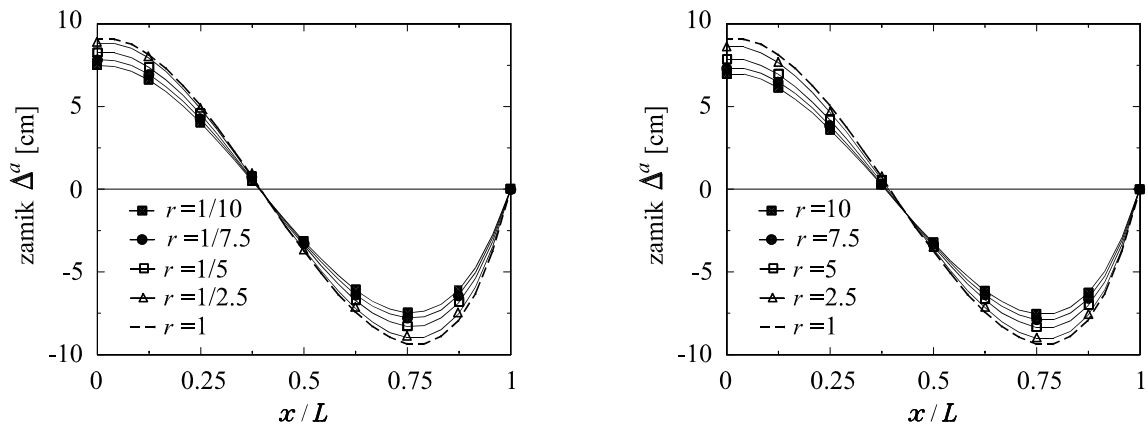
Na koncu računskega primera analiziramo, kako spreminjanje razmerja med vztrajnostnima momentoma sloja  $a$  in sloja  $b$  kompozitnega nosilca vpliva na obnašanje kompozitnega kontinuirnega nosilca. Pri tem ohranimo način podpiranja, obtežbo ter skupno višino prečnega prereza kompozitnega nosilca, ki je 36 cm. Parametrično analizo izdelamo za kompozitni nosilec s togostjo stika  $K = 1 \text{ kN}/\text{cm}^2$  in na nivoju obtežbe  $\lambda = 5$ . Obtežni faktor  $\lambda = 5$  smo izbrali tako, da je vpliv geometrijske nelinearnosti na obnašanje kompozitnega kontinuirnega nosilca pomemben. Ker smo pri analizi ohranjali prečni prerez kompozitnega nosilca, smo spreminjanje razmerja med vztrajnostnima momentoma sloja  $a$  in  $b$  kompozitnega nosilca zagotovili samo s spreminjanjem lege stika. Tako smo za razmerje vztrajnostnih momentov izbrali vrednosti  $r = I_{zg}/I_{sp} = 1/10, 1/7.5, 1/5, 1/2.5, 1, 2.5, 5, 7.5$  ter 10. Vpliv razmerja vztrajnostnih momentov zgornjega in spodnjega sloja kompozitnega kontinuirnega nosilca na potek normalne komponente linijske kontaktne obtežbe  $q_n^b$ , zamika  $\Delta^a$  in statičnih količin zgornjega sloja kompozitnega nosilca,

t.j. osnih sil  $\mathcal{N}^b$ , prečnih sil  $\mathcal{Q}_c^b$  ter upogibnih momentov  $\mathcal{M}_c^b$ , prikazujemo na slikah 4.27 do 4.31. Tudi tokrat potek obravnavanih količin prikazujemo le na levi polovici kompozitnega kontinuirnega nosilca. Pri tem se zavedamo, da so na desni polovici kompozitnega kontinuirnega nosilca  $q_n^b$ ,  $\mathcal{N}^b$  in  $\mathcal{M}_c^b$  simetrični,  $\Delta^a$  in  $\mathcal{Q}_c^b$  pa antisimetrični. Z numeričnim eksperimentiranjem smo ugotovili, da dosežemo zadostno natančnost rezultatov že s štirimi končnimi elementi tipa  $E_{5-4}$ .



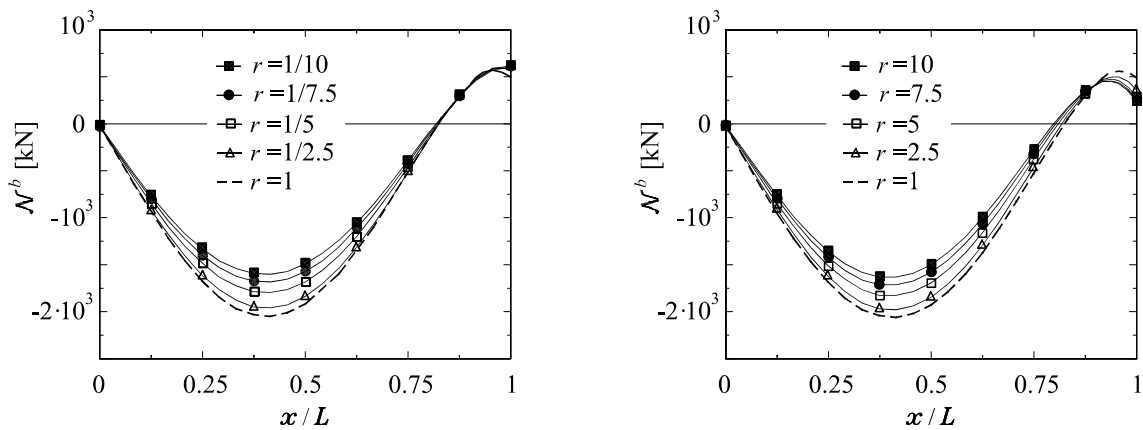
Slika 4.27: Vpliv razmerja vztrajnostnih momentov zgornjega in spodnjega sloja kompozitnega nosilca na potek  $q_n^b$  vzdolž stika kompozitnega kontinuirnega nosilca ( $K = 1 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\lambda = 5$ , nosilec smo analizirali s štirimi končnimi elementi tipa  $E_{5-4}$ ).

Za vse obravnavane količine kompozitnega nosilca so rezultati parametrične analize pričakovani. Za  $q_n^b$  ugotovimo, da se za količnike  $r < 1$  vrednosti za  $q_n^b$  spreminjajo minimalno, medtem ko se  $q_n^b$  s povečevanjem količnika  $r$  preko 1 spreminja bistveno bolj izrazito (slika 4.27).



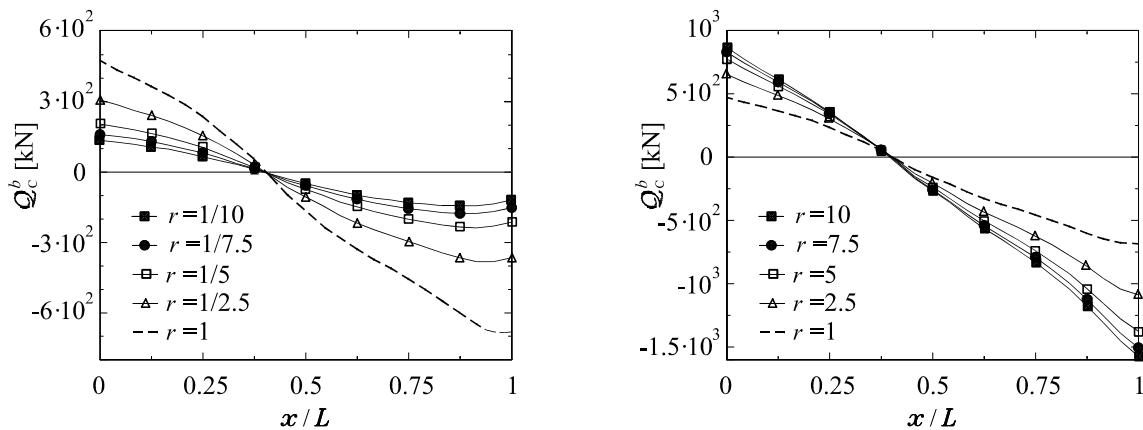
Slika 4.28: Vpliv razmerja vztrajnostnih momentov zgornjega in spodnjega sloja kompozitnega nosilca na potek  $\Delta^a$  vzdolž stika kompozitnega kontinuirnega nosilca ( $K = 1 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\lambda = 5$ , nosilec smo analizirali s štirimi končnimi elementi tipa  $E_{5-4}$ ).

Na slikah 4.28 in 4.29 vidimo, da ima spreminjanje količnika  $r$  minimalen vpliv na potek zamika  $\Delta^a$  vzdolž stika in osne sile  $\mathcal{N}^b$  po osi kompozitnega nosilca.



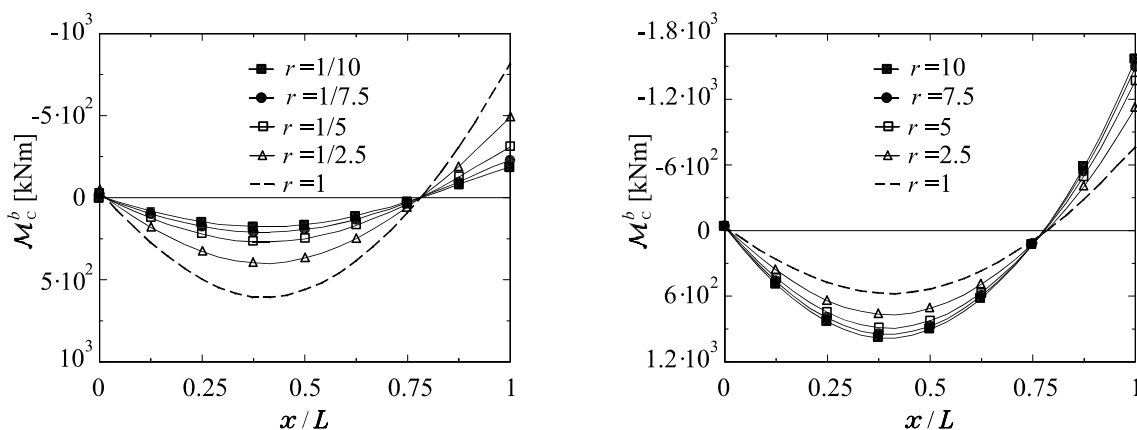
Slika 4.29: Vpliv razmerja vztrajnostnih momentov zgornjega in spodnjega sloja kompozitnega nosilca na potek  $\mathcal{N}^b$  po osi kompozitnega kontinuirnega nosilca ( $K = 1 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\lambda = 5$ , nosilec smo analizirali s štirimi končnimi elementi tipa  $E_{5-4}$ ).

Na slikah 4.30 in 4.31 prikažemo še spreminjanje prečnih sil  $Q_c^b$  in upogibnih momentov  $\mathcal{M}_c^b$  zgornjega sloja kompozitnega nosilca zaradi spreminjanja količnika  $r$ . To je nekoliko izrazitejše, toda še vedno skladno s pričakovanji: večji kot je vztrajnostni moment sloja kompozitnega nosilca, večje so njegove obremenitve in obratno. Tako vrednosti za  $Q_c^b$  in  $\mathcal{M}_c^b$  v absolutnem smislu z manjšanjem razmerja  $r$  padajo, s povečevanjem razmerja  $r$  pa naraščajo in sicer po celotni osi kompozitnega kontinuirnega nosilca.



Slika 4.30: Vpliv razmerja vztrajnostnih momentov zgornjega in spodnjega sloja kompozitnega nosilca na potek  $Q_c^b$  po osi kompozitnega kontinuirnega nosilca ( $K = 1 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\lambda = 5$ , nosilec smo analizirali s štirimi končnimi elementi tipa  $E_{5-4}$ ).

Deformiranih leg kompozitnega nosilca pri različnih količnikih  $r$  ne prikazujemo, ker se deformirane lege kompozitnega kontinuirnega nosilca z razmerjem vztrajnostnih momentov  $r = 1/m$  praktično povsem enake deformiranim legam kompozitnega kontinuirnega nosilca z razmerjem vztrajnostnih momentov  $r = m$  ( $m = 1, 2.5, 5, 10$ ).



Slika 4.31: Vpliv razmerja vztrajnostnih momentov zgornjega in spodnjega sloja kompozitnega nosilca na potek  $\mathcal{M}_c^b$  po osi kompozitnega kontinuirnega nosilca ( $K = 1 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\lambda = 5$ , nosilec smo analizirali s štirimi končnimi elementi tipa  $E_{5-4}$ ).

#### 4.4 STABILNOSTNA ANALIZA CENTRIČNO TLAČENIH KOMPOZITNIH NOSILCEV

Izguba stabilnosti sestavnih elementov konstrukcije ali konstrukcije kot celote je dokaj pogost pojav v gradbeni praksi. Značilni tovrstni primeri so uklon tlačnega stebra, zožitev natezne palice, lokalno izbočenje tlačnih delov upogibnih nosilcev ter strižne lokalizacije. V tem računskem primeru analiziramo natančnost predstavljenih deformacijskih končnih elementov za nelinearno analizo kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med sloji za določitev uklonskih sil centrično tlačnih kompozitnih nosilcev. Natančnost izračunane uklonske sile dvoslojnih kompozitnih nosilcev analiziramo s tremi primeri: (a) s prostoležečim nosilcem, (b) z enostransko vpetim nosilcem in (c) s kontinuirnim nosilcem. V vseh treh primerih smo oba sloja kompozitnih nosilcev modelirali z linearno elastičnim konstitucijskim zakonom, stik med slojema pa z linearnim zakonom stika. Geometrijski in materialni podatki ter podatki o načinu podpiranja in legi obtežbe za vse tri obravnavane dvoslojne kompozitne nosilce so prikazani na sliki 4.32.

V vseh primerih smo kot kriterij za določitev uklonske sile nosilcev uporabili enačbo  $\det \mathbf{K}_T = 0$ . Uklonsko silo pa smo izračunali z metodo bisekcije.

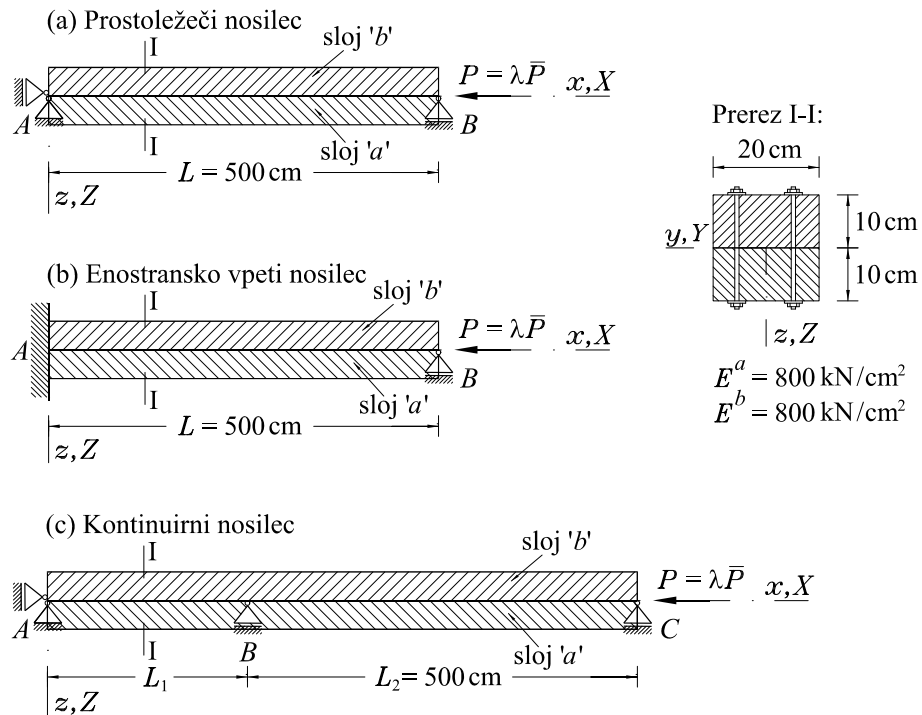
Da bi bili naši rezultati primerljivi z rezultati, dobljenimi v skladu z Evropskim standardom za lesene konstrukcije EC 5 [31], izberemo v vseh treh primerih za oba sloja kompozitnega nosilca model lesa, ki je po EC 5 [31] klasificiran v razred kvalitete C30. Za stabilnostno kontrolo uklona standard priporoča uporabo elastičnega modula s 5% fraktilo  $E_{0,05}$ , torej  $E^a = E^b = 800 \text{ kN/cm}^2$ .

##### Analiza natančnosti izračunanih uklonskih sil

V preglednici 4.2 prikazujemo, kako število končnih elementov tipa  $E_{5-4}$  vpliva na natančnost izračunane uklonske sile dvoslojnega prostoležečega nosilca. Za mero natančnosti izračunane

uklonske sile  $P_{cr}$  uporabimo absolutno vrednost relativne napake  $\epsilon$ , ki jo definiramo kot:

$$\epsilon(P_{cr}) = \left| \frac{P_{cr}^{n \text{ KE}} - P_{cr}^{4 \text{ KE}}}{P_{cr}^{4 \text{ KE}}} \right| \cdot 1000 [\text{‰}].$$



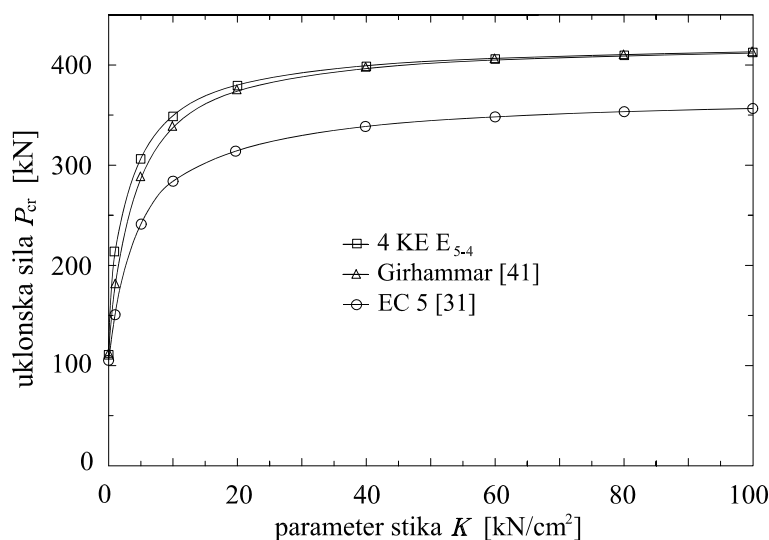
Slika 4.32: Geometrijski in materialni podatki ter podatki o načinu podpiranja in legi obtežbe za: (a) prostoležeči nosilec, (b) enostransko vpeti nosilec in (c) kontinuirni nosilec.

Preglednica 4.2: Vpliv števila končnih elementov tipa  $E_{5-4}$  na izračunano uklonsko silo  $P_{cr}$  dvo-slojnega prostoležečega kompozitnega nosilca za različne togosti stika.

$K$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	$P_{cr}$ [kN]				
	en KE $E_{5-4}$	$\epsilon$ [‰]	dva KE $E_{5-4}$	$\epsilon$ [‰]	štirje KE $E_{5-4}$
0	105.00	2.85	105.50	1.90	105.30
1	215.62	7.23	217.11	0.37	217.19
10	353.12	7.03	355.24	1.07	355.62
1000	410.93	3.88	412.56	0.07	412.53

Rezultati v preglednici 4.2 dokazujejo veliko natančnost deformacijskega končnega elementa tipa  $E_{5-4}$  za določitev uklonske sile prostoležečega nosilca. Že z dvema končnima elementoma je relativna napaka za določitev  $P_{cr}$  neglede na togost stika manjša od  $2^\circ/\infty$ .

V nadaljevanju analiziramo natančnost izračunane uklonske sile  $P_{cr}$  prostoležečega kompozitnega nosilca s primerjavo s 'točnimi' rešitvami, ki jih podajajo Girhammar in sodelavci [41]. Toda tudi sedaj moramo opozoriti na razliko med njihovim in našim modelom kompozitnega nosilca. Girhammar in sodelavci [41] so nosilce modelirali z modificirano teorijo drugega reda in v računu zanemarili membransko deformiranje nosilca. V naši teoriji kompozitnih nosilcev pa kompozitne nosilce modeliramo z geometrijsko točno teorijo ravninskih nosilcev, v računu pa upoštevamo tako membransko kot tudi upogibno deformiranje kompozitnih nosilcev. Primerjavo rezultatov za uklonsko silo prostoležečega kompozitnega nosilca med 'točnimi' in numeričnimi rešitvami za različne togosti stika prikazujemo na sliki 4.33. Kot vidimo na sliki 4.33, se rezultati kjub različnim teorijam odlično ujemajo.



Slika 4.33: Vpliv togosti stika na velikost uklonske sile  $P_{cr}$  prostoležečega kompozitnega nosilca. Primerjava med numeričnimi rezultati (4 KE tipa  $E_{5-4}$ ), točnimi rezultati [41] in rezultati po EC 5 [31].

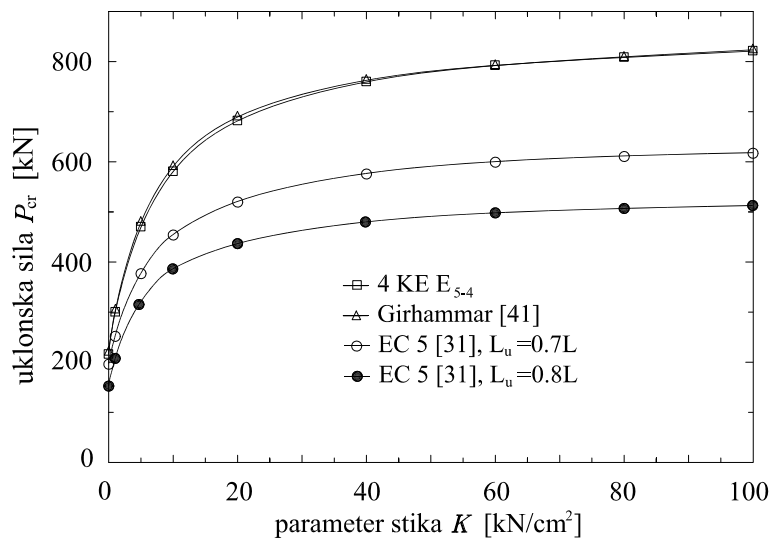
Do minimalnih odstopanj prihaja le pri nosilcih s podajnejšimi stiki. Kot primer navedimo, da je za togost stika  $K = 1 \text{ kN/cm}^2$  uklonska sila  $P_{cr}$ , ki smo jo izračunali s štirimi končnimi elementi tipa  $E_{5-4}$ , za približno  $20^\circ/\infty$  večja, kot je uklonska sila po Girhammarju [41]. Z večanjem togosti stika se naši rezultati ter rezultati Girhammarja praktično povsem ujemajo.

Prav tako primerjamo tudi numerične rezultate za uklonsko silo  $P_{cr}$  prostoležečega nosilca z rezultati, ki jih izračunamo skladno z Evropskim standardom za lesene konstrukcije EC 5 [31]. Tudi to primerjavo prikazujemo na sliki 4.33. Vidimo, da so vrednosti za uklonske sile po EC 5 [31] bistveno manjše, kot smo jih izračunali s štirimi elementi tipa  $E_{5-4}$ . Pri podajnih stikih je  $P_{cr}$  tudi do  $45^\circ/\infty$  manjša od izračunane uklonske sile. Z večanjem togosti stika se razlike ustalijo pri napaki  $15^\circ/\infty - 20^\circ/\infty$ . To dokazuje, da je računski postopek za določitev uklonskih sil skladno s standardom EC 5 [31] zelo konservativen. Toda zavedati se moramo, da z računom uklonske sile po EC5 [31] upoštevamo tudi precejšen raztros trdnostnih karakteristik materiala



lesenih elementov, kot tudi vplive geometrijskih imperfekcij izvedenih konstrukcij. Teh vplivov v predstavljenem numeričnem postopku ne upoštevamo.

Natančnost deformacijskih končnih elementov za določitev uklonskih sil kompozitnih nosilcev analiziramo tudi pri enostransko vpetem dvoslojnim kompozitnem nosilcu. Natančnost razvitih končnih elementov analiziramo s primerjavo med numeričnimi in točnimi rešitvami po Girhammarju [41]. Primerjavo izračunanih uklonskih sil v odvisnosti od togosti stika prikazujemo na sliki 4.34. Podobno kot v primeru prostoležečega nosilca tudi tu opazimo minimalna odstopanja med numeričnimi in točnimi rešitvami po Girhammarju [41].



Slika 4.34: Vpliv togosti stika na velikost uklonske sile  $P_{cr}$  enostransko vpetega kompozitnega nosilca. Primerjava med numeričnimi rezultati (4 KE tipa  $E_{5-4}$ ), točnimi rezultati [41] in rezultati po EC 5 [31].

Na sliki 4.34 prikazujemo tudi po standardu EC 5 [31]. Ker EC 5 [31] za obravnavani kompozitni nosilec ne podaja eksplicitnih izrazov za uklonsko silo, le to izračunamo s pomočjo izrazov, ki jih EC 5 [31] podaja za kontinuirne nosilce. V tem primeru standard priporoča enake izraze, kot za prostoležeče nosilce, le da namesto dolžine referenčnega razpona  $L$  v enačbah upoštevamo vrednost  $0.8L$ , ki predstavlja konzervativno oceno uklonske dolžine nosilca  $L_u$ . Ker je enostransko vpeti nosilec podoben kontinuirnemu nosilcu preko dveh polj s kratkim levim poljem, lahko izračunamo uklonsko silo obravnavanega nosilca z izrazi, ki jih priporoča EC 5 za kontinuirne nosilce. Iz literature je dobro znano, da je uklonska dolžina homogenega nosilca  $0.7L$ . Zato na sliki 4.34 prikazemo soodvisnost uklonske sile  $P_{cr}$  in togosti stika  $K$  po EC 5 [31] za obe uklonski dolžini, torej za  $L_u = 0.7L$  in  $0.8L$ . Izračunane vrednosti uklonskih sil  $P_{cr}$  po standardu EC 5 [31] se neglede na izbiro uklonske dolžine  $L_u = 0.7L$  ali  $0.8L$  izkažejo kot zelo konzervativne. Za uklonsko dolžino  $L_u = 0.7L$  in za podajen stik so vrednosti za  $P_{cr}$  po EC 5 [31] za približno 10% nižje, kot so 'točne' uklonske sile. Pri višjih vrednostih parametra  $K$  se ta razlika ustali pri 30%. Z uporabo konzervativne uklonske dolžine, t.j.  $L_u = 0.8L$ , se pri podajnih stikih razlike povečajo na 40%, pri togih stikih pa kar na 60%. Vzroke za odstopanja uklonskih sil po EC5 [31] smo opisali že pri analizi prostoležečega nosilca, vsekakor pa tako velika odstopanja

gotovo zahtevajo analizo ustreznosti računskih postopkov za določitev uklonskih sil kontinuirnih nosilcev, kot jih priporoča standard EC 5 [31].

Uklonske sile kompozitnih nosilcev s povsem togimi ali s povsem podajnimi stiki lahko primerjamo z uklonskimi silami nosilcev s homogenimi prerezi. Točne izraze za uklonske sile nosilcev s homogenimi prerezi povzamemo po literaturi [36]. Z numeričnim eksperimentiranjem smo ugotovili, da ustreza togemu stiku med slojema kompozitnega nosilca vrednost parametra stika  $K = 10^5 \text{ kN/cm}^2$ . Primerjavo uklonskih sil prostoležečega kompozitnega nosilca za podajen in zelo tog stik prikazuje preglednica 4.3. V preglednici 4.3 primerjamo rezultate za  $P_{\text{cr}}$ , ki jih izračunamo s štirimi končnimi elementi tipa  $E_{5-4}$ , izraze po Girhammarju [41] in izraze po EC 5 [31] s točno uklonsko silo za kompozitni nosilec z ustreznim homogenim prečnim prerezom [36].

*Preglednica 4.3:* Primerjava uklonskih sil  $P_{\text{cr}}$  prostoležečega kompozitnega nosilca za podajen in zelo tog ( $K = 10^5 \text{ kN/cm}^2$ ) stik.

	podajen stik	tog stik ( $K=10^5 \text{ kN/cm}^2$ )
$P_{\text{cr}}^{\text{AKE } E_{5-4}}$ [kN]	105.30	421.62
$P_{\text{cr}}^{\text{Girhammar [41]}}$ [kN]	105.27	421.09
$P_{\text{cr}}^{\text{EC5 [31]}}$ [kN]	99.04	366.54
$P_{\text{cr}}^{\text{Euler [36]}}$ [kN]	105.31	421.66

Preglednica 4.3 dokazuje, da z uporabo štirih končnih elementov tipa  $E_{5-4}$  izračunamo uklonsko silo  $P_{\text{cr}}$  prostoležečega kompozitnega nosilca zelo natančno. Napaka je za podajen in tog stik samo  $0.095^\circ/\text{‰}$ . Kot vemo, Girhammar [41] v analizi zanemari membransko deformiranje kompozitnega nosilca, toda kljub temu je napaka izračunane uklonske sile minimalna. Kot smo že ugotovili, standard EC 5 [31] precej podceni vrednost uklonske sile  $P_{\text{cr}}$  prostoležečega kompozitnega nosilca.

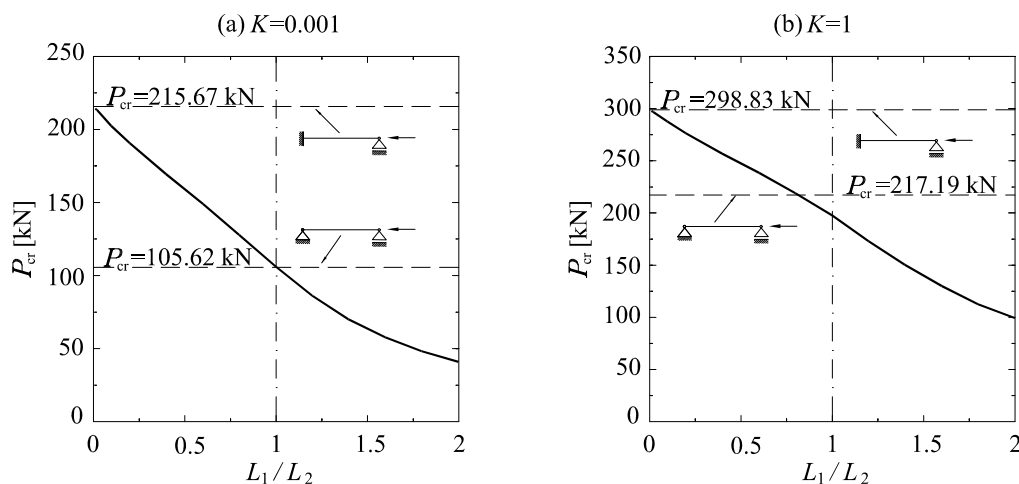
V preglednici 4.4 prikazujemo tudi primerjavo uklonskih sil enostransko vpetega nosilca za podajen in zelo tog stik. V tej preglednici primerjamo uklonske sile, ki jih izračunamo s štirimi končnimi elementi tipa  $E_{5-4}$ , z izrazi po Girhammarju [41] in z izrazi po EC 5 [31] s točno uklonsko silo za kompozitne nosilce z ustreznim homogenim prečnim prerezom [36]. Tudi za uklonske sile enostransko vpetega kompozitnega nosilca s podajnim ali z zelo togim stikom veljajo podobne ugotovitve kot za prostoležeči nosilec. Uklonska sila  $P_{\text{cr}}$ , ki smo jo izračunali s štirimi končnimi elementi tipa  $E_{5-4}$ , presega v primeru podajnega stika točno vrednost le za  $0.2^\circ/\text{‰}$ . V primeru togega stika je to odstopanje še manjše, in sicer je samo  $0.15^\circ/\text{‰}$ . Odstopanja izračunanih uklonskih sil po Girhammarju [41] so nekoliko večja in sicer  $3 - 5^\circ/\text{‰}$ . Podobno kot pri prostoležečem kompozitnem nosilcu tudi v primeru enostransko vpetega kompozitnega nosilca s podajnim oziroma togim stikom EC 5 [31] podceni uklonsko silo.

Preglednica 4.4: Primerjava uklonske sile  $P_{cr}$  enostransko vpetega kompozitnega nosilca za podajen in zelo tog ( $K = 10^5 \text{ kN/cm}^2$ ) stik.

	podajen stik	tog stik ( $K=10^5 \text{ kN/cm}^2$ )
$P_{cr}^{4KE E_{5-4}}$ [kN]	215.55	863.67
$P_{cr}^{\text{Girhammar [41]}}$ [kN]	214.85	859.35
$P_{cr}^{\text{EC5 [31]}}$ [kN] ( $L_u = 0.7L$ )	196.95	645.38
$P_{cr}^{\text{EC5 [31]}}$ [kN] ( $L_u = 0.8L$ )	152.32	533.83
$P_{cr}^{\text{Euler [36]}}$ [kN]	215.51	863.80

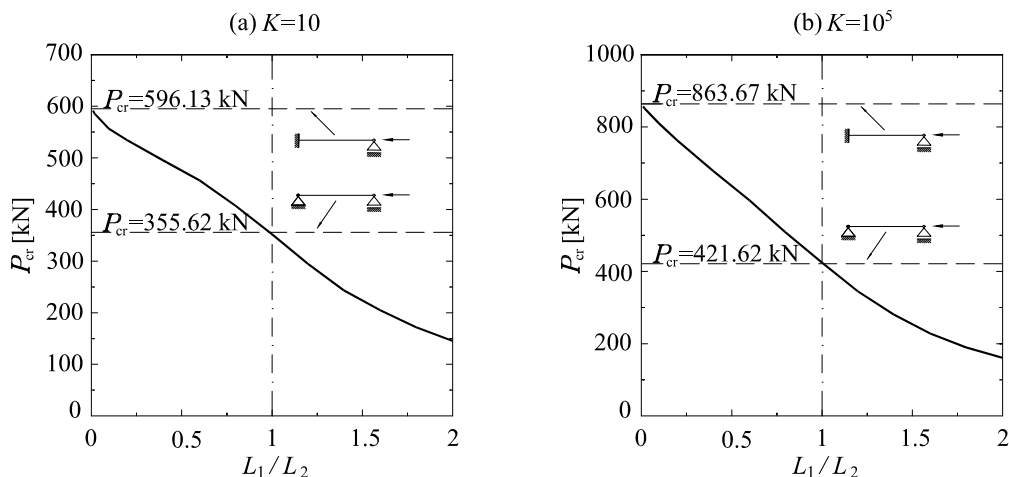
### Analiza vpliva razmerja dolžin razponov kompozitnega kontinuirnega nosilca na velikost uklonske sile $P_{cr}$

Na koncu tega računskega primera si oglejmo še, kako vpliva razmerje razponov kompozitnega kontinuirnega nosilca (slika 4.32c) na velikost njegove uklonske sile  $P_{cr}$ . Dolžine desnega polja, ki je  $L_2 = 500 \text{ cm}$ , med analizo nismo spreminjali, spreminjali pa smo dolžino prvega polja  $L_1$ , in sicer od 5 cm, kar predstavlja le stotinko razpona drugega polja  $L_2$ , do dvakratne dolžine drugega polja, torej do  $L_1 = 1000 \text{ cm}$ . Parametrično analizo vpliva razmerja razponov  $L_1$  in  $L_2$  smo izdelali za različne vrednosti parametra stika  $K$ . Rezulate uklonskih sil kompozitnega kontinuirnega nosilca, ki smo jih izračunali s štirimi končnimi elementi tipa  $E_{5-4}$ , prikazujemo na slikah 4.35 in 4.36.



Slika 4.35: Analiza vpliva dolžine polja  $L_1$  na vrednost uklonske sile  $P_{cr}$  kompozitnega kontinuirnega nosilca za različne togosti stika: (a)  $K = 0.001 \text{ kN/cm}^2$ , (b)  $K = 1 \text{ kN/cm}^2$ . Nosilec smo analizirali s štirimi končnimi elementi tipa  $E_{5-4}$ .

Poleg krivulje, ki ponazarja odvisnost razmerja  $L_1/L_2$  in pripadajoče uklonske sile  $P_{cr}$ , prikazujemo tudi vrednost uklonske sile  $P_{cr}$  enostransko vpetega in prostoležečega kompozitnega nosilca. Pri tem predpostavimo, da je  $P_{cr}$  enostransko vpetega nosilca primerljiva z vrednostjo  $P_{cr}$  kontinuirnega nosilca z zelo kratkim levim poljem. Na slikah 4.35 in 4.36 vidimo, da se, neglede na izbrano togost stika, kompozitni kontinuirni nosilec z levim poljem dolžine 5 cm obnaša zelo podobno kot enostransko vpet kompozitni nosilec. V primeru enakih razponov kompozitnega kontinuirnega nosilca pričakujemo, da bo vrednost uklonske sile  $P_{cr}$  enaka uklonski sili prostoležečega kompozitnega nosilca. Izkaže se, da to velja le za kompozitne nosilce z določeno togostjo stika. Za povsem podajen ali izjemno tog stik ( $K = 10^5 \text{ kN/cm}^2$ ) je uklonska sila kontinuirnega kompozitnega nosilca z enakima razponoma zelo podobna uklonski sili prostoležečega nosilca. Za vrednost parametra stika  $K = 1 \text{ kN/cm}^2$  je uklonska sila tega kontinuirnega nosilca približno za 10 % manjša, kot je uklonska sila kompozitnega prostoležečega nosilca. S povečevanjem togosti stika ta razlika pada, tako je za  $K = 4 \text{ kN/cm}^2$  enaka 4 %, za  $K = 10 \text{ kN/cm}^2$  pa le še 1.5 %. Ne glede na togost stika pa se uklonska sila  $P_{cr}$  kompozitnega kontinuirnega nosilca manjša z večanjem razmerja  $L_1/L_2$ . Za razmerja  $L_1/L_2$  večja od 1, na velikost uklonske sile bistveno vpliva daljše, levo polje z razponom  $L_1$ . Z dodatnim povečanjem razmerja  $L_1/L_2$  bi statični sistem postajal vse bolj podoben enostransko vpetemu kompozitnemu nosilcu z vpeto desno podporo.



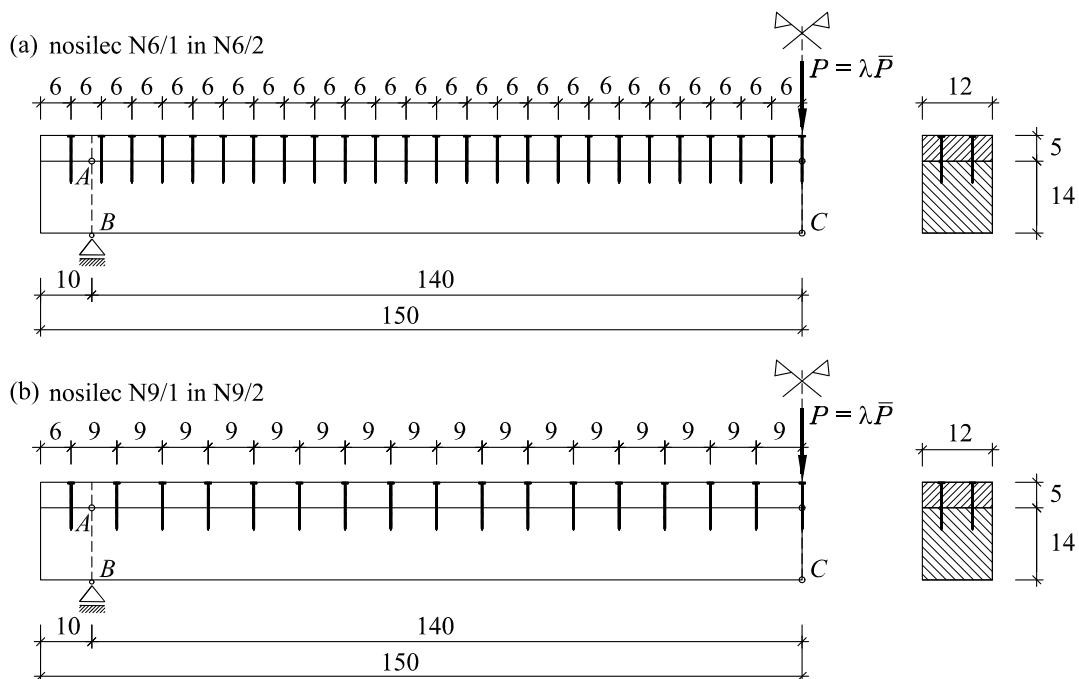
Slika 4.36: Analiza vpliva dolžine polja  $L_1$  na vrednost uklonske sile  $P_{cr}$  kompozitnega kontinuirnega nosilca za različne togosti stika: (a)  $K = 10 \text{ kN/cm}^2$ , (b)  $K = 10^5 \text{ kN/cm}^2$ . Nosilec smo analizirali s štirimi končnimi elementi tipa  $E_{5-4}$ .

## 4.5 EKSPERIMENTALNA IN NUMERIČNA ANALIZA LESENIH KOMPOZITNIH NOSILCEV

V sklopu diplomske naloge [15] smo opravili več eksperimentalnih preiskav lesenih prostoležečih dvoslojnih kompozitnih nosilcev. Način podpiranja kompozitnih nosilcev ter njihovo obremenjevanje je bilo za vse nosilce enako, kot smo ga predstavili v drugemu računskemu primeru: obe krajšči prostoležečega nosilca ležita na jeklenih valjčkih, ki omogočata prosti zasuk ter horizon-

talni pomik krajišč prostoležečega nosilca v njegovi ravnini, kompozitni nosilec obremenjujemo s točkovno obtežbo hidravličnega bata na sredini razpona vse do porušitve. V diplomski nalogi [15] smo analizirali vpliv togosti povezave med slojema na obnašanje lesenih dvoslojnih kompozitnih nosilcev. V ta namen smo izdelali več lesenih kompozitnih nosilcev, pri tem pa smo spreminjali razporeditev veznih sredstev (standardni žebli 4/100) vzdolž stika slojev. Eksperimentalno dobljene rezultate smo v sklopu diplomske naloge [15] primerjali z rezultati, ki smo jih izračunali z ustrezno prirejenim računalniškim programom [9].

V sklopu tega računskega primera bomo ponovno primerjali eksperimentalno dobljene rezultate na nosilcih z oznakami N6/1, N6/2, N9/1 ter N9/2 z rezultati v tej disertaciji predstavljenega računskega postopka za nelinearno analizo kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med slojema. Geometrijske podatke preiskanih lesenih kompozitnih nosilcev, razporeditev veznih sredstev vzdolž stika slojev ter obtežbo omenjenih nosilcev prikazuje slika 4.37. V vseh analiziranih kompozitnih nosilcih so vzdolž osi nosilca žebli razporejeni v dve vzporedni vrsti. Pri nosilcih z oznakama N6/1 in N6/2 je razmak med žebli po osi nosilca enakomeren in je 6 cm, podobno pa velja tudi za nosilca z oznakama N9/1 in N9/2, kjer so žebli enakomerno razporejeni na razdalji 9 cm.

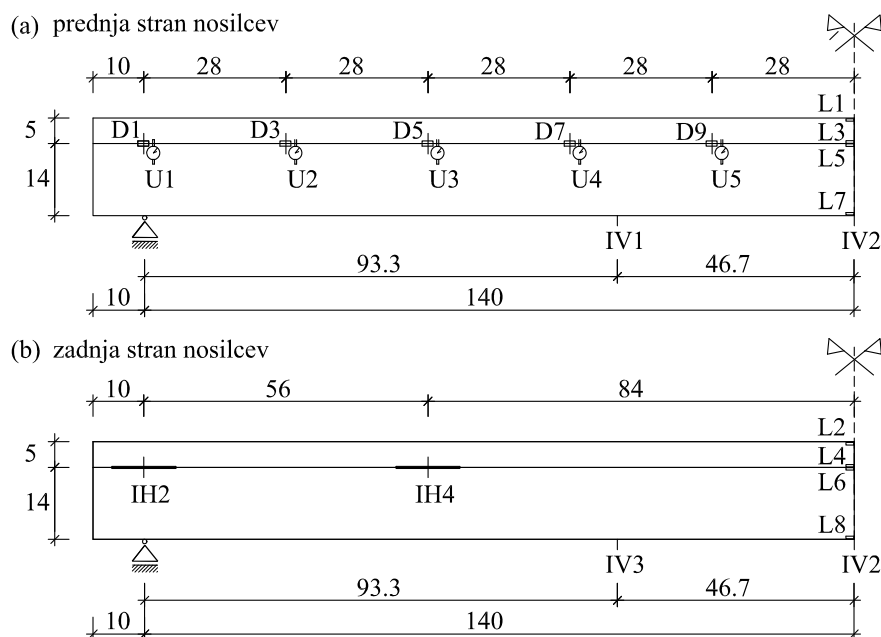


Slika 4.37: Geometrijski podatki, razporeditev veznih sredstev po osi preiskanih lesenih kompozitnih nosilcev ter način podpiranja in oblika obtežbe: (a) za nosilca z oznakama N6/1 in N6/2, (b) za nosilca z oznakama N9/1 in N9/2.

Med preiskavo smo kontrolirano povečevali velikost obtežbe, pri tem pa smo na več mestih merili vertikalne pomike, zamike vzdolž stika slojev ter specifične spremembe dolžin izbranih materialnih vlaken kompozitnega nosilca. Vse meritve smo izvedli z naslednjo merilno opremo:

- deset merilcev pomikov (konjičkov) s hodom  $\pm 5$  mm, s katerimi smo merili zamike na stiku slojev (D1-D10),
- štiri induktivni merilci pomikov z merilnim območjem  $\pm 100$  mm in resolucijo 0.01 mm, s katerimi smo prav tako merili zamike na stiku (IH1-IH4),
- deset merilnih uric z resolucijo 1/100 mm, s katerimi smo merili odpiranje oziroma zapiranje stika (U1-U10),
- trije induktivni merilci pomikov z merilnim območjem  $\pm 100$  mm in resolucijo 0.01 mm, s katerimi smo merili vertikalne pomike kompozitnega nosilca (IV1-IV3) in
- osem merilnih lističev dolžine 6 mm, s katerimi smo na sredini razpona merili specifične deformacije na zgornjem in spodnjem robu obeh slojev kompozitnega nosilca.

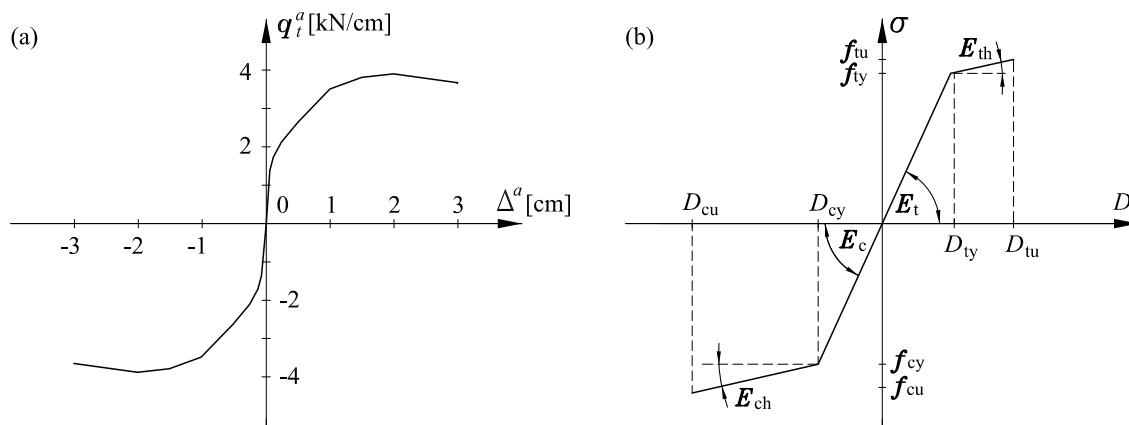
Odčitavanje in registracija vseh rezultatov je potekala v povezavi z osebnim računalnikom in s pomočjo sto kanalnega merilnega sistema Hottinger UPH 3200. Razporeditev merilne opreme na preiskanih lesenih kompozitnih nosilcih prikazujejo slike 4.38, 4.51 in 4.52.



Slika 4.38: Razporeditev merilne opreme na preiskanih lesenih kompozitnih nosilcih: (a) sprednja stran nosilcev, (b) zadnja stran nosilcev.

V okviru eksperimentalnih raziskav smo opravili tudi spremljajoče preiskave konstitutivne zveze stika oziroma zveze med tangencialno komponento linijske kontaktne obtežbe in zamikom na stiku slojev kompozitnega nosilca. Meritve so pokazale, da je ta zveza nelinearna. Izvedba meritev konstitutivskega zakona stika ter obdelava rezultatov je podrobno predstavljena v [15]. Konstitutivsko zvezo stika smo določili s povprečenjem vseh meritev. Razporeditev veznih sredstev v preizkušancih je bila podobna razporeditvi veznih sredstev v preiskanih kompozitnih nosilcih. Na sliki 4.39(a) prikazujemo prirejeno konstitutivsko zvezo stika za primer preizkušancev,

kjer so žebli razporejeni v eno vrsto na medsebojni razdalji 1 cm. Takšna razporeditev žbljev je zgolj hipotetična, saj bi povzročila cepljenje lesa in s tem poslabšanje togostnih karakteristik stika.



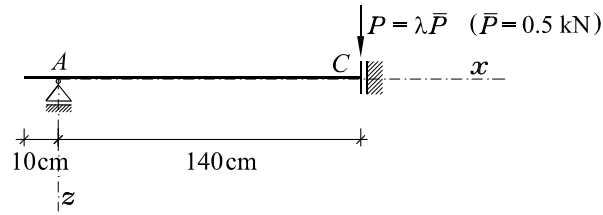
Slika 4.39: Konstitucijska zakona: (a) stika za en žebelj; pri tem so žebli po osi nosilca razporejeni v eno vrsto na medsebojni razdalji 1 cm in (b) za les.

V nadaljevanju smo z eksperimenti določili tudi konstitucijski zakon lesa. Kot navaja Steiger s sodelavci [84], je postopek natezne preiskave lesa izjemno zahteven in zahteva ustrezno izdelano preizkuševalno opremo. Natezno preiskavo lesa smo opravili na posebej izdelanih vzorcih, vendar kljub dobri preizkuševalni opremi dobljeni rezultati niso bili sprejemljivi. Konstitucijski zakon lesa v tlaku smo izmerili na treh lesenih prizmah. Izkaže se, da se vrednost izmerjenega elastičnega modula v tlaku, ki je v povprečju znašala  $1150 \text{ kN/cm}^2$ , kar precej razlikuje od elastičnega modula lesa, uporabljenega v preiskanih nosilcih. Tako smo se glede konstitucijskega zakona lesa oprli na rezultate preiskav, podanih v [27] in [84]. Poleg tega smo na podlagi izmerjenih obtežno-deformacijskih krivulj verikalnih pomikov kompozitnih nosilcev ocenili modul elastičnosti lesa v nategu in tlaku.

Oblika konstitucijskega zakona lesa, ki smo ga uporabili v numerični analizi, je prikazana na sliki 4.39(b). V skladu s priporočili [27] in [84] ter na osnovi primerjave numeričnih in eksperimentalnih rezultatov smo za karakteristične vrednosti specifičnih deformacij izbrali naslednje vrednosti:  $D_{ty} = 3.2^\circ/\text{oo}$ ,  $D_{tu} = 10^\circ/\text{oo}$ ,  $D_{cy} = 3.5^\circ/\text{oo}$ ,  $D_{cu} = 10.3^\circ/\text{oo}$ . Poleg tega smo ocenili elastične module lesa za posamezne kompozitne nosilce in sicer:  $E_t = E_c = 1150 \text{ kN/cm}^2$  za N6/1,  $E_t = E_c = 850 \text{ kN/cm}^2$  za N6/2,  $E_t = E_c = 1000 \text{ kN/cm}^2$  za N9/1 in  $E_t = E_c = 1050 \text{ kN/cm}^2$  za N9/2. Za elastični modul utrjevanja v tlaku smo privzeli  $E_{ch} = 0.1E_c$ , v nategu pa  $E_{th} = 0.05E_t$ .

Uporabljeni računski model kompozitnih nosilcev, ki ga prikazujemo na sliki 4.40, je povsem identičen računskemu modelu, ki smo ga predstavili v drugem računskem primeru (slika 4.12). Ker analiziramo le polovico kompozitnega nosilca, je kompozitni nosilec obtežen samo s polovično obtežbo, t.j.  $\bar{P} = 0.5 \text{ kN}$ .

Glede na izmerjene vertikalne pomike ob poružitvi lesenih kompozitnih nosilcev, ki niso presegali  $1/40$  razpona, smo predpostavili oziroma sklepali, da geometrijsko nelinearna teorija kompozitnih nosilcev nima velikega vpliva na napetostno in deformacijsko stanje obravnavanih nosilcev.



Slika 4.40: Računski model za numerično analizo lesenih kompozitnih nosilcev. Nosilce analiziramo s petimi končnimi elementi tipa  $E_{5-4}$ .

To v nadaljevanju z numeričnim eksperimentom tudi potrdimo. Glede na največjo porušno obtežbo  $P_{\text{ruš}}$  nosilcev, ki je bila 43.62 kN in smo jo izmerili pri nosilcu z oznako N6/1, smo vpliv geometrijske nelinearnosti analizirali pri tem nosilcu. Rezultate značilnih količin, ki jih prikazujemo v preglednici 4.5, smo primerjali pri dveh nivojih obtežbe:  $\lambda = 25$  in  $\lambda = 50$ . Pri tem smo smiselno uporabili nelinearen zakon stika, kot je prikazan na sliki 4.39(a), ter linearno elastičen material obeh slojev z modulom elastičnosti  $1150 \text{ kN/cm}^2$ . Rezultati v preglednici 4.5, ki so iz vrednoteni glede na referenčno os kompozitnega nosilca, dokazujejo, da geometrijsko nelinearna teorija kompozitnih nosilcev za obravnavane dvoslojne lesene nosilce nima velikega vpliva na njihovo obnašanje vse do porušitve.

Preglednica 4.5: Primerjava značilnih količin lesenega kompozitnega nosilca. Primerjamo rezultate, ki jih izračunamo z geometrijsko linearno oziroma z geometrijsko nelinearno teorijo kompozitnih nosilcev.

količina	$\lambda = 25$			$\lambda = 50$		
	GLT <sup>1</sup>	GNT <sup>2</sup>	GNT/GLT	GLT <sup>1</sup>	GNT <sup>2</sup>	GNT/GLT
$w_C$ [cm]	2.5857	2.5760	0.9962	5.7496	5.6970	0.9908
$\mathcal{N}_C^a$ [kN]	40.852	40.896	1.0011	55.715	55.658	0.9989
$\mathcal{N}_C^b$ [kN]	-40.852	-40.828	0.9994	-55.715	-55.444	0.9951
$\mathcal{M}_C^a$ [kNm]	15.885	15.859	0.9983	32.313	32.181	0.9959
$\mathcal{M}_{e,C}^b$ [kNm]	1.6147	1.6147	1.0000	2.6872	2.6859	0.9995
$\Delta_A^a$ [mm]	1.9141	1.9048	0.9951	4.8881	4.8379	0.9897

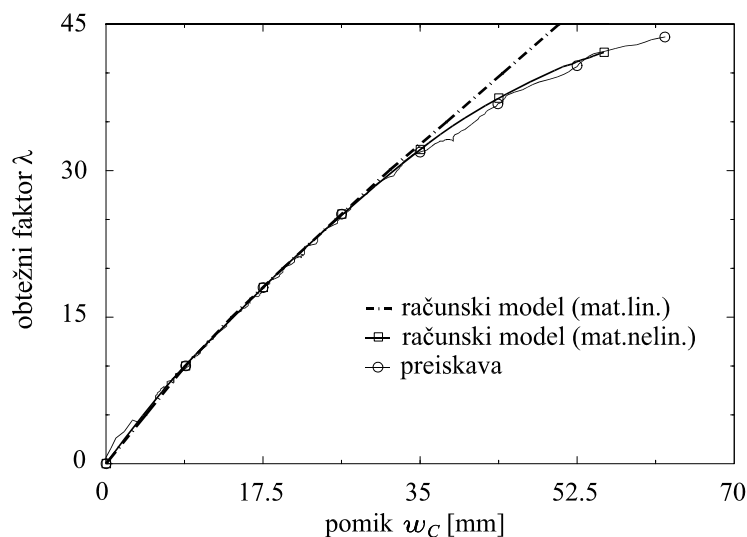
- 1 geometrijsko linearna teorija
- 2 geometrijsko nelinearna teorija

Glede na razpoložljive eksperimentalne rezultate bomo v tem računskem primeru analizirali natančnost predstavljenega računskega postopka za analizo kompozitnih nosilcev in sicer s primerjavo med izmerjenimi in izračunanimi rezultati vertikalnih pomikov in zamikov med slojema kompozitnega nosilca vse do porušitve.

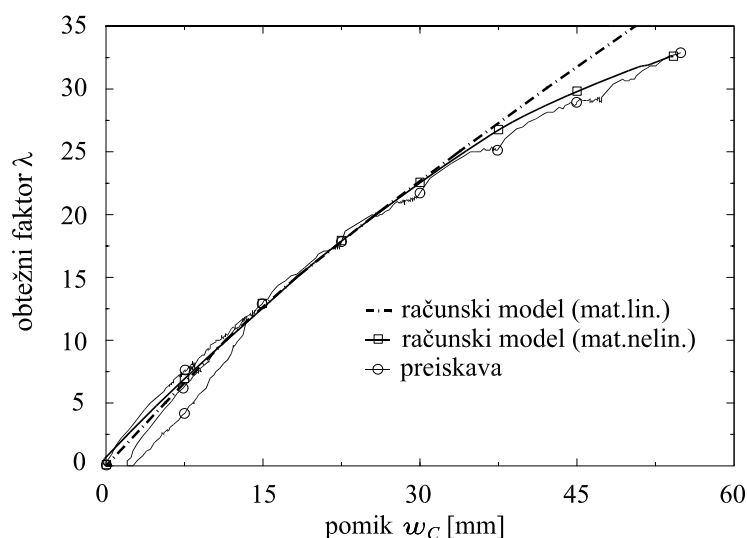


### Primerjava med izmerjenimi in izračunanimi vertikalnimi pomiki

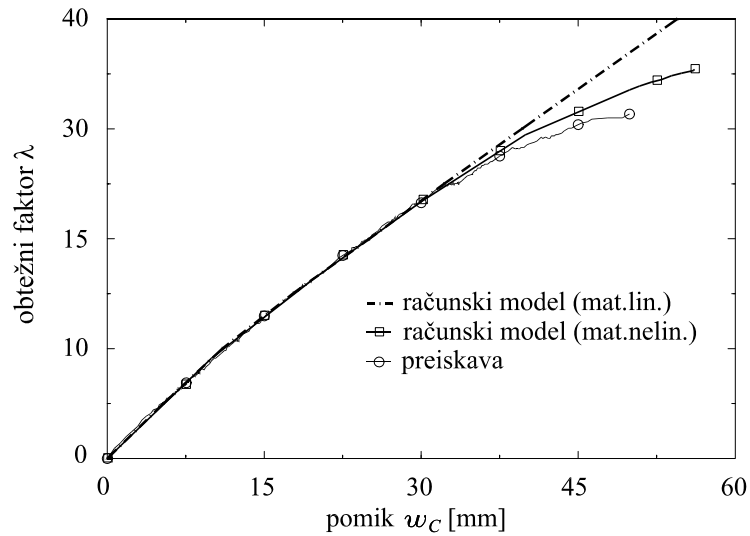
Na slikah 4.41, 4.42, 4.43 in 4.44 prikazujemo primerjavo med izmerjenimi in izračunanimi obtežno-deformacijskimi krivljami vertikalnega pomika sredine nosilca  $w_C$  za vse štiri analizirane lesene kompozitne nosilce. Na vseh slikah dodatno prikazujemo tudi obtežno-deformacijske krivulje, ki smo jih izračunali z uporabo nelinearnega konstitucijskega zakona stika in linearnih konstitucijskih zvez materiala slojev.



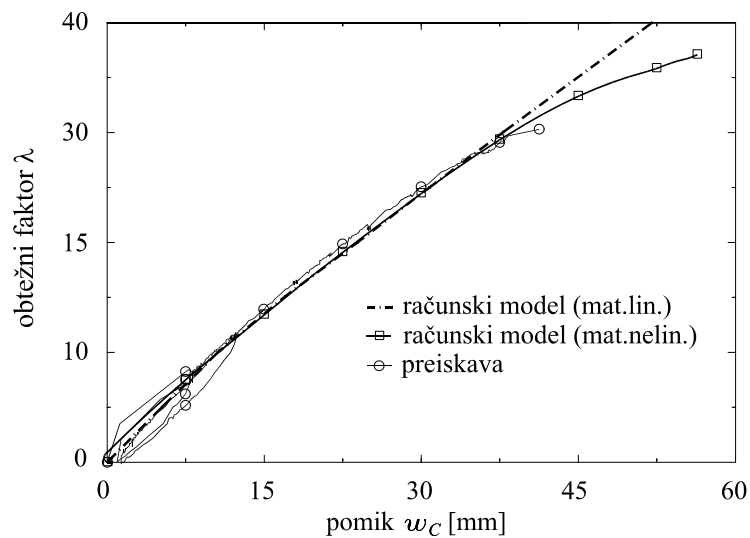
Slika 4.41: Izmerjena in izračunana obtežno-deformacijska krivulja vertikalnega pomika  $w_C$  za nosilec N6/1. Nosilec smo analizirali s petimi elementi tipa  $E_{5-4}$ .



Slika 4.42: Izmerjena in izračunana obtežno-deformacijska krivulja vertikalnega pomika  $w_C$  za nosilec N6/2. Nosilec smo analizirali s petimi elementi tipa  $E_{5-4}$ .



Slika 4.43: Izmerjena in izračunana obtežno-deformacijska krivulja vertikalnega pomika  $w_C$  za nosilec N9/1. Nosilec smo analizirali s petimi elementi tipa  $E_{5-4}$ .



Slika 4.44: Izmerjena in izračunana obtežno-deformacijska krivulja vertikalnega pomika  $w_C$  za nosilec N9/2. Nosilec smo analizirali s petimi elementi tipa  $E_{5-4}$ .

Kot vidimo na slikah 4.41, 4.42, 4.43 in 4.44, se pri nižjih nivojih obtežbe vse izmerjene in izračunane obtežno-deformacijske krivulje odlično ujemajo. Nad nivojem mejne obtežbe  $P_{mej}$ , ki znaša približno  $60 - 80\%$  porušne obtežbe  $P_{ruš}$  lesenih kompozitnih nosilcev, pa opazimo velik vpliv materialne nelinearnosti. Tako pri obtežbah nosilcev med  $P_{mej}$  in  $P_{ruš}$  opazimo, da so robne deformacije sloja  $a$  večje kot  $D_{ty}$  in  $D_{cy}$ . Materialna vlakna sloja  $b$  kompozitnega nosilca so bila neglede na nivo obtežbe vzdolž celotnega nosilca v elastičnem območju. V numerični analizi je bila pri vseh nosilcih posledica prekoračitve mejnih nateznih deformacij  $D_{tu}$  na spodnjem robu sloja  $a$  pod točkovno silo. Tudi pri eksperimentih smo pri vseh nosilcih

opazili enak način porušitve. Ker nismo imeli točnih eksperimentalnih podatkov o obnašanju lesa v nategu, in ker smo bilinearno konstitucijsko zvezo lesa v nategu zgolj ocenili, smo opazili določena odstopanja med izračunanimi in izmerjenimi rušnimi obtežbami  $P_{\text{ruš}}$  in pripadajočimi vertikalnimi pomiki sredine razpona  $w_{C,\text{ruš}}$ . Izmerjene in izračunane vrednosti  $P_{\text{ruš}}$  in  $w_{C,\text{ruš}}$  primerjamo v preglednici 4.6, relativno napako pa izračunamo z izrazom:

$$\epsilon(\bullet) = \left| \frac{(\bullet)^{\text{eksp}} - (\bullet)^{\text{num}}}{(\bullet)^{\text{eksp}}} \right| \cdot 100 [\%].$$

Iz preglednice 4.6 je razvidno, da relativna napaka porušne sile  $P_{\text{ruš}}$  in pripadajočega pomika sredine nosilca  $w_{C,\text{ruš}}$  precej variira. Tako znaša le nekaj odstotkov pri nosilcu N6/2, pri nosilcu N9/2 pa so odstopnja bistveno večja.

*Preglednica 4.6:* Primerjava med izmerjenimi in izračunanimi porušnimi obtežbami in pripadajočimi pomiki na sredini lesenega kompozitnega nosilca.

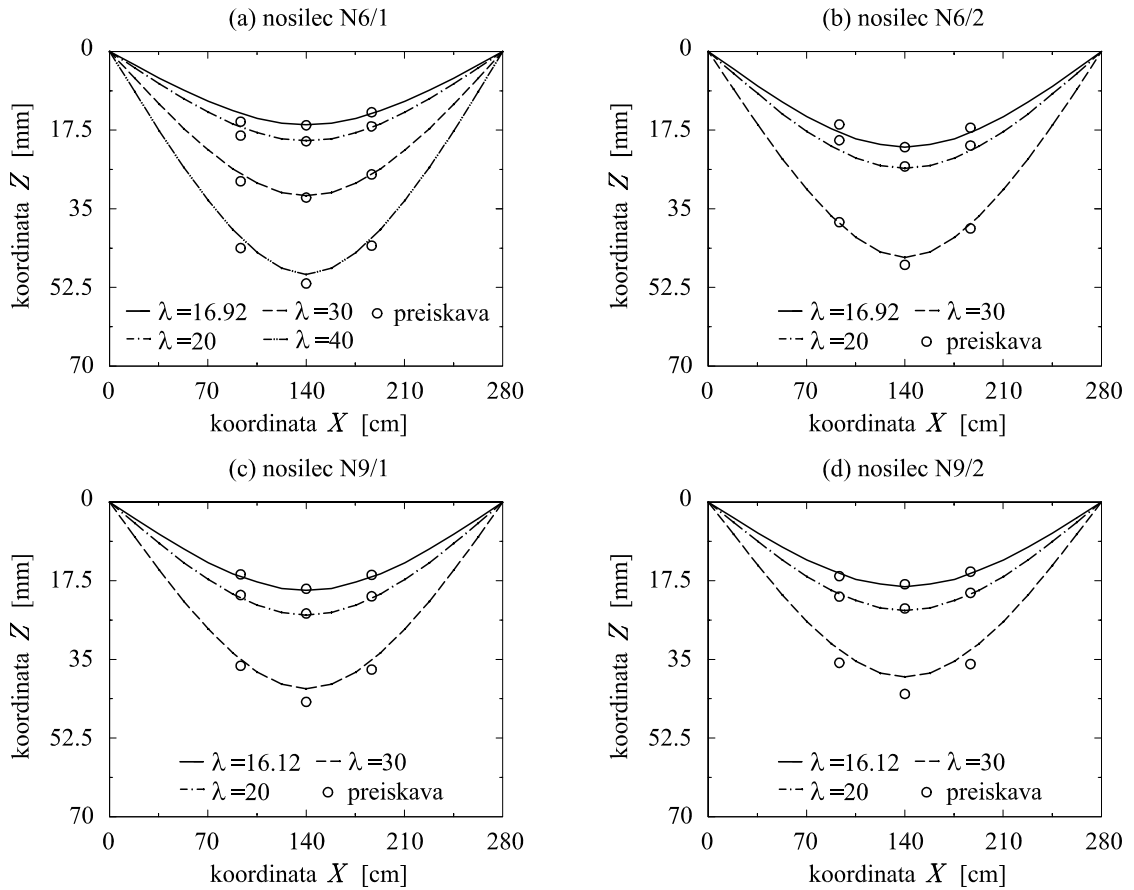
nosilec	$P_{\text{ruš}}^{\text{eksp}}$ [kN]	$P_{\text{ruš}}^{\text{num}}$ [kN]	$\epsilon$ [°/°]	$w_{C,\text{ruš}}^{\text{eksp}}$ [mm]	$w_{C,\text{ruš}}^{\text{num}}$ [mm]	$\epsilon$ [°/°]
N6/1	43.62	42.09	3.51	62.34	55.56	10.87
N6/2	32.87	32.51	1.09	55.10	54.25	1.54
N9/1	31.37	35.38	12.78	50.10	56.25	12.27
N9/2	30.25	36.98	22.24	42.75	56.50	32.16

Zaradi dejstva, da je vzrok porušitve vseh lesenih kompozitnih nosilcev natezna porušitev lesnih vlaken, in ker smo v računski analizi uporabili ocenjen konstitucijski zakon lesa v nategu, smo v nadaljevanju analizirali, kako razmerje karakterističnih specifičnih natezних deformacij lesa  $D_{\text{ty}}/D_{\text{tu}}$  vpliva na velikost porušne obtežbe  $P_{\text{ruš}}$ . Pri parametrični analizi smo spreminjali le vrednost mejne deformacije  $D_{\text{tu}}$ . Prišli smo do naslednjih zanimivih zaključkov:

- če pri nosilcu N6/1 privzamemo  $D_{\text{tu}} = 15^\circ/_{\text{oo}}$ , je relativna napaka porušne obtežbe  $\epsilon(P_{\text{mej}})$  le še  $2.15^\circ/_{\text{o}}$ , napaka pripadajočega pomika  $\epsilon(w_{C,\text{ruš}})$  pa je le  $3.46^\circ/_{\text{o}}$ ;
- če pri nosilcu N9/1 privzamemo  $D_{\text{tu}} = 7.5^\circ/_{\text{oo}}$ , je relativna napaka porušne obtežbe  $\epsilon(P_{\text{mej}})$  samo  $5.08^\circ/_{\text{o}}$ , napaka pripadajočega pomika  $\epsilon(w_{C,\text{ruš}})$  pa je  $3.19^\circ/_{\text{o}}$ ;
- če pri nosilcu N9/2 privzamemo  $D_{\text{tu}} = 6^\circ/_{\text{oo}}$ , se relativni napaki bistveno zmanjšata in sicer sta  $\epsilon(P_{\text{mej}}) = 3.53^\circ/_{\text{o}}$  ter  $\epsilon(w_{C,\text{ruš}}) = 1.75^\circ/_{\text{o}}$ .

Za ilustracijo na sliki 4.45 prikazujemo izmerjene in izračunane deformirane lege vseh analiziranih lesenih kompozitnih nosilcev. Pri tem smo uporabili osnovne predpostavljene konstitucijske zakone materiala in stika. Na sliki 4.45 opazimo odlično ujemanje izmerjenih in izračunanih deformiranih leg pri vseh nivojih obtežbe. V primeru kompozitnih nosilcev N6/1 in N6/2 predstavlja obtežni faktor  $\lambda = 16.92$  karakteristično mejno obtežbo nosilca. To smo izračunali z izmerjenim elastičnim modulom lesa v tlaku in z enačbami, kot jih predpisuje standard za lesene konstrukcije EuroCode 5 [31]. Za parcialne varnostne faktorje materiala in obtežbe

smo izbrali vrednost 1.0 [15]. Podobno smo za nosilca N9/1 in N9/2 izračunali mejno obtežbo  $\lambda = 16.12$ .



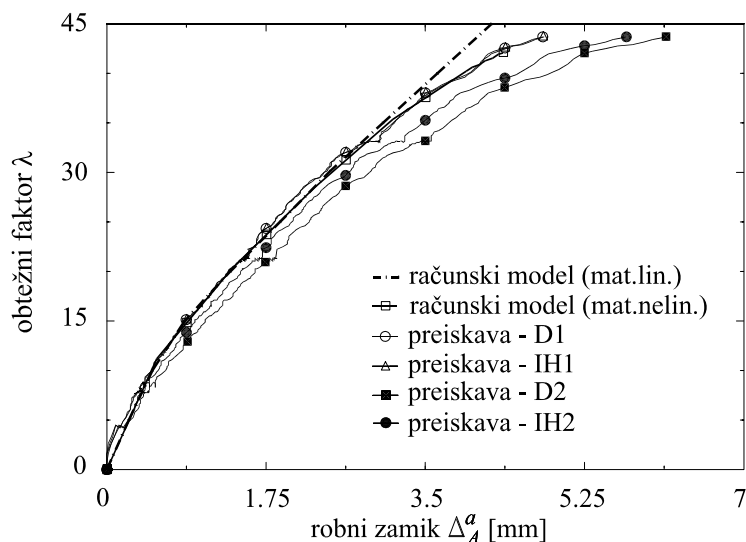
Slika 4.45: Primerjava izmerjenih in izračunanih deformiranih leg kompozitnih nosilcev N6/1, N6/2, N9/1 in N9/2 za različne nivoje obtežbe. Nosilce smo analizirali s petimi končnimi elementi tipa  $E_{5-4}$ .

### Primerjava med izmerjenimi in izračunanimi zamiki vzdolž stika kompozitnih nosilcev

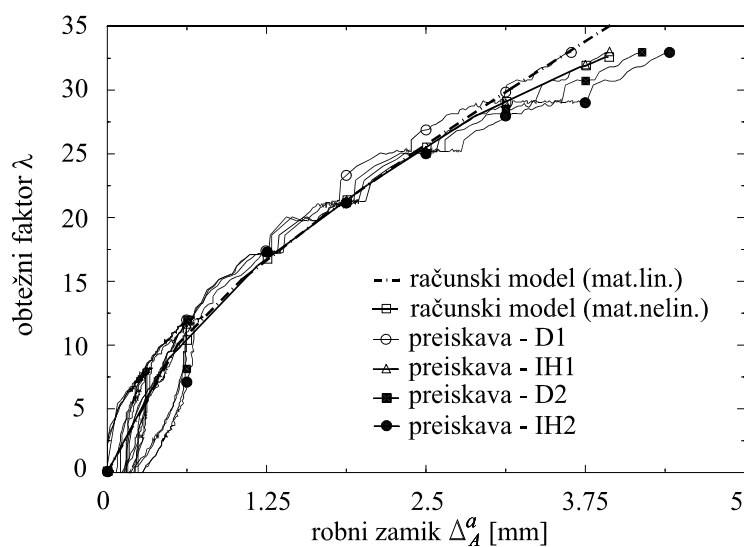
Kot je razvidno iz slike 4.38, smo precej več merskih mest namenili merjenju zamikov na stiku kompozitnega nosilca kot pa meritvi vertikalnih pomikov. Na slikah 4.46, 4.47, 4.48 in 4.49 prikazujemo obtežno-deformacijske krivulje robnih zamikov  $\Delta_A^a$  v točki A kompozitnih nosilcev. Kot vidimo na slikah 4.46–4.49, smo med eksperimentom merili robne zamike  $\Delta_A^a$  kar na štirih mestih, in sicer na merskih mestih z oznakama IH1 in D1, ki sta bili v levem krajišču na sprednji in zadnji strani kompozitnega nosilca in na merskih mestih z oznakama IH2 in D2, ki sta bili v desnem krajišču prav tako na sprednji in zadnji strani kompozitnega nosilca. Tako imamo za primerjavo med izračunanimi in izmerjenimi zamiki na voljo kar štiri meritve.

Podobno kot pri analizi vertikalnih pomikov, tudi pri analizi zamikov zaradi nazornejše primerjave izračunamo obtežno-deformacijske krivulje robnega zamika  $\Delta_A^a$  za dva konstitucijska zakona

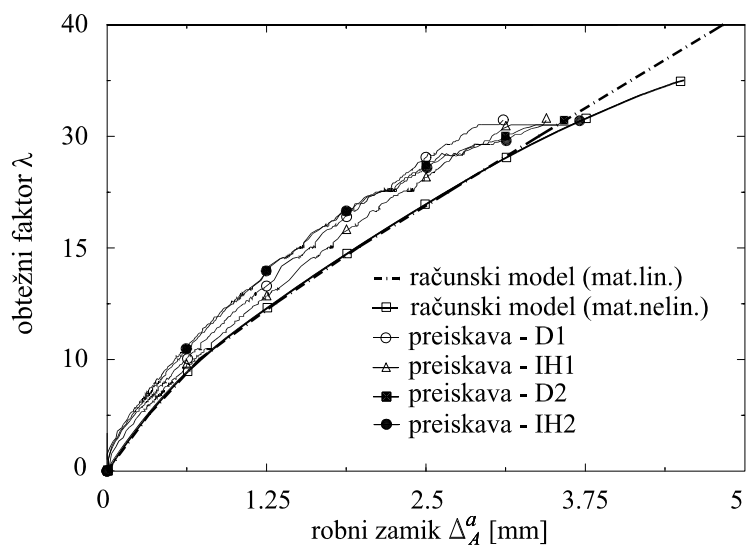
lesa in sicer za linearno elastičen model in za nelinearen model lesa. Na slikah 4.46–4.49 opazimo zelo dobro ujemanje eksperimentalnih in numeričnih rezultatov. Še posebej dobro je ujemanje pri nižjih nivojih obtežb. Eksperimentalno dejstvo, da se štiri enakovredne meritve zamikov razlikujejo, potrjuje raztros rezultatov, ki je značilen za lesene konstrukcije.



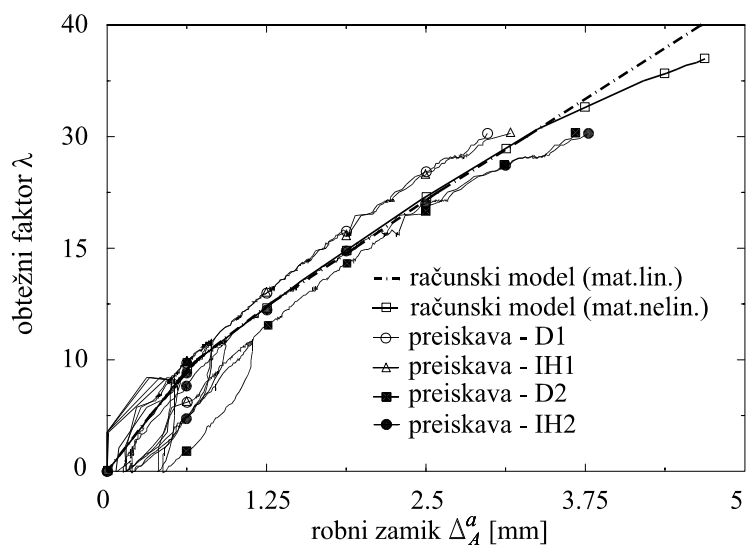
Slika 4.46: Izmerjene in izračunane obtežno-deformacijske krivulje robnega zamika  $\Delta_A^a$  lesenega dvoslojnega nosilca N6/1. Nosilec smo analizirali s petimi končnimi elementi tipa  $E_{5-4}$ .



Slika 4.47: Izmerjene in izračunane obtežno-deformacijske krivulje robnega zamika  $\Delta_A^a$  lesenega dvoslojnega nosilca N6/2. Nosilec smo analizirali s petimi končnimi elementi tipa  $E_{5-4}$ .



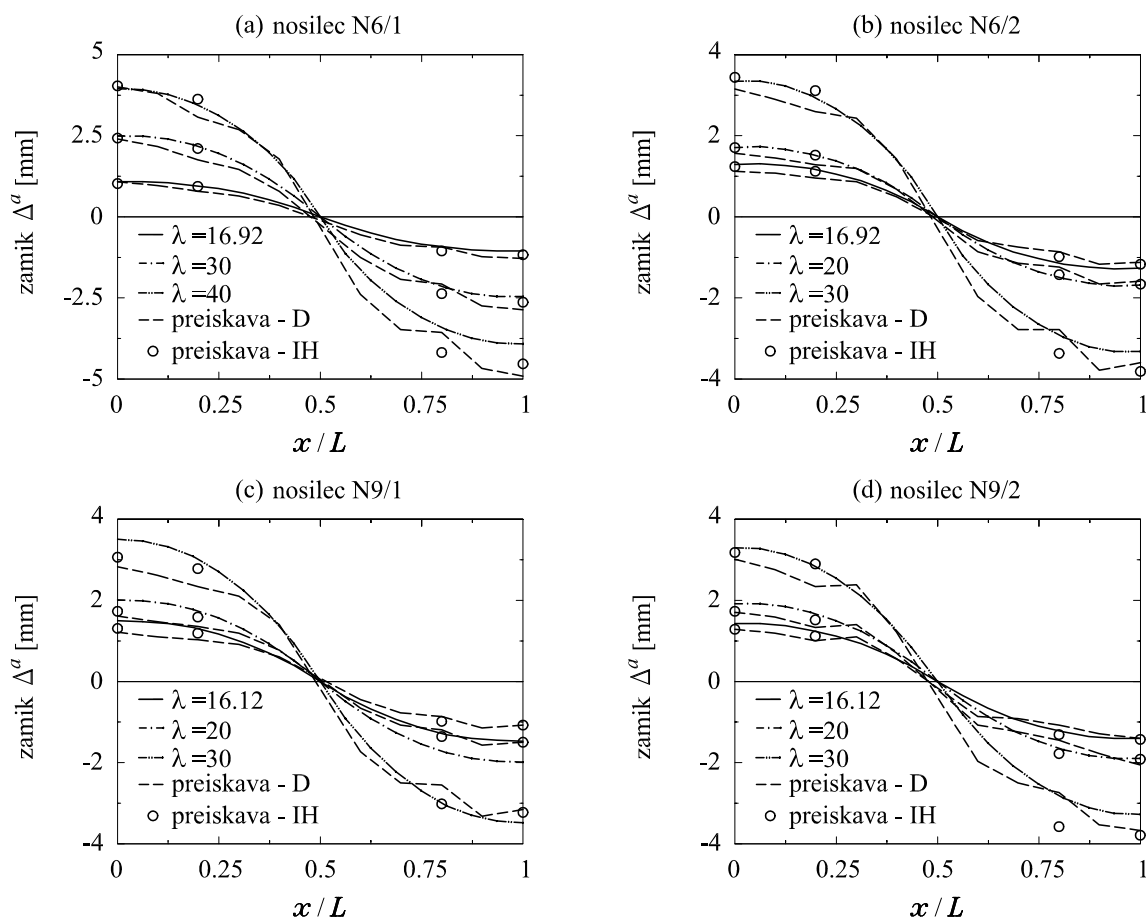
Slika 4.48: Izmerjene in izračunane obtežno-deformacijske krivulje robnega zamika  $\Delta_A^a$  lesenega dvoslojnega nosilca N9/1. Nosilec smo analizirali s petimi končnimi elementi tipa  $E_{5-4}$ .



Slika 4.49: Izmerjene in izračunane obtežno-deformacijske krivulje robnega zamika  $\Delta_A^a$  lesenega dvoslojnega nosilca N9/2. Nosilec smo analizirali s petimi končnimi elementi tipa  $E_{5-4}$ .

V nadaljevanju na sliki 4.50 prikažemo potek zamikov vzdolž stika lesenih kompozitnih nosilcev za različne nivoje obtežbe. Tudi sedaj primerjamo zamike vzdolž stika kompozitnih nosilcev pri obtežnem faktorju karakteristične mejne obtežbe ( $\lambda = 16.92$  za nosilca N6/1 in N6/2 ter  $\lambda = 16.12$  za nosilca N9/1 in N9/2) ter pri obtežnih faktorjih  $\lambda = 20$  in  $30$ . Ker ima nosilec N6/1 višjo porušno obtežno  $P_{ruš}$ , kot jo imajo ostali nosilci, primerjamo zanj zamike tudi za obtežni faktor  $\lambda = 40$ . Zamike računskega modela primerjamo z eksperimentalnimi, ki smo jih izmerili z deformetri (D1–D10) in s horizontalno nameščenimi induktivnimi merilci (IH1–IH4).

Podobno kot pri vertikalnih pomikih opazimo tudi pri zamikih zelo dobro ujemanje izmerjenih in izračunanih zamikov pri vseh obtežbah, kar prikažemo na sliki 4.50.



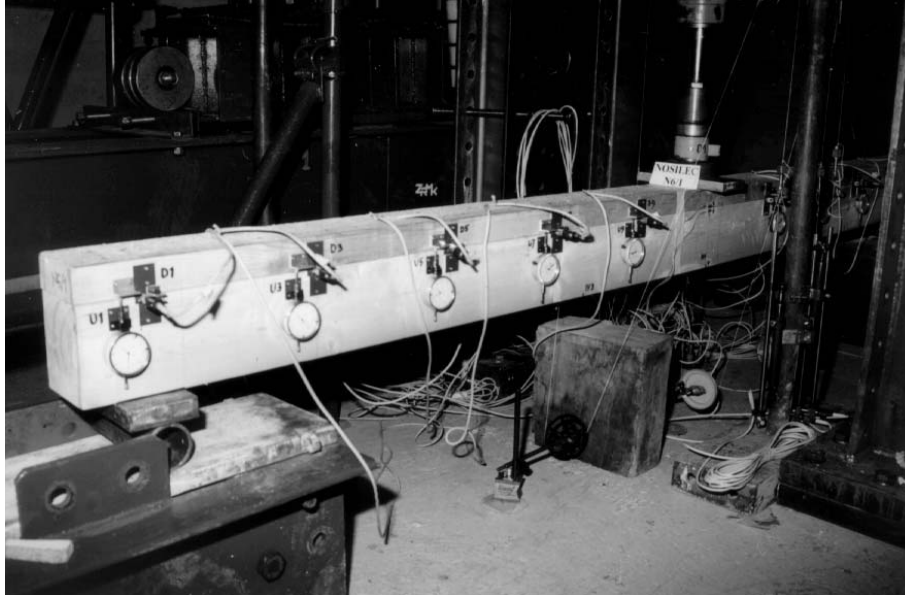
Slika 4.50: Primerjava izmerjenih in izračunanih zamikov vzdolž stika lesenih kompozitnih nosilcev N6/1, N6/2, N9/1 ter N9/2 za različne nivoje obtežbe. Nosilec smo analizirali s petimi končnimi elementi tipa  $E_5-4$ .

Glede na dejstvo, da je ujemanje med izmerjenimi in izračunanimi kinematičnimi količinami zelo dobro pri vseh nivojih obtežbe, sklepamo, da je razviti računski postopek za nelinearno analizo kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med sloji primeren za analizo obnašanja lesenih kompozitnih nosilcev. Poudariti pa je potrebno, da imajo oblika ter pripadajoči parametri nelinearnega konstitucijskega zakona lesa pomemben vpliv na deformacijsko in napetostno stanje lesenih kompozitnih nosilcev in na določitev porušne obtežbe.

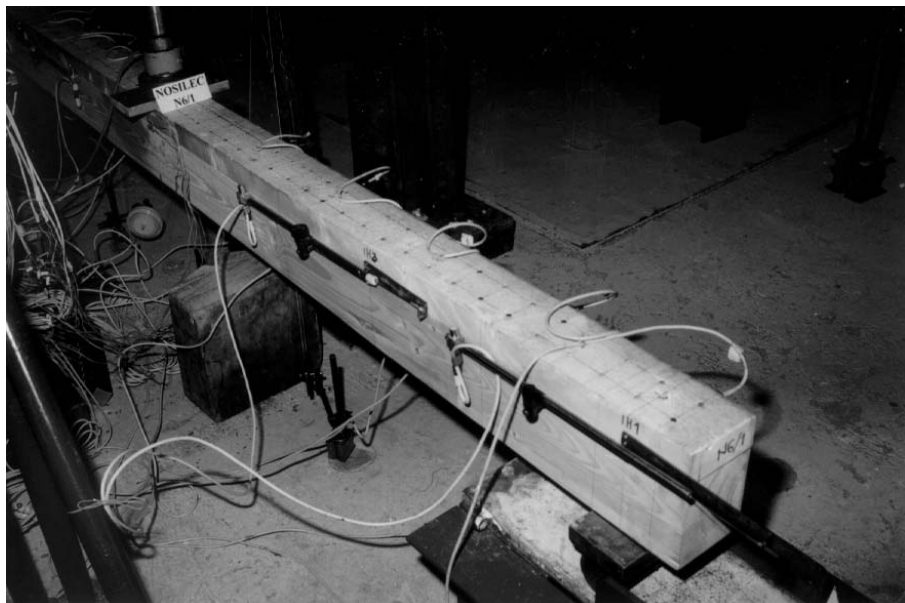
### Slikovni prikaz eksperimentalnega dela

Na koncu s fotografijami prikazujemo potek eksperimentalnega dela. Vse slike smo posneli med preiskavami v Laboratoriju Fakultete za gradbeništvo in geodezijo Univerze v Ljubljani. Na slikah 4.51–4.57 prikazujemo razporeditev merilne opreme na sprednji in zadnji strani preiskanih

leseni kompozitni nosilci ter deformirane lege nosilcev med preiskavo in po poružitvi. Na slikah 4.57, 4.56 in 4.55 prikazujemo poružitve lesenih kompozitnih nosilcev, ki so posledica prekoračitve nateznih napetosti na spodnjem robu sloja *a* kompozitnih nosilcev pod točkovno obtežbo.

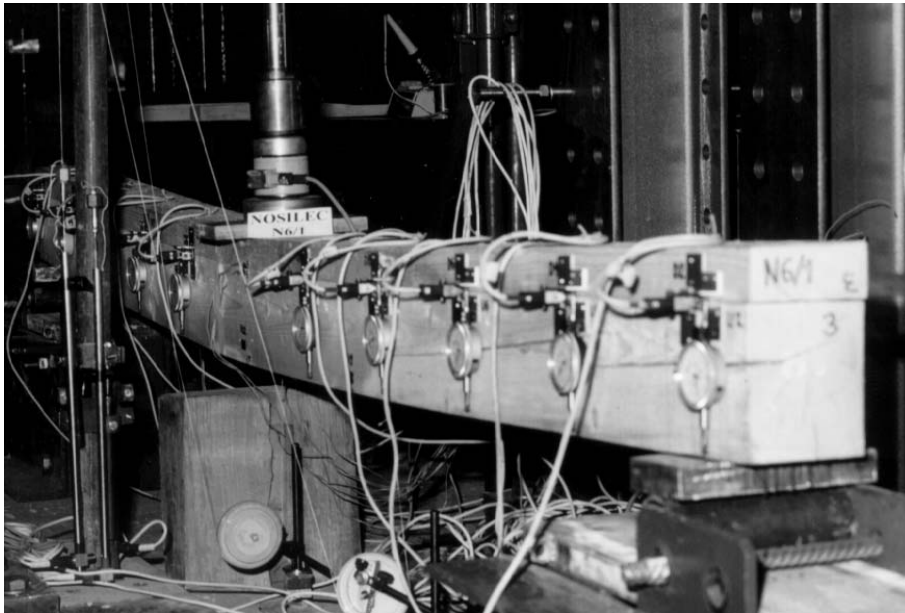


*Slika 4.51:* Razpored merilne opreme na sprednji strani preiskanih lesenih kompozitnih nosilcev.

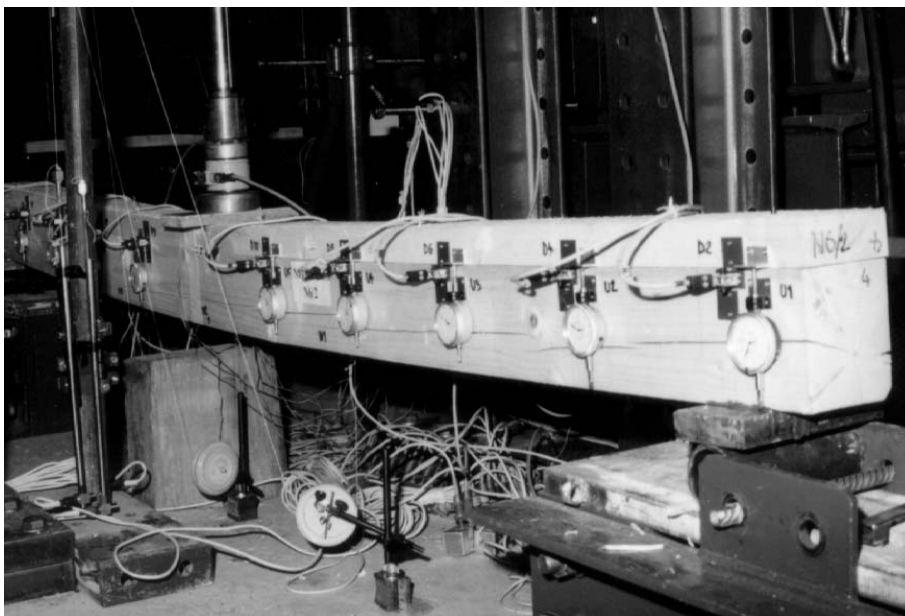


*Slika 4.52:* Razpored merilne opreme na zadnji strani preiskanih lesenih kompozitnih nosilcev.

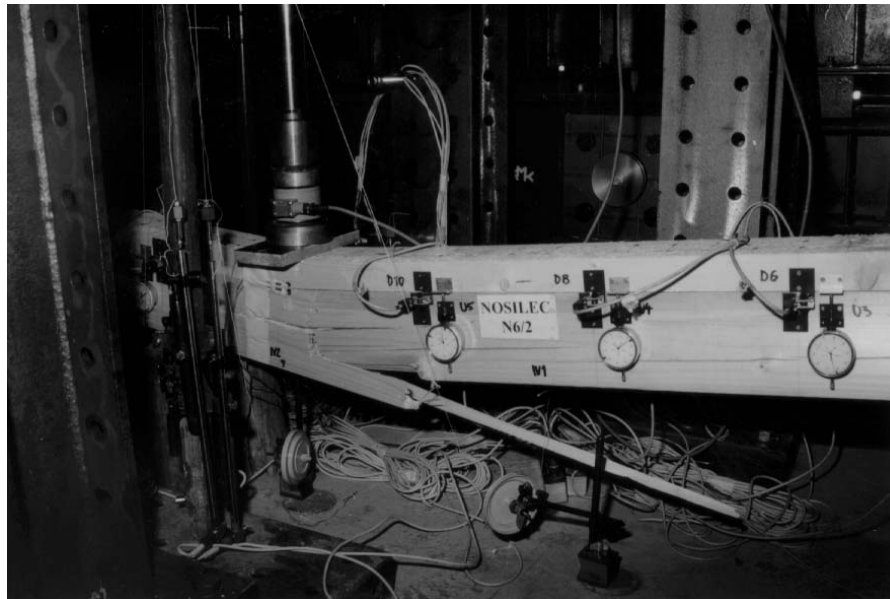




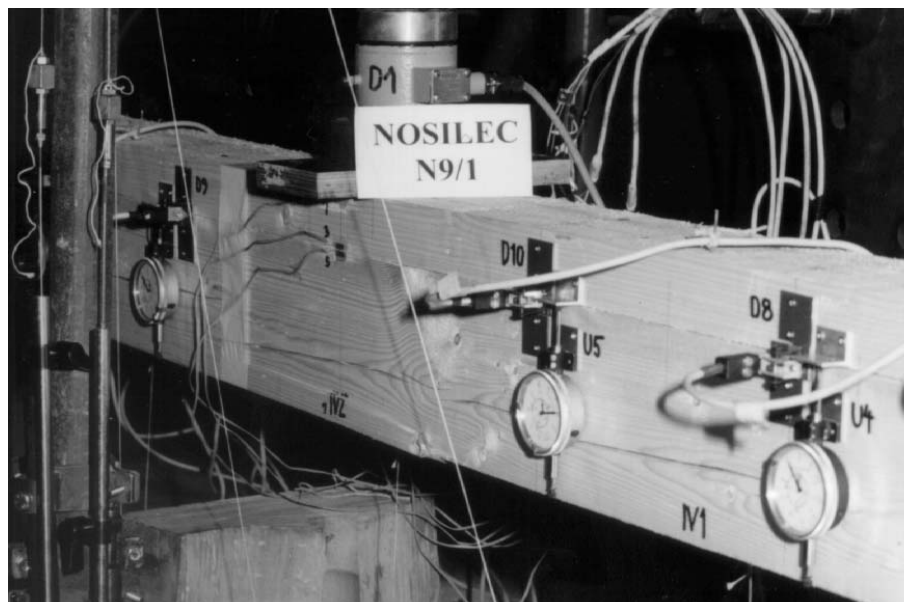
Slika 4.53: Deformirana lega lesenega kompozitnega nosilca N6/1 tik pred poružitvijo.



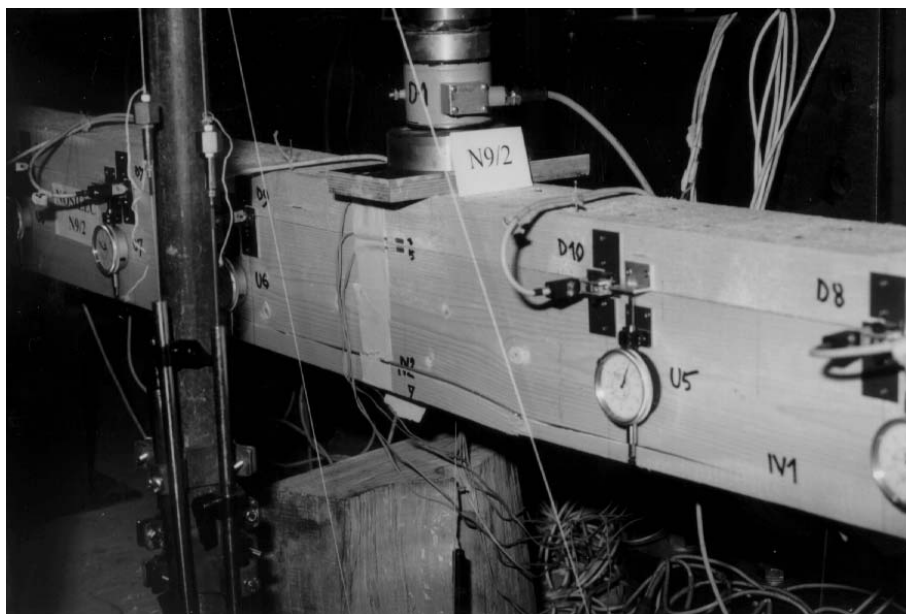
Slika 4.54: Deformirana lega lesenega kompozitnega nosilca N6/2 tik pred poružitvijo.



*Slika 4.55:* Kompozitni nosilec N6/2 po porušitvi. Vidna je natezna porušitev vlaken na spodnjem robu sloja *a* kompozitnega lesenega nosilca.



*Slika 4.56:* Kompozitni nosilec N9/1 po porušitvi. Vidna je natezna porušitev vlaken na spodnjem robu sloja *a* kompozitnega lesenega nosilca.



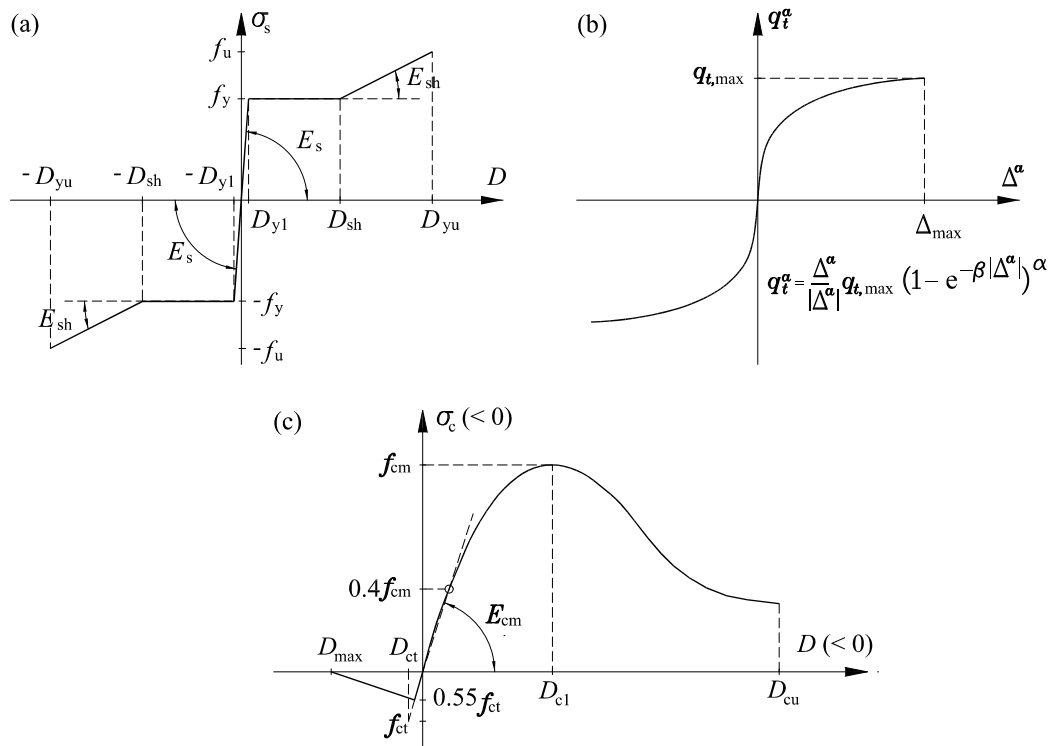
*Slika 4.57:* Kompozitni nosilec N9/2 po poružitvi. Vidna je natezna porušitev vlaken na spodnjem robu sloja *a* kompozitnega lesenega nosilca.

#### 4.6 ANALIZA NOSILNOSTI SOVPREŽNIH NOSILCEV IZ JEKLA IN BETONA

Sovprežni nosilci iz jekla in betona so zelo učinkoviti in varčni gradbeni konstrukcijski elementi. Z njimi uspešno uporabimo osnovno idejo kompozitnih konstrukcij, t.j. v nateznih delih prečnega prereza uporabimo materiale z dobrimi nateznimi lastnostmi, v tlačnih delih prečnega prereza pa materiale z dobrimi tlačnimi lastnostmi. Sovprežne konstrukcije običajno sestavljajo jekleni nosilec, armiranobetonska plošča in običajno podajna povezava med njima. Najpogosteje jih uporabljamo za nosilne medetažne konstrukcije v stanovanjskih in poslovnih objektih, pogosto pa tudi kot prekladne konstrukcije v mostogradnji. Način, kako sovpredni nosilec doseže mejno nosilnost, je v veliki meri odvisen od mejne nosilnosti prečnega prereza. Glede na dejstvo, da je prečni prež sestavljen iz betona in jekla, je mejna nosilnost prečnega prereza odvisna predvsem od predznaka upogibnega momenta. Če je stik med betonsko ploščo in jeklenim nosilcem dovolj tog, da ne pride do poružitve stika in razslojevanja slojev, dosežejo sovpredni nosilci mejno nosilnost na dva načina: (i) v primeru prevladujočega pozitivnega upogibnega momenta je mejna nosilnost dosežena s tečenjem jeklenega nosilca in/ali tlačno poružitvijo betonske plošče, (ii) v primeru prevladujočega negativnega momenta pa je mejna nosilnost sovprednega nosilca največkrat posledica lokalnega uklona oziroma bočne zvrnitve jeklenega nosilca [44].

V tem računskem primeru predstavimo učinkovitost razvitega računskega postopka za analizo sovprednih nosilcev iz jekla in betona z upoštevanjem zdrsa med sloji. Večino pozornosti namenimo računu togosti, nosilnosti in duktilnosti sovprednih nosilcev. Poudarek je prevsem na analizi nosilnosti sovprednih nosilcev in sicer za primere, da je ta dosežena kot mejna nosilnost prečnega prereza. Mejne nosilnosti sovprednih nosilcev, ki so posledica lokalnega uklona oziroma bočne zvrnitve jeklenega nosilca, z razvitim računskim modelom še ne moremo analizirati, zato niso predmet analize.

Učinkovitost računskega postopka smo ocenili predvsem s primerjavo med izračunanimi in izmerjenimi rezultati značilnih količin sovprežnih nosilcev. Tako smo analizirali več sovprežnih nosilcev, za katere že obstajajo primerljive in v literaturi objavljene numerične analize [32, 89], pa tudi eksperimentalni rezultati [1, 5]. Zaradi večje preglednosti in tudi zaradi skladnosti s primeri v literaturi označimo vsak analizirani sovprežni nosilec s posebno oznako. Prostoležeči sovprežni nosilec označimo s PI4, kontinuirni nosilec prek dveh polj z nesimetrično obtežbo s CTB1 ter simetrično obtežen kontinuirni nosilec prek dveh polj s CTB3. Glede na numerične izkušnje ter glede na eksperimentalne rezultate, ki jasno kažejo, da največji vertikalni pomiki sovprežnih nosilcev ob porušitvi ne presegajo 4‰ dolžine razpona, analiziramo vse sovprežne nosilce z geometrijsko linearno teorijo kompozitnih nosilcev. Pri tem v analizi vseh treh sovprežnih nosilcev upoštevamo po obliki enake materialno nelinearne konstitucijske modele jekla, betona in stika, ki jih prikazujemo na sliki 4.58. Za jeklo in mehko armaturo betonskega podprezeza uporabimo antisimetričen trilinearen konstitucijski model (slika 4.58(a)), materialni model stika med slojema je v skladu s študijami Ollgaard s sodelavci [59] (slika 4.58(b)), materialni model betona pa je povzet po Desayiju & Khrishnanu [24] (slika 4.58(c)), ki ga razširimo tudi v natezni del konstitucijskega diagrama, kot priporoča Bratina [13].



Slika 4.58: Izbrani materialni modeli za: (a) jeklo in mehko armaturo betonskega podprezeza, (b) stik med slojema, (c) beton.

Materialne parametre jekla, mehke armature, betona in stika med sloji so avtorji Abdel Aziz [1] in Ansourian [5] pridobili z vzporednimi preiskavami materiala in stika. Za obravnavane sovprežne nosilce smo vrednosti materialnih parametrov, ki smo jih uporabili v numerični analizi, zbrali v preglednicah 4.7, 4.8 in 4.9.

*Preglednica 4.7:* Materialni parametri za betonski del sovprežnega nosilca

	$f_{cm}$ [kN/cm <sup>2</sup> ]	$D_{max}$	$D_{ct}$	$D_{c1}$	$D_{cu}$
PI4	3.5	0	0	-0.00225	-0.21
CTB1	3.0	0	0	-0.00225	-0.21
CTB3	4.3	0	0	-0.00225	-0.21

*Preglednica 4.8:* Materialni parametri: za jekleni del sovprežnega nosilca,

$$E_s = 21\,000 \text{ kN/cm}^2, E_{sh} = 0.008 E_s,$$

	$f_y^{pasnica}$	$f_u^{pasnica}$	$f_y^{stojina}$	$f_u^{stojina}$	$f_y^{armatura}$	$f_u^{armatura}$	$D_{sh}$
PI4	24.5*	36.1*	26.0*	37.2*	37.0*	37.5*	18 $D_{y1}$
CTB1	27.7*	42.1*	34.0*	44.0*	43.0*	53.3*	0.012
CTB3	22.0*	39.9*	23.5*	41.1*	43.0*	53.3*	0.017

\*enote v kN/cm<sup>2</sup>

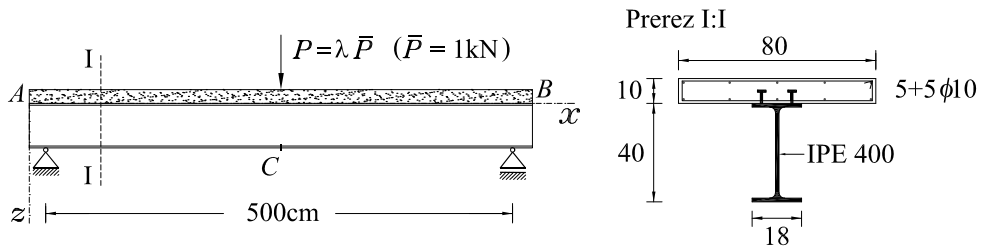
*Preglednica 4.9:* Materialni parametri stika med slojema sovprežnega nosilca

	št. moznikov	$\alpha$	$\beta$ [cm <sup>-1</sup> ]	$q_{max}$ [kN/cm]
PI4	18	0.8	7	4.68
CTB1	66	0.558	10	6.53
CTB3	84	0.558	10	9.94

Za povezavo betonskega in jeklenega podprereza so uporabljeni klasični mozniki tipa Nelson premera  $\phi$  19 mm, ki so privarjeni na zgornjo pasnico jeklenega nosilca. Mozniki so enakomerno razporejeni vzdolž stika podprerezov.

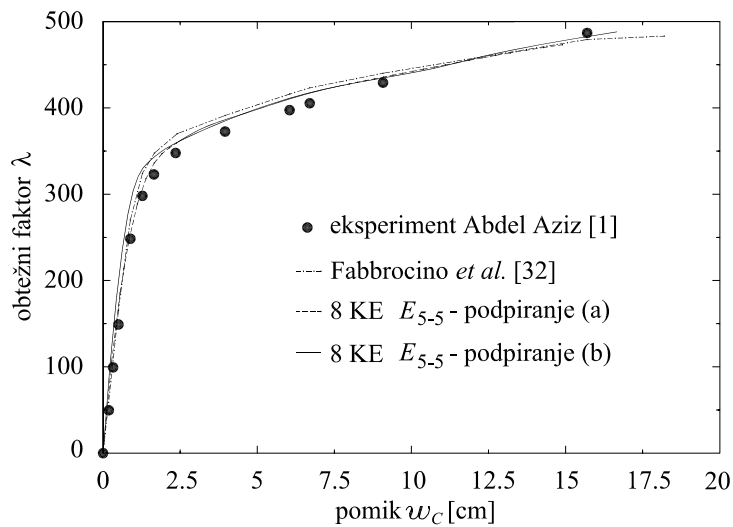
### Prostoležeči sovprežni nosilec PI4

Najprej analiziramo natančnost deformacijskih končnih elementov v analizi kompozitnih nosilcev na primeru prostoležečega sovprežnega nosilca. Tega je eksperimentalno preiskal Abdel Aziz [1] v sklopu svoje doktorske disertacije, numerično pa ga je analiziral Fabbrocino s sodelavci [32]. Geometrijske podatke, podpiranje ter podatke o obtežbi prostoležečega sovprežnega nosilca prikazujemo na sliki 4.59.



Slika 4.59: Geometrijski podatki, podpiranje ter podatki o obtežbi prostoležečega sovprežnega nosilca PI4.

Ker niti Abdel Aziz [1] niti Fabbrocino s sodelavci [32] niso eksplicitno definirali podpiranja prostoležečega sovprežnega nosilca, smo analizirali nosilnost sovprežnega nosilca za dve najbolj verjetni obliki podpiranja in sicer: (a) leva podpora je vrtljiva in nepomična, desna vrtljiva in pomična; (b) obe podpori sta vrtljivi in nepomični. Z numeričnim eksperimentiranjem smo ugotovili, da se rezultati stabilizirajo, ko sovprežni nosilec modeliramo z osmimi končnimi elementi tipa  $E_{5-5}$ . Primerjavo med eksperimentalnimi in numeričnimi obtežno-deformacijskimi krivuljami za navpični pomik na sredini nosilca  $w_C$  prikazuje slika 4.60.



Slika 4.60: Primerjava obtežno-deformacijskih krivulj sovprežnega nosilca PI4 za vertikalni pomik na sredini razpona  $w_C$ .

Na sliki 4.60 opazimo odlično ujemanje med vsemi izračunanimi in izmerjeno obtežno-deformacijsko krivuljo. Do manjših odstopanj prihaja v bližini mejne obtežbe sovprežnega nosilca. Zanimivo je dejstvo, da so rezultati naše numerične analize dobro primerljivi z eksperimentalnimi rezultati ne glede na uporabljen način podpiranja. Eksperimentalno izmerjena mejna oziroma kritična obtežba  $P_{cr}^{eksp}$  znaša 490 kN, pripadajoči vertikalni pomik v točki  $C$ ,  $w_{C,cr}^{eksp}$ , pa 15.7 cm. Primerjava med izračunanimi in eksperimentalno izmerjenimi vrednostmi kritične sile  $P_{cr}$  in pripadajočega pomika na sredini nosilca  $w_{C,cr}$  je prikazana v preglednici 4.10. Kot smo že povedali, je obravnavani nosilec analiziral tudi Fabbrocino s sodelavci [32]. Mejno oziroma kritično silo sovprežnega nosilca  $P_{cr}$ , ki so jo izračunali z diferenčno metodo, so izračunali zelo natančno, nekoliko večje pa je odstopanje za pripadajoči mejni pomik sredine razpona  $w_{C,cr}$ , ki je 15.9‰. S predstavljenimi deformacijskimi končnimi elementi in načinom podpiranja (a) izračunamo mejno obtežbo približno na 3‰ natančno, z načinom (b) pa praktično povsem natančno, saj je napaka le 5‰. Neglede na podpiranje pa je napaka pri izračunu mejnega oziroma kritičnega pomika sredine razpona  $w_{C,cr}$  enaka približno 5‰. V primeru podpiranja (a) jo podcenimo, v primeru (b) pa precenimo.

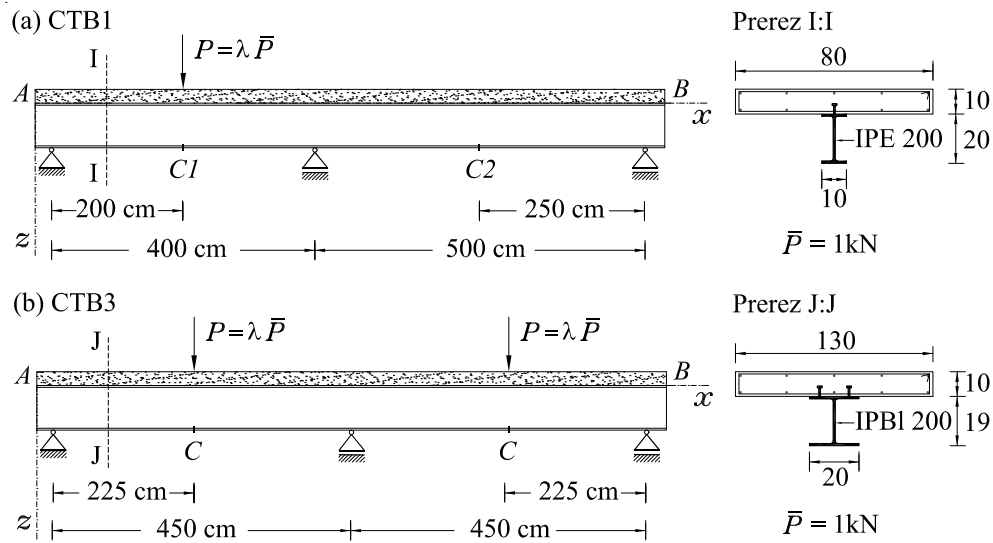
*Preglednica 4.10:* Primerjava izračunanih in izmerjenih vrednosti mejne obtežbe  $P_{cr}$  in pripadajočega pomika na sredini razpona  $w_{C,cr}$  za sovprežni nosilec z oznako PI4.

	$P_{cr}$ [kN]	$P_{cr}/P_{cr}^{eksp}$	$w_{C,cr}$ [cm]	$w_{C,cr}/w_{C,cr}^{eksp}$
Fabbrocino <i>et al.</i> [32]	488	0.996	18.20	1.159
8 $E_{5-5}$ - podpiranje (a)	476.8	0.973	14.93	0.951
8 $E_{5-5}$ - podpiranje (b)	492.5	1.005	16.57	1.055

Opozoriti moramo tudi na dobro ujemanje med eksperimentalno in numerično obliko porušitve prostoležečega sovprežnega nosilca. V okviru opravljene numerične analize zaznamo ob povečevanju obtežbe t.i. pojav mehčanja betonskega podprereza na mestu vnosa točkovne sile. To pomeni, da je mejna nosilnost za oba načina podpiranja posledica presežene tlačne trdnosti betonske plošče in velikih plastičnih deformacij jeklenega nosilca pod točkovno obtežbo.

### Simetrično in nesimetrično obremenjena sovprežna kontinuirna nosilca CTB1 in CTB3

V nadaljevanju prikažemo primernost in natančnost predstavljenih deformacijskih končnih elementov za analizo nosilnosti sovprežnih nosilcev na simetrično in nesimetrično obteženih kontinuirnih nosilcih preko dveh polj. Kontinuirna nosilca je eksperimentalno analiziral Ansourian [5], numerično pa Zona [89]. Od šestih eksperimentalnih raziskav nosilnosti kontinuirnih sovprežnih nosilcev (CTB1–CTB6), ki jih je opravil Ansourian [5], v tem računskem primeru analiziramo le dva – CTB1 in CTB3. Kontinuirni sovprežni nosilec z oznako CTB1 ima razpona različnih dimenzij in je obtežen nesimetrično, kontinuirni nosilec z oznako CTB3 pa ima razpona enakih dimenzij in je obtežen simetrično. Geometrijske podatke, podpiranje ter podatke o obtežbi za oba nosilca prikazuje slika 4.61. Zaradi preglednosti podajamo armaturo obeh prečnih prereзов betonskih plošč ločeno v preglednici 4.11.



Slika 4.61: Geometrijski podatki, podpiranje ter podatki o obtežbi kontinuirnih sovprežnih nosilcev CTB1 in CTB3.

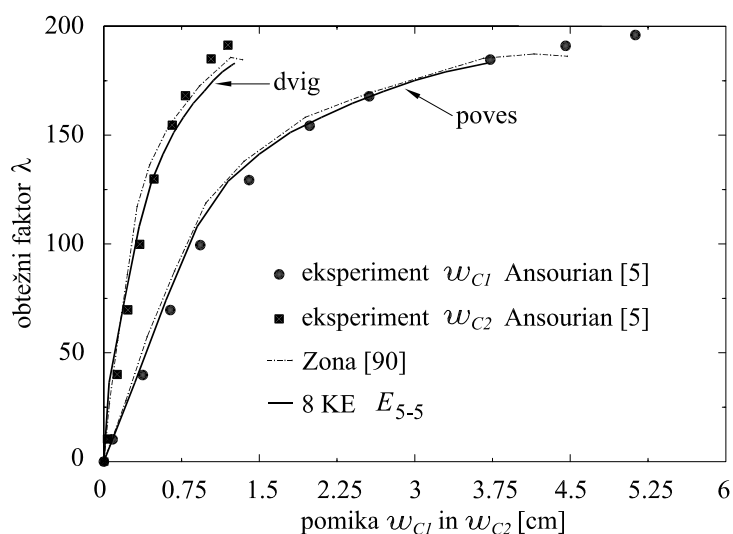
Preglednica 4.11: Prerez mehke armature betonskih plošč kontinuirnih sovprežnih nosilcev CTB1 in CTB3.

	$A_{zg}^{\text{polje}} [\text{cm}^2]$	$A_{sp}^{\text{polje}} [\text{cm}^2]$	$A_{zg}^{\text{podpora}} [\text{cm}^2]$	$A_{sp}^{\text{podpora}} [\text{cm}^2]$
CTB1	0	1.6	8.0	3.16
CTB3	3.6	1.6	12.3	4.7

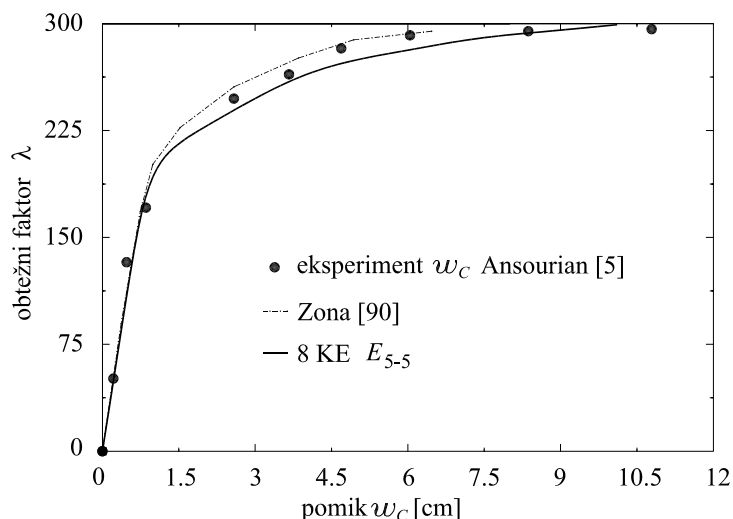
Na slikah 4.62 in 4.63 je prikazana primerjava med eksperimentalnimi rezultati Ansouriana [5], numeričnimi rezultati Zone [89] in našimi numeričnimi obtežno-deformacijskimi krivuljami. V primeru kontinuirnega sovprežnega nosilca CTB1 prikazujemo primerjavo vertikalnega pomika levega  $w_{C1}$  in desnega polja  $w_{C2}$  (slika 4.62), v primeru nosilca CTB3 pa vertikalnega pomika točke  $C$  (slika 4.63). Za določitev obtežno-deformacijskih krivulj smo uporabili osem končnih elementov tipa  $E_{5-5}$ , kar je hkrati predstavljalo najmanjše možno število končnih elementov za ustrezno modeliranje poteka armature betonske plošče. Z gostejšo mrežo končnih elementov nismo zaznali bistvenih sprememb rezultatov. Zona [89], katerega rezultate podajamo kot primerjavo, je izračunal obtežno-deformacijske krivulje s končnimi elementi, ki so zasnovani na pomikih in ugotovil, da je mejna nosilnost sovprežnega nosilca odvisna od števila končnih elementov, in da njena velikost z večanjem števila končnih elementov ne konvergira enakomerno.

Podobno kot v primeru prostoležečega slojevitega nosilca, tudi za oba primera sovprežnih kontinuirnih nosilcev, opazimo odlično ujemanje med numeričnimi in eksperimentalnimi obtežno-deformacijskimi krivuljami vse do porušitve. Pri kontinuirnem sovprežnem nosilcu CTB1 zasledimo poleg povosov levega polja  $w_{C1}$  tudi negativne vertikalne pomike oziroma dvige desnega polja  $w_{C2}$  (slika 4.62). Manjša odstopanja eksperimentalnih in numeričnih rezultatov zasledimo le v bližini mejne obtežbe (preglednica 4.12).





Slika 4.62: Primerjava obtežno-deformacijskih krivulj vertikalnega pomika levega polja  $w_{C1}$  in vertikalnega pomika desnega polja  $w_{C2}$  sovprežnega nosilca CTB1.



Slika 4.63: Primerjava obtežno-deformacijskih krivulj vertikalnega pomika sredine polja  $w_C$  sovprežnega nosilca CTB3.

Eksperimentalno ugotovljen način porušitve nosilca CTB1 je posledica lokalizacije deformacij v betonski plošči in velikih plastičnih deformacij jeklenega nosilca pod točkovno otežbo. Povsem enako porušitev ugotovimo tudi z računskim postopkom. Za nosilec CTB3 pa so z eksperimentom najprej zaznali lokalni uklon tlačene pasnice jeklenega nosilca nad podporo, v nadaljevanju pa lokalizacijo deformacij v betonski plošči in velike plastične deformacije jeklenega nosilca pod točkovno silo. Z računom smo zaznali le lokalizacijo deformacij pod točkovno silo. Lokalnega uklona jeklenega nosilca oziroma bočne zvrnitve pa z ravninskim linijskim končnim elementom, kot je dobro znano, ne moremo zaznati.

Preglednica 4.12: Primerjava vrednosti mejne obtežbe  $P_{cr}$  in pripadajočih pomikov  $w_{C1,cr}$ ,  $w_{C2,cr}$  ter  $w_{C,cr}$  za sovprežna nosilca z oznakama CTB1 in CTB3.

	$P_{cr}^1$ [kN]	$w_{C1,cr}^1$ [cm]	$w_{C2,cr}^1$ [cm]	$P_{cr}^2$ [kN]	$w_{C,cr}^2$ [cm]
Ansourian [5]	198	5.2	-1.3	299	1.1
8 KE $E_{5-5}$	184	3.8	-1.3	299.5	1.0

1: nosilec CTB1; 2: nosilec CTB3

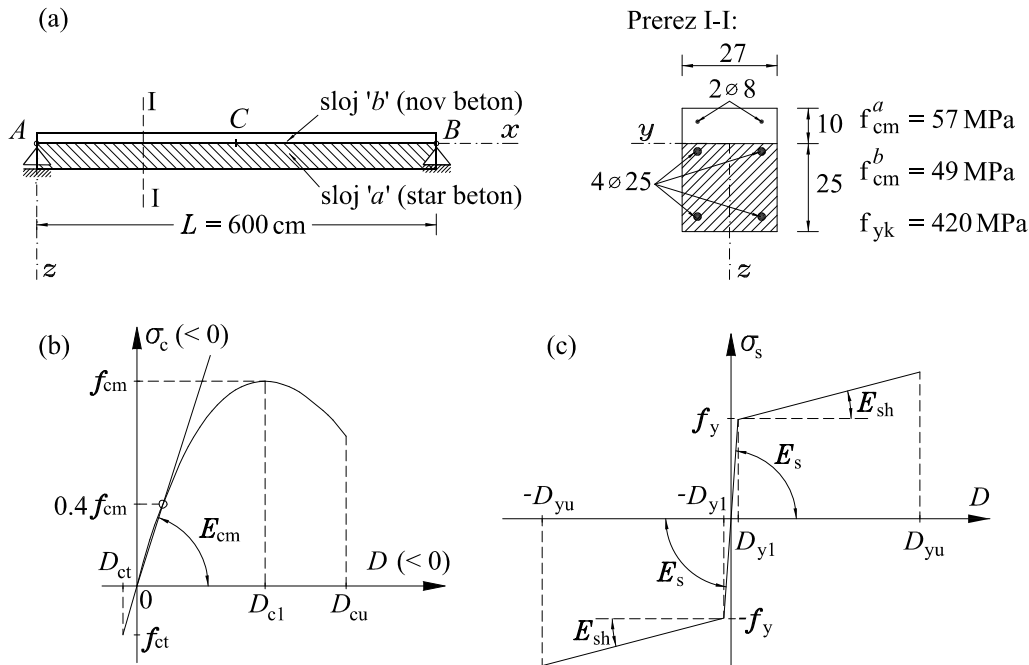
Na osnovi odličnega ujemanja med eksperimentalnimi in numeričnimi rezultati tako za velikost mejne obtežbe kot tudi za način porušitve prostoležečega in kontinuirnih sovprežnih nosilcev sklepamo, da so predstavljeni deformacijski končni elementi primerni za analizo nosilnosti sovprežnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med slojema vse do porušitve.

#### 4.7 DIFERENČNO KRČENJE DVOSLOJNEGA ARMIRANOBETONSKEGA NOSILCA

V zadnjih letih je v gradbeni praksi vse več primerov sanacij armiranobetonskih premostitvenih konstrukcij. Glavni vzroki za poškodbe teh konstrukcij so prevsem pretirano soljenje voziščnih plošč, ponavljajoči se ciklusi zmrzovanja in odtajanja površinskih voda zaradi neustrezno urejenega odvodnjavanja, neprimerno izveden zaščitni sloj armature ter številni drugi. Pri standardnem postopku sanacije armiranobetonskih konstrukcij običajno odstranimo sloj poškodovanega betona in ga nadomestimo z novim. Pri tem se moramo zavedati, da ima sloj novega betona bistveno drugačne reološke lastnosti kot obstoječa betonska podlaga. Zato moramo pri dimenzioniranju novih dobetoniranih slojev betona ter stika med obstoječo betonsko podlago in novim betonom nujno upoštevati t.i. pojav diferenčnega krčenja betona. Ta reološki pojav povzroči dodatne natezne napetosti v novem dobetoniranem sloju betona ter dodatne tlačne napetosti v obstoječem sloju betona.

V zadnjem računskem primeru analiziramo učinkovitost in natančnost predstavljenega računskega postopka v nelinearni analizi kompozitnih nosilcev pri zahtevnem problemu diferenčnega krčenja dvoslojnih armiranobetonskih nosilcev. Tudi v tem primeru najprej analiziramo učinkovitost postopka s primerjavo med eksperimentalnimi in izračunanimi rezultati. Eksperimentalno analizo vpliva diferenčnega krčenja na napetostno in deformacijsko stanje dvoslojnega armiranobetonskega nosilca je opravil Silfwerbrand [81]. Spodnji sloj preiskanega kompozitnega nosilca je predstavljal dve leti star armiranobetonski pilot. Na zgornji strani pilota je s pnevmatskim kladivom odstranil 20 mm betona ter izoblikovali grobo stično površino. Po osemindesetih urah vlaženja je dobetoniral nov 100 mm debel sloj betona. Sloj novega betona je sedem dni negoval z vzdrževanjem konstantne vlažnosti okolice nosilca in s tem preprečil diferenčno krčenje novega in starega betona. Nosilec je bil ves čas eksperimenta položen na zračne blazine, ki so zagotavljale podporo kompozitnega nosilca. Kompozitni nosilec se je lahko deformiral prosto, obtežba lastne teže se je prenesla direktno v podporne zračne blazine in s tem ni povzročala dodatnih napetosti v betonskih podprezjih. Na ta način je izoliral pojav diferenčnega krčenja različno starih betonskih slojev. Nato je štirinajst mesecev neprekinjeno meril specifične defor-

macije in pomike ter spremljal morebitni nastanek razpok. Geometrijske in materialne podatke armiranobetonskega kompozitnega nosilca prikazuje slika 4.64.



Slika 4.64: (a) Geometrijski in materialni podatki armiranobetonskega kompozitnega nosilca. Konstitucijski modeli za: (b) beton in (c) mehko armaturo.

Poleg eksperimentalnih rezultatov je Silfwerbrand v članku [81] izpeljal tudi točne rešitve obnašanja kompozitnega nosilca zaradi diferenčnega krčenja dveh podajno povezanih betonskih slojev. Pri tem je upošteval naslednje predpostavke:

- krčenje zgornjega sloja kompozitnega nosilca je funkcija časa,  $D_{sh}(t)$ ,
- krčenje obstoječega betonskega sloja je zaradi njegove starosti zanemarljivo,
- kompozitni nosilec je modeliran z geometrijsko linearno teorijo ravninskih nosilcev,
- konstitucijska modela betona obeh slojev sta linearno elastična,
- za oba sloja kompozitnega nosilca velja Bernoullijeva predpostavka o ravnih prečnih prerezih,
- spodnji in zgornji sloj kompozitnega nosilca sta ves čas v kontaktu, kar pomeni, da razslojevanje ni možno,
- predpostavljen je linearen konstitucijski zakon stika:

$$\tau^a(x) = \widetilde{K} \Delta^a(x) = \frac{K}{b} \Delta^a(x),$$

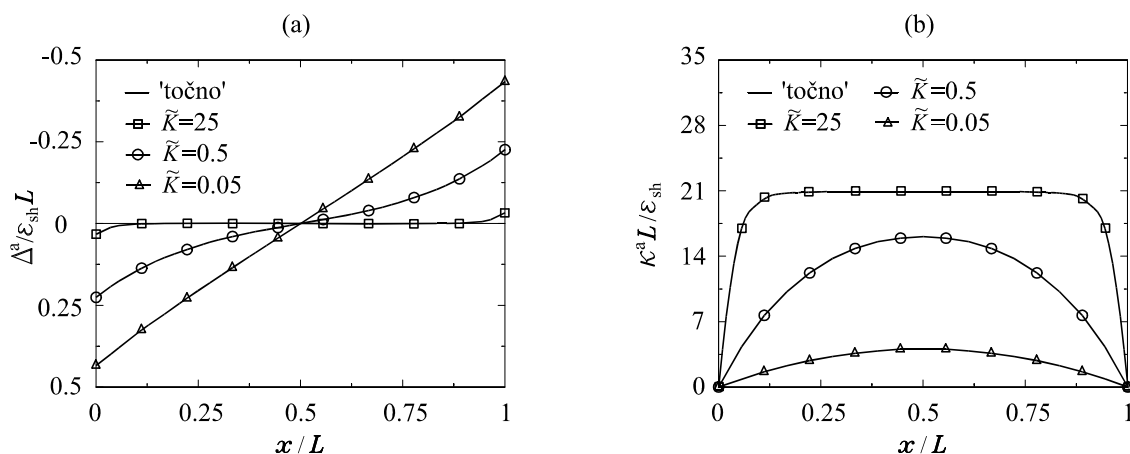
kjer je  $\widetilde{K}$  s širino stika reducirana togost stika.

Učinkovitost in natančnost predstavljenega računskega postopka za analizo kompozitnih nosilcev analiziramo:

- s primerjavo med Silfwerbrandovimi ‘točnimi’ in numerično izračunanimi značilnimi količinami obravnavanega kompozitnega nosilca,
- s primerjavo med izmerjenimi in numerično izračunanimi značilnimi količinami obravnavanega kompozitnega nosilca,
- s parametrično analizo vpliva togosti stika na časovni odziv dvoslojnega armiranobetonskega nosilca.

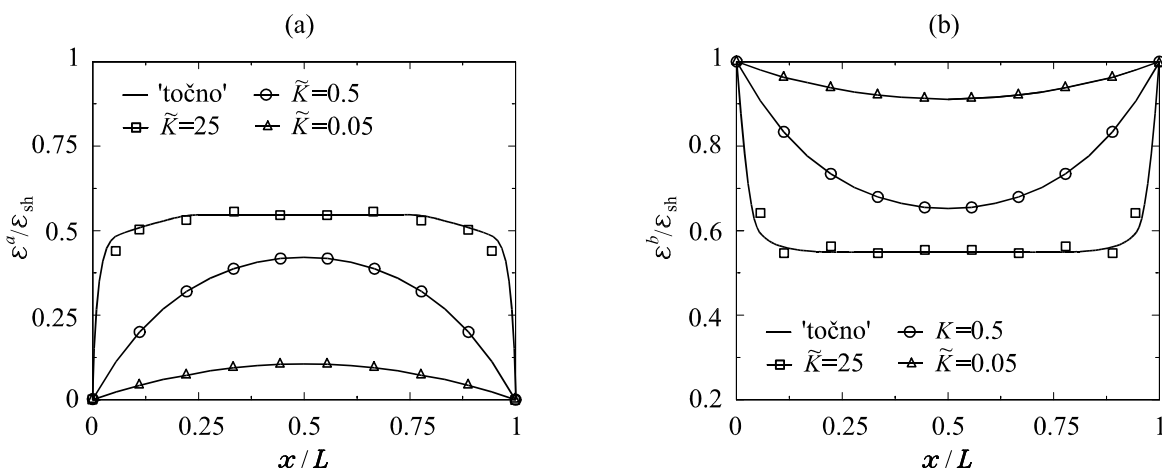
### Primerjava med Silfwerbrandovimi ‘točnimi’ in numeričnimi rezultati

Najprej prikažemo natančnost razvitih deformacijskih končnih elementov za analizo kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med sloji s primerjavo med Silfwerbrandovimi ‘točnimi’ in numeričnimi rezultati. V numerični analizi smo dvoslojni armiranobetonski nosilec modelirali kot prostoležeči nosilec. Vpliv mehke armature in lastne teže nosilca smo v analizi zanemarili. Na sliki 4.65 primerjamo potek zdrsov  $\Delta^a$  in pseudoukrivljenosti  $\kappa^a$ , na sliki 4.66 pa potek membranskih deformacij spodnjega sloja  $\varepsilon^a$  ter zgornjega sloja  $\varepsilon^b$  po referenčni osi kompozitnega nosilca za različne vrednosti parametra  $\tilde{K}$ .



Slika 4.65: Potek normiranih (a) zamikov  $\Delta^a$  in (b) pseudoukrivljenosti  $\kappa^a$  po referenčni osi kompozitnega nosilca. Nosilec smo analizirali z dvema končnima elementoma tipa  $E_{6-6}$ .

Na slikah 4.65 in 4.66 vidimo, da se rezultati numerične analize odlično ujemajo s točnimi rezultati, kot jih podaja Silfwerbrand [81]. Opozorimo tudi na veliko natančnost razvitih končnih elementov za nelinearno analizo kompozitnih nosilcev, saj smo prostoležeči kompozitni nosilec analizirali samo z dvema končnima elementoma tipa  $E_{6-6}$ .



Slika 4.66: Potek normiranih (a) membranskih deformacij spodnjega sloja  $\varepsilon^a$  in (b) membranskih deformacij zgornjega sloja  $\varepsilon^b$  po referenčni osi kompozitnega nosilca. Nosilec smo analizirali z dvema končnima elementoma tipa  $E_{6-6}$ .

### Primerjava med izmerjenimi in numeričnimi rezultati

V nadaljevanju smo analizirali učinkovitost in natančnost predstavljenega računskega postopka za nelinearno analizo kompozitnih nosilcev s primerjavo z eksperimentalnimi rezultati. Znano je, da krčenje in lezenje betona pomembno vplivata na napetostno in deformacijsko stanje ojačanih betonskih konstrukcij. Običajno je vpliv lezenja betona ugoden glede na vpliv krčenja, saj zmanjšuje napetosti, ki nastopijo kot posledica diferenčnega krčenja različno starih betonskih slojev. Ker je Silfwerbrand [81] analiziral predvsem vpliv diferenčnega krčenja različno starih betonskih slojev na napetostno in deformacijsko stanje kompozitnega nosilca, je vpliv lezenja betona upošteval relativno preprosto. Upošteval ga je z reduciranim elastičnim modulom betonskih slojev:

$$E_c(t) = \frac{E_{c,28}}{1 + \varphi(t, t_0)}, \quad (4.2)$$

kjer je  $E_c(t)$  trenutni elastični modul betona,  $E_{c,28}$  elastični modul 28 dni starega betona in  $\varphi(t, t_0)$  koeficient lezenja. Koeficient lezenja je Silfwerbrand [81] izmeril na vzporednih preiskavah. Poudarimo pa, da je z upoštevanjem lezenja betona z enačbo (4.2), Silfwerbrand v analizi dejansko zanemaril vpliv časovnega spreminjanja napetosti v različno starih betonskih slojih na obnašanje kompozitnega nosilca.

V numerični analizi upoštevamo vpliv krčenja in lezenja betona skladno z Evropskim standardom EuroCode2 [29] in s priporočili Silfwerbranda [81]. Za določitev časovnega spreminjanja geometrijske deformacije  $D(t)$ , EuroCode2 [29] predpisuje izraz:

$$D(t) = \sigma_c(t_0) \left( \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{c,28}} \right) + \sum_i \Delta\sigma_c(t_i) \left( \frac{1}{E_c(t_i)} + \frac{\varphi(t, t_i)}{E_{c,28}} \right) + D_{sh}(t, t_s), \quad (4.3)$$

kjer so:  $t_0$  starost betona ob nastopu obtežbe,  $t_s$  čas negovanja sveže betonske mešanice,  $\sigma_c(t_0)$  napetost v betonu v času  $t_0$ ,  $\Delta\sigma_c(t_i)$  prirastki napetosti v časovnem intervalu  $[t_{i-1}, t_i]$ ,  $\varphi(t, t_0)$

koeficient lezenja,  $E_c(t_0)$  in  $E_{c,28}$  sta elastična modula betona v času  $t_0$  oziroma pri starosti 28 dni in  $D_{sh}(t, t_s)$  specifična deformacija krčenja betona. Na podoben način kot  $E_c(t_0)$  in  $\varphi(t, t_0)$  pri  $t_0$  definiramo tudi  $E_c(t_i)$  in  $\varphi(t, t_i)$  pri  $t_i$ . Za vsakdanjo analizo konstrukcij pa EuroCode2 [29] dopušča tudi poenostavljen izraz za določitev geometrijske deformacije z uporabo t.i. *koeficienta staranja*  $\chi$ , ki je odvisen predvsem od časovnega spreminjanja napetosti v betonski konstrukciji:

$$D(t) = \sigma_c(t_0) \left( \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{c,28}} \right) + \Delta\sigma_c(t_0) \left( \frac{1}{E_c(t_0)} + \chi \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{c,28}} \right) + D_{sh}(t, t_s). \quad (4.4)$$

Ghali in Favre [40] ugotovita, da se vrednost koeficienta staranja pri betonskih konstrukcijah spreminja med 0.6 in 0.9. Evropski standard EuroCode2 [29] pa za koeficient staranja betona priporoča vrednosti med 0.75 in 0.85.

Ker se rezultati Silfwerbrandove numerične analize in eksperimentalni rezultati dobro ujemajo [81], tudi v naši numerični analizi predpostavimo, da časovno spreminjanje napetosti v različno starih betonskih slojih nima pomembnejšega vpliva na obnašanje betonskega kompozitnega nosilca, torej  $\Delta\sigma_c(t) \cong 0$ . Tako se enačba (4.4) dodatno poenostavi in je:

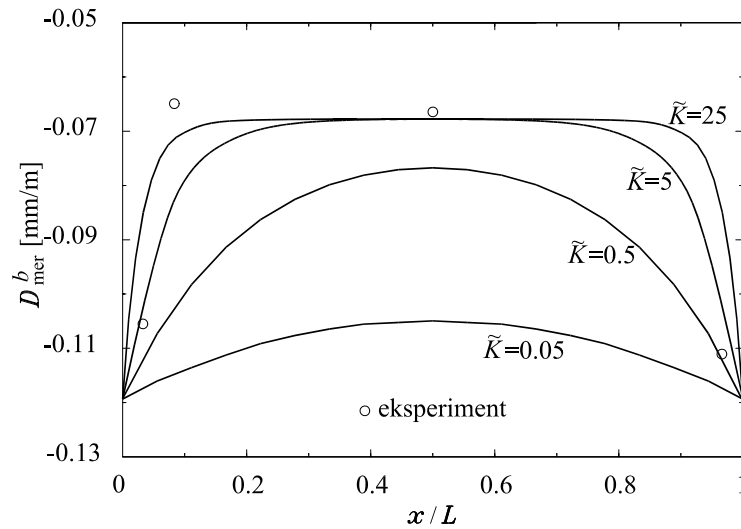
$$D(t) = \sigma_c(t_0) \left( \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{c,28}} \right) + D_{sh}(t, t_s). \quad (4.5)$$

Žal je bil eksperiment izveden v zelo nekonstantnih vremenskih pogojih, saj je bil nosilec med preiskavo shranjen na prostem in zaščiten le pred padavinskimi vplivi. Tako je prihajalo v okolici kompozitnega nosilca do nihanja vlažnosti in temperature. Ker modela za krčenje in lezenje betona po EC 2 [29] zahtevata konstantno vlažnost in temperaturo okolice, je tako izvedena meritev bistveno otežila dobro kalibracijo reoloških modelov. Dodatni problem pri kalibraciji reoloških modelov je predstavljal tudi tip cementa, ki se je uporabljal za izdelavo preiskušancev. Teh podatkov Silfwerbrand [81] ni podal. Tako smo v računskem modelu izbrali 75 % relativno vlažnost, normalno konstantno temperaturo okolice in hitro vezoči cement. Konstitucijska modela za armaturo in beton smo izbrali skladno z EC 2 (slika 4.64). Glede na dostopne podatke so izbrani materialni parametri za sloj *a* naslednji:  $f_{cm}^a = 57$  MPa,  $E_{cm}^a = 36800$  MPa,  $D_{c1}^a = -2.59$  ‰,  $D_{cu}^a = -3.50$  ‰,  $D_{ct}^a = 0.1$  ‰; za sloj *b* pa:  $f_{cm}^b = 49$  MPa,  $E_{cm}^b = 35200$  MPa,  $D_{c1}^b = -2.51$  ‰,  $D_{cu}^b = -3.50$  ‰,  $D_{ct}^b = 0.1$  ‰. Materialni parametri za mehko armaturo so:  $E_s = 210\,000$  MPa,  $E_p = 0$  MPa,  $D_{y1} = 2$  ‰ in  $D_{yu} = 10$  ‰. Za konstitucijski zakon stika smo izbrali linearno zvezo. Vrednost materialne konstante  $\tilde{K}$  pa smo, podobno kot Silfwerbrand [81], določili s parametrično analizo.

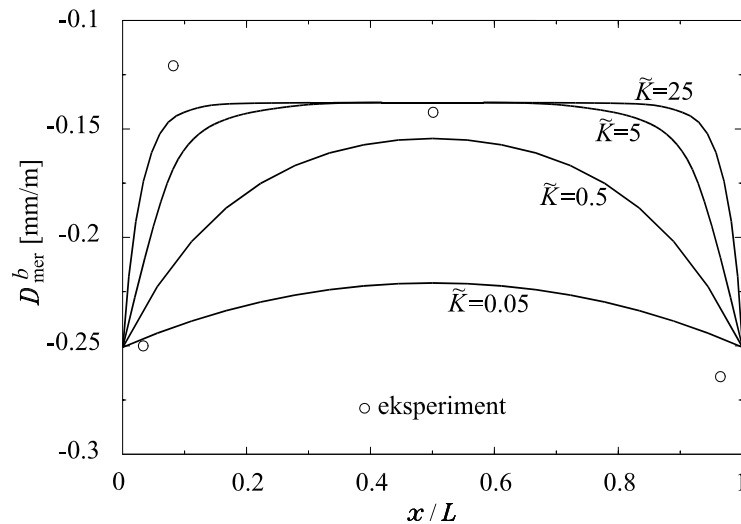
Primerjavo med izmerjenimi in izračunanimi deformacijami  $D_{mer}^b$  za različne vrednosti parametra  $\tilde{K}$  pri času  $t = 55$  dni prikazuje slika 4.67, pri času  $t = 356$  dni pa slika 4.68. Analiza je pokazala, da je povezava med slojema armiranobetonskega nosilca zelo toga. Najboljše ujemanje rezultatov opazimo pri časih  $t = 55$  dni in  $t = 356$  dni za  $\tilde{K} = 25$  kN/cm<sup>3</sup>. Medtem ko na robovih nosilca zasledimo nekaj odstopanj, se rezultati na sredini nosilca praktično povsem ujemajo, tako za čas 55 dni kot tudi za čas 356 dni. Kot navaja Silfwerbrand [81], so ta odstopanja najverjetneje posledica merskih napak in raztrosa materialnih lastnosti betona in armature.

### Parametrična analiza vpliva togosti stika na časovni odziv dvoslojnega armiranobetonskega kompozitnega nosilca

Na koncu računskega primera analiziramo, kako diferenčno krčenje in lezenje slojev kompozitnega nosilca vpliva na časovni odziv napetostnega in deformacijskega stanja dvoslojnega armiranobetonskega prostoležečega nosilca (slika 4.64(a)). V analizi predpostavimo, da kompo-



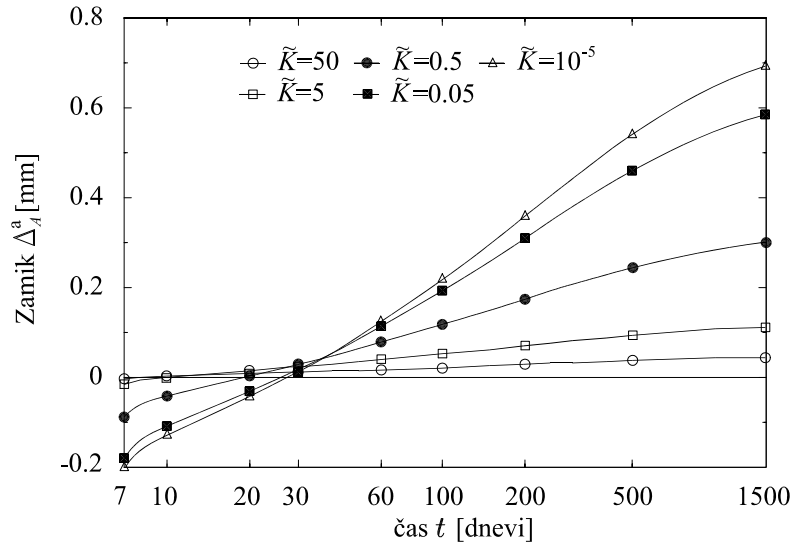
Slika 4.67: Primerjava med izmerjenimi in izračunanimi deformacijami  $D_{\text{mer}}^b$  za različne vrednosti parametra  $\tilde{K}$  pri času  $t = 55$  dni ( $D_{\text{mer}}^b = D^b(z = -2.5 \text{ cm})$ , nosilec smo analizirali s šestimi končnimi elementi tipa  $E_{6-6}$ ).



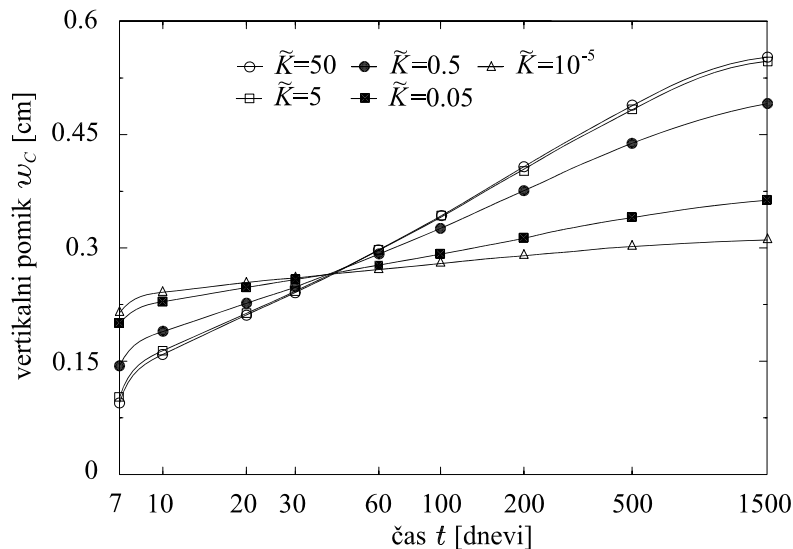
Slika 4.68: Primerjava med izmerjenimi in izračunanimi deformacijami  $D_{\text{mer}}^b$  za različne vrednosti parametra  $\tilde{K}$  pri času  $t = 356$  dni ( $D_{\text{mer}}^b = D^b(z = -2.5 \text{ cm})$ , nosilec smo analizirali s šestimi končnimi elementi tipa  $E_{6-6}$ ).

ziti nosilec z dobetoniranim novim slojem betona negujemo sedem dni, nato pa ga obtežimo z enakomerno linijsko prečno obtežbo. Tudi sedaj, podobno kot Silfwerbrand [81], v analizi privzamemo, da časovno spreminjanje napetosti v različno starih betonskih slojih nima vpliva na obnašanje kompozitnega nosilca. Obravnavamo dva obtežna primera: (i) kompozitni nosilec obtežimo z enakomerno linijsko prečno obtežbo  $p_Z = 2.36 \text{ kN/m}$ , ki predstavlja vpliv lastne teže in (ii) kompozitni nosilec obtežimo z enakomerno linijsko prečno obtežbo  $p_Z = 10 \text{ kN/m}$ ,

ki predstavlja skupen vpliv koristne obtežbe in lastne teže kompozitnega nosilca. Diferenčno krčenje ter lezenje obeh betonskih slojev smo modelirali podobno kot prej in sicer v skladu z EC 2 [29].



Slika 4.69: Vpliv togosti stika na časovni razvoj robnega zamika  $\Delta_A^a$  dvoslojnega armiranobetonskega nosilca. Nosilec smo obtežili z linijsko prečno obtežbo  $p_Z = 2.36$  kN/m in ga analizirali z dvema končnima elementoma tipa  $E_{6-6}$ .



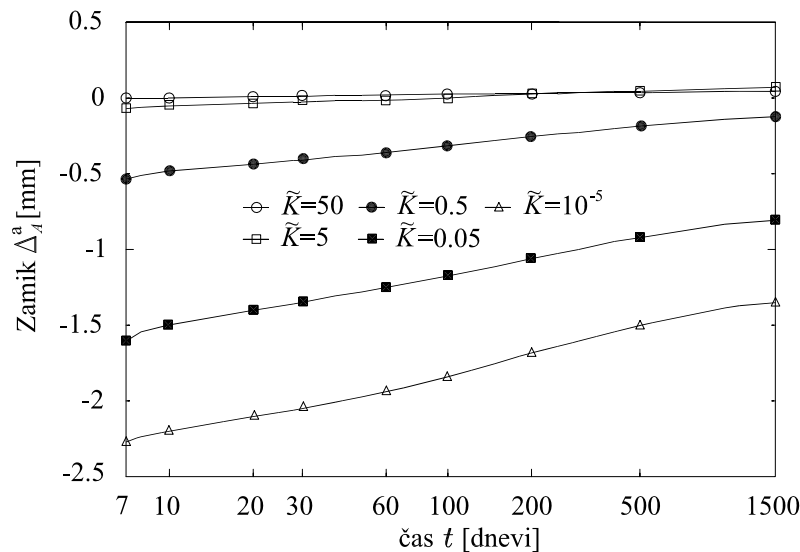
Slika 4.70: Vpliv togosti stika na časovni razvoj vertikalnega pomika sredine razpona  $w_C$  dvoslojnega armiranobetonskega nosilca. Nosilec smo obtežili z linijsko prečno obtežbo  $p_Z = 2.36$  kN/m in ga analizirali z dvema končnima elementoma tipa  $E_{6-6}$ .



Časovno spreminjanje robnega zamika  $\Delta_A^a$  in vertikalnega pomika sredine razpona nosilca  $w_C$  za prvi obtežni primer prikazujeta sliki 4.69 in 4.70. Za predstavitev časovne skale na abscisni osi uporabimo logaritemsko funkcijo z osnovo 10.

Kot smo pričakovali, so izračunani robni zamiki  $\Delta_A^a$  po absolutni vrednosti tem večji, čim bolj podajen je stik. Takoj po obremenitvi se na robu pojavijo negativni zamiki. To pomeni, da se točka  $A$  zgornjega sloja premakne desno, glede na v nedeformirani legi soležno točko spodnjega sloja. Zaradi vplivov diferenčnega krčenja in lezenja betona robni zamiki  $\Delta_A^a$  po približno tridesetih dneh spremenijo predznak. Po času  $t = 1500$  dni se spreminjanje robnih zamikov ustavi. Pri času  $t = 1500$  dni so robni zamiki, ki pripadajo nosilcu s togostjo stika  $\tilde{K} = 10^{-5} \text{ kN/cm}^3$ , skoraj šestnajstkrat večji kot robni zamiki nosilca s togostjo stika  $\tilde{K} = 50 \text{ kN/cm}^3$ .

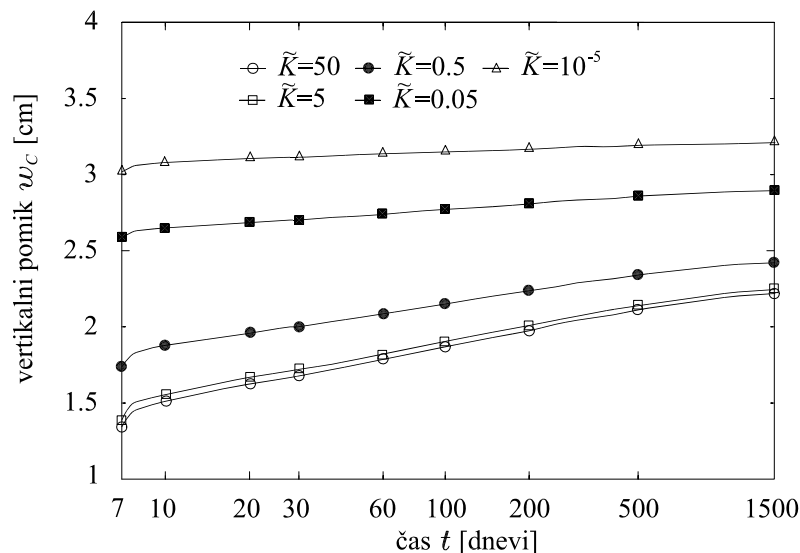
Kot vidimo na sliki 4.70, je časovno spreminjanje vertikalnega pomika  $w_C$  dokaj nenavadno. Običajno pričakujemo, da se s povečevanjem togosti stika kompozitnega nosilca večja tudi njegova togost. Toda to velja v primeru obravnavanega kompozitnega nosilca samo za krajše časovno obdobje tik po obremenitvi. Kasneje so zaradi različno starih betonskih slojev in s tem zaradi zelo velikega vpliva diferenčnega krčenja in lezenja betona vertikalni pomiki sredine razpona kompozitnega nosilca s togostjo stika  $\tilde{K} = 50 \text{ kN/cm}^3$  kar za faktor 1.9 večji od primerljivega pomika kompozitnega nosilca s togostjo stika  $\tilde{K} = 10^{-5} \text{ kN/cm}^3$ . Torej se s togostjo stika povečuje podajnost kompozitnega armiranobetonskega nosilca.



Slika 4.71: Vpliv togosti stika na časovni razvoj robnega zamika  $\Delta_A^a$  dvoslojnega armiranobetonskega nosilca. Nosilec smo obtežili z linijsko prečno obtežbo  $p_Z = 10 \text{ kN/m}$  in ga analizirali z dvema končnima elementoma tipa  $E_{6-6}$ .

Na slikah 4.71 in 4.72 prikazujemo časovni razvoj robnega zamika  $\Delta_A^a$  in vertikalnega pomika  $w_C$  za drugi obtežni primer. V tem primeru ima očitno prevladujoč vpliv na obnašanje slojevitega armiranobetonskega nosilca linijska prečna obtežba  $p_Z = 10 \text{ kN/m}$ . V tem primeru opazimo, da so robni zamiki  $\Delta_A^a$  in vertikalni pomiki  $w_C$  kompozitnega armiranobetonskega nosilca v vseh časovnih intervalih tem večji, čim bolj podajen je stik. Poleg tega je ob obremenitvi robni zamik  $\Delta_A^a$ , neglede na togost stika, negativen. Sčasoma se velikost robnega zamika manjša in

za nosilce z zelo togim stikom postane celo pozitivna. Obnašanje nosilca se umiri pri času  $t = 1500$  dni. Pri tem času je razmerje vertikalnih pomikov sredine razpona  $w_C$  nosilcev s stikoma  $\tilde{K} = 10^{-5} \text{ kN/cm}^3$  in  $\tilde{K} = 50 \text{ kN/cm}^3$  enako 1.4.



Slika 4.72: Vpliv togosti stika na časovni razvoj vertikalnega pomika sredine razpona  $w_C$  dvoslojnega armiranobetonskega nosilca. Nosilec smo obtežili z linijsko prečno obtežbo  $p_Z = 10 \text{ kN/m}$  in ga analizirali z dvema končnima elementoma tipa  $E_{6-6}$ .

Pri dobetoniranju novih slojev betona na obstoječo betonsko podlago je očitno nujno potrebna precejšnja mera pazljivosti. Zaradi neustreznega upoštevanja diferenčnega krčenja in lezenja betonskih slojev se namreč lahko prenovljena armiranobetonska kompozitna konstrukcija obnaša bistveno drugače, kot se obnašajo običajne armiranobetonske konstrukcije.



# 5

---

## Zaključki

V disertaciji smo predstavili računski postopek za statično nelinearno analizo dvoslojnih kompozitnih kontinuirnih ravninskih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med slojema. Predstavljeni računski postopek je zasnovan na materialno in geometrijsko nelinearnem modelu ravninskega nosilca in je zato zelo splošen. Vsak sloj kompozitnega nosilca modeliramo s kinematično točno Reissnerjevo teorijo ravninskih nosilcev. V večini gradbenih konstrukcij je vpliv strižnih deformacij na napetostno in deformacijsko stanje zanemarljiv, zato smo jih v predstavljenem računskem postopku zanemarili. Ker se v splošnem razslojevanje kompozitnih nosilcev pojavi predvsem v fazi rušenja, smo v predstavljenem računskem postopku zanemarili tudi razslojevanje.

Osnovne enačbe kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med slojema smo rešili z metodo končnih elementov. Za analizo kompozitnih nosilcev smo razvili družino novih deformacijskih končnih elementov. Značilnost teh elementov je v tem, da vzdolž referenčne osi kompozitnega nosilca interpoliramo sprecifični spremembi dolžine spodnjega in zgornjega sloja referenčne osi kompozitnega nosilca  $\varepsilon^a$  in  $\varepsilon^b$ , pseudoukrivljenost referenčne osi kompozitnega nosilca  $\kappa^a$  ter zaradi poenostavitve numeričnega algoritma tudi materialno koordinato zgornjega sloja  $x^*$  in normalno komponento linijske kontaktne obtežbe  $q_n^b$ . Posebnost predstavljene družine deformacijskih končnih elementov je prav gotovo interpolacija materialne koordinate  $x^*$ , ki predstavlja tisti delec zgornjega sloja na stiku, ki v deformirani legi solega z delcem spodnjega sloja na stiku z materialno koordinato  $x$ . Sistem posplošenih diskretnih ravnotežnih enačb kompozitne konstrukcije rešimo z Newton-Raphsonovo inkrementno-iteracijsko metodo. Pomembnejši zaključki disertacije so:

- predstavljena družina deformacijskih končnih elementov za nelinearno analizo dvoslojnih kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med slojema je zelo natančna in učinkovita. To potrjujejo številni računski primeri, kjer dosežemo veliko natančnost rezultatov že z uporabo samo nekaj končnih elementov z nizko stopnjo interpolacijskih polinomov ter z nizko stopnjo numerične integracije;
- kljub temu, da pri predstavljeni družini deformacijskih končnih elementov interpoliramo tudi materialno koordinato zgornjega sloja in normalno komponento linijske kontaktne obtežbe, so ti elementi neobčutljivi za vse vrste blokiranj in oscilacij napetosti;

- interpolacija normalne komponente linijske kontaktne obtežbe pa omogoča enostavno posplošitev računskega postopka tudi na analizo kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med slojema, kjer je tangentska komponenta linijske kontaktne obtežbe odvisna tudi od trenja oziroma lepljenja;
- računski primeri so pokazali, da ima geometrijska nelinearnost pri določenih kompozitnih konstrukcijah pomemben vpliv na napetostno in deformacijsko stanje kompozitnih nosilcev. Zato je v splošnem pri analizi kompozitnih nosilcev, ki se uporabljajo v gradbeništvu, ne smemo zanemariti;
- predstavljeni računski postopek za nelinearno analizo kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med slojema se je izkazal kot zelo učinkovit in natančen tudi pri stabilnostni analizi dvoslojnih lesenih nosilcev. To smo dokazali s primerjavo med točnimi in numeričnimi vrednostmi za uklonske sile pri prostoležečem in enostransko vpetem dvoslojnem lesenem nosilcu;
- primerjava med predstavljenim računskim postopkom in računskim postopkom, ki ga za stabilnostno analizo lesenih kontinuirnih kompozitnih nosilcev priporoča Evropski standard za lesene konstrukcije EC 5 [31], je pokazala, da je računski postopek po EC 5 zelo konservativen;
- z računskimi primeri smo pokazali, da je predstavljeni računski postopek za analizo kompozitnih linijskih nosilcev primeren tudi za analizo nosilnosti in duktilnosti sovprežnih kontinuirnih nosilcev iz jekla in betona;
- s predstavljenim računskim postopkom za analizo kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med slojema pa lahko analiziramo tudi tako zahteven problem, kot je diferenčno krčenje in lezenje saniranega dvoslojnega armiranobetonskega nosilca. Podrobna parametrična analiza obravnavanega kompozitnega nosilca je pokazala, da vpliv krčenja in lezenja betona bistveno in tudi nepričakovano vpliva na časovno spreminjanje togosti kompozitnih nosilcev. Tako so lahko pomiki kompozitnega nosilca po določenem času večji pri kompozitnih nosilcih z bolj togim stikom kot pri kompozitnih nosilcih s podajnejšimi stiki.

# *Dodatek A*

## *Geometrijsko linearna teorija kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med slojema*

### **A.1 UVOD**

V strokovni literaturi zasledimo različne računske postopke za analizo kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med slojema. Večina jih je zasnovana na *geometrijsko linearni teoriji* kompozitnih nosilcev, ki jo pogosto imenujemo tudi *teorija prvega reda* [32, 33, 39]. Znano je, da izpeljemo posplošene ravnotežne enačbe geometrijsko linearne teorije ravninskih nosilcev z linearizacijo geometrijsko točnih enačb v začetni nedeformirani legi nosilca [9]. Ker je tudi formulacija računskega postopka za analizo dvoslojnih kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med slojema z geometrijsko linearnimi deformacijskimi končnimi elementi nova, jo v nadaljevanju na kratko predstavimo.

### **A.2 OSNOVNE ENAČBE KOMPOZITNIH NOSILCEV**

Deformiranje dvoslojnega kompozitnega nosilca, začetne dolžine  $L$  in prečnih podprerezov  $A^a$  in  $A^b$ , opišemo v ravnini  $(X, Z)$  evklidskega prostora, s prostorskim desnosučnim koordinatnim sistemom  $(X, Y, Z)$  in pripadajočimi baznimi vektorji  $\mathbf{E}_X$ ,  $\mathbf{E}_Z$  in  $\mathbf{E}_Y = \mathbf{E}_Z \times \mathbf{E}_X$ . Za referenčno os obeh slojev kompozitnega nosilca predpostavimo krivuljo, ki je določena s presečiščem simetrijske ravnine  $(X, Z)$  in stične ravnine slojev kompozitnega nosilca. To krivuljo v nadaljevanju imenujemo referenčna os kompozitnega nosilca. Predpostavimo, da je začetna, nedeformirana lega kompozitnega nosilca ravna, in da nedeformirana referenčna os kompozitnega nosilca sovpada s



Kot prikazuje slika A.1, je deformirana lega poljubnega delca referenčne osi sloja  $a$  oziroma sloja  $b$  kompozitnega nosilca določena s krajevnima vektorjema:

$$\mathbf{R}^a(x) = x\mathbf{E}_X + \mathbf{u}^a(x) = (x + u^a(x))\mathbf{E}_X + w^a(x)\mathbf{E}_Z, \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{R}^b(x^*) = x^*\mathbf{E}_X + \mathbf{u}^b(x^*) = (x^* + u^b(x^*))\mathbf{E}_X + w^b(x^*)\mathbf{E}_Z. \quad (\text{A.2})$$

V enačbah (A.1) in (A.2) predstavljajo  $u^a(x)$ ,  $w^a(x)$ ,  $u^b(x^*)$  in  $w^b(x^*)$  komponente vektorja pomika referenčne osi slojev  $a$  in  $b$  v smeri baznih vektorjev  $\mathbf{E}_X$  in  $\mathbf{E}_Z$ . Izkazuje se, da je referenčno os zgornjega sloja primerno reparametrizirati z novo materialno koordinato  $x^*(x) \in \mathcal{I}^{b*}$ , ki predstavlja tisti delec na referenčni osi zgornjega sloja kompozitnega nosilca, ki v deformirani legi solega z delcem referenčne osi spodnjega sloja s koordinato  $x \in \mathcal{I}^a$  (slika A.1).

Osnovne enačbe, s katerimi opišemo napetostno in deformacijsko stanje kompozitnega nosilca sestavljajo: kinematične, ravnotežne in konstitucijske enačbe z ustreznimi kinematičnimi in statičnimi robnimi pogoji ter vezne enačbe med slojema kompozitnega nosilca. Ker je izpeljava posplošenih ravnotežnih enačb ravninskih nosilcev dobro znana, jih v tem dodatku povzamemo po literaturi [20]. Kinematične, ravnotežne in konstitucijske enačbe dvoslojnega kompozitnega ravninskega nosilca so:

$$u^{a'} - \varepsilon^a = 0, \quad u^{b'} - \varepsilon^b = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$w^{a'} + \varphi^a = 0, \quad w^{b'} + \varphi^b = 0, \quad (\text{A.4})$$

$$\varphi^{a'} - \kappa^a = 0, \quad \varphi^{b'} - \kappa^b = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$\mathcal{N}^{a'} + q_X^a = 0, \quad \mathcal{N}^{b'} + q_X^b + p_X = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$\mathcal{Q}^{a'} + q_Z^a = 0, \quad \mathcal{Q}^{b'} + q_Z^b + p_Z = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$\mathcal{M}^{a'} - \mathcal{Q}^a = 0, \quad \mathcal{M}^{b'} - \mathcal{Q}^a + m_Y = 0, \quad (\text{A.8})$$

$$\mathcal{N}^a = \mathcal{N}_c^a, \quad \mathcal{N}^b = \mathcal{N}_c^b, \quad (\text{A.9})$$

$$\mathcal{M}^a = \mathcal{M}_c^a, \quad \mathcal{M}^b = \mathcal{M}_c^b. \quad (\text{A.10})$$

Pomen oznak v enačbah (A.3)–(A.10):  $\varepsilon^a$ ,  $\varepsilon^b$  predstavljata specifično spremembo dolžine referenčne osi sloja  $a$  oziroma sloja  $b$ ;  $\varphi^a$ ,  $\varphi^b$  in  $\kappa^a$ ,  $\kappa^b$  sta zasuka in pseudoukrivljenosti referenčne osi sloja  $a$  oziroma sloja  $b$ ;  $\mathcal{N}^a$ ,  $\mathcal{N}^b$ ,  $\mathcal{Q}^a$ ,  $\mathcal{Q}^b$  in  $\mathcal{M}^a$ ,  $\mathcal{M}^b$  predstavljajo ravnotežni osni sili, ravnotežni prečni sili in ravnotežna upogibna momenta v referenčni osi sloja  $a$  oziroma sloja  $b$  kompozitnega nosilca;  $q_X^a$ ,  $q_X^b$  in  $q_Z^a$ ,  $q_Z^b$  predstavljajo komponente linijske kontaktne obtežbe v stični ploskvi med slojema kompozitnega nosilca;  $\mathcal{N}_c^a$ ,  $\mathcal{N}_c^b$  ter  $\mathcal{M}_c^a$ ,  $\mathcal{M}_c^b$  pa so konstitucijski osni sili in konstitucijska momenta sloja  $a$  oziroma sloja  $b$  kompozitnega nosilca.

Pripadajoči statični oziroma kinematični robni pogoji dvoslojnega kompozitnega nosilca so:

$x = 0$  :

$$S_1^a + \mathcal{N}^a(0) = 0 \quad u^a(0) = u_1^a, \quad (\text{A.11})$$

$$S_2^a + \mathcal{Q}^a(0) = 0 \quad w^a(0) = u_2^a, \quad (\text{A.12})$$

$$S_3^a + \mathcal{M}^a(0) = 0 \quad \varphi^a(0) = u_3^a, \quad (\text{A.13})$$



$$S_1^b + \mathcal{N}^b(0) = 0 \quad u^b(0) = u_1^b, \quad (\text{A.14})$$

$$S_2^b + \mathcal{Q}^b(0) = 0 \quad w^b(0) = u_2^b, \quad (\text{A.15})$$

$$S_3^b + \mathcal{M}^b(0) = 0 \quad \varphi^b(0) = u_3^b, \quad (\text{A.16})$$

$x = L :$

$$S_4^a - \mathcal{N}^a(L) = 0 \quad u^a(L) = u_4^a, \quad (\text{A.17})$$

$$S_5^a - \mathcal{Q}^a(L) = 0 \quad w^a(L) = u_5^a, \quad (\text{A.18})$$

$$S_6^a - \mathcal{M}^a(L) = 0 \quad \varphi^a(L) = u_6^a, \quad (\text{A.19})$$

$$S_4^b - \mathcal{N}^b(L) = 0 \quad u^b(L) = u_4^b, \quad (\text{A.20})$$

$$S_5^b - \mathcal{Q}^b(L) = 0 \quad w^b(L) = u_5^b, \quad (\text{A.21})$$

$$S_6^b - \mathcal{M}^b(L) = 0 \quad \varphi^b(L) = u_6^b. \quad (\text{A.22})$$

V enačbah (A.11)–(A.22) so  $u_i^a$  in  $u_i^b$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) predpisani posplošeni robni pomiki,  $S_i^a$  in  $S_i^b$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) pa so predpisane posplošene točkovne sile na robovih sloja  $a$  oziroma sloja  $b$  kompozitnega nosilca.

Ker vezne enačbe dvoslojnega kompozitnega nosilca v literaturi pogosto niso natančno predstavljene, jih v nadaljevanju natančneje predstavimo oziroma izpeljemo.

Geometrijska zahteva, da lahko sloja drsita drug po drugem, ne moreta pa se razmakniti, določa kinematično vezno enačbo:

$$\mathbf{R}^a(x) = \mathbf{R}^b(x^*), \quad (\text{A.23})$$

ki se zapiše v komponentni obliki kot:

$$x + u^a(x) = x^* + u^b(x^*), \quad (\text{A.24})$$

$$w^a(x) = w^b(x^*). \quad (\text{A.25})$$

V tej disertaciji predstavljena geometrijsko nelinearna teorija kompozitnih nosilcev obravnava oba sloja kompozitnega nosilca kot dva ločena nosilca. Povezano delovanje obeh slojev kompozitnega nosilca pa zagotavlja vezna enačba (A.23), vpliv med slojema kompozitnega nosilca na območju stika pa določa t.i. *linijska kontaktna obtežba*. To obtežbo, ki je vektorska funkcija, lahko razstavimo na komponenti v prostorski bazi  $\mathbf{E}_X$  in  $\mathbf{E}_Z$  oziroma v bazi, ki jo sestavljata enotski vektor v smeri tangente in enotski vektor v smeri normale na referenčno os kompozitnega nosilca. Povezavo med komponentami linijske kontaktne obtežbe v različnih bazah določajo enačbe:

$$q_X^a(x) = q_t^a(x) \cos \varphi^a(x) + q_n^a(x) \sin \varphi^a(x), \quad (\text{A.26})$$

$$q_Z^a(x) = -q_t^a(x) \sin \varphi^a(x) + q_n^a(x) \cos \varphi^a(x) \quad (\text{A.27})$$

$$q_X^b(x^*) = q_t^b(x^*) \cos \varphi^b(x^*) + q_n^b(x^*) \sin \varphi^b(x^*), \quad (\text{A.28})$$

$$q_Z^b(x^*) = -q_t^b(x^*) \sin \varphi^b(x^*) + q_n^b(x^*) \cos \varphi^b(x^*). \quad (\text{A.29})$$

Ker smo predpostavili, da so zasuki po velikost ‘majhni’ velja:

$$q_X^a(x) = q_t^a(x) + q_n^a(x)\varphi^a(x) \cong q_t^a(x), \quad (\text{A.30})$$

$$q_Z^a(x) = -q_t^a(x)\varphi^a(x) + q_n^a(x) \cong q_n^a(x), \quad (\text{A.31})$$

$$q_X^b(x^*) = q_t^b(x^*) + q_n^b(x^*)\varphi^b(x^*) \cong q_t^b(x^*), \quad (\text{A.32})$$

$$q_Z^b(x^*) = -q_t^b(x^*)\varphi^b(x^*) + q_n^b(x^*) \cong q_n^b(x^*). \quad (\text{A.33})$$

Glede na znani Newtonov zakon o akciji in reakciji med dvema telesoma v kontaktu, veljata na stiku med slojema kompozitnega nosilca naslednji povezavi komponent linijske kontaktne obtežbe:

$$q_t^a(x) + q_t^b(x^*) = 0, \quad (\text{A.34})$$

$$q_n^a(x) + q_n^b(x^*) = 0. \quad (\text{A.35})$$

Ko upoštevamo  $q_t^b(x^*) \cong q_t^b(x)$ ,  $q_n^b(x^*) \cong q_n^b(x)$  in enačbe (A.30)–(A.33), (A.34) in (A.35), dobimo na stiku med slojema kompozitnega nosilca naslednje zveze:

$$q_X^a(x) = -q_X^b(x) = q_t^a(x) = -q_t^b(x) = q_t, \quad (\text{A.36})$$

$$q_Z^a(x) = -q_Z^b(x) = q_n^a(x) = -q_n^b(x) = q_n. \quad (\text{A.37})$$

Zaradi podajne povezave slojev se na stiku med slojema kompozitnega nosilca pojavijo zamiki. Medsebojni zamik delcev spodnjega in zgornjega sloja kompozitnega nosilca na referenčni osi s koordinato  $x$  označimo z  $\Delta^a(x)$ . Na podoben način označimo z  $\Delta^b(x^*)$  zamik delcev s koordinato  $x^*$ . Toda, ker so pomiki po velikosti ‘majhni’, so ‘majhni’ tudi zamiki in velja  $\Delta^a(x) \cong \Delta^b(x^*) = \Delta(x)$ . Ker predstavlja zamik delcev na referenčni osi kompozitnega nosilca razliko dolžin deformiranih referenčnih osi spodnjega in zgornjega sloja, ga izračunamo z enačbo:

$$\Delta(x) = \Delta(0) + s^a(x) - s^b(x) = \Delta(0) + \int_0^x (\varepsilon^a - \varepsilon^b) d\xi. \quad (\text{A.38})$$

Če je kompozitni nosilec obtežen tako, da previs pripada zgornjemu sloju, izračunamo začetni zamik  $\Delta(0)$  z izrazom:

$$\Delta(0) = \int_0^{x^{*(0)}} (1 + \varepsilon^b) d\xi. \quad (\text{A.39})$$

Ko v enačbi (A.38) upoštevamo rešitev enačbe (A.3), torej:

$$u^a(x) = u^a(0) + \int_0^x \varepsilon^a d\xi, \quad (\text{A.40})$$

$$u^b(x) = u^b(0) + \int_0^x \varepsilon^b d\xi, \quad (\text{A.41})$$

se zamik na stiku med slojema izračuna s preprosto enačbo:

$$\Delta(x) = \Delta(0) + \int_0^x (\varepsilon^a - \varepsilon^b) d\xi = u^a(x) - u^b(x). \quad (\text{A.42})$$

Pri tem je začetni zamik  $\Delta(0)$  enak:

$$\Delta(0) = u^a(0) - u^b(0). \quad (\text{A.43})$$

Podajnost oziroma togost stika med slojema kompozitnega nosilca, ki je odvisna od materiala, ki sestavljata kompozitni nosilec, in od izvedbe stika, opišemo s t.i. *konstitucijskim zakonom stika*. Definiramo ga s splošnim izrazom:

$$\mathcal{H}(x, \Delta, q_t, q_n, \dots) = 0. \quad (\text{A.44})$$

Normalna in tangencialna komponenta linijske kontaktne obtežbe sta povezani s koeficientom lepenja in trenja, vendar tudi mi, podobno kot številni drugi avtorji, ta medsebojni vpliv zanemarimo. Tako predpišemo konstitucijski zakon stika, v katerem sta povezana le tangencialna komponenta linijske kontaktne obtežbe  $q_t$  in zdrsa med slojema kompozitnega nosilca  $\Delta$ :

$$q_t(x) = \mathcal{G}(\Delta(x)). \quad (\text{A.45})$$

Zvezo (A.45) imenujemo tudi zveza *strižni tok-zamik*, kjer strižni tok predstavlja tangencialno komponento linijske kontaktne obtežbe.

Na koncu predstavimo tudi zvezo med pseudoukrivljenostima zgornjega in spodnjega sloja kompozitnega nosilca. Ker so tudi pseudoukrivljenosti po velikosti ‘majhne’, so praktično enake ukrivljenostim kompozitnega nosilca, zato jih v nadaljevanju imenujemo kar ukrivljenosti. Znano je, da pri geometrijsko linearni analizi dvoslojnih kompozitnih nosilcev predpostavimo tudi zvezo  $dx \cong dx^*$ , kar pomeni, da velja tudi:

$$\frac{dx^*}{dx} = \frac{1 + \varepsilon^a(x)}{1 + \varepsilon^b(x^*)} \cong 1. \quad (\text{A.46})$$

Ko v enačbi

$$\kappa^a(x) = \frac{1 + \varepsilon^a(x)}{1 + \varepsilon^b(x^*)} \kappa^b(x^*), \quad (\text{A.47})$$

ki predstavlja zvezo med ukrivljenostima sloja  $a$  in sloja  $b$  kompozitnega nosilca, upoštevamo enačbo (A.46), dobimo sledečo zvezo med ukrivljenostima slojev:

$$\kappa^b(x^*) \cong \kappa^a(x) = \kappa(x). \quad (\text{A.48})$$

Ker smo vpliv previsov na deformiranje kompozitnega nosilca zanemarili, lahko za vse količine sloja  $b$  pišemo  $(\cdot)^b(x^*) = (\cdot)^b(x)$ , na primer  $u^b(x^*) = u^b(x)$ ,  $w^b(x^*) = w^b(x)$  ali  $\varphi^b(x^*) = \varphi^b(x)$ . Glede na povedano, moramo za določitev napetostnega in deformacijskega stanja dvoslojnega kompozitnega nosilca rešiti naslednji sistem diferencialnih in algebrskih enačb:

$$u^{a'}(x) - \varepsilon^a(x) = 0, \quad (\text{A.49})$$

$$w^{a'}(x) + \varphi^a(x) = 0, \quad (\text{A.50})$$

$$\varphi^{a'}(x) - \kappa^a(x) = 0, \quad (\text{A.51})$$

$$u^{b'}(x) - \varepsilon^b(x) = 0 \quad (\text{A.52})$$

$$w^{b'}(x) + \varphi^b(x) = 0, \quad (\text{A.53})$$

$$\varphi^{b'}(x) - \kappa^b(x) = 0, \quad (\text{A.54})$$

$$\mathcal{N}^{a'}(x) + q_t(x) = 0, \quad (\text{A.55})$$

$$\mathcal{Q}^{a'}(x) + q_n(x) = 0, \quad (\text{A.56})$$

$$\mathcal{M}^{a'}(x) - \mathcal{Q}^a(x) = 0, \quad (\text{A.57})$$

$$\mathcal{N}^{b'}(x) + p_X(x) - q_t(x) = 0, \quad (\text{A.58})$$

$$\mathcal{Q}^{b'}(x) + p_Z(x) - q_n(x) = 0, \quad (\text{A.59})$$

$$\mathcal{M}^{b'}(x) - \mathcal{Q}^b(x) + m_Y(x) = 0, \quad (\text{A.60})$$

$$\mathcal{N}^a(x) - \mathcal{N}_c^a(x) = 0, \quad (\text{A.61})$$

$$\mathcal{M}^a(x) - \mathcal{M}_c^a(x) = 0, \quad (\text{A.62})$$

$$\mathcal{N}^b(x) - \mathcal{N}_c^b(x) = 0, \quad (\text{A.63})$$

$$\mathcal{M}^b(x) - \mathcal{M}_c^b(x) = 0, \quad (\text{A.64})$$

$$x + u^a(x) = x^* + u^b(x^*), \quad (\text{A.65})$$

$$w^a(x) = w^b(x^*), \quad (\text{A.66})$$

$$\Delta(x) = u^a(x) - u^b(x), \quad (\text{A.67})$$

$$q_t(x) = \mathcal{G}(\Delta(x)) \quad (\text{A.68})$$

z ustreznimi statičnimi in kinematičnimi robnimi pogoji. Sistem enačb (A.49)–(A.68) sestavlja dvajset enačb za določitev dvajset neznanih funkcij, ki so: kinematične količe  $u^a(x)$ ,  $w^a(x)$ ,  $\varphi^a(x)$ ,  $u^b(x)$ ,  $w^b(x)$ ,  $\varphi^b(x)$ ; deformacijske količe  $\varepsilon^a(x)$ ,  $\kappa^a(x)$ ,  $\varepsilon^b(x)$ ,  $\kappa^b(x)$ ; statične količe  $\mathcal{N}^a(x)$ ,  $\mathcal{Q}^a(x)$ ,  $\mathcal{M}^a(x)$ ,  $\mathcal{N}^b(x)$ ,  $\mathcal{Q}^b(x)$ ,  $\mathcal{M}^b(x)$ ; ter količine zaradi povezanega deformiranja obeh slojev kompozitnega nosilca  $q_t(x)$ ,  $q_n(x)$ ,  $x^*(x)$ ,  $\Delta(x)$ .

Izkaže se, da lahko sistem enačb (A.49)–(A.68) še dodatno poenostavimo. Ko vpeljemo skupno prečno silo kompozitnega nosilca  $\mathcal{Q}(x) = \mathcal{Q}^a(x) + \mathcal{Q}^b(x)$  in skupni upogibni moment  $\mathcal{M}(x) =$

$\mathcal{M}^a(x) + \mathcal{M}^b(x)$  in ko v sistemu enačb (A.49)–(A.68) upoštevamo kinematične vezne enačbe  $w^a(x) = w^b(x) = w(x)$ ,  $\varphi^a(x) = \varphi^b(x) = \varphi(x)$  in  $\kappa^a(x) = \kappa^b(x) = \kappa(x)$ , sistem (A.49)–(A.68) razpade na dva nepovezana sistema. Ker je izpeljava trivialna, jo tu ne prikažemo. V tem primeru moramo za določitev napetostnega in deformacijskega stanja kompozitnega nosilca z upoštevanjem zdrsa med slojema rešiti naslednja nepovezana sistema diferencialnih in algebrskih enačb:

$$u^{a'}(x) - \varepsilon^a(x) = 0, \quad (\text{A.69})$$

$$u^{b'}(x) - \varepsilon^b(x) = 0, \quad (\text{A.70})$$

$$w'(x) + \varphi(x) = 0, \quad (\text{A.71})$$

$$\varphi'(x) - \kappa(x) = 0, \quad (\text{A.72})$$

$$\mathcal{N}^{a'}(x) + q_t(x) = 0, \quad (\text{A.73})$$

$$\mathcal{N}^{b'}(x) + p_X(x) - q_t(x) = 0, \quad (\text{A.74})$$

$$(\mathcal{Q}^a(x) + \mathcal{Q}^b(x))' + p_Z(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \mathcal{Q}'(x) + p_Z(x) = 0, \quad (\text{A.75})$$

$$(\mathcal{M}^a(x) + \mathcal{M}^b(x))' - (\mathcal{Q}^a(x) + \mathcal{Q}^b(x)) + m_Y(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \mathcal{M}'(x) - \mathcal{Q}(x) + m_Y(x) = 0, \quad (\text{A.76})$$

$$\mathcal{N}^a(x) - \mathcal{N}_c^a(x) = 0, \quad (\text{A.77})$$

$$\mathcal{N}^b(x) - \mathcal{N}_c^b(x) = 0, \quad (\text{A.78})$$

$$(\mathcal{M}^a(x) + \mathcal{M}^b(x)) - (\mathcal{M}_c^a(x) + \mathcal{M}_c^b(x)) = 0 \quad \rightarrow \quad \mathcal{M}(x) - \mathcal{M}_c(x) = 0, \quad (\text{A.79})$$

$$\Delta(x) = u^a(x) - u^b(x), \quad (\text{A.80})$$

$$q_t(x) = \mathcal{G}(\Delta(x)) \quad (\text{A.81})$$

in

$$x + u^a(x) = x^* + u^b(x) \quad \rightarrow \quad x^*(x) = x + \Delta(x), \quad (\text{A.82})$$

$$\mathcal{Q}(x) = \mathcal{Q}^a(x) + \mathcal{Q}^b(x) \quad (\text{A.83})$$

$$\mathcal{M}(x) = \mathcal{M}^a(x) + \mathcal{M}^b(x), \quad (\text{A.84})$$

$$\mathcal{Q}^{a'}(x) + q_n(x) = 0 \quad \text{ali} \quad \mathcal{Q}^{b'}(x) + p_Z(x) - q_n(x) = 0, \quad (\text{A.85})$$

$$\mathcal{M}^{a'}(x) - \mathcal{Q}^a(x) = 0 \quad \text{ali} \quad \mathcal{M}^{b'}(x) - \mathcal{Q}^b(x) + m_Y(x) = 0, \quad (\text{A.86})$$

$$\mathcal{M}^a(x) = \mathcal{M}_c^a(x) \quad \text{ali} \quad \mathcal{M}^b(x) = \mathcal{M}_c^b(x) \quad (\text{A.87})$$

z ustreznimi robnimi pogoji. Sistem enačb (A.69)–(A.81) sestavlja sistem trinajstih enačb za trinajst neznanih funkcij:  $u^a(x)$ ,  $u^b(x)$ ,  $w(x)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\varepsilon^a(x)$ ,  $\varepsilon^b(x)$ ,  $\kappa(x)$ ,  $\mathcal{N}^a(x)$ ,  $\mathcal{N}^b(x)$ ,  $\mathcal{Q}(x)$ ,  $\mathcal{M}(x)$ ,  $\Delta(x)$  in  $q_t(x)$ . Sistem enačb (A.82)–(A.87) pa sestavlja sistem šestih s sistemom enačb (A.69)–(A.81) nepovezanih enačb za šest dodatnih neznanih funkcij:  $x^*(x)$ ,  $q_n(x)$ ,  $\mathcal{Q}^a(x)$ ,  $\mathcal{Q}^b(x)$ ,  $\mathcal{M}^a(x)$  in  $\mathcal{M}^b(x)$ .

Posebnost reševanja opisanega sistema enačb za določitev napetostnega in deformacijskega stanja kompozitnega nosilca je v tem, da normalna komponenta linijske kontaktne obtežbe ni osnovna neznanica problema. Določimo jo z rešitvijo dodatnega sistema enačb (A.82)–(A.87) in sicer z enačbo

$$q_n(x) = \mathcal{M}_c^{b''}(x) + m'_Y(x) + p_Z(x) \quad (\text{A.88})$$

ali z enačbo

$$q_n(x) = -\mathcal{M}_c^{a''}(x). \quad (\text{A.89})$$

Za ločena sistema algebrajskih in diferencialnih enačb (A.69)–(A.81) in (A.82)–(A.87), ki skupaj z ustreznimi robnimi pogoji določata deformacijsko in napetostno stanje kompozitnega nosilca v splošnem ne obstajajo analitične rešitve. Zato izbrani sistem enačb kompozitnega nosilca, podobno kot prikazujemo v drugem in tretjem poglavju za geometrijsko točno teorijo kompozitnih nosilcev, najprej preuredimo s pomočjo modificiranega izreka o virtualnem delu in ga v nadaljevanju diskretiziramo v smislu Galerkinove metode končnih elementov. Na ta način dobimo sistem diskretnih posplošenih ravnotežnih enačb končnega elementa za geometrijsko linearno analizo kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med slojema. Ker je ta izpeljava praktično enaka kot v primeru geometrijsko točne teorije kompozitnih nosilcev, je tu ne prikazemo. Diskretne posplošene ravnotežne enačbe dvoslojnega kompozitnega nosilca so:

$$g_i = \int_0^L (\mathcal{N}^a - \mathcal{N}_c^a), L_i \, d\xi = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{A.90})$$

$$g_{N+j} = \int_0^L (\mathcal{N}^b - \mathcal{N}_c^b) L_j \, d\xi = 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (\text{A.91})$$

$$g_{2N+k} = \int_0^L (\mathcal{M} - \mathcal{M}_c) L_k \, d\xi = 0, \quad k = 1, \dots, N \quad (\text{A.92})$$

$$g_{3N+1} = u^a(L) - u^a(0) - \left( P_1(L)\varepsilon_1^a + P_2(L)\varepsilon_2^a + \dots + P_N(L)\varepsilon_N^a \right) = 0, \quad (\text{A.93})$$

$$g_{3N+2} = u^b(L) - u^b(0) - \left( P_1(L)\varepsilon_1^b + P_2(L)\varepsilon_2^b + \dots + P_N(L)\varepsilon_N^b \right) = 0, \quad (\text{A.94})$$

$$g_{3N+3} = \varphi(L) - \varphi(0) - \left( P_1(L)\kappa_1 + P_2(L)\kappa_2 + \dots + P_N(L)\kappa_N \right) = 0, \quad (\text{A.95})$$

$$g_{3N+4} = w(L) - w(0) + \varphi(0)x + IP_1(L)\kappa_1 + IP_2(L)\kappa_2 + \dots + IP_N(L)\kappa_N = 0, \quad (\text{A.96})$$

$$g_{3N+5} = S_1 + \mathcal{N}^a(0) = 0, \quad (\text{A.97})$$

$$g_{3N+6} = S_2 + \mathcal{N}^b(0) = 0, \quad (\text{A.98})$$

$$g_{3N+7} = S_3 + \mathcal{Q}(0) = 0, \quad (\text{A.99})$$

$$g_{3N+8} = S_4 + \mathcal{M}(0) = 0, \quad (\text{A.100})$$

$$g_{3N+9} = S_5 - \mathcal{N}^a(0) - \int_0^L \mathcal{G}[\Delta(\xi)] d\xi = 0, \quad (\text{A.101})$$

$$g_{3N+10} = S_6 - \mathcal{N}^b(0) + \int_0^L \left( p_X(\xi) + \mathcal{G}[\Delta(\xi)] \right) d\xi = 0, \quad (\text{A.102})$$

$$g_{3N+11} = S_7 - \mathcal{Q}(0) + \int_0^L p_Z(\xi) d\xi = 0, \quad (\text{A.103})$$

$$g_{3N+12} = S_8 - \mathcal{M}(0) + \int_0^L \left( \mathcal{Q}(\xi) - m_Y(\xi) \right) d\xi = 0. \quad (\text{A.104})$$

Pri izpeljavi enačb (A.90)–(A.104) smo potek deformacijskih količin  $\varepsilon^a$ ,  $\varepsilon^b$ ,  $\kappa$  vzdolž referenčne osi kompozitnega nosilca aproksimirali z Lagrangevimi polinomi (glej poglavje 3.2). Tako vrednosti  $\varepsilon_n^a$ ,  $\varepsilon_n^b$ ,  $\kappa_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) predstavljajo vozliščne vrednosti deformacijskih količin. Dodatno velja tudi  $P_i(x) = \int_0^x L_i(\xi) d\xi$  in  $IP_i(x) = \int_0^x P_i(\xi) d\xi$ , ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), kjer  $L_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) predstavlja  $i$ -ti Lagrangev polinom.

Za znano zunanjo obtežbo sestavlja sistem (A.90)–(A.104)  $3N + 12$  enačb za določitev  $3N + 12$  neznank. Med neznankami je  $3N + 4$  notranjih prostostnih stopenj  $\varepsilon_n^a$ ,  $\varepsilon_n^b$ ,  $\kappa_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ),  $\mathcal{N}^a(0)$ ,  $\mathcal{N}^b(0)$ ,  $\mathcal{Q}(0)$ ,  $\mathcal{M}(0)$ , in osem zunanjih prostostnih stopenj  $u^a(0)$ ,  $u^b(0)$ ,  $w(0)$ ,  $\varphi(0)$ ,  $u^a(L)$ ,  $u^b(L)$ ,  $w(L)$ ,  $\varphi(L)$  elementa.

V nadaljevanju po znanih postopkih v metodi končnih elementov tvorimo *posplošene diskretne enačbe konstrukcije*. Te enačbe predstavljajo ravnotežje posplošenih sil v vseh vozliščih kompozitnega nosilca. To pomeni v vsakem vozlišču kompozitnega nosilca po štiri ravnotežne enačbe. Tako moramo pri kompozitnem nosilcu, ki ima  $n_e$  elementov,  $n_v$  vozlišč in  $n_p$  predpisanih kinematičnih robnih pogojev, rešiti  $n_e(3N + 4) + 4n_v - n_p$  enačb. Te enačbe so v splošnem nelinearne. Sistem diskretnih posplošenih ravnotežnih enačb konstrukcije rešimo z Newtonovo inkrementno-iteracijsko metodo.

# *Dodatek B*

## *Na pseudoukrivljenosti zasnovana teorija ravninskih ukrivljenih nosilcev*

### **B.1 UVOD**

V tem dodatku predstavljamo družino novih končnih elementov za kinematično točno statično analizo ravninskih ukrivljenih nosilcev. Končni elementi so zasnovani na Reissnerjevi [71] teoriji ravninskih nosilcev. Teorija upošteva membranske, upogibne in strižne deformacije, ki lahko skupaj s pomiki in zasuki zavzamejo številčno poljubno velike vrednosti. Osnovni kinematični predpostavki Reissnerjevega modela nosilca sta: (i) Bernoullijeva hipoteza o ravnih prerezih, ki določa, da ravni prerezi, pravokotni na težiščno os nosilca v nedeformirani legi, ostanejo ravni tudi v deformirani legi, toda ne več pravokotni na težiščno os nosilca; (ii) oblika in velikost prečnega prereza med deformiranjem nosilca ostaneta nespremenjena.

V literaturi obstaja veliko različnih končnih elementov za analizo ravnih in ukrivljenih ravninskih nosilcev; obširen seznam literature na to temo je podan v [74] in [75]. Skupna značilnost večine elementov je v tem, da vzdolž elementa interpolirajo pomike in zasuke. Če je interpoliranih funkcij več in če so različne po fizikalnem izvoru, to pripelje do t.i. problema nekonsistentnosti interpolacijskih polj in posledično do membranskega in strižnega blokiranja elementov [82]. Pomemben napredek pri rešitvi tega problema, če ne že kar rešitev, je predstavil Saje s sodelavci [74, 75]. Izpeljal je končne elemente, pri katerih je edina neznana funkcija zasuk prečnega prereza nosilca. Kot kažejo numerični primeri, so ti elementi neobčutljivi na membransko in strižno blokiranje in izredno natančni. Kot ugotovita Vratinar in Saje [91], je edina pomankljivost Sajejevih končnih elementov nekonsistentnost ravnotežnega in konstitucijskega momenta v prečnem prerezu nosilca. Napaka je še posebej izrazita v bližini lokalnih stabilnost-



nih točk nosilca oziroma na delu nosilca z izrazitimi spremembami ukrivljenosti [75, 91]. Avtorja sta za rešitev tega problema Sajetovih končnih elementov namesto Galerkinove metode končnih elementov uporabila kolokacijsko metodo končnih elementov [91]. Ohranila sta zasuk prečnega prereza nosilca kot edino neznano funkcijo, in v kolokacijskih točkah sta zadoščala momentnemu konstitucijskemu pogoju.

Za statično analizo ukrivljenih ravninskih nosilcev predstavljamo družino končnih elementov, ki jih izpeljemo s pomočjo modificiranega Hu-Washizujevega funkcionala. V njem eksplicitno nastopa pogoj konsistence konstitutivnega in ravnotežnega momenta. Edina neznan funkcija je pseudoukrivljenost težiščne osi nosilca. Uporabimo Galerkinovo metodo končnih elementov, katere prednosti so predvsem: (i) neobčutljivost elementov na membransko in strižno blokiranje, (ii) konsistentno upoštevanje momentne konstitucijske enačbe in (iii) velika transparentnost osnovnih enačb. Podoben element sta za geometrijsko in materialno linearno teorijo ukrivljenih nosilcev predlagala Lee in Sin [50]. Glede na povedano, lahko naše elemente interpretiramo kot (i) razširitev elementa Leeja in Sina na materialno in geometrijsko nelinearne razmere in (ii) dopolnitev Sajetovih elementov na način, da ohranimo vse dobre lastnosti teh elementov ter da hkrati, v smislu Galerkinove metode končnih elementov, zadostimo tudi momentnemu pogoju.

## B.2 OSNOVNE ENAČBE UKRIVLJENEGA RAVNINSKEGA NOSILCA

Opazujemo ravninski ukrivljen nosilec z začetno dolžino  $L$  in konstantnega prečnega prereza  $A$ . Deformiranje nosilca analiziramo v ravnini  $(X, Z)$  evklidskega ambientnega prostora, kjer smo izbrali fiksni desnosučni kartezični koordinatni sistem  $(X, Y, Z)$  s pripadajočimi ortonormalnimi baznimi vektorji  $\mathbf{E}_X$ ,  $\mathbf{E}_Z$  in  $\mathbf{E}_Y = \mathbf{E}_Z \times \mathbf{E}_X$ . Nosilec parametriziramo s parametri  $(s, r, t) \in [0, L] \times A \subset \mathbb{R}^3$  in sicer tako, da krivulja  $\mathbf{r}_0(s) = (X(s), 0, Z(s))$  določa težiščno os nosilca ( $s$  je v nedeformirani legi naravni parameter), medtem ko ravnina  $\mathbf{R}(r, t) = (X(s = \text{const.}, r, t), Y(s = \text{const.}, r, t), Z(s = \text{const.}, r, t))$  določa prečni prerez nosilca. Oblika prečnega prereza nosilca je poljubna, edino omejitev predstavlja zahtevana simetrija prečnega prereza, glede na koordinatno ravnino  $Y = 0$ . Materialne točke nosilca identificiramo s krivuljskimi materialnimi koordinatami  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Materialna koordinatna os  $\mathbf{r}_0(s) = (\xi(s), 0, 0)$  je identična s težiščno osjo nosilca. Pri analizi upoštevamo membransko, strižno ter upogibno deformiranje nosilca in znano Bernoullijevo hipotezo o ravnih prerezih. Ta predpostavka določa, da ravni prerezi, pravokotni na težiščno os nosilca v nedeformirani legi, ostanejo ravni tudi v deformirani legi, vendar niso več nujno pravokotni na težiščno os. V tem primeru je ugodno, da izberemo za pomično bazo tri med seboj vzajemno pravokotne vektorje. To bazo sestavljata vektorja  $\mathbf{g}_\eta$ ,  $\mathbf{g}_\zeta$ , ki ležita v deformirani ravnini prečnega prereza, in vektor  $\mathbf{g}_\xi$ , ki je pravokoten na njo [82]. Deformirano lego nosilca definiramo s težiščno krivuljo nosilca  $\mathbf{r}_0(s)$  in z družino prečnih prerezov, katere določa enotski vektor  $\mathbf{g}_\xi(s)$  [82]. Lega poljubne točke nosilca v simetrijski ravnini  $Y = 0$  je določena s krajevnim vektorjem:

$$\mathbf{r}(s, t) = \mathbf{r}_0(s) + \zeta \mathbf{g}_\zeta(s) = (X(s) + u(s)) \mathbf{E}_X + (Z(s) + w(s)) \mathbf{E}_Z + \zeta \mathbf{g}_\zeta(s), \quad (\text{B.1})$$

kjer  $u$  in  $w$  predstavljata pomika težiščne osi nosilca v smeri koordinatnih osi  $X$  in  $Z$ . Nedeformirano in deformirano lego ravninskega ukrivljenega nosilca prikazujemo na sliki B.1.



$$\mathcal{M}' - (1 + \varepsilon)\mathcal{Q} + \gamma\mathcal{N} - m_Y = 0, \quad (\text{B.8})$$

kjer  $\mathcal{N}$  predstavlja ravnotežno osno silo,  $\mathcal{Q}$  ravnotežno prečno silo in  $\mathcal{M}$  ravnotežni moment. Ob navedenem veljajo tudi naslednje zveze:

$$\mathcal{N} = \mathcal{R}_X \cos \varphi - \mathcal{R}_Z \sin \varphi, \quad (\text{B.9})$$

$$\mathcal{Q} = \mathcal{R}_X \sin \varphi + \mathcal{R}_Z \cos \varphi. \quad (\text{B.10})$$

### Konstitucijske enačbe

Zadnjo skupino osnovnih enačb ravninskega ukrivljenega nosilca sestavljajo konstitucijske enačbe, ki jih vpeljemo z namenom, da povežemo ravnotežne osne sile  $\mathcal{N}$ , ravnotežne prečne sile  $\mathcal{Q}$  in ravnotežne momente  $\mathcal{M}$  z deformacijskimi količinami  $\varepsilon$ ,  $\gamma$  in  $\kappa$ . Definiramo jih z enačbami:

$$\mathcal{N}(s) = \mathcal{N}_c(s, \varepsilon(s), \gamma(s), \kappa(s)), \quad (\text{B.11})$$

$$\mathcal{Q}(s) = \mathcal{Q}_c(s, \varepsilon(s), \gamma(s), \kappa(s)), \quad (\text{B.12})$$

$$\mathcal{M}(s) = \mathcal{M}_c(s, \varepsilon(s), \gamma(s), \kappa(s)), \quad (\text{B.13})$$

kjer je  $\mathcal{N}_c$  konstitucijska osna sila,  $\mathcal{Q}_c$  konstitucijska prečna sila in  $\mathcal{M}_c$  konstitucijski moment. Konstitucijske količine  $\mathcal{N}_c$ ,  $\mathcal{Q}_c$  in  $\mathcal{M}_c$  so odvisne od izbranega materialnega modela, ki ga definiramo z izrazoma  $\sigma_c = \mathcal{F}(D)$  in  $\tau_c = \mathcal{G}(D)$ .  $\sigma_c$  in  $\tau_c$  predstavljata fizikalno normalno in strižno napetost, funkciji  $\mathcal{F}$  in  $\mathcal{G}$  pa se določijo na podlagi eksperimentalnih preiskav. Z napetostima  $\sigma_c$  in  $\tau_c$  izrazimo konstitucijske količine  $\mathcal{N}_c$ ,  $\mathcal{Q}_c$  in  $\mathcal{M}_c$  na sledeč način:

$$\mathcal{N}_c(\varepsilon, \gamma, \kappa) = \int_A \sigma_c(\xi, \eta, \zeta) \, dA \quad (\text{B.14})$$

$$\mathcal{Q}_c(\varepsilon, \gamma, \kappa) = \int_A \tau_c(\xi, \eta, \zeta) \, dA = G A_s \gamma, \quad (\text{B.15})$$

$$\mathcal{M}_c(\varepsilon, \gamma, \kappa) = \int_A \zeta \sigma_c(\xi, \eta, \zeta) \, dA. \quad (\text{B.16})$$

V skladu s predpostavljenim preprostim potekom strižne deformacije po prerezu smo postavili tudi enostavni strižni model, ki ga določa enačba  $\mathcal{Q}_c = G A_s \gamma$ ;  $G = G(\gamma)$  predstavlja strižni modul in  $A_s < A$  strižni prerez nosilca.

### Modificiran princip virtualnega dela

Izrek o virtualnem delu zahteva, da je razlika virtualnega dela notranjih sil in virtualnega dela zunanjih sil enaka nič [75], torej:

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_0^L \mathcal{N}_c \delta \varepsilon \, ds + \int_0^L \mathcal{Q}_c \delta \gamma \, ds + \int_0^L \mathcal{M}_c \delta \kappa \, ds - \\ & \int_0^L p_X \delta u \, ds - \int_0^L p_Z \delta w \, ds - \int_0^L m_Y \delta \varphi \, ds - \sum_{k=1}^6 S_k \delta u_k = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

kjer so  $\delta u_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 6$ ) virtualne spremembe posplošenih robnih pomikov:

$$\begin{aligned} \delta u_1 &= \delta u(0), & \delta u_2 &= \delta w(0), & \delta u_3 &= \delta \varphi(0), \\ \delta u_4 &= \delta u(L), & \delta u_5 &= \delta w(L), & \delta u_6 &= \delta \varphi(L). \end{aligned}$$

V izreku (B.17) morajo deformacijske in geometrijske spremenljivke zadostiti kinematičnim enačbam (B.2)–(B.4). Tako so samo tri od šestih funkcij  $u$ ,  $w$ ,  $\varphi$ ,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$  in  $\kappa$  med seboj neodvisne. Pogosto avtorji kot neodvisne funkcije izberejo kinematične spremenljivke  $u$ ,  $w$  in  $\varphi$  in s pomočjo enačb (B.2)–(B.4) izrazijo deformacijske spremenljivke v odvisnosti od kinematičnih, torej  $\varepsilon = \varepsilon(u', w', \varphi)$ ,  $\gamma = \gamma(u', w', \varphi)$  in  $\kappa = \varphi'$ . Ko te izraze vstavijo v (B.17), postane izrek o virtualnem delu odvisen samo od kinematičnih spremenljivk, torej  $\delta W = \delta W(u, w, \varphi)$ . Slabosti take formulacije metode končnih elementov so dobro znane. Posebej naj omenimo problem strižnega in membranskega blokiranja končnih elementov. Omenjenim težavam se izognemo tako, da vpeljemo modificirani izrek o virtualnem delu in izpeljemo nove končne elemente, pri katerih sta neznani funkciji elementov samo specifična sprememba dolžine  $\varepsilon(s)$  in psevdoukrivljenost  $\kappa(s)$  težiščne osi ukrivljenega nosilca.

S funkcionalom (B.17), s kinematičnimi enačbami (B.2)–(B.4) ter z znanimi postopki variacijskega računa sestavimo Hu-Washizujev funkcional [60]. Euler-Lagrangeve enačbe tega funkcionala so:

*kinematične enačbe*

$s \in [0, L]$  :

$$f_1(\varepsilon, \gamma, u', \varphi, x') = X' + u' - (1 + \varepsilon) \cos \varphi - \gamma \sin \varphi = 0, \quad (\text{B.18})$$

$$f_2(\varepsilon, \gamma, w', \varphi, z') = Z' + w' + (1 + \varepsilon) \sin \varphi - \gamma \cos \varphi = 0, \quad (\text{B.19})$$

$$f_3(\kappa, \varphi') = \varphi' - \kappa_0 - \kappa = 0, \quad (\text{B.20})$$

*ravnotežne enačbe*

$s \in [0, L]$  :

$$f_4(\mathcal{R}'_X, \lambda) = -\mathcal{R}'_X - p_X = 0, \quad (\text{B.21})$$

$$f_5(\mathcal{R}'_Z, \lambda) = -\mathcal{R}'_Z - p_Z = 0, \quad (\text{B.22})$$

$$f_6(\varepsilon, \gamma, \varphi, \mathcal{R}_X, \mathcal{R}_Z, \mathcal{M}', \lambda) = -\mathcal{M}' + (1 + \varepsilon)\mathcal{Q} - \gamma\mathcal{N} - m_Y = 0, \quad (\text{B.23})$$

*konstitucijske enačbe*

$s \in [0, L]$  :

$$f_7(\varepsilon, \kappa, \varphi, \mathcal{R}_X, \mathcal{R}_Z) = \mathcal{N}_c - \mathcal{N} = 0, \quad (\text{B.24})$$

$$f_8(\gamma, \varphi, \mathcal{R}_X, \mathcal{R}_Z) = \mathcal{Q}_c - \mathcal{Q} = 0, \quad (\text{B.25})$$

$$f_8(\varepsilon, \kappa, \varphi, \mathcal{M}) = \mathcal{M}_c - \mathcal{M} = 0 \quad (\text{B.26})$$

ter pripadajoči naravni (ali statični) in bistveni (ali kinematični) robni pogoji  
 $s = 0$  :

$$\begin{aligned} -S_1 - \mathcal{R}_X(0) &= 0, & u(0) &= U_1, \\ -S_2 - \mathcal{R}_Z(0) &= 0, & w(0) &= U_2, \\ -S_3 - M(0) &= 0, & \varphi(0) &= U_3, \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

$s = L$  :

$$\begin{aligned} -S_4 + \mathcal{R}_X(L) &= 0, & u(L) &= U_4, \\ -S_5 + \mathcal{R}_Z(L) &= 0, & w(L) &= U_5, \\ -S_6 + M(L) &= 0, & \varphi(L) &= U_6. \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

V nadaljevanju z integracijo rešimo kinematične enačbe (B.2)–(B.4):

$$u(s) = u(0) - \Delta X(s) + \int_0^s ((1 + \varepsilon) \cos \varphi + \gamma \sin \varphi) d\xi, \quad (\text{B.29})$$

$$w(s) = w(0) - \Delta Z(s) - \int_0^s ((1 + \varepsilon) \sin \varphi - \gamma \cos \varphi) d\xi, \quad (\text{B.30})$$

$$\varphi(s) = \varphi(0) + \int_0^s (\kappa + \kappa_0) d\xi. \quad (\text{B.31})$$

Podobno rešimo tudi ravnotežne enačbe, torej:

$$\mathcal{R}_X(s) = \mathcal{R}_X(0) - \int_0^s p_X d\xi, \quad (\text{B.32})$$

$$\mathcal{R}_Z(s) = \mathcal{R}_Z(0) - \int_0^s p_Z d\xi, \quad (\text{B.33})$$

$$\mathcal{M}(s) = \mathcal{M}(0) + \int_0^s ((1 + \varepsilon) \mathcal{Q} - \gamma \mathcal{N} - m_Y) d\xi. \quad (\text{B.34})$$

Z izvrednotenjem enačb (B.29)–(B.34) za vrednost  $s = L$  povežemo kinematične robne količine  $u(0)$ ,  $w(0)$ ,  $\varphi(0)$ ,  $u(L)$ ,  $w(L)$ ,  $\varphi(L)$  in posplošene robne ravnotežne količine  $\mathcal{R}_X(0)$ ,  $\mathcal{R}_Z(0)$ ,  $\mathcal{M}(0)$ ,  $\mathcal{R}_X(L)$ ,  $\mathcal{R}_Z(L)$ ,  $\mathcal{M}(L)$  z deformacijskimi količinami  $\varepsilon(s)$ ,  $\gamma(s)$  in  $\kappa(s)$ . Po vstavitvi teh zvez v Hu-Washizujev funkcional iz njega odpadejo kinematične in ravnotežne enačbe zaradi identičnega zadoščanja členom pri variacijah kinematičnih in ravnotežnih količin [60]. Ko tako preoblikovanemu funkcionalu dodamo kinematične robne vezi, dobimo t.i. modificirani posplošeni izrek o virtualnem delu:

$$\begin{aligned} \delta \bar{W}^* &= \int_0^L (\mathcal{N}_c - \mathcal{N}) \delta \varepsilon ds + \int_0^L (\mathcal{Q}_c - \mathcal{Q}) \delta \gamma ds + \int_0^L (\mathcal{M}_c - \mathcal{M}) \delta \kappa ds + \\ &\left( u(L) - u(0) + \Delta X_L - \int_0^L \left( (1 + \varepsilon) \cos \varphi + \frac{\mathcal{Q}}{GA_s} \sin \varphi \right) ds \right) \delta \mathcal{R}_X(0) + \\ &\left( w(L) - w(0) + \Delta Z_L + \int_0^L \left( (1 + \varepsilon) \sin \varphi - \frac{\mathcal{Q}}{GA_s} \cos \varphi \right) ds \right) \delta \mathcal{R}_Z(0) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left( \varphi(L) - \varphi(0) - \int_0^L (\kappa + \kappa_0) ds \right) \delta \mathcal{M}(0) - \\
 & \left( S_1 + \mathcal{R}_X(0) \right) \delta U_1 - \left( S_2 + \mathcal{R}_Z(0) \right) \delta U_2 - \left( S_3 + \mathcal{M}(0) \right) \delta U_3 - \\
 & \left( S_4 - \mathcal{R}_X(L) \right) \delta U_4 - \left( S_5 - \mathcal{R}_Z(L) \right) \delta U_5 - \left( S_6 - \mathcal{M}(L) \right) \delta U_6 = 0. \quad (\text{B.35})
 \end{aligned}$$

Pomembna lastnost modificiranega posplošenega izreka o virtualnem delu (B.35) je, da v njem kot funkcijske neznanke nastopajo le deformacijske količine  $\varepsilon(s)$ ,  $\gamma(s)$  in  $\kappa(s)$ .

V nadaljevanju izraz (B.35) z eliminacijo strižne deformacije  $\gamma(s)$  še dodatno poenostavimo. Ob predpostavljene preprostemu poteku strižnih deformacij po prerezu velja  $\mathcal{Q}_c = GA_s \gamma$ . Če ta izraz vstavimo v linearno enačbo (B.12), dobimo eksplicitni izraz za strižno deformacijo:

$$\gamma = \bar{\gamma}(\kappa, \mathcal{R}_X(0), \mathcal{R}_Z(0), \varphi(0)) = \frac{\mathcal{R}_X \sin \varphi + \mathcal{R}_Z \cos \varphi}{GA_s} = \frac{\mathcal{Q}}{GA_s}. \quad (\text{B.36})$$

Ko vstavimo izraz (B.36) v funkcional (B.35), je drugemu integralu identično zadoščeno, zato odpade. Modificirani posplošeni izrek o virtualnem delu (B.35) je na ta način odvisen samo od posplošenih robnih ravnotežnih sil  $\mathcal{R}_X(0)$ ,  $\mathcal{R}_Z(0)$  in  $\mathcal{M}(0)$ , od kinematičnih robnih vrednosti  $u(0)$ ,  $w(0)$ ,  $\varphi(0)$ ,  $u(L)$ ,  $w(L)$ ,  $\varphi(L)$  ter od funkcij  $\varepsilon(s)$  in  $\kappa(s)$ . Na ta način postane primeren za implementacijo v metodi končnih elementov, saj sta  $\varepsilon(s)$  in  $\kappa(s)$  edini funkcijski neznanki.

V posebnem primeru uporabe enostavnega linearno elastičnega materialnega modela lahko pišemo  $\varepsilon(s) = \mathcal{N}(s)/EA$  [75]. Ob uporabi tega izraza v funkcionalu (B.35) je identično zadoščeno tudi prvemu integralu, ki zato, kot pred tem drugi integral, odpade. Tako postane  $\kappa(s)$  poleg posplošenih robnih ravnotežnih sil in kinematičnih robnih vrednosti edina neznana funkcija (podobno Saje et al. [73, 75], kjer je edina neznana funkcija  $\varphi(s)$ ).

## Standardna ali Galerkinova metoda končnih elementov

Za aproksimacijo specifične spremembe dolžine  $\varepsilon(s)$  in psevdoukrivljenosti težiščne osi nosilca  $\kappa(s)$  izberemo Lagrangeve polinome  $P_{n\varepsilon}(s)$  ( $n_\varepsilon = 1, 2, \dots, N_\varepsilon$ ) in  $P_{n\kappa}(s)$  ( $n_\kappa = 1, 2, \dots, N_\kappa$ ) stopnje  $N_\varepsilon - 1$  oziroma  $N_\kappa - 1$ . Nosilec začetne dolžine  $L$  razdelimo z  $N_\varepsilon$  oziroma  $N_\kappa$  ekvidistančnimi točkami na  $N_\varepsilon - 1$  oziroma  $N_\kappa - 1$  odsekov. Specifično spremembo dolžine  $\varepsilon(s)$  in psevdoukrivljenost  $\kappa(s)$  ter začetno ukrivljenost  $\kappa_0(s)$  aproksimiramo z nastavki:

$$\varepsilon(s) = \sum_{n=1}^N P_{n\varepsilon}(s) \varepsilon_n, \quad \kappa(s) = \sum_{n=1}^N P_{n\kappa}(s) \kappa_n, \quad \kappa_0(s) = \sum_{n=1}^N P_{n\kappa}(s) \kappa_{n0}. \quad (\text{B.37})$$

Pri tem predstavljajo  $\varepsilon_n$  ( $n_\varepsilon = 1, \dots, N_\varepsilon$ ) vozliščne specifične spremembe dolžin,  $\kappa_n$  in  $\kappa_{n0}$  ( $n_\kappa = 1, \dots, N_\kappa$ ) pa vozliščne psevdoukrivljenosti oziroma začetne vozliščne ukrivljenosti v ekvidistančnih točkah. Na povsem analogen način kot v (B.37) izpeljemo tudi nastavek za variacijo specifične spremembe dolžine in psevdoukrivljenosti težiščne osi nosilca:

$$\delta \varepsilon(s) = \sum_{n=1}^N P_{n\varepsilon}(s) \delta \varepsilon_n, \quad \delta \kappa(s) = \sum_{n=1}^N P_{n\kappa}(s) \delta \kappa_n. \quad (\text{B.38})$$

Ob upoštevanju predpostavke (B.36) vstavimo nastavkov (B.37) in (B.38) v modificirani izrek o virtualnem delu oziroma v funkcional (B.35) in dobimo:

$$\begin{aligned}
\delta \bar{W}^* &= \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} \left( \int_0^L (\mathcal{N}_c - \mathcal{N}) ds \right) \delta \varepsilon_n + \sum_{n=1}^{N_\kappa} \left( \int_0^L (\mathcal{M}_c - \mathcal{M}) ds \right) \delta \kappa_n + \\
&\left( u(L) - u(0) + \Delta X_L - \int_0^L \left( (1 + \varepsilon) \cos \varphi + \frac{\mathcal{Q}}{GA_s} \sin \varphi \right) ds \right) \delta \mathcal{R}_X(0) + \\
&\left( w(L) - w(0) + \Delta Z_L + \int_0^L \left( (1 + \varepsilon) \sin \varphi - \frac{\mathcal{Q}}{GA_s} \cos \varphi \right) ds \right) \delta \mathcal{R}_Z(0) - \\
&\left( \varphi(L) - \varphi(0) - \sum_{n=1}^N P_{n\kappa}^*(L) (\kappa_n + \kappa_{n0}) \right) \delta \mathcal{M}(0) + \\
&\left( S_1 + \mathcal{R}_X(0) \right) \delta U_1 - \left( S_2 + \mathcal{R}_Z(0) \right) \delta U_2 - \left( S_3 + \mathcal{M}(0) \right) \delta U_3 - \\
&\left( S_4 - \mathcal{R}_X(L) \right) \delta U_4 - \left( S_5 - \mathcal{R}_Z(L) \right) \delta U_5 - \left( S_6 - \mathcal{M}(L) \right) \delta U_6 = 0, \tag{B.39}
\end{aligned}$$

kjer je

$$P_{n\kappa}^*(s) = \int_0^s P_{n\kappa}(\xi) d\xi. \tag{B.40}$$

Ob zahtevi, da so koeficienti pri neodvisnih variacijah  $\delta \varepsilon_n$  ( $n_\varepsilon = 1, \dots, N_\varepsilon$ ),  $\delta \kappa_n$  ( $n_\kappa = 1, \dots, N_\kappa$ ),  $\delta \mathcal{M}(0)$ ,  $\delta \mathcal{R}_1(0)$ ,  $\delta \mathcal{R}_2(0)$ ,  $\delta U_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) v enačbi (B.39) enaki nič, dobimo sistem Euler-Lagrangevih enačb, ki jih v nadaljevanju imenujemo *diskretne posplošene ravnotežne enačbe končnega elementa*:

$$g_{n\varepsilon} = \int_0^L (\mathcal{N}_c - \mathcal{N}) P_{n\varepsilon} ds = 0, \quad n_\varepsilon = 1, 2, \dots, N_\varepsilon, \tag{B.41}$$

$$g_{n\kappa} = \int_0^L (\mathcal{M}_c - \mathcal{M}) P_{n\kappa} ds = 0, \quad n_\kappa = 1, 2, \dots, N_\kappa \tag{B.42}$$

$$g_{N+1} = u(L) - u(0) + \Delta X_L - \int_0^L \left( (1 + \varepsilon) \cos \varphi + \frac{\mathcal{Q}}{GA_s} \sin \varphi \right) ds = 0, \tag{B.43}$$

$$g_{N+2} = w(L) - w(0) + \Delta Z_L + \int_0^L \left( (1 + \varepsilon) \sin \varphi - \frac{\mathcal{Q}}{GA_s} \cos \varphi \right) ds = 0, \tag{B.44}$$

$$g_{N+3} = \varphi(L) - \varphi(0) - \sum_{n=1}^N \left( P_n^*(L) (\kappa_n + \kappa_{n0}) \right) = 0, \tag{B.45}$$

$$g_{N+4} = S_1 + \mathcal{R}_X(0) = 0, \tag{B.46}$$

$$g_{N+5} = S_2 + \mathcal{R}_Z(0) = 0, \quad (\text{B.47})$$

$$g_{N+6} = S_3 + \mathcal{M}(0) = 0, \quad (\text{B.48})$$

$$g_{N+7} = S_4 - \mathcal{R}_X(0) + \int_0^L p_x \, ds = 0, \quad (\text{B.49})$$

$$g_{N+8} = S_5 - \mathcal{R}_Z(0) + \int_0^L p_z \, ds = 0, \quad (\text{B.50})$$

$$g_{N+9} = S_6 - \mathcal{M}(0) - \int_0^L \left( ((1 + \varepsilon) - \frac{\mathcal{N}}{GA_s}) \mathcal{Q} - m_y \right) ds = 0. \quad (\text{B.51})$$

Za znano zunanjo obtežbo sestavljajo enačbe (B.41)–(B.51) sistem  $N_\varepsilon + N_\kappa + 9$  algebrskih enačb za določitev  $N_\varepsilon + N_\kappa + 9$  neznank. Med neznankami je  $N_\varepsilon + N_\kappa + 3$  notranjih prostostnih stopenj  $\varepsilon_n$  ( $n_\varepsilon = 1, \dots, N_\varepsilon$ ),  $\kappa_n$  ( $n_\kappa = 1, \dots, N_\kappa$ ),  $\mathcal{R}_X(0)$ ,  $\mathcal{R}_Z(0)$ ,  $\mathcal{M}(0)$ , in šest zunanjih prostostnih stopenj  $u(0)$ ,  $w(0)$ ,  $\varphi(0)$ ,  $u(L)$ ,  $w(L)$ ,  $\varphi(L)$  končnega elementa. Funkcije  $\mathcal{R}_X(s)$ ,  $\mathcal{R}_Z(s)$ ,  $\mathcal{M}(s)$ ,  $\varphi(s)$ ,  $\mathcal{N}(s)$  in  $\mathcal{Q}(s)$  iz vrednotimo s pomočjo nastavkov (B.32)–(B.34), (B.30), (B.9) in (B.10). Integrale v enačbah (B.41)–(B.44) in (B.51) izračunamo s pomočjo Gaussove ali Lobattove numerične integracijske sheme. Gaussova integracijska shema je sicer natančnejša, a običajno uporabimo Lobattovo integracijsko shemo, ki v nasprotju z Gaussovo zajame tudi robni točki končnega elementa.

Del notranjih prostostnih stopenj ( $\varepsilon_n$ ,  $\kappa_n$ ) elementa kondenziramo s postopkom numerične kondenzacije na nivoju elementa, preostale notranje prostostne stopnje  $\mathcal{R}_X(0)$ ,  $\mathcal{R}_Z(0)$ ,  $\mathcal{M}(0)$  in zunanje prostostne stopnje  $u(0)$ ,  $w(0)$ ,  $\varphi(0)$ ,  $u(L)$ ,  $w(L)$ ,  $\varphi(L)$  pa po znanem postopku združimo v enačbo konstrukcije.

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{R}(\mathbf{x}) - \lambda(\mathbf{P}). \quad (\text{B.52})$$

Vektor  $\mathbf{x}$  v enačbi (B.52) imenujemo vektor posplošenih pomikov. V njem so zajeti vozliščni pomiki in zasuki konstrukcije ter statične količine na robovih elementov.  $\lambda$  predstavlja obtežni faktor. Enačbe (B.52) imenujemo *diskretne posplošene enačbe konstrukcije* in jih v nadaljevanju rešujemo z inkrementno-iteracijskimi metodami, ki so podrobno opisane v [60].

Za označevanje končnih elementov običajno uporabimo oznako  $E_{i-j}$ . Pri tem indeks  $i$  označuje stopnjo interpolacijskega polinoma, ki bo v vseh primerih enaka za specifično spremembo dolžine  $\varepsilon$  kot tudi za pseudoukrivljenost težiščne osi  $\kappa$  ravninskega ukrivljenega nosilca. Indeks  $j$  označuje stopnjo uporabljene numerične integracije vzdolž osi elementa.

V tem dodatku smo predstavili končne elemente za statično analizo ukrivljenih ravninskih nosilcev. Prečni prerezi ukrivljenih nosilcev so simetrični, glede na globalno koordinatno os  $Y$  in so lahko sestavljeni iz poljubnega števila homogenih podprerezov, kar ustrezno upoštevamo v konstitucijskih enačbah (B.14)–(B.16). V člankih [16, 18, 93] predstavimo razširitev predstavljenih končnih elementov na končne elemente za analizo ravninskih ukrivljenih kompozitnih nosilcev.



Pri tem izpeljemo konstitucijske enačbe ravninskega ukrivljenega nosilca (B.14)–(B.16) na podlagi konstitucijskih enačb kompozitnih plošč [92]. Prečni prerez kompozitnega nosilca je lahko sestavljen iz poljubnega števila lamel, ki jih modeliramo z ortotropnim elastičnim materialnim modelom. Ta je lahko za vsako lamelo različen, prav tako pa je za vsako lamelo orientacija osi ortotropije poljubna, glede na lokalni koordinatni sistem ukrivljenega kompozitnega nosilca  $(s, r, t)$ .

Natančnost in učinkovitost predstavljenih končnih elementov za statično analizo ukrivljenih ravninskih nosilcev s homogenimi in kompozitnimi prerezi prikažemo na izbranih računskih primerih v [16, 18, 61, 93]. Med drugim primerjamo rezultate naših računskih analiz tudi z analitičnimi rezultati drugih avtorjev in ugotovimo odlično ujemanje ob uporabi le nekaj končnih elementov.

# Literatura

1. ABDEL AZIZ, K., *Modelisation et etude experimentale de poutres mixtes acier-beton a connexion partielle ou espacee*, Doktorska disertacija, Institut National des Sciences Appliquees des Rennes, 1986.
2. ADEKOLA, A.O., *Partial interaction between elastically connected elements of a composite beam*, International Journal of Solids&Structures, 4, 1125-1135, 1968.
3. ALLWOOD, R.J., BAJARWAN, A.A., *Modeling nonlinear bond-slip behavior for finite element analyses of reinforced concrete structures*, ACI Structural Journal, 93(5), 538-544, 1996.
4. ALMUSALLAM, T.H., AL-SALLOUM, Y.A., *Ultimate strength prediction for RC beams externally strengthened by composite materials*, Composites, Part B Engineering, 32, 609-619, 2001.
5. ANSOURIAN, P., *Experiments on continuous composite beams*, Proc. Instn. Civ. Engrs., Part 2, 71, 25-51, 1981.
6. ARIZUMI, Y., HAMADA, S., KAJITA, T., *Elastic-plastic analysis of composite beams with incomplete interaction by finite element method*, Computers&Structures, 14(4-5), 453-462, 1981.
7. AYOUB, A., FILLIPOU, F.C., *Mixed formulation of nonlinear steel-concrete composite beam element*, Journal of Structural Engineering, ASCE, 126(3), 371-381, 2000.
8. AYOUB, A., *A two-field mixed variational principle for partially connected composite beams*, Finite Elements in Analysis and Design, 37, 929-959, 2001.
9. BANOVEC, J., *Geometrijska in materialna nelinearnost pri ravninskih okvirnih konstrukcijah*, Doktorska disertacija, FGg, Univerza v Ljubljani, 1986.
10. BASS, R., CARRASQUILLO, R.L., JIRSA, J.O., *Shear transfer across new and existing concrete interfaces*, ACI Structural Journal, 86(4), 383-393, 1989.
11. BETTI, R., GJELSVIK, A., *Elastic composite beams*, Computers&Structures, 59(3), 437-451, 1996.

12. BRADFORD, M.A., GILBERT, R.I., *Composite beams with partial interaction under sustained loads*, Journal of Structural Engineering, ASCE, 118(7), 1871-1883, 1992.
13. BRATINA, S., *Odziv armiranobetonskih linijskih konstrukcij na požarno obtežbo*, Doktorska disertacija, FGG, Univerza v Ljubljani, 2003.
14. CREUS, G.J., *Viscoelasticity-Basic theory and applications to concrete structures*, Springer Verlag, 1986.
15. ČAS, B., *Vpliv podajnosti stika na togost in nosilnost sestavljenih nosilcev*, Diplomaska naloga, FGG, Univerza v Ljubljani, 1999.
16. ČAS, B., VRATUŠA, S., PLANINC, I., SAJE, M., *Deformation-based nonlinear analysis of curved composite planar beams*, Ninth annual international conference on composite engineering, New Orleans ICCE, 101-102, 2002.
17. ČAS, B., SAJE, F., SAJE, M., PLANINC, I., *Nonlinear finite element analysis of composite planar frames with interlayer slip*, Proceedings of the sixth International conference on computational structures technology, 1-18, 2002.
18. ČAS, B., VRATUŠA, S., SAJE, M., PLANINC, I., *Analiza ukrivljenih kompozitnih nosilcev*, Zbornik del Kuhljevi dnevi 2002, 41-48, 2002.
19. ČAS, B., SAJE, M., PLANINC, I., *Vpliv podajnosti stika na togost slojevitih ojačanih konstrukcij*, Zbornik 24. zborovanja gradbenih konstruktorjev Slovenije, 285-294, 2002.
20. ČAS, B., PLANINC, I., SAJE, M., *Analiza nosilnosti sovprežnih kontinuirnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med slojema*, Zbornik del Kuhljevi dnevi 2003, 199-206, 2003.
21. DANIELS, B.J., CRISINEL, M., *Composite slab behavior and strength analysis. Part I: Calculation procedure*, Journal of Structural Engineering, ASCE 119(1), 16-35, 1993.
22. DANIELS, B.J., CRISINEL, M., *Composite slab behavior and strength analysis. Part II: Comparison with test results and parametric analysis*, Journal of Structural Engineering, ASCE, 119(1), 36-49, 1993.
23. DAVIDS, W.G., *Nonlinear analysis of FRP-glulam-concrete beams with partial interaction*, Journal of Structural Engineering, ASCE, 127(8), 967-971, 2001.
24. DESAYI, P., KRISHNAN, S., *Equation for the stress-strain curve of concrete*, Journal of American Concrete Institute, No. 61-22, 1964.
25. DEZI, L., TARANTINO, A.M., *Creep in composite continuous beams. I: Theoretical treatment*, Journal of Structural Engineering, ASCE, 119(7), 2095-2111, 1993.
26. DEZI, L., TARANTINO, A.M., *Creep in composite continuous beams. II: Parametric study*, Journal of Structural Engineering, ASCE, 119(7), 2112-2133, 1993.
27. *Einführung in die Norm SIA 164, Holzbau, Autographie zum Fortbildungskurs für Bauingenieure*, ETH Zurich, 7-9 Oktober 1981.
28. EUROCODE 1, *Basic of Design and Actions on Structures*, ENV 1991, 1995.

29. EUROCODE 2, *Design of Concrete Structures, Part 1: General rules and rules for building*, prENV 1992-1-1, 2001.
30. EUROCODE 4, *Design of composite steel and concrete structures, Part 1-1: General rules and rules for buildings*, ENV 1994-1-1, 1992.
31. EUROCODE 5, *Design of timber structures, Part 1-1: General rules and rules for buildings*, ENV 1995-1-1, 1993.
32. FABBROCINO, G., MANFREDI, G., COSENZA, E., *Non-linear analysis of composite beams under positive bending*, Computers&Structures, 70, 77-89, 1999.
33. FABBROCINO, G., MANFREDI, G., COSENZA, E., *Analysis of continuous composite beams including partial interaction and bond*, Journal of Structural Engineering, ASCE, 126(11), 1288-1294, 2000.
34. FERREIRA, A.J.M., CAMANHO, P.P., MARQUES, A.T., FERNANDES, A.A., *Modelling of concrete beams reinforced with FRP rebars*, Composite Structures, 53, 107-116, 2001.
35. CEB-FIP MODEL CODE 90, International Federation for Structural Concrete, 1999.
36. FLAJS, R., SAJE, M., ZAKRAJŠEK, E., *On the Existence and Uniqueness of the Generalized Solution of Reissner's Elastica*, Mathematics and Mechanics of Solids, 8, 3-19, 2003.
37. FOSCHI, R.O., *Load-slip characteristics of nails*, Wood Science, 7(1), 69-76, 1974.
38. FOSCHI, R.O., BONAC, T., *Load-slip characteristics for connections with common nails*, Wood Science, 9(3), 118-123, 1977.
39. GATTESCO, N., *Analytical modeling of nonlinear behavior of composite beams with deformable connection*, Journal of Constructional Steel Research, 52, 195-218, 1999.
40. GHALI, A., FAVRE, R., *Concrete structures: stresses and deformations*, E & FN Spon, London, 1994.
41. GIRHAMMAR, U.A., GOPU, V.K.A., *Composite beam-columns with interlayer slip-exact analysis*, Journal of Structural Engineering, ASCE, 119(4), 1265-1282, 1993.
42. GOEDDEMEYER, L., *Holz-Beton-verbund im Hochbau*, Schweizer Ingenieur und Architekt, 37, 700-709, 1994.
43. GOODMAN, J.R., POPOV, E.P., *Layered beam systems with interlayer slip*, Journal of the Structural Division, ASCE, 94(11), 2535-2547, 1968.
44. HAMADA, S., LONGWORTH, J., *Ultimate strength of continuous composite beams*, Journal of the Structural Division ASCE, 102, 1463-1477, 1976.
45. HIRST, M.J.S., YEO, M.Y., *The analysis of composite beams using standard finite element programs*, Computers&Structures, 11(3), 233-237, 1980.
46. HWANG, S.F., LIU, G.H., *Buckling behavior of composite laminates with multiple delaminations under uniaxial compression*, Composite Structures, 53, 235-243, 2001.
47. KAMIYA, F., *Buckling theory of sheated walls: Linear analysis*, Journal of Structural Engineering, ASCE, 113(9), 2009-2022, 1987.

48. KAMIYA, F., *Buckling of sheated walls: Nonlinear analysis*, Journal of Structural Engineering, ASCE, 114(3), 625-641, 1988.
49. LAU, K.T., DUTTA, P.K., ZHOU, L.M., HUI, D., *Mechanics of bonds in an FRP bonded concrete beam*, Composites, Part B 32, 491-502, 2001.
50. LEE, P.G., SIN, H.C., *Locking free curved beam element based on curvature*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, 37, 989-1007, 1994.
51. LEMAITRE, J., CHABOCHE, J.L., *Mechanics of Solid Materials*, Cambridge University Press, 1990.
52. LOPATIČ, J., ČAS, B., *Vpliv podajnosti stika na obnašanje sestavljenih lesenih nosilcev*, Zbornik 21. zborovanja gradbenih konstruktorjev Slovenije, 175-182, 1999.
53. LOPATIČ, J., *Časovni odziv ojačanih betonskih konstrukcij pri poljubnem nivoju napetosti*, Doktorska disertacija, FGg, Univerza v Ljubljani, 1997.
54. MILNER, H.R., TAN, H.H., *Modelling deformation in nailed, thin-webbed timber box beams*, Computers and Structures, 79, 2541-2546, 2001.
55. MORADI, S., TAHERI, F., *Postbuckling analysis of delaminated composite beams by differential quadrature method*, Composite Structures, 46, 33-39, 1999.
56. MUKHOPADHYAYA, P., SWAMY, N., *Interface shear stress: A new design criterion for plate debonding*, Journal of Composites for Construction, 5(1), 35-43, 2001.
57. NEWMARK, N.M., SIESS, C.P., VIEST I.M., *Test and analysis of composite beams with incomplete interaction*, Proceedings of the Society for Experimental Stress Analysis, 9, 75-92, 1951.
58. NGUYEN, D.M., CHAN, T.K., CHEONG, H.K., *Brittle failure and bond development length of CFRP-concrete beams*, Journal of Composites for Construction, 5(1), 12-17, 2001.
59. OLLGAARD, J.G., SLUTTER, R.G., FISHER, J.W., *Shear strength of stud connectors in lightweight and normal weight concrete*, AISC Engineering Journal, 55-64, 1971.
60. PLANINC, I., *Račun kritičnih točk konstrukcij s kvadratično konvergentnimi direktnimi metodami*, Doktorska disertacija, FGg, Univerza v Ljubljani, 1998.
61. PLANINC, I., ČAS, B., SAJE, M., *Na pseudoukrivljenosti zasnovana analiza ravninskih ukrivljenih nosilcev*, Zbornik del Kuhljevi dnevi 2000, 119-126, 2000.
62. PLANINC, I., BRATINA, S., SAJE, F., SAJE, M., *A kinematically exact FE formulation of planar reinforced concrete frames based on pseudocurvature*, Journal of Applied Mathematics and Mechanics (ZAMM), 81, Supl. 4, S881-S882, 2001.
63. PLANINC, I., SAJE, M., ČAS, B., *On the local stability condition in the planar beam finite element*, Structural Engineering and Mechanics, 12(5), 507-526, 2001.
64. PLANINC, I., ČAS, B., *Numerična analiza sestavljenih in slojevitih ravninskih okvirjev*, Zbornik 23. zborovanja gradbenih konstruktorjev Slovenije, 255-264, 2001.
65. RAHIMI, H., HUTCHINSON, A., *Concrete beams strengthened with externally bonded FRP plates*, Journal of Composites for Construction, 5(1), 44-56, 2001.

66. RAMAN, P.M., DAVALOS, J.F., *Static shear correction factor for laminated rectangular beams*, Composites, Part B 27B, 285-293, 1996.
67. RASHEED, H.A., PERVAIZ, S., *Bond slip analysis of fiber-reinforced polymer-strengthened beams*, Journal of Engineering Mechanics, 128(1), 78-86, 2002.
68. RASSAM, H.Y., GOODMAN, J.R., *Buckling behavior of layered wood columns*, Wood Science, 2(4), 238-246, 1970.
69. RASSAM, H.Y., GOODMAN, J.R., *Design of layered wood columns with interlayer slip*, Wood Science, 3(3), 149-155, 1971.
70. RAZAQPUR, A.G., NOFAL, M., *A finite element for modelling the nonlinear behavior of shear connectors in composite structures*, Computers&Structures, 32(1), 169-174, 1989.
71. REISSNER, E., *On one-dimensional finite-strain beam theory: The plane problem*, Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), 23, 795-804, 1972.
72. SAIDI, M., VRONTINOS, S., DOUGLAS, B., *Model for the response of reinforced concrete beams strengthened by concrete overlays*, ACI Structural Journal, 87(6), 687-695, 1990.
73. SAJE, F., LOPATIČ, J., *A time-dependent analysis of reinforced, prestressed and composite concrete plane frames*, Engineering Modelling, 10, 17-24, 1997.
74. SAJE, M., PLANINC, I., TURK G., VRATANAR, B., *A kinematically exact finite element formulation of planar elastic-plastic frames*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 144, 125-151, 1997.
75. SAJE, M., TURK, G., KALAGASIDU A., VRATANAR, B., *A kinematically exact finite element formulation of elastic-plastic curved beams*, Computers and Structures, 67, 197-214, 1998.
76. SALARI, R., SPACONE, E., SHING, P.B., FRANGOPOL, D.M., *Nonlinear analysis of composite beams with deformable shear connectors*, Journal of Structural Engineering, ASCE, 124(10), 1148-1158, 1998.
77. SALARI, M.R., SPACONE, E., *Analysis of steel-concrete composite frames with bond-slip*, Journal of Structural Engineering, ASCE, 127(11), 1243-1250, 2001.
78. SANKAR, B.V., *A finite element for modeling delaminations in composite beams*, Computers&Structures, 38(2), 239-246, 1991.
79. SCHNABL, S., ČAS, B., TURK, G., PLANINC, I., *Točna analiza mehanskega obnašanja dvoslojnih kontinuirnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa*, Zbornik 25. zborovanja gradbenih konstruktorjev Slovenije, 197-206, 2003.
80. SERACINO, R., OEHLERS, D.J., YEO, M.F., *Partial-interaction flexural stresses in composite steel and concrete bridge beams*, Engineering Structures, 23, 1186-1193, 2001.
81. SILFWERBRAND, J., *Stresses and strains in composite concrete beams subjected to differential shrinkage*, ACI Structural Journal, 94(4), 347-353, 1997.
82. SIMO, J.C., *A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 49, 55-70, 1985.

83. SPOUNTZAKIS, E.J., KATSIKADELIS, J.T., *Interface forces in composite steel-concrete structure*, International Journal of Solids and Structures, 37, 4455-4472, 2000.
84. STEIGER, R., GHERI, E., ARM, H., *Einspannvorrichtung für Zugversuche an Holzproben grosseren Querschnitts*, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zurich, Birhauser Verlag Basel-Boston-Berlin, Bericht 204, 1994.
85. SUBRAMANIAN, P., *Flexural analysis of symmetric laminated composite beams using  $C^1$  finite element*, Composite Structures, 54, 121-126, 2001.
86. THOMPSON, E.G., GOODMAN, J.R., VANDERBILT, M.D., *Finite element analysis of layered wood systems*, Journal of the Structural Division, 101(ST12), 2659-2672, 1975.
87. TOUTANJI, H., ORTIZ, G., *The effect of surface preparation on the bond interface between FRP sheets and concrete members*, Composites, Part B 32, 609-619, 2001.
88. VAN DER LINDEN, M., *Timber-concrete composite beams*, HERON, 44(3), 215-239, 1999.
89. ZUPAN, D., *Rotacijsko invariantne deformacijske količine v geometrijsko točni teoriji prostorskih nosilcev*, Doktorska disertacija, FGG, Univerza v Ljubljani, 2003.
90. ZONA, A., *Finite element modelling of composite beams*, Doktorska disertacija, Univerista degli studi di Ancona, 2002.
91. VRATANAR, B., SAJE, M., *A consistent equilibrium in a cross-section of an elastic-plastic beam*, International Journal of Solids Structures, 36, 311-337, 1999.
92. VINSON, J.R., SIERAKOWSKI, R.L., *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*, Martinus Nijhoff publishers, Dordrecht., 1986.
93. VRATUŠA, S., ČAS, B., PLANINC, I., *Napetostno-deformacijsko stanje kompozitnih nosilcev*, Zbornik 24. zborovanja gradbenih konstruktorjev Slovenije, 295-302, 2002.
94. WANG, Y.C., *Deflection of steel-concrete composite beams with partial shear interaction*, Journal of Structural Engineering, ASCE, 124(10), 1159-1165, 1998.
95. WASHIZU, K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press, Oxford, 1981.
96. WHEAT, D.L., VANDERBILT, M.D., GOODMAN, J.R., *Wood floors with nonlinear nail stiffness*, Journal of Structural Engineering, ASCE 109(5), 1290-1302, 1983.
97. WHEAT, D.L., CALIXTO, J.M., *Nonlinear analysis of two-layered wood members with interlayer slip*, Journal of Structural Engineering, ASCE, 120(6), 1909-1929, 1994.
98. YE, J.Q., *Interfacial shear transfer of RC beams strengthened by bonded composite plates*, Cement & Concrete Composites, 23, 411-417, 2001.
99. YUAN, H., WU, Z., YOSHIZAWA, H., *Theoretical solutions on interfacial stress transfer of externally bonded steel/composite laminates*, Structural Engineering/Earthquake Engineering, JSCE, 18(1), 27s-39s, 2001.