

Univerza  
v Ljubljani

Fakulteta za  
*gradbeništvo in  
geodezijo*



*PODIPLOMSKI ŠTUDIJ  
GEODEZIJE*

*DOKTORSKI ŠTUDIJ*

Kandidat:

**ALEŠ MARJETIČ, univ. dipl. inž. geod.**

**STATISTIČNA ANALIZA ZNAČILNIH PREMIOV  
TOČK V GEODETSKIH MREŽAH**

Doktorska disertacija štev.: 211

**STATYSTICAL ANALYSIS OF SIGNIFICANT POINT  
DISPLACEMENTS IN GEODETIC NETWORKS**

Doctoral thesis No.: 211

Temo doktorske disertacije je odobrila Komisija za doktorski študij na 18. redni seji 16. septembra 2005 in za mentorja imenovala izr. prof. dr. Tomaža Ambrožiča. Na 20. seji Senata Univerze v Ljubljani, dne 12. januarja 2008, je bil imenovan še somentor izr. prof. dr. Bojan Stopar.

Ljubljana, 9. februar 2011

Univerza  
v Ljubljani

Fakulteta za  
*gradbeništvo in  
geodezijo*



**Komisijo za oceno ustreznosti teme doktorske disertacije v sestavi**

- doc. dr. Tomaž Ambrožič
- izr. prof. dr. Bojan Stopar
- prof. dr. Zdravko Kapović, Geodetska fakulteta Univerze v Zagrebu

je imenoval Senat Fakultete za gradbeništvo in geodezijo na  
20. redni seji dne 25. maja 2005.

**Komisijo za oceno doktorske disertacije v sestavi**

- izr. prof. dr. Dušan Kogoj
- prof. dr. Goran Turk
- prof. dr. Zdravko Kapović, Geodetska fakulteta Univerze v Zagrebu

je imenoval Senat Fakultete za gradbeništvo in geodezijo na  
14. redni seji dne 3. novembra 2010.

**Komisijo za zagovor doktorske disertacije v sestavi**

- prof. dr. Matjaž Mikoš, dekan UL FGG
- izr. prof. dr. Dušan Kogoj
- prof. dr. Goran Turk
- prof. dr. Zdravko Kapović, Geodetska fakulteta Univerze v Zagrebu
- izr. prof. dr. Tomaž Ambrožič
- izr. prof. dr. Bojan Stopar

je imenoval Senat Fakultete za gradbeništvo in geodezijo na 17. redni seji  
dne 26. 1. 2011.

Univerza  
v Ljubljani

Fakulteta za  
*gradbeništvo in  
geodezijo*



## IZJAVA O AVTORSTVU

Podpisani **ALEŠ MARJETIČ**, univ. dipl. inž. geod., izjavljam, da sem avtor doktorske disertacije z naslovom: »**STATISTIČNA ANALIZA ZNAČILNIH PREMIOV TOČK V GEODETSKIH MREŽAH**«.

Ljubljana, 9. februar 2011

.....  
(podpis)

## STRAN ZA POPRAVKE

Stran z napako

Vrstica z napako

Namesto

Naj bo

## **ZAHVALA**

*Tomaž, Bojan, Goran, Dušan, Oskar, Simona, Kekec, Sonja, Klemen in ostali člani Oddelka za geodezijo, hvala za pomoč (v vseh možnih oblikah) pri nastajanju naloge. Tudi zaradi vas grem rad v službo.*

*Prof. Zdravko Kapovič, hvala.*

*Dragi prijatelji, oprostite, ker sem vas nehote ob nastajanju tega dela prikrajšal za kakšen skupen trenutek.*

*Mojim trem puncam pa...*

*...zaradi vas ima vse veliko večji smisel...*

*...hvala Lana, Alina in Alenka, ker lahko to delim z vami.*

*Aleš.*

## BIBLIOGRAFSKO – DOKUMENTACIJSKA STRAN

<b>UDK:</b>	<b>528.1:311:(043.3)</b>
<b>Avtor:</b>	<b>Aleš Marjetič, univ. dipl. inž. geod.</b>
<b>Mentor:</b>	<b>izr. prof. dr. Tomaž Ambrožič</b>
<b>Somentor:</b>	<b>izr. prof. dr. Bojan Stopar</b>
<b>Naslov:</b>	<b>Statistična analiza značilnih premikov točk v geodetskih mrežah</b>
<b>Obseg in oprema:</b>	<b>151 str., 20 pregl., 22 sl., 186 en.</b>
<b>Ključne besede:</b>	<b>deformacijska analiza, deformacija, rotacija, normalna deformacija, strižna deformacija, območje zaupanja, testiranje hipotez, verjetnostna porazdelitev, geodetski datum, transformacija S</b>

### Izvleček

Delo obravnava lastnosti deformacij in rotacij v geodetski mreži. V vsaki točki obravnavamo kinematične količine: normalne deformacije, strižne deformacije in rotacije. Za ustrezno statistično obravnavo deformacij in rotacij moramo poznati statistične lastnosti teh parametrov v vsaki točki geodetske mreže. Empirični rezultati kažejo, da so statistične lastnosti deformacij v vsaki točki močno povezane z obravnavano smerjo in lokalno geometrijo geodetske mreže. Na ta način lahko določimo območja zaupanja deformacij za posamezno točko geodetske mreže. Uporabimo jih za izvedbo ustreznih statističnih testov, kjer se odločamo ali je neka deformacija statistično značilna ali ne. Z znanimi velikostmi in oblikami območij zaupanja na točkah lahko ugotovljamo kakovost geometrije geodetske mreže. Poleg tega je glavni namen doktorske disertacije pokazati, da so deformacije in rotacije odvisne od spremembe geodetskega datuma med dvema terminskima izmerama. V primeru dveh različnih koordinatnih sistemov v vsaki epohi ne moremo izračunati pravih vrednosti premikov, deformacij in rotacij. Kljub že opravljenim empiričnim študijam o odvisnosti od datumskih sprememb, smo analitično izpeljali matematične izraze odvisnosti deformacij in rotacij od relativne spremembe datumskih parametrov med dvema terminskima izmerama. Praktični prikaz funkcijske odvisnosti je bil izveden na primeru izbrane ravninske geodetske mreže.

## BIBLIOGRAPHIC – DOCUMENTALISTIC INFORMATION

<b>UDC:</b>	<b>528.1:311:(043.3)</b>
<b>Author:</b>	<b>Aleš Marjetič, univ. dipl. inž. geod.</b>
<b>Supervisor:</b>	<b>associate prof. Tomaž Ambrožič</b>
<b>Co-supervisor:</b>	<b>associate prof. Bojan Stopar</b>
<b>Title:</b>	<b>Statistical analysis of significant point displacements in geodetic network</b>
<b>Notes:</b>	<b>151 p., 20 tab., 22 fig., 186 eq.</b>
<b>Key words:</b>	<b>deformation analysis, strain, rotation, normal strain, shear strain, confidence area, statistical testing, probability distribution, geodetic datum, S-transformation</b>

### Abstract

The thesis deals with the properties of strains and rotations in geodetic network. In each point kinematic quantities are considered: normal strain, shear strain and rotation. Appropriate statistical treatment of kinematic quantities requires known statistical properties of each quantity in each point of geodetic network. Empirical results show that statistical properties of the strains in each point are strongly related to the considered direction in point and local geometry of the geodetic network. In this way the confidence areas for each quantity in each point can be determined. Based on this, we can carry out appropriate statistical testing and decide whether the deformation of the network in point is statistically significant or not. With known size and shape of confidence areas it is also possible to ascertain the quality of the geometry of the geodetic network. Besides this, the main purpose of the thesis was to show that the strain parameters and rotations are dependent on the change of geodetic datum between two survey epochs. In the case of two different coordinate systems in each survey epoch we cannot compute the true values of point displacements, strains and rotations. Despite all empirical studies already carried out in the field of datum invariance of strains and rotations, we analytically derived the mathematical relationship of strains and rotations with respect to the relative changes in geodetic datum parameters between two survey epochs. The practical example of functional dependency was carried out in the case of selected planar geodetic network.

## Kazalo vsebine:

<b>Kazalo vsebine:</b> .....	<b>III</b>
<b>Kazalo preglednic:</b> .....	<b>VI</b>
<b>Kazalo slik:</b> .....	<b>VII</b>
<b>1 UVOD</b> .....	<b>1</b>
1.1 Opis znanstveno raziskovalnega področja.....	1
1.2 Podrobnejša opredelitev teme naloge in predstavitev hipoteze .....	3
1.3 Povzetek do sedaj opravljenih raziskav .....	6
1.4 Zgradba doktorske disertacije.....	9
<b>2 PREDSTAVITEV DEFORMACIJ TELESA</b> .....	<b>11</b>
2.1 Izhodišče .....	11
2.2 Opis deformiranja telesa v prostoru .....	12
2.2.1 Tenzor deformacij .....	14
2.2.2 Geometrijski pomen komponent tenzorja deformacij.....	16
2.2.3 Tenzor majhnih deformacij .....	17
2.2.4 Tenzor majhnih zasukov .....	19
2.3 Lastnosti tenzorja deformacij .....	21
2.3.1 Lastnosti tenzorjev 2. reda.....	21
2.4 Ravninsko deformacijsko stanje v polarnih koordinatah.....	23
2.5 Neodvisnost tenzorja deformacij od izbire koordinatnega sistema.....	26
2.6 Glavne normalne in glavne strižne deformacije v ravnini .....	29
2.6.1 Glavne normalne deformacije.....	29
2.6.2 Glavne strižne deformacije .....	30
<b>3 TENZOR DEFORMACIJ V GEODETSKI MREŽI</b> .....	<b>31</b>
3.1 Matematični in stohastični model geodetske mreže .....	31
3.2 Predpostavka homogenih deformacij .....	33
3.2.1 Parametri deformacij v geodetski mreži .....	40



3.3	Robustnost geodetske mreže.....	42
3.3.1	Analiza robustnosti na podlagi izračunanih mer deformacij v geodetski mreži.	45
<b>4</b>	<b>STATISTIČNE LASTNOSTI TENZORJA DEFORMACIJ IN ROTACIJ V GEODETSKI MREŽI.....</b>	<b>47</b>
4.1	Porazdelitveni zakoni in momenti porazdelitve deformacij in rotacij .....	48
4.2	Statistična značilnost deformacij in rotacij .....	52
<b>5</b>	<b>PROBLEM GEODETSKEGA DATUMA PRI DOLOČITVI STATISTIČNO ZNAČILNIH DEFORMACIJ V GEODETSKI MREŽI .....</b>	<b>53</b>
5.1	Izhodišče problema.....	53
5.2	Geodetski datum.....	57
5.2.1	Definiranje geodetskega datuma z minimalnim številom zunanjih opazovanj ..	59
5.2.2	Definiranje geodetskega datuma z notranjimi opazovanji (notranjimi vezmi) ..	61
5.2.3	Izravnavo geodetske mreže po metodi najmanjših kvadratov z upoštevanjem notranjih vezi za določitev geodetskega datuma .....	64
5.3	Transformacija S.....	65
5.3.1	Izravnavo proste mreže in transformacija S.....	66
5.4	Metode izbire skupnega geodetskega datuma mreže dveh terminskih izmer.....	71
5.4.1	Testiranje homogenosti natančnosti dveh terminskih izmer.....	71
5.4.2	Testiranje skladnosti oblike relativne geodetske mreže v dveh terminskih izmerah – postopek Delft.....	72
5.4.3	Iskanje primernege datuma z uporabo robustnih statističnih metod.....	76
5.5	Odvisnost deformacij od relativne spremembe geodetskega datuma med dvema terminskima izmerama .....	82
5.5.1	Analiza vpliva spremembe datumskih količin na deformacije .....	85
<b>6</b>	<b>PRIMER OBRAVNAVE DEFORMACIJ V GEODETSKI MREŽI.....</b>	<b>89</b>
6.1	Analiza robustnosti geodetske mreže.....	92
6.2	Določitev statističnih lastnosti deformacijskih parametrov v točki .....	95
6.2.1	Izbira velikosti vzorca – število simulacij .....	96
6.2.2	Empirična določitev verjetnostne porazdelitve parametrov deformacij v točkah geodetske mreže.....	98

6.2.3	Primer določitve statistično značilne deformacije v geodetski mreži .....	107
6.3	Analiza vpliva relativne spremembe geodetskega datuma med dvema izmerama...	111
6.3.1	Vpliv razlike v rotaciji geodetske mreže .....	111
6.3.2	Vpliv razlike v merilu geodetske mreže med epohama.....	114
6.3.3	Možnost določitve relativne spremembe geodetskega datuma med dvema izmerama.....	115
6.4	Primeri različnih definicij geodetskega datuma in vplivi na računane premike in deformacije v točkah .....	121
6.4.1	Izravnava proste mreže z enakimi približnimi koordinatami točk.....	122
6.4.2	Definicija geodetskega datuma s klasičnimi metodami deformacijske analize..	124
6.4.3	Primer napačne definicije geodetskega datuma .....	127
<b>7</b>	<b>ZAKLJUČEK.....</b>	<b>131</b>
<b>8</b>	<b>POVZETEK .....</b>	<b>135</b>
<b>9</b>	<b>SUMMARY .....</b>	<b>141</b>
	<b>LITERATURA.....</b>	<b>147</b>

## Kazalo preglednic:

Preglednica 5-1: Datumski parametri pri različnih tipih geodetskih mrež. ....	59
Preglednica 6-1: Koordinate točk v izbrani geodetski mreži.....	89
Preglednica 6-2: Maksimalne vrednosti deformacijskih parametrov zaradi maksimalne vrednosti neodkritih grobih pogreškov v opazovanjih. ....	93
Preglednica 6-3: Določitev povezave in tipa opazovanja, katerega maksimalna vrednost neodkritega grobega pogreška najbolj vpliva na deformacijo v točki.....	93
Preglednica 6-4: Statistične lastnosti glavne normalne deformacije v točki 12. ....	99
Preglednica 6-5: Statistične lastnosti glavne strižne deformacije v točki 12. ....	100
Preglednica 6-6: Statistične lastnosti rotacij v posameznih točkah mreže. ....	102
Preglednica 6-7: Premiki med dvema terminskima izmerama. ....	108
Preglednica 6-8: Izračunane "prave" vrednosti deformacijskih parametrov v geodetski mreži. ....	108
Preglednica 6-9: Parametri deformacij in rotacij iz izravnave simuliranih opazovanj dveh terminskih izmer. ....	110
Preglednica 6-10: Sprememba geodetskega datuma druge izmere glede na prvo izmero. ....	120
Preglednica 6-11: Rezultati iterativnega postopka. ....	120
Preglednica 6-12: Izračunane spremembe koordinat iz rezultatov izravnave proste mreže. ...	123
Preglednica 6-13: Deformacije in rotacije iz rezultatov izravnave proste mreže. ....	123
Preglednica 6-14: Rezultati postopka določanja premikajočih točk. ....	124
Preglednica 6-15: Ocenjene vrednosti premikov točk v geodetski mreži. ....	125
Preglednica 6-16: Diagonalni elementi matrike $\mathbf{E}$ in ocenjene vrednosti premikov. ....	126
Preglednica 6-17: Deformacije in rotacije iz ocenjenih premikov po postopku iterativnega prilagajanja uteži v matriki $\mathbf{E}$ v transformaciji $\mathbf{S}$ . ....	126
Preglednica 6-18: Izračunane koord. spremembe iz rezultatov izravnave vpete mreže na točki 2 in 5.....	127
Preglednica 6-19: Deformacije in rotacije iz rezultatov izravnave vpete mreže na točki 2 in 5. ....	128

## Kazalo slik:

Slika 2-1: Referenčni opis deformiranja telesa v prostoru. ....	14
Slika 2-2: Ravninske deformacije v polarnem koordinatnem sistemu. ....	23
Slika 3-1: Funkcijska zveza uteži $p$ in razdalje med točkama. ....	39
Slika 5-1: Shematski prikaz transformacije S. ....	70
Slika 6-1: Izbrana geodetska mreža 12 točk z izrisanimi absolutnimi (rdeče) in relativnimi (modro) elipsami pogreškov.....	91
Slika 6-2: Maksimalne vrednosti deformacijskih parametrov (rdeča – normalna deformacija, modra – strižna deformacija) v posamezni točki.....	95
Slika 6-3: Konvergenca aritmetične sredine in standardne deviacije normalne deformacije za točko 5 (zgoraj) in točko 12 (spodaj).....	97
Slika 6-4: Porazdelitvena funkcija za normalno deformacijo (sektor $18 - 157.5^\circ$ ) v točki 12. ....	99
Slika 6-5: Porazdelitvena funkcija za strižno deformacijo (sektor $3 - 22.5^\circ$ ) v točki 12. ....	100
Slika 6-6: 95% območja zaupanja za normalne (levo) in strižne (desno) deformacije. ....	103
Slika 6-7: 95% intervali zaupanja za rotacijo v točkah (modra – negativno, rdeča – pozitivno). ....	104
Slika 6-8: Porazdelitvena funkcija za rotacijo v točki 12.....	105
Slika 6-9: 95% območja zaupanja za normalne (levo) in strižne (desno) deformacije v težiščih trikotnikov. ....	106
Slika 6-10: Oblika območja zaupanja na točki 11 (rdeče – normalna, modro – strižna). ....	107
Slika 6-11: Glavne normalne (levo) in strižne (desno) deformacije v točkah mreže. ....	109
Slika 6-12: Funkcijska odvisnost normalne deformacije $E_{xx}$ in $\varepsilon_{xx}$ od spremembe rotacije na intervalu $[-\pi, +\pi]$ na točki 5. ....	111
Slika 6-13: Funkcijska odvisnost strižne deformacije $E_{xy}$ in $\varepsilon_{xy}$ od spremembe rotacije na intervalu $[-\pi, +\pi]$ na točki 5. ....	112
Slika 6-14: Funkcijska odvisnost normalne deformacije $E_{xx}$ in $\varepsilon_{xx}$ od spremembe rotacije na intervalu $[-600", +600"]$ na točki 5.....	113

Slika 6-15: Funkcijska odvisnost strižne deformacije $E_{xy}$ in $\varepsilon_{xy}$ od spremembe rotacije na intervalu $[-600", +600"]$ na točki 5.....	113
Slika 6-16: Funkcijska odvisnost normalne in strižne deformacije ter rotacije od spremembe dolžinskega merila med dvema izmerama na točki 5.....	114
Slika 6-17: Horizontalni premik krivulje funkcijske odvisnosti normalne deformacije od relativne spremembe rotacije med dvema izmerama. ....	117
Slika 6-18: Premiki (zeleno), glavne normalne (rdeče) in strižne (modro) deformacije v geodetski mreži vpeti na točki 2 in 5. ....	129

# 1 UVOD

## 1.1 Opis znanstveno raziskovalnega področja

Na vse naravne in umetno grajene objekte delujejo sile, ki povzročajo, da se ti nehote premaknejo ali se deformirajo. Določitev prostorskih premikov naravnih in umetnih objektov (jezovi, nasipi, mostovi, zgradbe, plazovi, območja ob tektonskih prelomih ...) predstavlja eno zahtevnejših nalog geodetske stroke. Glavni namen takšnega raziskovanja je torej ugotavljanje nevarnosti trajnih deformacij objektov v času njihove izgradnje in po njej, ki so posledica delovanja naravnih sil ali nenadzorovanih posegov v prostor. Področje geodezije, ki se ukvarja z ugotavljanjem premikov oziroma deformacij, imenujemo deformacijska analiza in ima zelo pomembno vlogo predvsem z dveh vidikov. Prvi je varnost. Deformacije objektov lahko v skrajnem primeru ogrožajo človeška življenja. Drugi pa je ekonomski vidik. Vemo, da so stroški popravila trajno deformiranega objekta, ki ne more zagotavljati svoje funkcije in je potencialno nevaren za uporabo, lahko zelo velike.

Tradicionalno metode deformacijske analize ugotavljajo premikanje objekta na podlagi premikov karakterističnih točk, ki ležijo na objektu. Te točke povežemo v geodetsko mrežo. Njena geometrija je odvisna od položaja točk, merskih povezav med njimi in od uporabljene metode merjenja. Geodetska mreža na ta način omogoča spremljanje spreminjanja njene geometrije v nekem časovnem obdobju.

Premike točk v geodetski mreži raziskujemo z različnimi metodami deformacijske analize. Gre za analizo merskih podatkov objekta, ki jih pridobimo z različnimi metodami izmere. V

osnovi jih delimo na absolutne ali geodetske in relativne ali fizikalne. Slednje služijo predvsem določanju deformacij dela objekta znotraj celotnega prostora objekta, medtem ko absolutne podajajo obnašanje objekta v zunanjem prostoru. Absolutne ali geodetske metode omogočajo določitev premikov objekta glede na domnevno mirujočo okolico in s tem hkrati določitev mej premikajočega območja.

Deformacijska analiza kot metoda predstavlja statistični postopek ugotavljanja premikov točk objekta ter določanja značilnih premikov teh točk v geodetski mreži. Gre za zelo pomembno fazo analiziranja merskih podatkov v geodetski mreži. Napačne predpostavke o mirovanju točk mreže imajo lahko hude posledice tako z vidika interpretacije ugotovljenih premikov kot tudi napovedovanja porušitve objektov. Zato ima zelo pomembno vlogo pri ugotavljanju premikov točk statistično testiranje izračunanih sprememb položajev točk. Podrobno poznavanje postopkov in praktične izkušnje so nujno potrebni elementi za pravilno interpretacijo ocenjenih premikov točk.

Za vrednotenje geodetskih merskih podatkov lahko uporabimo različne deformacijske modele (Savšek-Safić 2002):

- kongruenčni, kjer ugotavljamo skladnost identičnih točk mreže brez vezanosti na čas,
- statični, kjer ugotavljamo velikost in natančnost premikov točk,
- kinematični, kjer ugotavljamo hitrost in pospeške gibanja točk mreže,
- dinamični, kjer obravnavamo vplive različnih sil na gibanje točk v prostoru.

Prva dva modela sta tradicionalno povezana s klasičnimi geodetskimi opazovanji, kjer ugotavljamo samo spremembe geometrije geodetske mreže oziroma položajev karakterističnih točk objekta v prostoru in času brez ugotavljanja vzrokov za take spremembe. Dandanes pa se velikokrat postavlja vprašanje vzroka za deformacije obravnavanega objekta. Z identifikacijo sil na objekt in posledičnih deformacij so se razvili t.i. dinamični deformacijski modeli oziroma deformacijski modeli dinamičnih procesov, ki so v zadnjem času zelo razširjeni. Dinamični način obravnavanja deformacij zahteva velikokrat interdisciplinarni pristop. Lahko bi tudi rekli, da dinamični modeli predstavljajo najbolj splošno obliko modela

obravnovanja deformacij objekta. Kongruenčne, statične in kinematične modele dobimo s poenostavitvijo dinamičnih modelov.

## 1.2 Podrobnejša opredelitev teme naloge in predstavitev hipoteze

Deformacije v geodetskem smislu v splošnem obravnavamo na podlagi premikov posameznih točk objekta, ki so povezane v geodetsko mrežo preko geodetskih opazovanj (dolžin in kotov). Geodetska mreža predstavlja strukturo točk, ki so med seboj povezane z geodetskimi opazovanji. Slučajne pogreške, ki se pojavljajo v opazovanjih, pred izravnavo opredelimo z a-priori standardnimi deviacijami opazovanj. Te uporabimo za določitev uteži posameznih opazovanj v izravnavi za izračun koordinatnih neznank v mreži. Tako izračunamo koordinate točk v mreži z natančnostjo, ki je pogojena tudi z natančnostjo opravljenih opazovanj v geodetski mreži. Vsi izračuni in statistični testi v geodetski mreži izhajajo iz izravnave po metodi najmanjših kvadratov na podlagi Gauss-Markovega matematičnega modela geodetske mreže (enačba (3.1)). Temeljijo na predpostavki, da so popravki opazovanj normalno porazdeljeni, kar pomeni, da v opazovanjih ni prisotnih grobih in sistematičnih pogreškov.

Nekatere standardne metode določanja deformacij v geodetski mreži, kot so metode Delft, Hannover, Karlsruhe in Fredericton (Chrzanowski et al. 1983, Van Mierlo 1978, Welsch in Zhang 1983), temeljijo na primerjavi koordinat točk mreže med dvema terminskima izmerama. Z njimi v osnovi testiramo skladnost oblike posameznega dela mreže ali množice točk med dvema terminskima izmerama s pomočjo statističnega testiranja hipotez na podlagi verjetnostne porazdelitve ustrezno izbranih slučajnih spremenljivk. Enakost koordinatnih sistemov ali geodetskih datumov med dvema izmerama v teh metodah zagotovimo z identično datumsko matriko, ki zagotavlja ustrezne notranje datumske vezi v geodetski mreži za definiranje geodetskega datuma. Datum geodetske mreže je definiran kot najmanjše število parametrov, potrebnih za določitev položaja geodetske mreže v prostoru (3D, 2D ali 1D), glede na predhodno definiran koordinatni sistem. Problem datuma geodetske mreže izhaja iz tega, da so običajna geodetska opazovanja notranja opazovanja in s tem omogočajo določitev samo relativnih položajev točk mreže.



Imamo identično izhodišče, orientacijo koordinatnega sistema in merilo med dvema terminskima izmerama. S predpostavko o domnevno mirujočih točkah geodetske mreže na novo definiramo geodetski datum s transformacijo  $S$ , s katero transformiramo vektor koordinatnih sprememb preostalih točk v datum domnevno mirujočih točk. Na ta način določimo vrednosti statistično značilnih premikov ob izbrani stopnji tveganja testa.

Glavno vprašanje, ki se pri uporabi klasičnih metod deformacijske analize zastavlja, je: Ali je pravilna obravnavanje rezultatov izravnave proste mreže posamezne terminske izmere za določevanje premikov točk v geodetski mreži? Ta dilema izhaja iz dejstva, da definicija geodetskega datuma proste mreže ni enolična (poglavje 5). Z namenom najti odgovor na to vprašanje bomo v nalogi namesto določanja statistično značilnih premikov točk geodetske mreže uporabili nekoliko drugačen pristop. Obravnavali bomo deformacije in rotacije telesa, ki ga diskretizira množica točk geodetske mreže, po linearni teoriji mehanike trdnih teles. V posameznih točkah telesa, to je točkah geodetske mreže, bomo iskali vrednosti mehanskih deformacij: normalnih in strižnih deformacij ter vrednosti rotacij. Te količine vsebujeja tenzor deformacij in tenzor rotacij in jih bomo obravnavali kot parametre deformacij. Kot v že poznanih metodah deformacijske analize, se bomo osredotočili na ugotavljanje statistično značilnih vrednosti deformacij in rotacij v posamezni točki. Da se lahko z ustreznim statističnim testom odločimo o statistični značilnosti deformacij in rotacij, potrebujemo informacijo o verjetnostni porazdelitvi posameznega parametra kot slučajne spremenljivke. Eden od ciljev naloge bo torej določiti verjetnostno porazdelitev posameznega parametra deformacij in rotacij v posamezni točki geodetske mreže. Ker so mehanske deformacije in rotacije v funkcijski zvezi z vrednostmi premikov točk mreže, torej tudi z opazovanji v mreži, lahko empirično določimo verjetnostno porazdelitev parametrov deformacij s spreminjanjem vrednosti opazovanj po dani verjetnostni porazdelitvi opazovanj. Na ta način določimo vzorec vrednosti posameznega parametra. Z določitvijo lastnosti vzorca vrednosti slučajne spremenljivke izračunamo srednje vrednosti in meje intervala zaupanja ob ustrezno izbranih stopnjah tveganja. Na podlagi znanih intervalov zaupanja se lahko odločamo o statistični značilnosti deformacij in rotacij v posamezni točki geodetske mreže. Velikosti intervalov zaupanja obravnavanih deformacij in rotacij kot slučajnih spremenljivk so lastni posamezni točki geodetske mreže in kot se bo izkazalo v nadaljevanju tudi orientacijsko pogojeni. Deformacija, ki se nahaja znotraj intervala zaupanja, ne more biti označena kot statistično

značilna (ob izbranem tveganju). S primerjavo velikosti intervalov zaupanja med točkami mreže, lahko ugotovimo, v katerih predelih mreže lahko zaznamo manjše deformacije oziroma je mreža bolj sposobna zaznati manjše vrednosti deformacij in rotacij. Iz tega dejstva izhaja tudi ena od možnosti definiranja kakovosti geometrije geodetske mreže.

Tenzor deformacij, iz katerega bomo računali deformacijske parametre, je neodvisen od izbire koordinatnega sistema (Stanek in Turk 1998). Rešitve, to je izračunane mere deformacij v točki, so neodvisne od izbire koordinatnega sistema ali geodetskega datuma. Pokazano je bilo (Xu et al. 2000), da neenotnost pri definiranju datuma geodetske mreže med dvema izmerama, kljub datumski invariantnosti tenzorja deformacij, povzroči spremembe v izračunanih deformacijah. Izpostavljen je bil predvsem problem neenake rotacije mreže. Za pravilno določitev deformacij in rotacij v geodetski mreži med dvema izmerama moramo imeti definiran primeren geodetski datum, ki mora biti enoten in enolično določen v obeh terminskih izmerah. Iščemo torej način, kako primerno uskladiti geodetska datuma dveh terminskih izmer. Iz tega izhaja osnovna hipoteza naloge, ki predpostavlja, da:

*Samo identični geodetski datum v obeh primerjanih terminskih izmerah zagotavlja koordinatni rešitvi za točke geodetske mreže, ki predstavljata pravilna relativna razmerja med deformacijskima stanjema objekta.*

Slednje, kot bo v nalogi predstavljeno, pripelje do pravih rešitev za iskane deformacije objekta v smislu mehanike trdnih teles, ki ni strogo geodetsko področje. Če pa obravnavamo problem povsem geodetsko, je potrebno osnovno hipotezo nadgraditi z:

*Fizično predstavlja datum geodetske mreže predstavlja osnovo za določevanje dejanskih premikov in oceno natančnosti premikov točk v geodetski mreži. Tako lahko geodetske metode določitve premikov le ob ustreznem modelu obdelave merskih podatkov, ki upošteva koordinatni sistem mreže v posameznem časovnem trenutku, odkrijejo domnevno mirujoče točke ter določajo premike drugih točk.*

V nalogi bomo skušali razlike v definiciji datuma med dvema izmerama podrobneje raziskati. Pogojno datumsko odvisnost deformacijskih parametrov bomo skušali za razliko od do sedaj

opravljenih raziskav (Xu et al. 2000) tudi analitično izpeljati na podlagi znane funkcijske odvisnosti deformacij s spremembami koordinat točk med dvema izmerama.

### 1.3 Povzetek do sedaj opravljenih raziskav

Tradicionalni pristop pri obravnavanju deformacij objektov je torej določanje premikov objekta v prostoru in času. Iskanje optimalne metode deformacijske analize za ugotavljanje premikov točk objekta je bilo do sedaj že predmet številnih raziskovalcev po svetu. Vsaka izvedena metoda je obravnavala druge predpostavke, matematični model ter statistično analizo. Zato se te metode razlikujejo po načinu in racionalnosti uporabe. V Bonnu je bila leta 1978 v sklopu 6. komisije FIG ustanovljena skupina za poenotenje metod in postopkov deformacijske analize. V skupino so bili vključeni nekateri svetovni raziskovalni centri (Savšek Safić 2002):

- Računalniški center Geodetskega inštituta Tehnične univerze Delft na Nizozemskem (Van Mierlo, J. J. Kok),
- Oddelek za geodezijo Univerze New Brunswick v Kanadi (A. Chrzanowski, Y. Q. Chen, J. Secord),
- Geodetski inštitut Univerze Hannover v Nemčiji (H. Pelzer),
- Geodetski inštitut Univerze Karlsruhe v Nemčiji (K. R. Koch, B. Heck, E. Kuntz, B. Meier-Hirmer),
- Inštitut za geodezijo Visoke vojaške šole München v Nemčiji (W. Welsch).

Vsak od teh centrov je uporabljal svoj matematični pristop k reševanju problema. Cilj je bil rešiti problem določanja značilnih premikov točk v geodetski mreži ter ugotavljanje primerljivosti rezultatov na različnih praktičnih mrežah. Tako so se razvile različne metode, ki jih danes obravnavamo kot klasične geodetske metode deformacijske analize. Razlikujejo se v matematičnih modelih, obdelavi in testiranju hipotez. Vsaka od metod ima svoje prednosti in slabosti. Zato ni mogoče trditi, da je katera od metod boljša od drugih. Kot se je pokazalo, je vseh pet zgoraj omenjenih metod posameznih raziskovalnih centrov na identičnih

geodetskih mrežah dajalo primerljive rezultate ne glede na različne matematične modele in postopke testiranja hipotez.

Poleg zgoraj omenjenih metod, so v svetu in na območju bivše Jugoslavije nastajale še druge metode. Najbolj znani sta metodi Slobodana Ašanina ter metoda, ki sta jo razvila Krunoslav Mihailović in Ivan Aleksić (Savšek Safić 2002): Ašanin je svojo metodo deformacijske analize zasnoval na ugotavljanju območij stabilnih točk v vseh kombinacijah točk v mreži. S tem zagotavlja, da se lahko določijo vsa območja skladnosti in določi vse mirujoče točke. Avtor je metodo testiral na simuliranih mrežah in jo primerjal z nekaterimi tujimi metodami.

Mihailović in Aleksić sta obravnavala problematiko kvalitete geodetskih mrež in transformacije koordinat ter metode deformacijske analize. Predlagala sta novo metodo ugotavljanja premikov točk na osnovi izračuna navideznih in relativnih premikov. Metoda je bila testirana na simulirani mreži. Dobljeni rezultati (določitev velikosti premikov) metode so se v primeru večjih premikov skladali s simuliranimi premiki, zato avtorja ugotavljata, da gre za zelo enostavno metodo ugotavljanja premikov točk.

Na Slovenskem območju je Jožefa Švarc testirala metodi Ašanina in Mihailovića. Ugotavljala je premikanje fundamentalnih reperjev Ljubljanske nivelmanske mreže in po obeh metodah dobila identične rezultate, s tem da je ugotovila, da je metoda Ašanina veliko zamudnejša, ker obravnava vse kombinacije točk v mreži.

Tomaž Ambrožič je v svoji magistrski nalogi obravnaval metodo Hannover. Razlog za uporabo ravno te metode je v tem, da je enostavno izpolniti vse pogoje, ki jih metoda zahteva. Rezultat obravnave je računalniški program za izračun premikov točk po postopku Hannover.

Simona Savšek je v svoji doktorski disertaciji obravnavala problem določitve optimalne metode deformacijske analize v sklopu klasičnih metod deformacijske analize. Obravnavala je možnost določitve najbolj univerzalne in ekonomsko uporabne metode ugotavljanja premikanja geodetskih točk. Na praktičnih primerih je primerjala rezultate nekaterih metod.

Z izsledki raziskave je skušala opredeliti potrebne faze optimalne metode deformacijske analize.

Do sedaj obravnavane klasične metode deformacijske analize temeljijo na primerjavi rezultatov izravnave prostih mrež v posameznih terminskih izmerah. Taka izravnava posamezne terminske izmere poteka po metodi najmanjših kvadratov na posredni način, torej z uporabo samo notranjih opazovanj (koti in dolžine) v geodetski mreži in brez informacije o zunanjem koordinatnem sistemu geodetske mreže. Raziskave so pokazale (Xu et al. 2000, Prószyński 2003), da je z obravnavo samo prostih mrež, to je brez navezave na zunanji referenčni koordinatni sistem, nemogoče določiti absolutne premike točk v geodetski mreži. Način definicije datuma, kot ga zagotavlja izravnava v prosti mreži, ne more zagotoviti fizično predstavljivega izhodišča za orientacijo take geodetske mreže, zato tudi ne smeri dejanskega premika točk in njegove natančnosti.

Slabost izravnave proste mreže je v tem, da izravnava proste mreže zahteva, da je vsota kvadratov popravkov koordinatnih neznank po posameznih oseh (imenujmo kar koordinatne spremembe) enaka nič. To je lahko daleč od realnosti. Podane so bile različne rešitve (Xu et al. 2000): Predlagana je bila metoda z obravnavo vpetih mrež, pri čemer se postavlja pogoj, da je norma vektorja koordinatnih neznank enaka nič v točno določeni smeri. Tudi ta način ne podaja enolične rešitve. Predlagana je bila tudi tretja rešitev, kjer bi iskali tako rešitev, ki bi zahtevala, da je norma vektorja koordinatnih neznank enaka nič samo za neko podmnožico vseh točk v mreži. Ta metoda je bila imenovana kot kvazistabilna izravnava.

Pristop k deformacijski analizi preko obravnave mehanskih deformacij v geodetski mreži je bil predmet mnogih raziskav: Berber in sodelavci (2003 in 2006) so v svojih raziskavah predstavili obravnavo mehanskih deformacij v geodetskih mrežah in pojem robustnosti geodetske mreže.

Statistične lastnosti deformacij so v svojih študijah predstavili Cai et al. (2005), Cai in Grafarend (2007), Xu in Grafarend (1996) ter Soler in Gelder (1991). Njihov pristop je bil analitičen. Izpeljali so statistično porazdelitev deformacijskih parametrov in prišli do zaključka, da porazdelitev deformacij ni normalna. Kljub dokazani "nenormalnosti" so nekateri avtorji (Michel in Person 2003) mehanske deformacije v geodetski mreži obravnavali

kot normalno porazdeljene slučajne spremenljivke, kar se tudi v tej nalogi izkaže kot napačno.

#### 1.4 Zgradba doktorske disertacije

Naloga bo razdeljena na posamezna vsebinska poglavja: drugo poglavje je namenjeno predstavitvi deformacij telesa. Predstavljena bo linearna teorija mehanike trdnih teles, ki opisuje deformacije v posameznih točkah deformabilnega telesa. Za razliko od klasične geodetske obravnave bomo deformacije obravnavali z vidika mehanskih deformacij: normalnih in strižnih deformacij, ter rotacij v posameznih točkah telesa. Predstavljene bodo osnovne lastnosti tenzorja deformacij, ki ga računamo iz znanega vektorskega polja premikov na območju obravnavanega deformabilnega telesa.

V tretjem poglavju bo razložena aplikacija teorije mehanskih deformacij v geodetskih nalogah oziroma v obravnavi deformacij v geodetskih mrežah. Izhajali bomo iz znanih koordinatnih rešitev izravnave v dveh ločenih terminskih izmerah. Na območju geodetske mreže, ki diskretizira obravnavani objekt, imamo znano vektorsko polje premikov. Iz znanih premikov bomo izračunali deformacije in rotacije v posamezni točki geodetske mreže. Na koncu tretjega poglavja bo predstavljena uporabnost obravnave mehanskih deformacij v geodetski mreži pri določitvi ocene kakovosti geometrije geodetske mreže.

V četrtem poglavju obravnavamo statistične lastnosti deformacij v geodetski mreži. Deformacije oziroma deformacijske parametre obravnavamo kot slučajne spremenljivke. Za odločitev o tem, ali je neka deformacija značilna ali ne, potrebujemo znane porazdelitvene zakone deformacij kot slučajnih spremenljivk. Ker so analitične izpeljave porazdelitvenih zakonov zaradi kompliciranih matematičnih zvez deformacij z vektorjem premikov zelo zahtevne, bomo rešitev skušali pridobiti empirično. Verjetnostno porazdelitev deformacijskih parametrov bomo določili na osnovi simulacij opazovanj v geodetski mreži. Iz simuliranih porazdelitvenih funkcij bomo določili intervale zaupanja za posamezni deformacijski parameter v posamezni točki. Kot se bo izkazalo v nadaljevanju, bo potrebno porazdelitvene zakone deformacij v točkah ravninske mreže obravnavati dvodimenzionalno. Obravnavali

bomo meje kritičnih območij, ki nam bodo služila kot primerna orodja za statistično odločanje o značilnosti deformacij v točkah geodetske mreže.

Kot smo že v predstavitvi hipoteze omenili, se večji del problema določitve "pravih" deformacij v geodetski mreži pri uporabi do sedaj znanih metod deformacijske analize osredotoča predvsem na določitev primerne koordinatne osnove za računanje položajnih koordinat v posamezni terminski izmeri. V petem poglavju bomo zato predstavili problem definiranja geodetskega datuma v geodetski mreži. Na začetku poglavja bodo predstavljene različne definicije geodetskega datuma. Predvsem bo poudarek na definiciji datuma v izravnavi prostih mrež. Predstavili bomo način, kako računsko prehajamo med različnimi datumi z uporabo transformacije S. Predstavili bomo dva načina definiranja geodetskega datuma v obstoječih metodah deformacijske analize.

V nadaljevanju petega poglavja bomo pokazali pogojno datumsko neodvisnost deformacij. Pri računanju deformacij bomo izhajali iz koordinatnih rešitev v dveh terminskih izmerah, ki so datumsko pogojene oziroma odvisne od izbire koordinatnega sistema.

Šesto poglavje bo praktična predstavitev teorije uvodnih poglavij. Na izbranem primeru geodetske mreže bomo najprej analizirali kakovost geometrije mreže, ki izhaja iz definicije mehanskih deformacij v mreži. Za kasnejšo deformacijsko analizo bomo deformacijske parametre statistično opisali. Za razliko od nekaterih avtorjev se bomo problema določitve statističnih lastnosti deformacij lotili na empirični način s simulacijami deformacijskih parametrov.

V nadaljevanju bo predstavljena odvisnost deformacij od relativne spremembe geodetskega datuma med dvema izmerama. Empirično in analitično bomo prikazali funkcijsko odvisnost deformacij od relativne spremembe datuma geodetske mreže. Iz znanih funkcijskih zvez lahko nalogo obrnemo in iz izračunanih deformacij v mreži računamo spremembe geodetskega datuma med dvema epohama. Ali je to možno za vse datumske parametre, bo razloženo na koncu poglavja, kjer bomo tudi predstavili primer slabe definicije geodetskega datuma v dveh obravnavanih terminskih izmerah.

## 2 PREDSTAVITEV DEFORMACIJ TELESA

### 2.1 Izhodišče

Z uvedbo teorije mehanike trdnih teles v deformacijsko analizo geodetskih mrež obravnavamo geodetske mreže kot telo v dvodimenzionalnem ali tridimenzionalnem prostoru, sestavljeno iz množice med sabo povezanih točk, ki v tem prostoru zavzemajo neko lego in obliko. Geodetska mreža v zelo poenostavljeni obliki predstavlja prostorsko telo, saj so njene točke s stabilizacijo fizično povezane s specifičnim telesom, npr. delom zemeljskega površja, večjimi objekti vpetimi v prostor, itd. Pod vplivom sil se lahko točke geodetske mreže, ki opisujejo neko prostorsko telo, premikajo v prostoru oz. spreminjajo lego. Ker geodetske mreže niso nikoli vezane na toga ampak na deformabilna telesa in če zunanje sile ne vplivajo le na lego telesa v prostoru ampak tudi na obliko, potem govorimo o deformacijah znotraj telesa ali geodetske mreže. Deformabilno telo se lahko deformira na več načinov. Imamo dve vrsti deformacij:

- **normalne deformacije**, kjer gre za krčenje ali raztegovanje (v geodetskem žargonu za spremembo merila) ter
- **strižne deformacije**, kjer gre za spremembe kotov in spremembo oblike.

Poleg deformacij prihaja zaradi sil tudi do vrtenja ali rotacij. Obravnavano telo oziroma geodetska mreža se lahko:

- vrti kot celota – rotacija celotne mreže ali se



- vrtili znotraj posameznega omejenega območja v telesu – diferencialna rotacija v posamezni točki geodetske mreže.

Tog ali vzporeden premik telesa ter rotacija celotnega telesa ne povzročita deformiranja telesa ampak samo spremembo položaja telesa v prostoru. Deformacije znotraj telesa pa povzročijo spremembo relativnih položajev točk na ali v telesu. Problem, ki se tu pojavi, izhaja iz negotovosti pri poznavanju koordinatne osnove ali t.i. geodetskega datuma mreže točk objekta. To pomeni, da ne moremo jasno ločiti ali je sprememba koordinat točk objekta posledica togega premika objekta ali posledica deformacij oblike telesa – geodetske mreže.

Klasični modeli ugotavljanja deformacij v geodetskih mrežah, kot so metoda Delft, Hannover, Karlsruhe, Fredericton ... (Chrzanowski et al. 1983; Van Mierlo 1978; Welsch in Zhang 1983, Heck et al. 1982), temeljijo na ugotavljanju deformacije v geodetskih mrežah na podlagi statističnih testov skladnosti ali kongruence trenutno izračunanih položajev točk celotne mreže ali pa le njenega dela z izračunanim položajem v nekem preteklem časovnem trenutku. Pri tem vsi po vrsti kot model računanja položajev točk v nekem časovnem trenutku uporabljajo izravnavo posrednih opazovanj po metodi najmanjših kvadratov v prosti mreži, ki predstavlja eno od možnih načinov definiranja geodetskega datuma na podlagi minimalnega števila vezi. Dejstvo je, da so vsi obstoječi klasični deformacijski modeli datumsko pogojeni, saj zahtevajo enotni enolično določen geodetski datum mreže v vseh obravnavanih časovnih trenutkih, med katerimi ugotavljamo deformacije mreže. To zagotovijo z izračunom proste mreže z istimi približnimi koordinatami točk v vseh časovnih trenutkih, med katerimi ugotavljamo deformacije.

## 2.2 Opis deformiranja telesa v prostoru

V nekem trenutku poljubno telo zavzema neko lego in obliko. Če na to telo deluje zunanja sila, se lahko to premakne in zavrti, in če ne gre za togo ampak deformabilno telo, lahko tudi spremeni obliko oziroma se deformira. Deformiranje telesa opisujemo z dvema koordinatnima sistemoma (Stanek in Turk 1998, Srpčič 2003):

- *Mirujoči pravokotni kartezični koordinatni sistem*  $(x', y', z')$  ali prostorski koordinatni sistem, z enotskimi, med seboj pravokotnimi baznimi vektorji  $\mathbf{e}_{x'}, \mathbf{e}_{y'}, \mathbf{e}_{z'}$ , ki ni vezan na telo in je definiran z zunanjimi datumskimi količinami,
- *Premikajoči telesni kartezični koordinatni sistem*  $(x, y, z)$ , z baznimi vektorji  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ , ki je vezan na telo in se deformira skupaj s telesom. Osi tega koordinatnega sistema med deformiranjem spreminjajo svojo obliko. Točke v tem koordinatnem sistemu opišemo z telesnimi ali materialnimi koordinatami.

Opisovanje deformacij telesa poteka tako, da predpostavimo, da oba koordinatna sistema v začetni legi  $(t_0)$  sovpadata  $(x = x', y = y', z = z'$  in  $\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_{x'}, \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_{y'}, \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_{z'})$ . Z deformiranjem telesa se deformirajo tudi osi telesnega koordinatnega sistema, ki v poljubni legi med seboj niso nujno pravokotne. Bazni vektorji telesnega koordinatnega sistema se deformirajo v tangente na ukrivljene deformirane osi (Slika 2-1):

$$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z \rightarrow \mathbf{g}_x, \mathbf{g}_y, \mathbf{g}_z.$$

Gibanje telesa v prostoru predstavimo z referenčnim vektorskim opisom gibanja vezanim na telo oz. delec telesa (Stanek in Turk 1998):

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{u}, \quad (2.1)$$

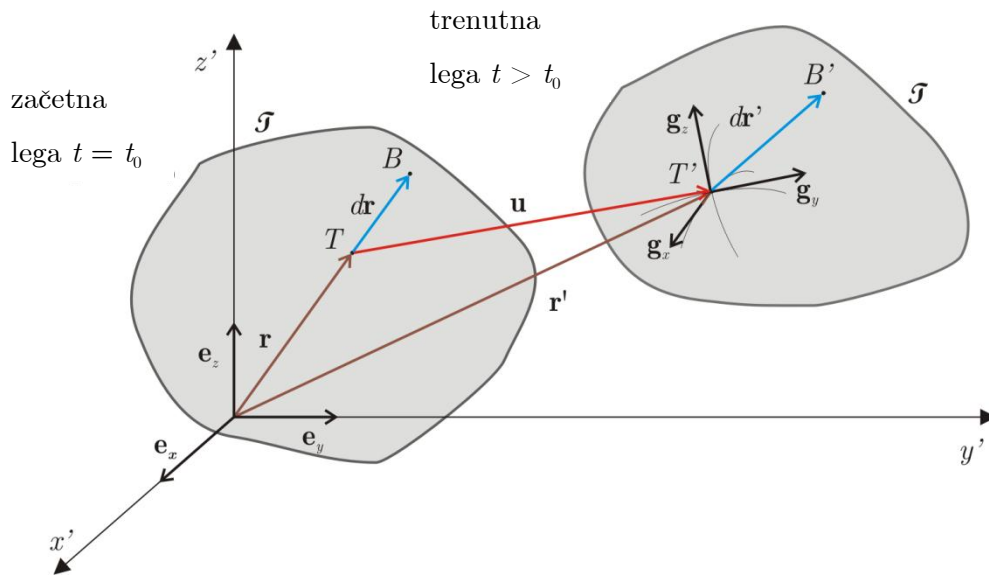
kjer je:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z, t_0) = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z - \text{krajevni vektor delca v } t_0 \quad (y = y', x = x', z = z')$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(x, y, z, t) = x' \mathbf{e}_{x'} + y' \mathbf{e}_{y'} + z' \mathbf{e}_{z'} - \text{krajevni vektor delca v trenutku } t = t_0 + dt,$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t) = [u_x, u_y, u_z]^T = \Delta x \ \Delta y \ \Delta z^T - \text{prostorski premik delca (ali točke) oziroma}$$

**vektor potencialnega premika** točke v geodetski mreži.



Slika 2-1: Referenčni opis deformiranja telesa v prostoru.

Figure 2-1: Reference description of body deformation in space.

### 2.2.1 Tenzor deformacij

Pri opisu deformiranja telesa določamo zvezo med lego delca telesa v trenutni legi glede na začetno lego. Če nas zanima deformiranje telesa v okolici izbranega delca  $\mathcal{D}$  v točki  $T$  si izberemo delec  $\mathcal{D}_1$  v točki  $B$ , ki leži zelo blizu izbranega delca, oddaljen od prvega za  $dx, dy, dz$ . Deformacije opišemo s spremembo vektorja  $d\mathbf{r}$  med začetnim in trenutnim stanjem.

Položaj delca  $\mathcal{D}_1$  v trenutni legi je izražen s krajevnim vektorjem  $\mathbf{r}' = x + dx, y + dy, z + dz$ .

Ker sta si delca zelo blizu lahko v trenutku  $t_0$  razliko med krajevnima vektorjema  $\mathbf{r} = x, y, z$  in  $\mathbf{r}' = x + dx, y + dy, z + dz$  zapišemo s popolnim diferencialom oz. linearnim delom njune razlike (Stanek in Turk 1998):

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} dz = dx \mathbf{e}_x + dy \mathbf{e}_y + dz \mathbf{e}_z, \quad (2.2)$$

oziroma v trenutku  $t$ :

$$d\mathbf{r}' = \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial z} dz = dx \mathbf{g}_x + dy \mathbf{g}_y + dz \mathbf{g}_z. \quad (2.3)$$

Po deformaciji se infinitezimalni vektor  $d\mathbf{r}$  spremeni v  $d\mathbf{r}'$ , telesne koordinate delca pa ostanejo nespremenjene. Deformiranje vektorja v celoti opišejo bazni vektorji  $\mathbf{g}_x$ ,  $\mathbf{g}_y$ ,  $\mathbf{g}_z$ , ki niso enotski in ne med seboj pravokotni in imajo smer tangent na deformirane koordinatne osi (enačbi (2.1) in (2.3)):

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_x &= \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{e}_x + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \\ \mathbf{g}_y &= \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = \mathbf{e}_y + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}, \\ \mathbf{g}_z &= \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = \mathbf{e}_z + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Če tvorimo razlike skalarnih produktov deformiranih in nedeformiranih baznih vektorjev v različnih kombinacijah, dobimo (Stanek in Turk 1998):

$$2E_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j - \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_x}{\partial x_i} \frac{\partial u_x}{\partial x_j} + \frac{\partial u_y}{\partial x_i} \frac{\partial u_y}{\partial x_j} + \frac{\partial u_z}{\partial x_i} \frac{\partial u_z}{\partial x_j} \right), \tag{2.5}$$

$i, j = x, y, z$  .

kjer oznake  $x_i$  in  $x_j$  pomenijo koordinatne komponente  $x, y$  in  $z$ . Količine  $E_{ij}$  predstavljajo komponente tenzorja velikih deformacij. V tridimenzionalnem prostoru obstaja devet količin:  $E_{xx}$ ,  $E_{xy}$ ,  $E_{xz}$ ,  $E_{yx}$ ,  $E_{yy}$ ,  $E_{yz}$ ,  $E_{zx}$ ,  $E_{zy}$ ,  $E_{zz}$ . Velja, da  $E_{xy} = E_{yx}$ ,  $E_{xz} = E_{zx}$ ,  $E_{yz} = E_{zy}$ , zato za tenzor velja, da je simetričen in ga zato določa le šest komponent v prostoru oziroma tri komponente v ravnini. Če vse elemente tenzorja velikih deformacij zapišemo v matriko, imamo v prostoru:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} & E_{xz} \\ E_{yx} & E_{yy} & E_{yz} \\ E_{zx} & E_{zy} & E_{zz} \end{bmatrix}, \tag{2.6}$$

oziroma v ravnini:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} \\ E_{yx} & E_{yy} \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

Komponente, predstavljene v enačbah (2.5), (2.6) in (2.7), predstavljajo opis deformacij telesa neodvisno od oblike ali velikost deformacij. Zato tenzor imenujemo **tenzor velikih deformacij** (Sterle 2007).

### 2.2.2 Geometrijski pomen komponent tenzorja deformacij

Geometrijski pomen komponent tenzorja deformacij predstavimo preko treh mer za deformiranje (Stanek in Turk 1998):

- normalna deformacija ali specifična sprememba dolžine vlaken ali merila,
- strižna deformacija ali sprememba pravega kota med materialnima vlaknoma ter
- sprememba smeri materialnih vlaken.

Spremembo smeri merimo s kotom  $\phi_i$  med enotskim vektorjem v začetni legi  $\mathbf{e}_i$   $i = x, y, z$  in deformiranim (neenotskim)  $\mathbf{g}_i$   $i = x, y, z$ . Sprememba smeri  $\phi_i$  lahko določimo preko lastnosti vektorskega produkta obeh vektorjev in upoštevanju enačb (2.4) in (2.1):

$$\sin \phi_i = \frac{|\mathbf{e}_i \times \mathbf{g}_i|}{|\mathbf{e}_i| |\mathbf{g}_i|} = \frac{\left| \mathbf{e}_i \times \left( \mathbf{e}_i + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right) \right|}{g_i} = \frac{\left| \mathbf{e}_i \times \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right|}{g_i} = \frac{|\mathbf{R}_i|}{g_i}, \quad (2.8)$$

$i = x, y, z$  in  $\partial x_i = \partial x, \partial y, \partial z$ ,

kjer je:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x &= -\frac{\partial u_z}{\partial x} \mathbf{e}_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{R}_y &= \frac{\partial u_z}{\partial y} \mathbf{e}_x - \frac{\partial u_x}{\partial y} \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{R}_z &= -\frac{\partial u_y}{\partial z} \mathbf{e}_x + \frac{\partial u_x}{\partial z} \mathbf{e}_y. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Spremembo dolžine materialnih vlaken ali merila v smeri koordinatnih komponent opišemo z dolžino deformiranega baznega vektorja  $\mathbf{g}_i$  ( $i = x, y, z$ ). Obravnavamo vektor  $d\mathbf{x}_i = dx_i \mathbf{e}_i$ , ki se deformira v  $d\mathbf{x}_i' = dx_i \mathbf{g}_i$ .

$$D_{ii} = \frac{|\mathbf{dx}_i'| - |\mathbf{dx}_i|}{|\mathbf{dx}_i|} = \frac{dx_i g_i - dx_i}{dx_i} = g_i - 1. \quad (2.10)$$

Iz enačbe (2.4) in upoštevanjem enačbe (2.5) ter (2.8) in (2.9) sledi:

$$g_i = \sqrt{\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_i} = \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x_i}\right)^2} = \sqrt{1 + 2E_{ii}} \quad (2.11)$$

Sedaj lahko zapišemo spremembo merila kot:

$$D_{ii} = \sqrt{1 + 2E_{ii}} - 1 \text{ oziroma } E_{ii} = D_{ii} + \frac{D_{ii}^2}{2}. \quad (2.12)$$

Spremembo pravega kota med materialnima vlaknoma, ki sta v začetni legi orientirana v smeri osi  $x_i$  in  $x_j$  ( $i \neq j$ ), označimo z  $D_{ij}$  in izrazimo s kotom  $\theta_{ij}$  med vektorjema  $\mathbf{g}_i$  in  $\mathbf{g}_j$ .

$$D_{ij} = \frac{\pi}{2} - \theta_{ij}. \quad (2.13)$$

Z upoštevanjem enačbe (2.5) in enačb (2.10) do (2.12) ter lastnosti skalarnega produkta dveh vektorjev lahko zapišemo (Stanek in Turk 1998):

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j &= g_i g_j \cos \theta_{ij} = 2E_{ij} \rightarrow \cos \theta_{ij} = \frac{2E_{ij}}{g_i g_j}, \\ \cos \theta_{ij} &= \cos \left( \frac{\pi}{2} - D_{ij} \right) = \sin D_{ij}, \\ \sin D_{ij} &= \frac{2E_{ij}}{1 + D_{ii} \quad 1 + D_{jj}} \rightarrow 2E_{ij} = \sin D_{ij} \quad 1 + D_{ii} \quad 1 + D_{jj}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Iz (2.14) lahko rečemo, da izvendiagonalni členi tenzorja deformacij  $E_{ij}$  predstavljajo mero za spremembo pravega kota med materialnimi vlakni (Stanek in Turk 1998).

### 2.2.3 Tenzor majhnih deformacij

Splošen opis deformiranja telesa ne glede na obliko in velikost telesa in velikost deformacij predstavlja nelinearno zvezo med premiki in deformacijami, ki v praksi otežuje računanje. V

nadaljevanju pri predstavitvi geometrijskega pomena komponent tenzorja deformacij uvedemo določene predpostavke (Srpčič 2003):

- pomiki in zasuki so majhni v primerjavi z dimenzijami telesa,
- prvi parcialni odvodi pomikov in vse geometrijske spremembe v okolici opazovanega delca so majhni v primerjavi z enoto,

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \ll 1, \quad i, j = x, y, z,$$

zato lahko vse kvadrate in produkte parcialnih odvodov v enačbi (2.5) zanemarimo in zapišemo:

$$E_{ij} = E_{ji} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}. \quad (2.15)$$

Obe predpostavki in enačba (2.15) nas pripeljeta do tenzorja majhnih deformacij:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Z matriko  $\varepsilon$  zapišemo simetrični tenzor majhnih deformacij v delcu telesa oziroma točki  $i$  ali t.i. Cauchy-jev tenzor (Michel in Person 2003). Diagonalni členi tenzorja majhnih deformacij predstavljajo **normalne deformacije** in predstavljajo **spmembo dolžine oziroma merila** v posameznih koordinatnih oseh,

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \approx g_i - 1 = D_{ii}, \quad (2.17)$$

izvendiagonalni členi pa predstavljajo **strižne deformacije**, ki podajajo približno spremembo pravih kotov.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \approx \frac{D_{ij}}{2} \quad \text{za vsak } i, j = x, y, z. \quad (2.18)$$

Če nas ne zanimajo deformacije v smeri koordinatne osi  $z$  ali so te deformacije zanemarljive, lahko obravnavamo **ravninsko deformacijsko stanje**. V ravnini ima tenzor deformacij naslednjo obliko:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Iz enačb (2.16) in (2.19) je razvidno da so izvendiagonalni elementi tenzorja majhnih (in velikih) deformacij pomnoženi z  $1/2$ , kar na prvi pogled ne predstavlja nekega pomena, vendar ta faktor definira tenzorske lastnosti tenzorja deformacij. Tenzor majhnih deformacij opisuje diferencialno deformacijo v posameznem delcu telesa ali točki.

#### 2.2.4 Tenzor majhnih zasukov

Deformiranje v okolici delca telesa lahko zapišemo tudi kot integral popolnega diferenciala premika med začetno in končno točko (Stanek in Turk 1998):

$$\int_{T_0}^T d\mathbf{u} = \mathbf{u} T - \mathbf{u} T_0, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{u} T = \mathbf{u} T_0 + \int_{T_0}^T \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} dz \right). \quad (2.21)$$

Zapisano v skalarni obliki za posamezno koordinatno komponento  $i = x, y, z$ :

$$u_i T = u_i T_0 + \int_{T_0}^T \left( \frac{\partial u_i}{\partial y} dy + \frac{\partial u_i}{\partial x} dx + \frac{\partial u_i}{\partial z} dz \right). \quad (2.22)$$

Odvide  $\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$  zapišemo kot vsoto dveh členov in upoštevamo enačbe (2.16):



$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij},$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad i, j = x, y, z .$$
(2.23)

Velja:  $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ .

Vidimo, da je pomik delca telesa sestavljen oziroma posledica spremembe dolžine (merila), spremembe pravega kota (striženja) in spremembe smeri (rotacije).

Komponente  $\varepsilon_{ij}$  so komponente tenzorja majhnih deformacij,  $\omega_{ij}$  pa komponente **tenzorja majhnih zasukov**:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{xy} & \omega_{xz} \\ -\omega_{xy} & 0 & \omega_{yz} \\ -\omega_{xz} & -\omega_{yz} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix},$$
(2.24)

ki ga v ravnini zapišemo kot:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z \\ -\omega_z & 0 \end{bmatrix}.$$
(2.25)

Vidimo, da tenzor majhnih zasukov nasprotno od tenzorja majhnih deformacij ni simetričen. Iz lastnosti obeh tenzorjev (enačba (2.23)) lahko zapišemo gradient vektorskega polja premikov  $\mathbf{u}$ , ki predstavlja t.i. matriko gradienta vektorskega polja premikov  $\mathbf{G}_T$ , v izbrani točki telesa  $T$ :

$$\mathbf{G}_T \ x, y = \text{grad } \mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega},$$
(2.26)

zapisano v ravnini:

$$\mathbf{G}_T \ x,y = \text{grad } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{G}_T \ x,y = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} + \omega \\ \varepsilon_{xy} - \omega & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

### 2.3 Lastnosti tenzorja deformacij

Stanje delca telesa lahko opišemo s skalarjem, vektorjem ali tenzorjem. Tenzor deformacij opisuje deformirano stanje v nekem delcu telesa. Stanje delca je neodvisno od izbire koordinatnega sistema, zato je od njega neodvisen tudi tenzor deformacij (Stanek in Turk 1998). Velikosti (vrednosti) komponent tenzorja deformacij pa so datumsko odvisne količine.

Pri obravnavi deformacij si telo torej predstavimo z modelom, ki ga obravnavamo kot trdno telo, in deformacije lahko predstavimo za vsako točko telesa. Deformacijsko stanje v ravnini je tako podano s tremi različnimi količinami, ki jih predstavimo v simetrični kvadratni matriki razsežnosti  $2 \times 2$ . Deformacijsko stanje opisuje matematična količina, ki jo določata dva vektorja ali 4 skalarne količine in jo imenujemo tenzor 2. reda (Križanič 1962).

#### 2.3.1 Lastnosti tenzorjev 2. reda

V  $d$  razsežnem prostoru matematično ali fizikalno količino imenujemo tenzor reda  $n$  ( $n > 0$ ), če se v poljubnem koordinatnem sistemu  $K$  zapiše z  $d^n$  elementi  $t_{i,j,k\dots p}$  (število indeksov  $i, j, k \dots p$  je enako  $n$  in vsi tečejo od 1 do  $d$ ) in so neodvisni od izhodišča koordinatnega sistema. Pri linearni ortogonalni transformaciji iz koordinatnega sistema  $K$  v  $K^*$  v obliki  $\mathbf{x}^* = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  ( $\mathbf{A}$  deformacijska matrika,  $\det \mathbf{A} = 1$ ) se elementi tenzorja transformirajo v obliki (Vaniček 1972, Križanič 1962):

$$t^*_{\alpha\beta\dots\omega} = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \dots \sum_{p=1}^d a_{\alpha i} \cdot a_{\beta j} \dots a_{\omega p} \cdot t_{ijk\dots p}. \quad (2.29)$$

Enačbo (2.29) lahko zapišemo v matrični obliki, ki predstavlja splošno lastnost tenzorja deformacij reda  $n$  v  $d$  razsežnem prostoru:

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{A}^T \mathbf{T} \mathbf{A}. \quad (2.30)$$

Tenzor se torej predstavi z matriko, kjer red tenzorja predstavlja dimenzijo matrike. Tako skalarji predstavljajo tenzor 0. reda, vektorji tenzor 1. reda in matrike tenzor 2. reda. Vsi skalarji, vektorji in matrike seveda ne predstavljajo nujno tenzor. Pogoj je, da pripadajo ustreznemu polju (skalarnemu ali vektorskemu), torej da predstavljajo ustrezne fizikalne ali matematične količine (primer: višina učencev v nekem razredu, ki jo zapišemo v obliki vektorja oz. stolpca ne predstavlja vektorskega polja in tako ni tenzor (Stanek in Turk 1998)).

Osnovna lastnost tenzorja je, da se s spreminjanjem koordinatne osnove ali geodetskega datuma ne spreminja. Tenzor predstavlja neko stanje v točki prostora, ki je seveda neodvisno od izbire koordinatnega sistema (npr. hitrost objekta, težnost...). Dejstvo pa je, da se komponente tenzorja s transformacijo v različne koordinatne sisteme spreminjajo, ne spremenijo pa se določene funkcijske povezave komponent tenzorja. Te povezave imenujemo **invariante** tenzorja.

V primeru tenzorjev 2. reda, kot sta tenzor deformacij ali pa variančno-kovariančna matrika, imamo tri invariante:

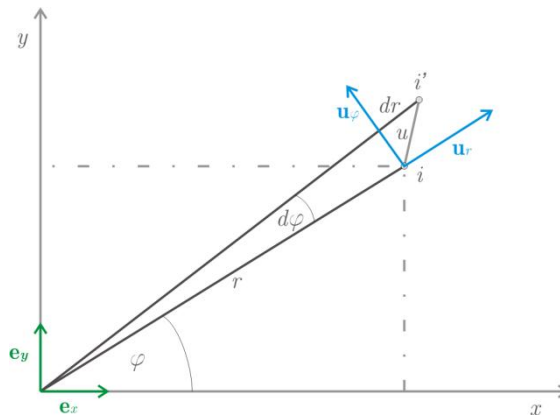
- $I_1 = \text{sled}(\mathbf{T})$ : sled matrike,
- $I_2$ : vsota poddeterminant diagonalnih členov matrike, (2.31)
- $I_3 = \det(\mathbf{T})$ : determinanta matrike.

## 2.4 Ravninsko deformacijsko stanje v polarnih koordinatah

Deformacije ponavadi opisujemo v kartezičnem koordinatnem sistemu. V določenih situacijah je primerneje deformacije opisati v krivočrtnem koordinatnem sistemu: kot npr. sferni in cilindrični v prostoru ali pa v polarnih koordinatah v ravnini.

Polarne in kartezične koordinate v ravnini so med seboj povezane:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi. \end{aligned} \tag{2.32}$$



Slika 2-2: Ravninske deformacije v polarnem koordinatnem sistemu.

Figure 2-2: Planar deformations in polar coordinate system.

Matematična povezava med dvema različnima koordinatnima sistemoma je predstavljena z matrično povezavo med ortonormiranimi bazama obeh koordinatnih prostorov. Zapišemo krajevni vektor točke v bazi  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  z upoštevanjem zveze (2.32):

$$\mathbf{r}_{x,y} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y = r \cos \varphi \mathbf{e}_x + r \sin \varphi \mathbf{e}_y. \tag{2.33}$$

Z odvajanjem vektorja  $\mathbf{r}$  po obeh krivočrtnih koordinatah dobimo dva med seboj pravokotna vektorja, ki predstavljata bazo v polarnih koordinatah:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \frac{\partial \mathbf{r} / \partial r}{\|\partial \mathbf{r} / \partial r\|} = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{e}_\varphi &= \frac{\partial \mathbf{r} / \partial \varphi}{\|\partial \mathbf{r} / \partial \varphi\|} = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Skalarni produkt normiranih vektorjev z baznimi vektorji v kartezičnem koordinatnem sistemu tvori t.i. smerne kosinuse transformacije oziroma transformacijsko matriko:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{r\varphi,xy} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \text{ za prehod iz } x, y \rightarrow r, \varphi, \\ \mathbf{R}_{xy,r\varphi} &= \mathbf{R}_{r\varphi,xy}^T = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \text{ za prehod iz } r, \varphi \rightarrow x, y. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Pomembno vlogo pri pravih koordinatnih transformacijah ima Jacobijeva matrika (Srpčič 2003). Prave koordinatne transformacije so enolične funkcije koordinat z zveznimi prvimi parcialnimi odvodi, determinanta Jacobijeve matrike je v tem primeru različna od 0 (Srpčič 2003). Jacobijeva matrika za prehod iz polarnih v kartezične koordinate ima naslednjo obliko:

$$\mathbf{J}_{xy,r\varphi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Za prehod iz kartezičnih v polarne koordinate uporabimo inverzno transponirano Jacobijevo matriko:

$$\mathbf{J}_{r\varphi,xy} = \mathbf{J}_{xy,r\varphi}^T{}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\frac{1}{r} \sin \varphi \\ \sin \varphi & \frac{1}{r} \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Za določitev deformacijskega tenzorja v polarnih koordinatah najprej transformirajmo vektorsko polje premikov iz polarnih v kartezične koordinate s transformacijsko matriko

$\mathbf{R}_{xy,r\varphi}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y) &= \mathbf{R}_{xy,r\varphi} \mathbf{u}(r, \varphi), \\ \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_r \\ u_\varphi \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Pripadajoči tenzor deformacij v polarnih koordinatah ima obliko:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_P = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\varphi} \\ \varepsilon_{r\varphi} & \varepsilon_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Povezavo med tenzorjem majhnih deformacij v kartezičnem in polarnem koordinatnem sistemu dobimo z upoštevanjem lastnosti tenzorjev 2. reda (2.30).

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{R}_{xy,r\varphi}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_P \cdot \mathbf{R}_{xy,r\varphi}. \quad (2.40)$$

Iz (2.40) lahko komponente tenzorja majhnih deformacij v kartezičnem koordinatnem sistemu izrazimo s komponentami v polarnem (Srpčič 2003, Sterle 2007):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{rr} \cos^2 \varphi + \varepsilon_{\varphi\varphi} \sin^2 \varphi - 2\varepsilon_{r\varphi} \sin \varphi \cos \varphi, \\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{rr} \sin^2 \varphi + \varepsilon_{\varphi\varphi} \cos^2 \varphi + 2\varepsilon_{r\varphi} \sin \varphi \cos \varphi, \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi} \sin \varphi \cos \varphi + \varepsilon_{r\varphi} \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Za določitev elementov tenzorja deformacij v polarnih koordinatah potrebujemo ustrezne transformacije parcialnih odvodov, ki nastopajo v enačbi (2.19):

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right). \quad (2.42)$$

Parcialni odvodi se transformirajo po pravilih za transformacijo gradienta obravnavanega vektorskega polja, ki je izražen s Hamiltonovim diferencialnim operatorjem nabla  $\nabla$  (Srpčič 2003, Bronštejn in Semendjajev 1978):

$$\begin{aligned} \nabla &= \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y = \sum_{x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_i, \quad (i = x, y), \\ \text{grad}(\mathbf{u}) &= \nabla \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Pri transformaciji uporabimo verižno pravilo pri posrednem odvajanju:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} &= \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}, \quad i = x, y; \quad \alpha = r, \varphi, \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Za koordinatno komponento  $x$  lahko zapišemo:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} u_x = \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) u_r \cos \varphi - u_\varphi \sin \varphi . \quad (2.45)$$

Z upoštevanjem Jacobijeve matrike (enačbi (2.36) in (2.37)) za transformacijo parcialnih odvodov med obema koordinatnima sistemoma lahko vrednost deformacije  $\varepsilon_{xx}$  v smeri osi  $x$  zapišemo kot:

$$\varepsilon_{xx} = \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) u_r \cos \varphi - u_\varphi \sin \varphi . \quad (2.46)$$

Če izenačimo (2.41) in (2.46) imamo:

$$\begin{aligned} \cos^2 \varphi \left( \varepsilon_{rr} - \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \sin^2 \varphi \left( \varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{u_r}{r} \right) + \\ + \sin \varphi \cos \varphi \left( -2\varepsilon_{r\varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} \right) = 0 . \end{aligned} \quad (2.47)$$

Zgornja enačba je izpolnjena za vsak  $\varphi$ , če so vrednosti v oklepajih enake 0. Tako lahko zapišemo elemente tenzorja deformacij v polarnih koordinatah (Srpčič 2003):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} \right). \end{aligned} \quad (2.48)$$

## 2.5 Neodvisnost tenzorja deformacij od izbire koordinatnega sistema

Povezava med dvema kartezičnima koordinatnima sistemoma v ravnini podaja 4-parametrična transformacija. Pri tem upoštevamo premik izhodišča koordinatnega sistema  $(t_x, t_y)$ , spremembo orientacije koordinatnih osi ( $\omega$ ) in spremembo merila ( $ds$ ):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} + 1 + ds \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \\ \mathbf{x}' &= \mathbf{t} + 1 + ds \mathbf{R}_{x'y',xy} \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Izpeljava izrazov za komponente tenzorja deformacij poteka na enak način kot pri zapisu v polarnih koordinatah. Ponovno zapišemo krajevni vektor poljubne točke v transformiranem koordinatnem sistemu, pri čemer upoštevamo povezavo med koordinatama v obeh koordinatnih sistemih (2.49):

$$\mathbf{r}_{x',y'} = x' \mathbf{e}_{x'} + y' \mathbf{e}_{y'}, \quad (2.50)$$

$$\mathbf{r}_{x',y'} = \begin{bmatrix} t_x + 1 + ds \cos \omega & -y \sin \omega \\ t_y + 1 + ds \sin \omega & x \cos \omega + y \sin \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{x'} \\ \mathbf{e}_{y'} \end{bmatrix}.$$

Jacobijeva matrika in njena inverzna transponirana oblika transformacije imata naslednjo obliko:

$$\mathbf{J}_{x'y',xy} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{bmatrix} = 1 + ds \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix}, \quad (2.51)$$

$$\mathbf{J}_{xy,x'y'} = \mathbf{J}_{x'y',xy}^{\text{T}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial x'} \\ \frac{\partial x}{\partial y'} & \frac{\partial y}{\partial y'} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + ds} \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega \\ -\sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

Za določitev tenzorja deformacij najprej transformirajmo vektorsko polje premikov:

$$\begin{bmatrix} u_{x'} \\ u_{y'} \end{bmatrix} = 1 + ds \mathbf{R}_{x'y',xy} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}. \quad (2.53)$$

Povezavo med tenzorjem majhnih deformacij v obeh kartezičnih koordinatnih sistemih dobimo z upoštevanjem lastnosti tenzorjev 2. reda (2.30).

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'x'} & \varepsilon_{x'y'} \\ \varepsilon_{x'y'} & \varepsilon_{y'y'} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{x'y',xy}^{\text{T}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{R}_{x'y',xy}, \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x'x'} &= \varepsilon_{xx} \cos^2 \omega + \varepsilon_{yy} \sin^2 \omega - 2\varepsilon_{xy} \sin \omega \cos \omega, \\ \varepsilon_{y'y'} &= \varepsilon_{xx} \sin^2 \omega + \varepsilon_{yy} \cos^2 \omega + 2\varepsilon_{xy} \sin \omega \cos \omega, \\ \varepsilon_{x'y'} &= \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy} \sin \omega \cos \omega + \varepsilon_{xy} \cos^2 \omega - \sin^2 \omega. \end{aligned} \quad (2.55)$$



Parcialni odvodi se transformirajo po pravilih za transformacijo gradienta vektorskega polja (2.44) in upoštevanjem Jacobijeve matrike (2.52). Za koordinatno komponento  $x$  lahko zapišemo:

$$\varepsilon_{x'x'} = \frac{\partial u_{x'}}{\partial x'} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'} \right) u_{x'} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \cos \omega - \frac{\partial}{\partial y} \sin \omega \right) u_{x'}. \quad (2.56)$$

Z izenačitvijo izrazov (2.55) in (2.56) za linijsko spremembo merila v smeri koordinatne osi  $x'$  pridemo do izrazov za elemente tenzorja deformacij v koordinatnem sistemu  $xy$ , ki je relativno glede na koordinatni sistem  $x'y'$  premaknjen za vektor translacije  $\mathbf{t}$ , zavrten za kot  $\omega$  ter za vrednost  $ds$  različnim linijskim merilom:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{1+ds} \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{1+ds} \frac{\partial u_y}{\partial y}, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2(1+ds)} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Iz izrazov (2.57) sledi, da premik in rotacija nimata vpliva na vrednosti elementov tenzorja deformacij. Z večanjem merila pa se vrednosti komponent spreminjajo obratno sorazmerno. S povečevanjem merila koordinatnega sistema se komponente tenzorja deformacij zmanjšujejo.

Opisano navežimo na obravnavo deformacij v geodetski mreži. Tu dokazana invariantnost komponent tenzorja deformacij se nanaša na primer, ko imamo v obeh koordinatnih določitvah (prva in druga terminska izmera), iz katerih določimo vektorsko polje premikov, opravka z enotnim koordinatnim sistemom (geodetskim datumom). Kako je v primeru, da imamo opravka z različno definiranimi koordinatnimi sistemi v posamezni koordinatni določitvi, v nadaljevanju opisuje poglavje 5.5. Obravnava se osredotoči na realni geodetski problem neenotnega geodetskega datuma v dveh terminskih izmerah, kar povzroči napačne ocene deformacij objekta, predstavljenega z geodetsko mrežo.

## 2.6 Glavne normalne in glavne strižne deformacije v ravnini

Deformiranje telesa, ki ga opisuje tenzor deformacij je odvisno od sil, ki na telo delujejo, in od lastnosti telesa in neodvisno od izbire koordinatnega sistema. Komponente tenzorja deformacij pa so, kot je bilo že omenjeno, v različnih koordinatnih sistemih različne. Za neodvisno predstavitev deformacij uporabljamo **glavne normalne** in **glavne strižne deformacije**. Glavne vrednosti deformacij predstavljajo ekstremne vrednosti deformacij v točki.

### 2.6.1 Glavne normalne deformacije

Če zasukamo koordinatni sistem tako, da se tenzor predstavi z diagonalno matriko, so osi zasukanega koordinatnega sistema ravno v smeri glavnih normalnih deformacij. Glavne normalne deformacije  $\varepsilon_G$  predstavljajo lastne vrednosti tenzorja deformacij. Torej jih izračunamo iz karakterističnega polinoma (Srpčič 2003, Stanek in Turk 1998):

$$\det(\varepsilon - \varepsilon_G \mathbf{I}) = 0, \quad (2.58)$$
$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} - \varepsilon_G & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} - \varepsilon_G \end{vmatrix} = 0.$$

Karakteristični polinom je v ravnini 2. stopnje:

$$\varepsilon_G^2 - \varepsilon_G \cdot (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + \varepsilon_{xx} \cdot \varepsilon_{yy} - \varepsilon_{xy}^2 = 0. \quad (2.59)$$

Obstajata dva realna korena tega polinoma. Vrednosti lastnih vrednosti predstavljajo velikosti glavnih normalnih deformacij:

$$\varepsilon_{G1,2} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + \varepsilon_{xy}^2}. \quad (2.60)$$

Vrednost glavne normalne deformacije je lahko pozitivna ali negativna. Pozitivna vrednost pomeni raztezanje, negativna vrednost pa stiskanje ali krčenje.

Smeri pripadajočih lastnih vektorjev predstavljajo smeri glavnih normalnih deformacij. Smeri sta si medseboj pravokotni. Smer večje glavne normalne deformacije določa kot:

$$\tan 2\alpha_{\varepsilon_1} = \frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}. \quad (2.61)$$

### 2.6.2 Glavne strižne deformacije

Glavne strižne deformacije nastopijo pri kotu (Stanek in Turk 1998):

$$\tan 2\alpha_{\gamma_1} = -\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2\varepsilon_{xy}}. \quad (2.62)$$

Vrednosti glavnih strižnih deformacij:

$$\gamma_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{4} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + \varepsilon_{xy}^2}. \quad (2.63)$$

Pripadajoče normalne deformacije niso enake nič. Nič bi bile le v primeru, da  $\varepsilon_{xx} = -\varepsilon_{yy}$ .

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2}. \quad (2.64)$$

### 3 TENZOR DEFORMACIJ V GEODETSKI MREŽI

Teorijo mehanike trdnih teles uporabimo na primeru geodetskih mrež. Cilj je določiti vrednosti deformacij v posamezni točki geodetske mreže iz sprememb vrednosti geodetskih opazovanj ali iz izračunanih sprememb koordinat točk med dvema terminskima izmerama. Za vsako točko iščemo vrednost matrike gradienta  $\mathbf{G}_T$  (enačba (2.28)). Iz deformacijske matrike nato računamo vrednost deformacij v točki.

#### 3.1 Matematični in stohastični model geodetske mreže

Geodetska mreža z množico točk diskretizira del zemeljskega površja ali večji objekt v prostoru. V geodetski mreži obravnavamo množico točk, ki so med seboj povezane z opazovanji ali meritvami. Opazovanja lahko vsebujejo slučajne pogreške, ki so posledica vpliva okolja, operaterja in uporabljenega merskega instrumentarija in so predstavljeni kot natančnost opazovanj. Iz natančnosti opazovanj izračunamo utež posameznega opazovanja oziroma vpliv ali doprinos posameznega opazovanja na vrednosti iskanih neznank, to je koordinate točk v geodetski mreži. Koordinate posameznih točk so kot rezultat izravnave izračunani s procesno natančnostjo, torej pod vplivom vseh opazovanj in pripadajočih natančnosti opazovanj v mreži. Matematična in statistična obravnava geodetskih mrež izhaja iz Gauss-Markovega modela geodetske mreže (Grigillo in Stopar 2003, Wolf 1994):

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \mathbf{l} &= \mathbf{B} \Delta, \\ \mathbf{D} \mathbf{l} &= \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1}, \\ \mathbf{v} + \mathbf{B} \Delta &= \mathbf{f} = \mathbf{d} - \mathbf{l}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

kjer označimo z:

$E(\cdot)$  - operator pričakovane vrednosti,

$D(\cdot)$  - operator razpršenosti,

$n$  - št. opazovanj,

$m$  - št. točk v geodetski mreži,

$\mathbf{l}$  - vektor opazovanj dimenzije  $n \times 1$ ,

$\mathbf{v}$  - vektor popravkov opazovanj dimenzije  $n \times 1$ ,

$\mathbf{B}$  - matrika koeficientov neznank dimenzije  $n \times 2m$ ,

$\Delta$  - vektor koordinatnih neznank ali popravkov približnih vrednosti koordinatnih neznank  $\mathbf{x}^0$  ( $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \Delta$ ) dimenzije  $2m \times 1$  (brez orientacijskih neznank, ki jih predhodno eliminiramo s postopki Gaussove eliminacije),

$\mathbf{f}$  - vektor odstopanj dimenzije  $n \times 1$ ,

$\mathbf{d}$  - vektor konstant ali približnih vrednosti opazovanj dimenzije  $n \times 1$ ,

$\mathbf{P}$  - matrika uteži opazovanj dimenzije  $n \times n$ ,

$\sigma_0$  - a-priori referenčna standardna deviacija opazovanj.

Rešitev za vektor neznank  $\mathbf{x}$  izračunamo z izravnavo posrednih opazovanj po metodi najmanjših kvadratov:

$$\begin{aligned}\Delta &= \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{f} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{t}, \\ \mathbf{Q}_{\Delta\Delta} &= \mathbf{N}^{-1}.\end{aligned}\tag{3.2}$$

kjer je:

$\mathbf{N} = \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B}$  - predstavlja matriko normalnih enačb dimenzije  $2m \times 2m$ ,

$\mathbf{t} = \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{f}$  - vektor sistema normalnih enačb dimenzije  $2m \times 1$ ,

$\mathbf{Q}_{\Delta\Delta}$  - matrika kofaktorjev koordinatnih neznank dimenzije  $2m \times 2m$ .

Sistem (3.1) predstavlja nelinearen sistem  $n$  enačb za  $2m$  koordinatnih neznank (v ravnini). Rešitev (3.2) za vektor  $\Delta$  predstavlja vrednosti popravkov izhodiščnih ali približnih vrednosti koordinatnih neznank v izravnavi. Iz enačbe (3.2) vidimo, da vsaka sprememba vrednosti posameznega opazovanja in natančnosti le-tega povzroči spremembo v iskanih

popravljenih približnih vrednosti koordinat točk mreže. Korektno izvedena (brez grobih in sistematičnih pogreškov) in dovolj natančna opazovanja v geodetski mreži, ki v nekem časovnem obdobju ohranja svojo geometrijo, so lahko pravi pokazatelj morebitnih sprememb v geodetski mreži. Torej lahko razlike popravkov ali sprememb približnih koordinat točk  $\Delta$  med izmerama obravnavamo kot spremembe položajev ali premike točk  $\mathbf{u}$  (izraz (2.1)), ki so posledica deformacij v geodetski mreži. Pogoji je, da v obeh izmerah uporabljamo enake približne koordinate točk:

$$\Delta_2 - \Delta_1 = \mathbf{u}. \quad (3.3)$$

### 3.2 Predpostavka homogenih deformacij

Pri obravnavi deformacij v točkah geodetske mreže izhajamo iz splošnega deformacijskega modela (Chrzanowski et al. 1983, Chrzanowski et al. 1986), kjer je vektorsko polje premikov predstavljeno s polinomsko funkcijo:

$$\begin{aligned} u_x \quad x, y, z &= a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7x^2 + \dots \\ u_y \quad x, y, z &= b_0 + b_1x + b_2y + b_3z + b_4xy + b_5xz + b_6yz + b_7x^2 + \dots \\ u_z \quad x, y, z &= c_0 + c_1x + c_2y + c_3z + c_4xy + c_5xz + c_6yz + c_7x^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

V nadaljevanju bomo obravnavali samo linearni del modela (3.4).

Definicija tenzorja deformacij (Poglavje 2.2) temelji torej na poznavanju vektorja premika  $\mathbf{u}$   $x, y, z$  vsake točke obravnavanega objekta. V splošnem gre za heterogene deformacije (Sterle 2007). V geodetski mreži obravnavamo situacijo, ko imamo na voljo podatke o premikih samo posameznih točk objekta. V tem primeru lahko določimo premike in posledično tudi tenzor deformacij samo določenemu številu geodetskih točk. Določitev tenzorja deformacij v neki poljubni točki v takih primerih poteka po različnih metodah interpolacije ob predpostavki homogenih deformacij (Welsch 1982) na določenih območjih (primer takih območij so trikotniki v geodetski mreži, določeni z Deulanayevo triangulacijo).

Deformacije in rotacije so na območjih predpostavljenih homogenih deformacij konstantne.

$$\varepsilon, \omega = \text{konst.}, \quad (3.5)$$

$\varepsilon$  - iz tenzorja majhnih deformacij,

$\omega$  - iz tenzorja majhnih zasukov.

V (3.5) govorimo o tenzorju majhnih deformacij in majhnih zasukov, ker predpostavljamo, da so deformacije objekta diferencialno majhne v primerjavi z dimenzijo objekta, ki ga predstavlja geodetska mreža (Stanek in Turk 1998, Srpčič 2003).

Vektor premikov  $\mathbf{u}$   $x, y, z$ , oziroma pripadajoče vektorsko polje premikov, je v primeru predpostavljenih homogenih deformacij zvezno, odvedljivo in s tem regularno. Zato zanj obstaja popolni diferencial.

$$d\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} dz. \quad (3.6)$$

Premik točke  $B$  dobimo z integracijo leve in desne strani v enačbi (3.6) vzdolž povezave med izhodiščno točko  $A$  in končno  $B$ :

$$\int_A^B d\mathbf{u} = \mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A = \int_A^B \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} dz \right). \quad (3.7)$$

Zapisano po posameznih komponentah  $i = x, y, z$ :

$$u_i|_B = \int_A^B \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} dx + \frac{\partial u_i}{\partial y} dy + \frac{\partial u_i}{\partial z} dz \right) + u_i|_A \quad (3.8)$$

Pri integriranju upoštevamo, da so deformacije vzdolž povezave med začetno točko  $A$  in končno  $B$  konstantne (predpostavka (3.5)), zato lahko integral (3.8) enostavno zapišemo kot:

$$\begin{aligned} u_x|_B &= \frac{\partial u_x}{\partial x} x_B - x_A + \frac{\partial u_x}{\partial y} y_B - y_A + \frac{\partial u_x}{\partial z} z_B - z_A + u_x|_A, \\ u_y|_B &= \frac{\partial u_y}{\partial x} x_B - x_A + \frac{\partial u_y}{\partial y} y_B - y_A + \frac{\partial u_y}{\partial z} z_B - z_A + u_y|_A, \\ u_z|_B &= \frac{\partial u_z}{\partial x} x_B - x_A + \frac{\partial u_z}{\partial y} y_B - y_A + \frac{\partial u_z}{\partial z} z_B - z_A + u_z|_A. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Nadaljna obravnava tenzorja deformacij se bo nanašala na deformacije v ravnini, zato izraz (3.9) zapišemo brez upoštevanja tretje koordinatne komponente:

$$\begin{aligned} u_x B &= \frac{\partial u_x}{\partial x} x_B - x_A + \frac{\partial u_x}{\partial y} y_B - y_A + u_x A , \\ u_y B &= \frac{\partial u_y}{\partial x} x_B - x_A + \frac{\partial u_y}{\partial y} y_B - y_A + u_y A . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Če upoštevamo zveze med parcialnimi odvodi vektorja premikov  $\mathbf{u}$   $x, y$  in elementi tenzorja majhnih deformacij in majhnih zasukov (enačba (2.16)), lahko zapišemo:

$$\begin{aligned} u_x B &= \varepsilon_{xx} x_B - x_A + \varepsilon_{xy} + \omega y_B - y_A + u_x A , \\ u_y B &= \varepsilon_{xy} - \omega x_B - x_A + \varepsilon_{yy} y_B - y_A + u_y A . \end{aligned} \quad (3.11)$$

Z upoštevanjem zveze (2.26) lahko zapišemo vektor potencialnega premika  $\mathbf{u}$  točke  $B$ , ki je z matriko gradienta v izhodiščni točki  $A$  v naslednji zvezi (Ašanin 1986, Shames in Cozzarelli 1997; Vaniček et al. 2001; Vaniček et al. 2008; Berber 2006; Berber et al. 2006):

$$\begin{bmatrix} u_x B \\ u_y B \end{bmatrix} = \mathbf{G}_A \begin{bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_x A \\ u_y A \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{u} B = \mathbf{G}_A \cdot \mathbf{r}_{AB} + \mathbf{c}, \quad (3.13)$$

kjer je:

$$\mathbf{G}_A = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} + \omega_z \\ \varepsilon_{xy} - \omega_z & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega} \quad - \text{matrika gradienta vektorskega polja}$$

premkov v točki  $A$ ,

$$\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = \begin{bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{bmatrix} \quad - \text{razlika krajevnih vektorjev točk } A \text{ in } B ,$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} u_x A \\ u_y A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad - \text{konstantni vektor ali togi premik telesa v točki } A .$$

Matrika gradienta vektorskega polja premikov  $\mathbf{G}_A$  se nanaša na obravnavano začetno točko  $A$ . Vektor  $\mathbf{c}$  podaja premik točke  $A$  in je konstanten, ne glede na to, katero sosednjo točko  $B$  točki  $A$  obravnavamo. Torej je za opis deformacij v izhodiščni točki  $A$  nepomemben.



Vidimo, da enačba (3.12) oziroma (3.13) predstavlja zapis dveh ravnin, ki se prilagajata komponentam vektorja potencialnega premika  $\mathbf{u}$   $B$  točke  $B$ . Zapišemo ju lahko za vsako povezavo med točko  $A$  in sosednjimi točkami  $B_k$ . Torej imamo:

za  $\forall k = 0, 1 \dots m - 1$  - število bližnjih (sosednjih) točk za izbrano točko  $A$  ( $k = 0$  se nanaša na točko, v kateri računamo deformacije, oznako  $B_k$  v indeksu poenostavimo s  $k$ ), lahko zapišemo:

$$\begin{aligned} F_{k,1} : a + \frac{\partial u_x}{\partial x} x_k - x_A + \frac{\partial u_x}{\partial y} y_k - y_A &= u_x B_k , \\ F_{k,2} : b + \frac{\partial u_y}{\partial x} x_k - x_A + \frac{\partial u_y}{\partial y} y_k - y_A &= u_y B_k . \end{aligned} \tag{3.14}$$

Izrazi (3.12) - (3.14) predstavljajo spremembo vektorskega polja premikov vzdolž povezave med  $A$  in izbrano sosednjo točko  $B$  glede na izhodiščno točko  $A$ . Ob predpostavki o homogenih deformacijah se vektorsko polje premikov med dvema točkama linearno spreminja. Tu je pomembno poudariti, da taka zveza velja samo za povezave med bližnjimi točkami geodetske mreže, ki ležijo na območjih predpostavljenih homogenih deformacij (območjih približno enakih deformacij). To je razumljivo, saj je težko govoriti o korelaciji med deformacijami med oddaljenimi točkami. Tudi v teoriji mehanike trdnih teles namreč pri izpeljavi tenzorja deformacij govorimo o deformacijah v okolici masnega delca telesa, tako da obravnavamo vpliv delca, ki je diferencialno blizu obravnavanega delca.

Če sistem (3.14) zapišemo v matrični obliki, dobimo:

$$\begin{aligned} F_{k,1} : \begin{bmatrix} 1 & x_k - x_A & y_k - y_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{bmatrix}_A^T &= u_x B_k , \\ F_{k,2} : \begin{bmatrix} 1 & x_k - x_A & y_k - y_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{bmatrix}_A^T &= u_y B_k , \end{aligned} \tag{3.15}$$

$k = 0, 1 \dots m - 1$  .

Sistem (3.15) predstavlja sistem dveh linearnih enačb za neznanke  $a, \frac{\partial u_x}{\partial x}, \frac{\partial u_x}{\partial y}, b, \frac{\partial u_y}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial y}$ . Če sistem (3.15) zapišemo za vse  $k = 0, 1, \dots, m-1$  v matrični obliki, imamo

(Cai in Grafarend 2007a, 2007b, Ašanin 1986):

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 - x_A & y_1 - y_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 - x_A & y_1 - y_A \\ 1 & x_2 - x_A & y_2 - y_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 - x_A & y_2 - y_A \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_k - x_A & y_k - y_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k - x_A & y_k - y_A \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ b \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{pmatrix}_A = \begin{pmatrix} u_x \mathcal{E}_1 \\ u_y \mathcal{E}_1 \\ u_x \mathcal{E}_2 \\ u_y \mathcal{E}_2 \\ \vdots \\ u_x \mathcal{E}_k \\ u_y \mathcal{E}_k \\ u_x \mathcal{A} \\ u_y \mathcal{A} \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

ali drugače:

$$\mathbf{F} \cdot \text{vec } \mathbf{G}_A^* = \mathbf{u}_k. \quad (3.17)$$

V enačbah (3.16) in (3.17) je matrika  $\mathbf{F}$  definirana samo z geometrijo mreže. Vektor potencialnih premikov točk mreže  $\mathbf{u}_k$  ( $\mathbf{u}_k \subset \mathbf{u}$ ) je rezultat izravnave opazovanj po metodi najmanjših kvadratov (izraz (3.3)). Vektor  $\text{vec } \mathbf{G}_A^*$  je v vektorskem načinu zapisana matrika gradienta vektorskega polja premikov  $\mathbf{G}_A$ , razširjena za konstanti  $a$  in  $b$ . Rešitev za  $\text{vec } \mathbf{G}_A^*$  dobimo z rešitvijo sistema (3.17) po metodi najmanjših kvadratov:

$$\text{vec } \mathbf{G}_A^* = \mathbf{F}^T \mathbf{P}_F \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{P}_F \cdot \mathbf{u}_k. \quad (3.18)$$

Izraz (3.18) predstavlja zvezo med potencialnimi spremembami položajev točk v geodetski mreži in deformacijami v posamezni točki  $A$  geodetske mreže. Z upoštevanjem (3.2) lahko izrazimo  $\mathbf{u}_k$  kot rešitev Gauss-Markovega modela izravnave posrednih opazovanj po metodi najmanjših kvadratov. Tako dobimo zvezo med elementi matrike gradienta vektorskega polja premikov in vrednostmi opazovanj (izraženo v vektorju  $\mathbf{f}$ ) v geodetski mreži:

$$\text{vec } \mathbf{G}_A^* = \mathbf{F}^T \mathbf{P}_F \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{P}_F \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{P}_B^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}_f. \quad (3.19)$$

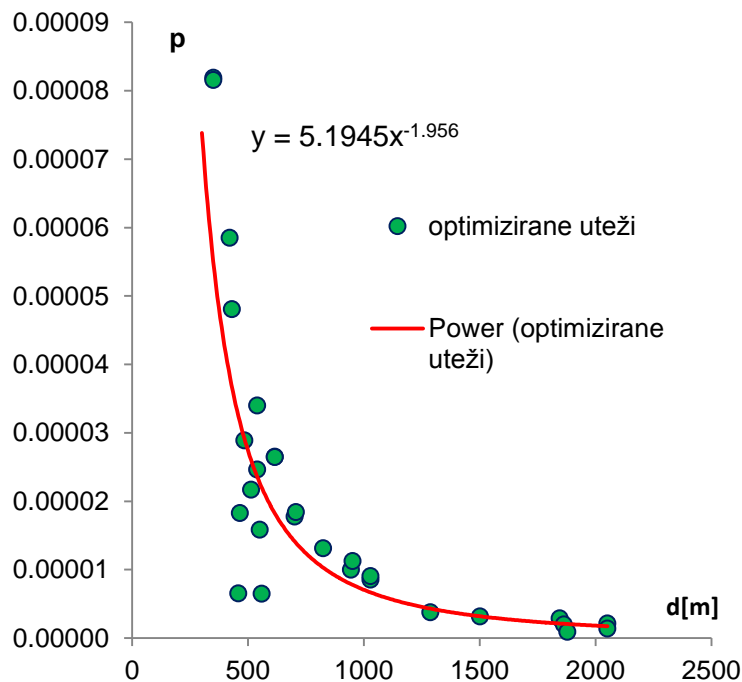
Enačbi (3.18) in (3.19) predstavljata dva različna pristopa pri določanju deformacij v točkah geodetske mreže. V splošnem ima obravnava deformacij preko vektorskega polja premikov nekaj prednosti (Chrzanowski et al. 1983):

- (i) Uporabimo lahko vsa opazovanja v geodetski mreži v posamezni terminski izmeri. Edini pogoj je, da za izračun koordinatnih neznank v obeh izmerah zagotovimo redukcijo na skupni (enotni) geodetski datum.
- (ii) Druga prednost je ta, da lahko v primeru izravnave po metodi najmanjših kvadratov izvedemo ustrezne statistične teste za iskanje grobo pogrešenih opazovanj v mreži ter določitev kakovosti izvedenih geodetskih opazovanj.
- (iii) V primeru obravnave deformacij neposredno preko sprememb geodetskih opazovanj v mreži potrebujemo popolnoma isto geometrijo (število in tip opazovanj ter povezave med točkami) geodetske mreže v obeh časovnih trenutkih ali epohah.
- (iv) Na osnovi premikov dobimo preglednejšo sliko deformacij obravnavanega objekta.

Kot smo že omenili je sistem enačb (3.14) do (3.16) smiselno zapisati samo za bližnje točke mreže, to so točke, ki se nahajajo na območju približno enakih deformacij. V geodetski mreži lahko kot bližnje oziroma sosednje točke obravnavamo tiste, ki so z opazovanji povezane z obravnavano točko  $A$ . Ker so te točke različno oddaljene od točke  $A$ , imajo deformacije v teh točkah različen vpliv na deformacijsko stanje v obravnavani točki  $A$ . Matrika  $\mathbf{F}$  podaja samo matematično povezavo med deformacijskimi parametri in premiki točk. Zato je smiselna uvedba utežne diagonalne matrike  $\mathbf{P}_F$ . Z ustreznimi vrednostmi uteži podamo vpliv deformacije sosednje točke na deformacijo v obravnavani točki v odvisnosti od razdalje med točkama. Večja razdalja med točkama pomeni manjši vpliv na vrednosti deformacij v obravnavani točki  $A$ , zato posamezno utež definiramo z obratno vrednostjo kvadrata razdalje  $d_{AB}$  med sosednjima točkama. S tem še dodatno zmanjšamo vpliv oddaljenih točk. Imenovalc povečamo za konstanto ena, da se izognemo ničli v imenovalcu za izhodiščno točko  $A$  ( $d_{AA} = 0$ ):

$$p_{AB} = \frac{1}{1 + d_{AB}^2}. \quad (3.20)$$

Primernost izraza (3.20) za utež posamezne deformacije v točki  $B_k$  smo preverili z uporabo postopkov optimizacije geodetskih mrež drugega reda (Stopar 2001) na primeru izbrane geodetske mreže, ki jo bomo obravnavali v nadaljevanju. Tu gre v osnovi za določitev optimalnih uteži meritev v izbrani obliki geodetske mreže glede na željeno natančnost koordinat točk mreže, kot jo podaja matrika kriterija (Baarda 1981). Z upoštevanjem zelene natančnosti elementov matrike gradienta  $\mathbf{G}_A$  oziroma pripadajočega vektorja vec  $\mathbf{G}_A^*$  in zveze (3.17) ter upoštevanjem vseh možnih povezav med vsemi točkami mreže (matriko  $\mathbf{F}$  sestavimo v posamezni točki  $A$  za vse točke mreže iz primera (Slika 6-1)) lahko optimiziramo uteži  $p_{AB}$  ter iščemo funkcijsko odvisnost od razdalje med točkami (Marjetič et al. 2010).



Slika 3-1: Funkcijska zveza uteži  $p$  in razdalje med točkama.

Figure 3-1: Functional relationship between weight  $p$  and distance between points.

Na podlagi računskih rezultatov optimizacije lahko iz grafa (Slika 3-1) vidimo, da uteži padajo približno s kvadratom razdalje med točkama. Izraz za interpolirani trend se ne ujema v celoti z izbranim izrazom (3.20), kar zadeva konstant v izrazu. Razlog je tudi v tem, da je

interpolacija funkcije trenda zaradi oblike izbrane mreže izvedena le za razdalje večje od 350 m (najmanjša razdalja v mreži), kar lahko vpliva na funkcijo trenda.

Pripadajoča matrika uteži  $\mathbf{P}_F$  ima naslednjo obliko:

$$\mathbf{P}_F = \begin{bmatrix} p_{A,1} & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & p_{A,1} & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \\ & & & p_{A,k} & & \\ & & & & p_{A,k} & \\ & & & & & 1 \\ 0 & \cdots & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Pri računanju deformacijskih parametrov preko matrike gradienta vektorskega polja premikov  $\mathbf{G}_A$  se lahko pojavijo trije osnovni problemi (Vaniček et al. 2001):

- **prvi primer:** Singularnost sistema normalnih enačb oz. singularnost matrike  $\mathbf{N}$  pomeni, da imamo neskončno mnogo rešitev za  $\mathbf{G}_A$ .
- **drugi primer:** Skušamo računati matriko gradienta  $\mathbf{G}_A$  iz množice točk, ki ležijo na isti premici. To pomeni, da tem točkam ne moremo prilagoditi ravnine iz enačbe (3.14) in s tem tudi ne definirati komponent matrike gradienta v smeri posameznih koordinatnih osi.
- **tretji primer:** Točka v mreži je določena s samo eno povezavo (slepa točka). V tem primeru lahko tvorimo samo dve enačbi (3.14), za koordinatno komponento  $x$  in  $y$  posebej, kar pomeni, da je sistem (3.16) poddoločen in ne moremo določiti matrike  $\mathbf{G}_A$ .

### 3.2.1 Parametri deformacij v geodetski mreži

Z določitvijo matrike  $\mathbf{G}_A$  (enačba (3.18) ali (3.19)) lahko določimo vrednosti deformacijskih parametrov za izbrano točko  $A$   $x_A, y_A$ . Z upoštevanjem zveze (2.26) in (2.28) razcepimo matriko  $\mathbf{G}_A$  na simetrični del – tenzor majhnih deformacij ( $\epsilon$ ) in nesimetrični del – tenzor majhnih rotacij ( $\omega$ ). Iz vrednosti deformacijske matrike  $\mathbf{G}_A$  najprej določimo posamezne elemente tenzorja deformacij in tenzorja majhnih zasukov (Shames in Cozzarelli 1997, Stanek in Turk 1998):

$$\mathbf{G}_A = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} + \omega_z \\ \varepsilon_{xy} - \omega_z & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix}_A = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega}. \quad (3.22)$$

Ker deformacijo v točki opišemo z maksimalnimi vrednostmi, se osredotočimo samo na glavne normalne in glavne strižne deformacije v izbrani točki  $A$ , ki predstavljajo lastne vrednosti tenzorja deformacij (izrazi (2.60) do (2.63)):

- maksimalna vrednost glavne normalne deformacije ali spremembe merila:

$$\varepsilon_{G_{1,2}}^A = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + \varepsilon_{xy}^2}, \quad (3.23)$$

v smeri:

$$\alpha_{\varepsilon_1} = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2\varepsilon_{xy}}{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}} \right), \quad (3.24)$$

- maksimalna vrednost glavne strižne deformacije:

$$\gamma_{1,2}^A = + \sqrt{\frac{1}{4} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + \varepsilon_{xy}^2}, \quad (3.25)$$

v smeri:

$$\alpha_{\gamma_1} = \frac{1}{2} \arctan \left( - \frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2\varepsilon_{xy}} \right). \quad (3.26)$$

Obravnavamo samo maksimalno vrednost strižne deformacije, ker se obe ekstremni vrednosti razlikujeta samo po predznaku.

- diferencialna rotacija v točki:

$$\omega_A = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right). \quad (3.27)$$

Diferencialna rotacija v obravnavani točki  $A$  je sestavljena iz rotacije celotne mreže in prave diferencialne rotacije v tej točki:

$$\omega_A = \omega_0 + \delta\omega_A, \quad (3.28)$$

kjer je povprečna diferencialna rotacija mreže izražena kot aritmetična sredina vseh diferencialnih rotacij točk v geodetski mreži:

$$\omega_0 = \frac{\sum_{A=1}^m \omega_A}{m}, \quad (3.29)$$

kjer je:

$m$  - št. točk v mreži.

Vsi trije deformacijski parametri so datumsko neodvisni (Shames in Cozzarelli 1997, Vaniček et al. 2001) oziroma neodvisni od izbire koordinatnega sistema in podajajo deformacijske lastnosti deformabilnega telesa v točki.

### 3.3 Robustnost geodetske mreže

Zanima nas, kolikšen vpliv ima sprememba posameznega opazovanja na deformacije v posamezni točki geodetske mreže. Tovrstna analiza je predvsem primerna v situacijah, ko ugotavljamo kakovost geometrije geodetske mreže. Predvsem nas v tem primeru zanima vpliv maksimalnih vrednosti neodkritih grobih pogreškov v geodetskih mrežah na položajne koordinate točk, iz katerih nato napačno sklepamo na deformacije v geodetski mreži. V smislu analize vpliva posameznega opazovanja na računane koordinatne neznanke izračunamo za posamezno točko mreže toliko pripadajočih neničelnih matrik gradienta  $\mathbf{G}_i$   $x, y$  (enačba (2.28)), kot je opazovanj v mreži. Iz komponent matrike gradienta in pripadajočih deformacijskih parametrov nato ugotavljamo največje potencialne vrednosti deformacij, povzročenih s strani neodkritega grobega pogreška, ki bi povzročil največ škode.

Tradicionalno kakovost geodetskih mrež določamo samo v smislu statističnega testiranja, kjer testiramo mrežo na prisotnost grobih pogreškov v opazovanjih, testiranju a-posteriori vrednosti referenčne variance, primerjavi velikosti absolutnih in relativnih elips pogreškov (Slika 6-1) ter a-posteriori testiranju popravkov opazovanj. Vsi testi izhajajo iz izravnave po metodi najmanjših kvadratov na podlagi Gauss-Markovega matematičnega modela geodetske

mreže (3.1) in temeljijo na ničelni hipotezi, da so popravki opazovanj  $\mathbf{v}$  normalno porazdeljeni:

$H_0$ : vektor popravkov opazovanj  $\mathbf{v}$  je porazdeljen normalno z  $n$   $\xi, \mathbf{B}\mathbf{x}, \Sigma_{vv}$  → to pomeni, da v opazovanjih ni prisotnih grobih pogreškov.

Nasproti imamo alternativno hipotezo:

$H_1$ : vsaj eno opazovanje je grobo pogrešeno.

V primeru, da je v opazovanjih prisotno grobo pogrešeno opazovanje, opazovanja ne bodo zadovoljila ničelne hipoteze, zato jo je potrebno zavrniti. To storimo z različnimi metodami<sup>1</sup> statističnega testiranja. Ob izbranem tveganju  $\alpha_0$  (verjetnost, da zavrnemo ničelno hipotezo, ko je ta pravilna) poiščemo verjetno grobo pogrešena opazovanja. Ta opazovanja lahko nato ponovno izmerimo, preprosto odstranimo iz množice opazovanj ali jim dodelimo manjše uteži ter mrežo ponovno preračunamo.

Problem se pojavi takrat, ko s statističnim testiranjem ne odkrijemo grobih pogreškov, za kar v osnovi obstajata dva razloga:

- prvi je ta, da opazovanje nima neodvisne kontrole na podlagi ostalih opazovanj – enolična določitev (primer: neka točka v mreži je določena samo z enega stojišča, slepi poligon ...) in
- drugi, da test ne prepozna opazovanje kot verjetno grobo pogrešeno.

Sedaj je vprašanje, v kolikšni meri neodkrito grobo pogrešeno opazovanje vpliva na vrednosti iskanih neznanek v mreži. Če je ta vpliv majhen, potem lahko rečemo, da je **mreža neobčutljiva ali robustna**, sicer je **mreža občutljiva**. Občutljivost geodetskih mrež predstavlja eno od mer kakovosti geodetske mreže. Nanaša se na sposobnost odzivanja na grobe pogreške v meritvah v geodetski mreži.

---

<sup>1</sup> Najbolj znana metoda iskanja grobo pogrešenih opazovanj je Baardova metoda *Data Snooping*.



Pri Baardovi metodi odkrivanja grobih pogreškov (ang. *Data Snooping*) v opazovanjih lahko izračunamo maksimalno vrednost neodkritega grobega pogreška (Berber 2006):

$$\delta l_{\max,i} = \sqrt{\lambda_0} \alpha_0, \beta_0 \frac{\sigma_{l,i}}{\sqrt{r_i}}, \quad (3.30)$$

kjer so:

$\sigma_{l,i}$  – a-priori standardna deviacija  $i$ -tega opazovanja ( $i = 1 \dots n$ ),

$r_i \in 0,1$  – število nadštevilnosti  $i$ -tega opazovanja, ki predstavlja ustrezni diagonalni člen matrike nadštevilnosti  $\mathbf{R} = \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} + \mathbf{H} \mathbf{H}^T$  <sup>-1</sup>  $\mathbf{B}^T \mathbf{P}$  (Mozetič 2005) in predstavlja stopnjo vpliva posameznega opazovanja na računane neznanke v geodetski mreži,

$\lambda_0 \alpha_0, \beta_0$  - parameter necentralnosti testne statistike alternativne hipoteze, ki je neposredno odvisen od vrednosti  $\alpha_0$  in  $\beta_0$ . Predstavlja premik pričakovane vrednosti testne statistike tako, da testna statistika vzorca, ki vsebuje grobo pogrešeno opazovanje, preseže kritično vrednost z verjetnostjo jakosti testa  $1 - \beta_0$ . V primeru najpogosteje izbrane vrednosti za  $\alpha_0 = 5\%$  in  $\beta_0 = 10\%$  znaša vrednost  $\sqrt{\lambda_0} \alpha_0, \beta_0 = 3.24$  (Grigillo in Stopar 2003).

Baarda je vrednost  $\delta l_{\max,i}$  predpostavil kot mero notranje zanesljivosti geodetske mreže. Iz izraza (3.30) sledi, da z manjšanjem tveganja  $\alpha$  in večanjem stopnje jakosti testa  $1 - \beta$  izračunamo večjo vrednost parametra necentralnosti, kar pomeni, da je možna večja maksimalna vrednost neodkritega grobega pogreška. To hkrati pomeni, da je potrebno geometrijo mreže bolj skrbno projektirati, zagotoviti večjo natančnost meritev z večjo stopnjo nadštevilnosti, kar posledično vodi v obsežnejše meritve in večje stroške.

Vpliv vrednosti maksimalnih neodkritih grobih pogreškov v posameznih opazovanjih na izračun vrednosti neznank lahko izračunamo z znano rešitvijo vektorja neznank  $\Delta$  posredne izravnave po metodi najmanjših kvadratov. Tu obravnavamo samo spremembo vrednosti neznank  $\delta \mathbf{x}$  oziroma t.i. **potencialne deformacije zaradi verjetno neodkritega grobega pogreška v izravnavi.**

$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \delta \mathbf{l}, \quad (3.31)$$

kjer je:

$\mathbf{P}$  – matrika uteži opazovanj dimenzije  $n \times n$  in

$\delta \mathbf{x}$  – vektor možnih premikov zaradi morebitnih maksimalnih vrednosti neodkritih grobih pogreškov v opazovanjih  $\delta \mathbf{l}$  dimenzije  $2m \times 1$  (Berber 2006).

Problem rešitev za ocenjene vrednosti neznank (vektor  $\Delta$ ) po metodi najmanjših kvadratov tako kot za vektor možnih premikov zaradi maksimalnih vrednosti verjetno neodkritih grobih pogreškov (vektor  $\delta \mathbf{x}$ ) je v tem, da je **rešitev datumsko pogojena** oz. **datumsko odvisna**. To pomeni, da je poleg same geometrije mreže in natančnosti opazovanj odvisna tudi od izbire koordinatnega sistema, to je izbire datumskih vezi v izravnavi (danih količin, močno uteženih danih količin, danega ali uteženega azimuta, kriterij minimalnega števila vezi med neznankami, pogoja generalizirane inverzije matrike normalnih enačb itd.). To seveda nima nobene povezave z deformacijami v geodetski mreži (Vaniček et al. 2001). Za pravilno interpretacijo izračunanih možnih premikov bi morali le-ti biti datumsko neodvisni, torej odvisni samo od geometrije mreže in opravljenih geodetskih opazovanj v mreži. Zato je bolje, da obravnavamo deformacije. Datumsko neodvisnost deformacij zagotovimo z uporabo tenzorja deformacij. Napetost se namreč izraža preko diferencialnih deformacij in je datumsko neodvisna količina (Vaniček et al. 2001).

### 3.3.1 Analiza robustnosti na podlagi izračunanih mer deformacij v geodetski mreži

Z upoštevanjem enačbe (3.19) lahko zapišemo spremembo matrike gradienta  $\mathbf{G}_A$  v točki  $A$  kot linearno funkcijo vektorja sprememb vseh opazovanj v geodetski mreži  $\delta \mathbf{l}$ :

$$\delta \text{vec } \mathbf{G}_A^* = \mathbf{F}^T \mathbf{P}_F \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{P}_F \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \delta \mathbf{l} = \mathbf{L}_A \cdot \delta \mathbf{l}. \quad (3.32)$$

Pri analizi robustnosti geodetske mreže deformacijsko matriko gradienta  $\mathbf{G}_A$  iz enačbe (3.32) zapišemo v odvisnosti od vektorja maksimalnih vrednosti neodkritih grobih pogreškov v posameznih opazovanjih  $\delta \mathbf{l}_{\max,i}$ :

$$\delta \text{vec } \mathbf{G}_A^* = \mathbf{L}_A \cdot \delta \mathbf{l}_{\max,i}, \quad (3.33)$$

$i = 1 \dots n.$

kjer je ob upoštevanju enačbe (3.30):

$\delta \mathbf{l}_{\max,i} = [0 \dots \delta l_{\max,i} \dots 0]^T$  - zapis maksimalne vrednosti neodkritega grobega pogreška na  $i$ -tem mestu v ničelnem vektorju dimenzije  $n \times 1$ .

Na podlagi izračunane matrike gradienta vektorskega polja premikov iz enačbe (3.33), lahko za vsako opazovanje v mreži izračunamo pripadajoči meri deformacij oz. deformacijska parametra  $\varepsilon$ ,  $\gamma$  in rotacijo  $\omega$  (enačbe (3.23) – (3.27)). Torej imamo za vsako točko  $n$  pripadajočih trojic vrednosti parametrov, ki so izračunane na podlagi vrednosti verjetno maksimalnega neodkritega grobega pogreška v posameznem opazovanju.

Pri geodetski mreži ne ugotavljamo robustnosti geodetske mreže v splošnem, ampak robustnost v merilu, robustnost v lokalni konfiguraciji in robustnost v lokalni rotaciji mreže. Robustnost mreže na podlagi izračunanih vrednosti deformacijskih parametrov ugotavljamo na način iskanja "najšibkejše" merske povezave v geodetski mreži. To je tista povezava, ki povzroči največjo absolutno vrednost posameznega deformacijskega parametra v množici  $3 \times n$  vrednosti izračunanih deformacijskih parametrov za posamezno točko. Iz tega sledi, da je: **geodetska mreža toliko robustna, kot je robustna njena najšibkejša povezava.**

Iz enačbe (3.30) je razvidno, da izbira vrednosti  $\alpha_0$  in  $\beta_0$ , iz katere računamo vrednost parametra necentralnosti  $\lambda_0$ , ne vpliva na rezultat iskanja bolj oziroma manj robustnega dela geodetske mreže. Vrednost parametra  $\lambda_0$  deluje kot multiplikacijska konstanta in ne vpliva na relativna razmerja med vrednostmi deformacijskih parametrov. Vpliv vrednosti  $\alpha_0$  in  $\beta_0$  je pomemben v primeru, ko hočemo postaviti statistično mejo, ki določa, ali je geodetska mreža še robustna ali ne.

## 4 STATISTIČNE LASTNOSTI TENZORJA DEFORMACIJ IN ROTACIJ V GEODETSKI MREŽI

Statistične lastnosti tenzorja deformacij lahko predstavimo s porazdelitvijo verjetnosti posameznih parametrov deformacij kot slučajnih spremenljivk. Porazdelitve verjetnosti so določene na podlagi poznanih funkcijskih povezav s slučajnimi spremenljivkami z znano porazdelitvijo verjetnosti. Ker so funkcijske zveze med spremembami opazovanj ali premiki točk in parametri glavnih deformacij in rotacij nelinearne (enačbe (3.18) do (3.27)), je analitična izpeljava porazdelitvenih funkcij težavna, kar je razvidno iz različnih del (Soler in Van Gelder 1991, 2006, Xu in Grafarend 1996, Cai et al. 2005). Zato je primernejša empirična določitev verjetnostne porazdelitve posameznega deformacijskega parametra, ki jo bomo v nadaljevanju obravnavali.

Ker je tenzor deformacij v funkcijski zvezi z vrednostmi premikov točk mreže, je v funkcijski zvezi tudi z razlikami opazovanj med dvema terminskima izmerama v mreži (enačbi (3.18) in (3.19)). Zato lahko empirično določimo verjetnostno porazdelitev parametrov deformacij s spreminjanjem vrednosti opazovanj znotraj lastnega intervala zaupanja ali t.i. simulacijami vrednosti merskih opazovanj v geodetski mreži

Empirična določitev poteka s simulacijami posameznih nizov merskih vrednosti v geodetski mreži z uporabo simulacijske metode Monte Carlo (Rubinstein 1986, Savšek-Safić 2002). Posamezen niz simuliranih opazovanj izravnamo po metodi najmanjših kvadratov in izračunamo vektor popravkov približnih vrednosti neznank, to je približnih koordinat točk

mreže. Popravke približnih koordinat točk obravnavamo kot premike točk med dvema navideznima terminskima izmerama:

- 1. terminska izmera – približne koordinate točk,
- 2. terminska izmera – popravljene približne koordinate točk za posamezen niz simuliranih vrednosti opazovanj v geodetski mreži.

Red velikosti umetno generiranih premikov je v neposredni povezavi z a-priori podano natančnostjo opazovanj v numeričnem postopku simulacij z metodo Monte Carlo. A-priori podana natančnost opazovanj kotov in dolžin v geodetski mreži je odvisna od natančnosti merskega instrumentarija in merske metode, ki sta predvidena v obravnavani geodetski mreži.

Za vsako posamezno simulacijo "umetno" generiranih premikov v mreži opredelimo deformacijo s tremi vrednostmi parametrov deformacij v posamezni točki (normalno deformacijo, strižno deformacijo in rotacijo). Tako lahko določimo, kako mreža reagira na vsako spremembo opazovanja znotraj njegovega intervala zaupanja. Lahko rečemo, da določamo odzivnost geodetske mreže na slučajne spremembe v opazovanih količinah znotraj intervala zaupanja, ki so v neposredni povezavi z natančnostjo uporabljenega merskega instrumentarija in merske metode. S tem empirično določimo slučajno komponento oziroma verjetnostno porazdelitev obravnavanega deformacijskega parametra kot slučajne spremenljivke.

#### **4.1 Porazdelitveni zakoni in momenti porazdelitve deformacij in rotacij**

Statistične lastnosti slučajnih spremenljivk, v obravnavanem primeru deformacijskih parametrov, predstavimo s porazdelitvenimi zakoni, ki jih zapišemo s funkcijami porazdelitve verjetnosti (Turk 2010). V primerih, da nimamo dovolj podatkov za določitev porazdelitvenega zakona v celoti, si pomagamo z določenimi lastnostmi porazdelitvenega zakona. Te lastnosti imenujemo momenti porazdelitve. Porazdelitvene lastnosti slučajne spremenljivke lahko opišemo z momenti in centralnimi momenti različnih redov, med katerimi sta najpogosteje v uporabi dva:

- moment 1. reda – pričakovana ali srednja vrednost,
- centralni moment 2. reda – varianca in pripadajoča standardna deviacija.

Momente porazdelitev ocenjujemo iz vzorca vrednosti slučajne spremenljivke. Število  $sim$  simuliranih nizov opazovanj v geodetski mreži predstavlja velikost vzorca izračunanih vrednosti deformacijskih parametrov s pripadajočimi smermi (za glavne normalne in strižne deformacije – enačba (3.24) in (3.26)). Te smeri predstavljajo smeri lastnih vrednosti deformacijskega tenzorja v obravnavani točki geodetske mreže. Upoštevati moramo dejstvo, da se deformabilno telo različno odziva na vplive (sile) različnih velikosti in iz različnih smeri oziroma se različno deformira v različnih smereh. Zato je pomembno obravnavati statistične lastnosti vsakega deformacijskega parametra v posamezni točki v odvisnosti od smeri. Vsesplošna obravnava, izvedena s strani nekaterih avtorjev (Michel in Person 2003), brez upoštevanja smeri, ni primerna, razen seveda za rotacijo v točki.

Za določeno točko celoten vzorec velikosti  $sim$  posameznega deformacijskega parametra razdelimo na posamezne podvzorce, ki pripadajo posameznim obravnavanim smerem. Z numeričnega stališča razdelimo polni krog na posamezne kotne intervale ali sektorje. Za vsak sektor z velikostjo vzorca  $sim_{sec}$  pripadajočih vrednosti simuliranih deformacijskih parametrov lahko izračunamo oba momenta porazdelitve verjetnosti: srednjo vrednost in standardno deviacijo vzorca:

$$\begin{aligned}
 \bar{\varepsilon}_{sec} &= \frac{1}{sim_{sec}} \sum_{i=1}^{sim_{sec}} \varepsilon_{sec}^i, & s_{sec}^{\varepsilon} &= \sqrt{\frac{1}{sim_{sec}-1} \sum_{i=1}^{sim_{sec}} \varepsilon_{sec}^i - \bar{\varepsilon}_{sec}}^2}, \\
 \bar{\gamma}_{sec} &= \frac{1}{sim_{sec}} \sum_{i=1}^{sim_{sec}} \gamma_{sec}^i, & s_{sec}^{\gamma} &= \sqrt{\frac{1}{sim_{sec}-1} \sum_{i=1}^{sim_{sec}} \gamma_{sec}^i - \bar{\gamma}_{sec}}^2}, \\
 \bar{\omega} &= \frac{1}{sim} \sum_{i=1}^{sim} \omega^i, & s^{\omega} &= \sqrt{\frac{1}{sim-1} \sum_{i=1}^{sim} \omega^i - \bar{\omega}}^2}.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

kjer je:

$sim_{sec}$  – vrednost velikosti vzorca za izbrani sektor  $sec$  ( $\sum_{sec} sim_{sec} = sim$ ) in

$s$  – standardna deviacija vzorca za posamezen parameter.

Za posamezno točko lahko iz slučajnega vzorca obeh deformacijskih parametrov (normalne in strižne deformacije) v posameznem sektorju ob izbrani stopnji zaupanja  $1 - \alpha$  določimo interval zaupanja za izbrani parameter. S stopnjo zaupanja določimo meje, za katere velja, da z verjetnostjo  $1 - \alpha$  vključujejo izbrani deformacijski parameter. Meje intervala zaupanja za posamezen deformacijski parameter v izbrani točki mreže določimo z znano srednjo vrednostjo in standardno deviacijo:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{sec}^{\det} &= \bar{\varepsilon}_{sec} \pm KV_{sec}^{\varepsilon} \cdot s_{sec}^{\varepsilon}, \\ \gamma_{sec}^{\det} &= \bar{\gamma}_{sec} \pm KV_{sec}^{\gamma} \cdot s_{sec}^{\gamma}, \\ \omega^{\det} &= \bar{\omega} \pm KV_{\omega} \cdot s_{\omega},\end{aligned}\tag{4.2}$$

kjer je:

$KV$  – kritična vrednost ob izbrani stopnji tveganja  $\alpha$ .

Vrednost  $KV$  je odvisna od verjetnostne porazdelitve slučajne spremenljivke in stopnje tveganja  $\alpha$ . Vrednosti mej in velikosti intervalov zaupanja deformacijskih parametrov pa so odvisne od:

- smeri, v katerih deformacijske parametre obravnavamo – od obravnavanega kotnega intervala (sektorja),
- velikosti slučajnih pogreškov v opazovanjih, ki so pogojeni z natančnostjo uporabljenega geodetskega instrumentarija in merske metode in
- lokalne geometrije geodetske mreže, kjer se nahaja obravnavana točka (geometrična porazdelitev točk in merskih povezav ter vrsta merskih povezav).

Če upoštevamo, da so intervali zaupanja različni v različnih smereh za posamezen deformacijski parameter, je primerneje obravnavati območja zaupanja deformacijskega parametra ob izbrani stopnji tveganja  $\alpha$ . Velikost in oblika območja zaupanja za posamezen deformacijski parameter v izbrani točki predstavlja stopnjo zaznavnosti deformacij, ki se pojavijo v geodetski mreži. Predstavlja torej občutljivost geodetske mreže na deformacije v posameznih točkah mreže. Velja torej, da večja kot je stopnja zaznavnosti deformacij v posamezni točki, manjše vrednosti deformacij je mreža v tej točki sposobna zaznati. V fazi

projektiranja geodetske mreže želimo vzpostaviti tako geometrijo oziroma geometrično razporeditev točk in merskih povezav, da bo stopnja zaznavnosti deformacij čim višja. To pomeni, da želimo doseči mrežo, kjer bodo območja zaupanja deformacijskih parametrov čim manjša in homogena v vseh smereh na vseh točkah.

Ob izbrani stopnji tveganja lahko določimo kritične vrednosti intervalov zaupanja (enačbe (4.2)) v posameznem sektorju na podlagi znane funkcije porazdelitve verjetnosti deformacijskega parametra. Če bi šlo v tem primeru za standardne porazdelitvene funkcije (normalna porazdelitev, studentova, porazdelitev  $\chi^2$  itd.), potem bi kritične vrednosti enostavno določili numerično z inverznimi funkcijami porazdelitvenim funkcijam. Vendar v obravnavanem primeru verjetno ne gre za verjetnostno porazdelitev, ki bi jo lahko ocenili iz same oblike matematičnega modela, ki povezuje deformacijske parametre z opazovanji in koordinatnimi neznankami. Kot je bilo že obravnavano v Savšek-Safić et al. (2006) in Savšek-Safić (2002), slučajna spremenljivka, ki je v nelinearni povezavi z normalno porazdeljenimi slučajnimi spremenljivkami, ni normalno porazdeljena.

V obravnavanem primeru imamo opravka z normalno porazdeljenimi vrednostmi geodetskih opazovanj. Tudi koordinatne neznanke, ki so v funkcijski povezavi z opazovanji, imajo zaradi lineariziranega matematičnega modela izravnave po metodi najmanjših kvadratov normalno porazdelitev. Deformacijski parametri (glavne normalne in glavne strižne deformacije) pa s koordinatami točk oziroma njihovimi koordinatnimi razlikami niso v linearni povezavi (poglavje 2.6). Zaradi nelinearnih povezav je analitična določitev porazdelitvene funkcije zelo kompleksna (Xu in Grafarend 1996). Torej obstajata najmanj dva razloga, zakaj se lotiti empirične določitve porazdelitvene funkcije:

- V primeru empiričnega določanja verjetnostne porazdelitve s simulacijami vrednosti slučajne spremenljivke ni potrebno uvajati linearizacije matematičnega modela, ki povezuje slučajno spremenljivko s slučajnimi spremenljivkami z znanimi porazdelitvami. V že obravnavanih analitičnih rešitvah pa je glavni pristop ravno linearizacija (uporabljeni so lahko tudi odvodi drugih redov v t.i. Hessejevi matriki (Xu in Grafarend 1996)). Z linearizacijo modela avtomatično izgubimo določeno količino informacij o porazdelitvenih lastnostih slučajne spremenljivke.



- Simulacije so dandanes z uporabo zmogljivih računalnikov možne in tudi časovno obvladljive operacije.

Če povzamemo, pričakujemo, da je porazdelitev verjetnosti deformacijskih parametrov odvisna od obravnavane smeri. Zato bo porazdelitev verjetnosti deformacijskih parametrov obravnavana glede na posamezno smer (po posameznih kotnih sektorjih) v posamezni točki geodetske mreže. Praktični primer obravnave porazdelitve verjetnosti deformacijskih parametrov bo prikazan na primeru geodetske mreže v poglavju 6.2.

## 4.2 Statistična značilnost deformacij in rotacij

Z znanimi intervali oziroma območji zaupanja v vsaki točki geodetske mreže lahko določimo statistično značilnost deformacij in rotacij, ko se ta dejansko zgodi v mreži oziroma na objektu, ki ga ta geodetska mreža predstavlja. Statistična značilnost se določi na osnovi statističnega testiranja. Kot ničelno hipotezo postavimo trditev, da ni deformacije in rotacije v izbrani točki geodetske mreže:

$$H_0 : \text{ni deformacije in rotacije v točki: } \varepsilon_i, \gamma_i, \omega_i = 0,$$

nasproti alternativne hipoteze:

$$H_1 : \text{mreža se je v točki } i \text{ deformirala in rotirala: } \varepsilon_i, \gamma_i, \omega_i \neq 0.$$

Statistično testiranje izvedemo ob poznani porazdelitvi verjetnosti slučajnih spremenljivk, v tem primeru parametrov deformacij in rotacije. V tem primeru izračunana vrednost parametra predstavlja testno statistiko. Če se vrednost parametra nahaja izven mej območja zaupanja, to je v kritičnem območju, potem zavrnemo ničelno hipotezo ob izbrani stopnji tveganja  $\alpha/2$ . Pravimo, da obstaja deformacija oz. rotacija v točki oziroma je ta deformacija oz. rotacija statistično značilna. Praktična določitev statističnih lastnosti tenzorja deformacij in rotacij bo predstavljena v poglavju 6.2.

## 5 PROBLEM GEODETSKEGA DATUMA PRI DOLOČITVI STATISTIČNO ZNAČILNIH DEFORMACIJ V GEODETSKI MREŽI

### 5.1 Izhodišče problema

V geodetski mreži imamo končno število opazovanj na končnem številu geodetskih točk, ki bolj ali manj ustrezno predstavljajo objekt, ki se morda deformira. Taka diskretizacija obravnavanega objekta zahteva, da za vektorsko polje premikov na celotnem območju uvedemo določene predpostavke. Predpostavimo linearno spreminjanje vektorskega polja premikov in s tem homogene deformacije v smeri povezav med posameznimi točkami geodetske mreže, kot je bilo predstavljeno v poglavju 3.2.

Deformacije v geodetskem smislu v splošnem obravnavamo preko premikov posameznih točk objekta, ki so povezane v geodetsko mrežo preko opazovanj (dolžin, kotov). Klasična terestrična geodetska opazovanja ne podajajo informacij o geodetskem datumu (razen opazovanih dolžin, ki podajajo merilo mreže, poglavje 5.2 in 5.3). Z rešitvijo matematičnega modela (3.1) geodetske mreže po metodi najmanjših kvadratov izračunamo splošno rešitev za vektor neznanih koordinatnih komponent točk mreže v posameznem časovnem trenutku  $t$ . Za izračun rešitve (vektor neznank) v splošnem uporabimo generalizirano inverzijo (Rao in Mitra 1971) matrike normalnih enačb  $\mathbf{N}$  (enačba (5.27)), ki ni enolična.

$$\Delta_t = \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{l}_t = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{l}_t = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{t}, \quad (5.1)$$

kjer je  $\Delta_t$  vektor koordinatnih neznank ali popravkov približnih vrednosti koordinatnih neznank  $\mathbf{x}_t^0$  v epohi  $t$  ( $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_t^0 + \Delta_t$ ).

Pogost primer je, ko v postopku izravnave nobena datumska količina ne nastopa kot dana. Tedaj imamo opravka s prosto mrežo, kjer rešitev sistema enačb za koordinatne neznanke točk ni enolična. Sistem normalnih enačb je v tem primeru singularen, zato rešitev koordinatnih neznank zahteva uporabo zgoraj omenjene generalizirane inverzije matrike  $\mathbf{N}$  (enačba (5.1)). V tem primeru obstaja neskončno mnogo rešitev, ki zadovoljijo pogoju, da je vsota kvadratov popravkov opazovanj minimalna. Neenoličnost rešitve za koordinatne komponente povzroči hkrati neenoličnost rešitve za iskane premike in deformacije točk v geodetski mreži. Izračun premikov točk in deformacij v geodetski mreži temelji na izračunu razlik koordinat točk med dvema izmerama - epohama. Potrebujemo torej koordinate točk, ki jih izračunamo na podlagi izravnave opazovanj v geodetski mreži po metodi najmanjših kvadratov. Če predpostavimo, da so opazovanja med posameznimi izmerami med seboj neodvisna, lahko vektorsko polje premikov predstavimo z razliko rešitev za koordinatne komponente točk mreže  $\mathbf{x}_1$  in  $\mathbf{x}_2$  med dvema epohama  $t_1$  in  $t_2$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1. \quad (5.2)$$

Rešitev (5.1) in s tem tudi (5.2) je datumsko pogojena, to pomeni, da vsebuje tudi vse informacije o datumu geodetske mreže v posamezni terminski izmeri in jo v začetni fazi lahko imenujmo samo **vektor koordinatnih sprememb**. Da lahko spremembe koordinat definirajo vektorsko polje premikov, je potrebno nujno zagotoviti dvoje (Xu et al. 2000):

- i. Zagotoviti moramo enotni geodetski datum v obeh časovno ločenih izmerah. Enotni in pravilno/smiselno definirani geodetski datum zagotavlja, da lahko premike točk izrazimo s spremembami koordinat točk mreže.
- ii. Za določitev deformacij (komponent tenzorja deformacij) in rotacij telesa moramo poznati vektorsko polje premikov v vsaki točki obravnavanega deformabilnega telesa ali objekta.

Če ne upoštevamo glavnih predpostavk (i) in (ii), uporabljenih pri definiciji premika, imamo opravka z realno situacijo, ko:

- sta bila v obeh časovnih trenutkih  $t_1$  in  $t_2$  uporabljena različna koordinatna sistema,
- lahko rešitev vsebuje mnogo poljubnih konstant, ki podajajo rotacijo, translacijo in spremembo merila geodetske mreže.

Enak koordinatni sistem v dveh ločenih izmerah bi teoretično lahko zagotovili, če bi imeli enako geometrijo mreže, enak tip in število opazovanj, enak instrumentarij, enake vremenske pogoje, enake vrednosti danih količin ter način obdelave opazovanj (Sterle 2007). Vse to doseči pa je praktično nemogoče. Zato je primernejša obravnava pod predpostavko, da **imamo v različnih izmerah opravka z različnimi geodetskimi datumi ali koordinatnimi sistemi**. Problem nekontinuiranega podajanja premikov točk, iz katerih računamo deformacije telesa, lahko bistveno omilimo z že omenjenimi predpostavkami o homogenih deformacijah (poglavje 3.2) in s pravilno izbiro položajev in gostote točk na objektu.

Iz vseh omenjenih razlogov vektorja  $\mathbf{u}$  ne moremo obravnavati kot vektorja premika točk ampak samo kot koordinatno spremembo, ali drugače kot nek morebitni premik točk.

Če deformacijsko analizo izvajamo na osnovi rezultatov izravnave prostih mrež, taka obravnava ni korektna in lahko povzroči zavajajoče informacije o deformacijah obravnavanega objekta. Izravnava proste mreže namreč poteka po metodi najmanjših kvadratov na posredni način z uporabo samo notranjih opazovanj (kotov in dolžin), približnih koordinat točk v geodetski mreži in brez zunanjih informacij o koordinatnem sistemu geodetske mreže. V tem primeru govorimo o definiranju datuma z notranjimi vezmi. Namesto koordinat točke mreže, azimuta, razdalje ali zenitne razdalje v mreži, se notranje vezi nanašajo na neke navidezne datumske količine v mreži. Notranje vezi zahtevajo izpolnitev nekaterih pogojev za izračun neznank v prosti mreži, kot so opisani v nadaljevanju (poglavje 5.2.2). Definiranje datuma v prosti mreži pomeni, da mora poleg vsote kvadratov popravkov opazovanj tudi vsota kvadratov popravkov neznank biti minimalna.

Raziskave so pokazale (Xu et al. 2000, Prószyński 2003), da je z obravnavo samo prostih mrež, to je brez navezave na zunanji referenčni koordinatni sistem, nemogoče določiti absolutne premike točk v geodetski mreži. Način definicije datuma, kot ga zagotavlja izravnava v prosti mreži, ne more zagotoviti enotnega in fizično predstavljivega izhodišča za

orientacijo geodetske mreže v posamezni terminski izmeri. Zato tudi ne more zagotoviti smeri dejanskega premika točk in njegove natančnosti in tudi ne vrednosti deformacij v posamezni točki, ki jih računamo iz tenzorja deformacij. Podane so bile različne rešitve (Xu et al. 2000), ki pa vse po vrsti zahtevajo, da je vsota kvadratov popravkov koordinatnih neznank po posameznih koordinatnih oseh enaka nič ali za celo množico točk ali pa za neko podmnožico točk v mreži, kar pa je lahko daleč od realnosti.

V raziskavi (Xu et al. 2000) je bila izvedena tudi empirična analiza morebitne neodvisnosti izračunanih sprememb položajev točk v geodetski mreži od definicije geodetskega datuma. Zaključki te analize so pokazali, da relativne spremembe položajev točk niso datumsko neodvisne količine. Zato jih ne moremo enolično določiti v geodetski mreži brez definiranege geodetskega datuma, torej v prosti mreži.

Če geodetska mreža nima definiranege datuma, v smislu določenega zunanega koordinatnega sistema, potem izračunani vektorji premikov točk niso enolično določeni, ker:

- ne moremo z gotovostjo trditi, da se domnevno stabilne točke niso premaknile in
- tehnike generalizirane inverzije vsebujejo nekatere dodatne pogoje.

V nadaljevanju bomo najprej razložili pojme geodetskega datuma in transformacije  $S$ . Nato bomo skušali raziskati vpliv različno definiranih geodetskih datumov mreže v posameznih terminskih izmerah na izračunane vrednosti deformacijskih parametrov v točkah geodetske mreže. Preko možnih invariant tenzorja deformacij bomo ugotovili, ali je bil pri izračunu koordinatnih neznank v posamezni terminski izmeri zares uporabljen enotni in enolično definiran koordinatni sistem. Cilj bo tudi dokazati, da definicija geodetskega datuma, kot ga zagotavlja prosta mreža, ni primerna tako za obravnavo premikov kot deformacij točk v geodetski mreži. Na podlagi ugotovitev o primernosti definiranege geodetskega datuma v posamezni terminski izmeri bomo lahko v nadaljevanju sklepali na pravilnost in statistično značilnost izračunanih deformacij v posamezni točki geodetske mreže.

## 5.2 Geodetski datum

Geodetski datum geodetske mreže je definiran kot najmanjše število parametrov, potrebnih za določitev koordinat novih točk v geodetski mreži glede na predhodno definiran koordinatni sistem. Problem datuma geodetske mreže izhaja iz tega, da običajna geodetska opazovanja, t.i. notranja opazovanja, omogočajo kvečjemu določitev samo relativnih položajev točk mreže. V geodetski mreži namreč opazujemo horizontalne kote (smeri), dolžine, višinske razlike ter relativne položaje (GNSS), ki so notranja opazovanja. Na drugi strani pa zunanja opazovanja predstavljajo količine, ki so določene glede na predhodno definiran koordinatni sistem (astronomske koordinate točk  $(\Phi, \Lambda, H)$ , elipsoidne koordinate  $(\varphi, \lambda, h)$ , kartezične koordinate v globalnem koordinatnem sistemu  $(X, Y, Z)$ ) in nimajo neposrednega vpliva na notranjo geometrijo geodetske mreže oz. na relativne položaje točk v geodetski mreži. Ta dejstva govorijo o tem, da samo iz klasičnih geodetskih opazovanj, brez dodatnih informacij o geodetskem datumu, ne moremo izračunati koordinat v predhodno definiranem koordinatnem sistemu.

Problem definiranja geodetskega datuma geodetske mreže nastopa v različnih primerih, predvsem pa pri vzpostavitvi geodetskih mrež za najnatančnejše naloge, npr. geodetske mreže za potrebe deformacijske analize. Z navezavo take mreže na državni koordinatni sistem bi bili primorani privzeti dane koordinate točk v državnem koordinatnem sistemu. Te bi po kakovosti določitve zaostajale za koordinatami točk, določenimi v okviru natančnosti meritev lokalne geodetske mreže. Meritve v deformacijskih mrežah opravljamo z najsodobnejšim instrumentarijem in metodami izmere, ki zagotavljajo veliko nadštevilnih opazovanj in jih obdelujemo s postopki, ki omogočajo obravnavo vseh vplivov na opazovanja. Zato koordinat točk v okviru deformacijske analize ne računamo v geodetskem datumu državnega koordinatnega sistema, ampak definiramo geodetski datum lokalnega koordinatnega sistema, v katerem nato spremljamo spremembe lege točk v mreži. Zato je pri vzpostavitvi lokalne geodetske mreže za deformacijsko analizo potrebno pred prvo določitvijo koordinat točk v mreži definirati geodetski datum. Ta določitev se v osnovi ne razlikuje od določitve datuma v večjih geodetskih mrežah, ki omogočajo določitev koordinat točk v državnih in globalnih koordinatnih sistemih.

Pri določanju geodetskega datuma geodetske mreže velja nekaj splošnih pravil. Če v geodetski mreži geodetski datum ni ali ni v celoti določen, ga je potrebno določiti z ustreznimi datumskimi parametri. Notranja in morebitna zunanja opazovanja lahko določajo nekatere datumske parametre, preostali nedoločeni datumski parametri pa se v geodetski mreži kažejo kot nepopolnost ali **defekt geodetskega datuma** ( $d$  je število preostalih nedoločenih datumskih parametrov). Če sedaj zagotovimo natanko toliko danih datumskih količin, kot je število preostalih potrebnih datumskih parametrov, govorimo o **enolično določenem geodetskem datumu**. V tem primeru z izbiro danih količin oz. vezi med danimi količinami in parametri za definiranje geodetskega datuma ne posegamo v notranjo geometrijo geodetske mreže, kar je tudi edina sprejemljiva možnost za korektno obravnavo geodetskih mrež. Opozorimo tudi na pojav **predoločenosti geodetskega datuma**. Geodetski datum je v tem primeru definiran z več količinami, kot je to nujno potrebno. Zato je izračun koordinat točk v geodetski mreži obremenjen z nepravilnostmi datumskih parametrov, kot jih definirajo koordinate danih točk, kar ni dobro, saj se nepravilnosti datumskih parametrov prenesejo na izračunane koordinate novih točk. Ocenjevanje notranje natančnosti geodetske mreže je zato lahko težavno. Dejstvo je tudi, da je geodetski datum lahko podvržen spremembam, zato se lahko skozi čas spreminja. S časom se namreč razvijajo merske metode in instrumentarij, ki je vse natančnejši. Tako v geodetsko mrežo vključujemo kvalitetnejša opazovanja in s ponovnimi izravnanimi mreže izboljšujemo kakovost koordinat točk, ki definirajo geodetski datum geodetske mreže oz. ga definiramo na novo. S tem se spreminjajo koordinate točk v geodetski mreži, ki jih lahko med sabo analitično primerjamo, če poznamo zveze med koordinatami točk, določenimi glede na različno definirane geodetske datume. Najbolj pogosta sprememba geodetskega datuma v času je sprememba položajev točk, ki definirajo geodetski datum.

Število potrebnih datumskih parametrov je torej odvisno od vrste opravljenih opazovanj in od razsežnosti prostora, v katerem določamo koordinate točk. Na primeru lokalnih geodetskih mrež za deformacijsko analizo nas zanimajo horizontalne koordinate točk  $(x, y)$ , zato je število potrebnih datumskih parametrov, ki jih moramo določiti ali privzeti iz danih količin, največ štiri (Preglednica 5-1). Parametri, ki jih je potrebno definirati za zagotovitev geodetskega datuma so zasuk ali rotacija, premik ali translacija in merilo. V osnovi geodetski datum zagotovijo zunanja opazovanja (zunanje količine), lahko pa posamezne datumske

parametre definirajo tudi geodetska opazovanja (notranje količine, notranja opazovanja) v geodetski mreži. Merjene dolžine v geodetski mreži določajo merilo mreže, morebitna opazovanja azimuta zagotavljajo orientacijo mreže, merjeni koordinati ene od točk v geodetski mreži zagotavljata poznavanje premika (translacije) geodetske mreže glede na izhodišče koordinatnega sistema.

Preglednica 5-1: Datumski parametri pri različnih tipih geodetskih mrež.

Table 5-1: Datum parameters for different types of geodetic network.

tip mreže	datumski parametri	defekt datuma - $d$
višinska mreža	1 translacija (v smeri osi $z - t_z$ )	1
ravninska mreža	2 translaciji (v smeri osi $x - t_x$ in osi $y - t_y$ ) 1 rotacija (okrog osi $z - \omega_z$ ) 1 merilo ( $s$ )	4
prostorska geodetska mreža	3 translacije (v smeri osi $x - t_x$ , $y - t_y$ in $z - t_z$ ) 3 rotacije (okrog osi $x - \omega_x$ , $y - \omega_y$ in $z - \omega_z$ ) 1 merilo ( $s$ )	7

### 5.2.1 Definiranje geodetskega datuma z minimalnim številom zunanjih opazovanj

Čeprav lahko datumске parametre geodetskih mrež zagotovijo zunanja opazovanja, je določanje datumskih parametrov na tak način precej neekonomično (astronomska opazovanja so npr. zelo draga) ali pa so ta slabo določena (absolutne koordinate v primeru opazovanj GNSS, astronomsko določene koordinate). Ena od možnosti za zagotovitev geodetskega datuma geodetske mreže je vzpostavitev določenih zahtev (vezi), ki jih mora mreža izpolnjevati. Datumski parametri so teoretično lahko podani z danimi količinami (danimi koordinatami točk v mreži – danimi zunanjimi opazovanji) ali z dodelitvijo velikih vrednosti uteži posameznim koordinatam točk, ki nastopajo v izravnavi kot opazovanja (Chen et al. 1990). Datum mora biti definiran tako, da datumski parametri ne vplivajo na notranjo geometrijo geodetske mreže. Zato ne smemo definirati več datumskih parametrov, kot jih potrebujemo za zagotovitev geodetskega datuma geodetske mreže. Tak način definiranja geodetskega datuma imenujemo **definiranje geodetskega datuma z minimalnim številom vezi med datumskimi parametri**.



V primeru ravninske geodetske mreže moramo definirati največ štiri datumske parametre (Preglednica 5-1). Datum lahko definiramo s štirimi koordinatami dveh točk. Če v mreži opazujemo dolžine, moramo definirati tri datumske parametre (merilo določajo merjene dolžine). Datum definiramo z dvema danima koordinatama ene točke in enim azimutom. Ker v praksi le redkokdaj opazujemo azimut, privzamemo v tem primeru za dano eno točko z dvema koordinatama in eno dano koordinato druge točke. Za definiranje datuma v ravnini imamo naslednje vezne enačbe (Kuang 1996, Marjetič in Stopar 2007):

$\delta x_1 = 0, \delta y_1 = 0$  – zagotovimo, da ni premika točke  $T_1$ ,

$\nu_{\nu_1}^T = \mathbf{b}_{\nu_1}^T \delta \mathbf{p}_{12} = 0$  – zagotovimo, da ni spremembe smeri med  $T_1$  in  $T_2$ ,

$$\mathbf{b}_{\nu_1}^T = \begin{bmatrix} b_1 & -b_2 & -b_1 & b_2 \\ \frac{\Delta y_{12}^0}{s_{12}^0} & -\frac{\Delta x_{12}^0}{s_{12}^0} & -\frac{\Delta y_{12}^0}{s_{12}^0} & \frac{\Delta x_{12}^0}{s_{12}^0} \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

$\nu_{s_{12}}^T = \mathbf{b}_{s_{12}}^T \delta \mathbf{p}_{12} = 0$  – zagotovimo, da ni spremembe dolžine ali merila med  $T_1$  in  $T_2$ ,

$$\mathbf{b}_{s_{12}}^T = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & -f_1 & -f_2 \\ \frac{\Delta x_{12}^0}{s_{12}^0} & \frac{\Delta y_{12}^0}{s_{12}^0} & -\frac{\Delta x_{12}^0}{s_{12}^0} & -\frac{\Delta y_{12}^0}{s_{12}^0} \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

kjer je:

$T_1(x_1, y_1), T_2(x_2, y_2)$  - točki geodetske mreže,

$\delta \mathbf{p}_{12}^T = \delta x_1 \quad \delta y_1 \quad \delta x_2 \quad \delta y_2^T$ ,

$\Delta x_{12}^0 = x_2^0 - x_1^0, \Delta y_{12}^0 = y_2^0 - y_1^0$  - razlike približnih koordinat,

$s_{12}^0 = \sqrt{(\Delta x_{12}^0)^2 + (\Delta y_{12}^0)^2}$  - približna dolžina med  $T_1$  in  $T_2$ .

Vezne enačbe lahko zapišemo v matrični obliki:

$$\mathbf{D}^T \mathbf{\Delta} = \mathbf{0}, \quad (5.5)$$

kjer je:

$$\mathbf{D}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & -b_2 & -b_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ f_1 & f_2 & -f_1 & -f_2 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} - \text{datumska matrika dimenzije } 4 \times 2m,$$

$\mathbf{\Delta}$  - rešitev sistema enačb (3.1).

Imamo več možnosti pri definiranju geodetskega datuma: Če bi v mreži opazovali en azimut, bi odstranili 3. vrstico, če bi opazovali dolžino, pa 4. vrstico datumske matrike **D**. Če bi v mreži izbrali eno točko za dano točko, bi odstranili 1. in 2. vrstico v datumski matriki **D**. Če bi v mreži izbrali eno koordinato točke za dano (npr. koordinato  $x$ ), bi odstranili 1. vrstico v datumski matriki **D**.

### 5.2.2 Definiranje geodetskega datuma z notranjimi opazovanji (notranjimi vezmi)

Definiranje geodetskega datuma z notranjimi opazovanji predstavlja naslednjo možnost definiranja geodetskega datuma z minimalnim številom vezi, ki temeljijo na vrednostih nekaterih ali vseh koordinatah točk geodetske mreže, vključenih v izravnavo. Tu govorimo o izravnavi proste mreže. Prosta mreža je tista, v kateri koordinat nobene točke ne privzamemo kot dane. Namesto koordinat točke mreže, kakšnega azimuta ali kakšne razdalje se notranje vezi nanašajo na neko navidezno točko, na nek navidezni azimut, neko navidezno dolžino v mreži. V ravnini in prostoru zahtevajo notranje vezi izpolnitev naslednjih pogojev za prosto mrežo:

- koordinate težišča mreže (srednja vrednost približnih koordinat točk v mreži) se po izravnavi ne smejo spremeniti,
- mreža se glede na težišče v povprečju ne sme zasukati,
- velikost geodetske mreže (povprečna razdalja med težiščem in posameznimi točkami mreže) mora ostati nespremenjena. S tem zagotovimo merilo mreže.

Matematično iz enačb transformacije sestavimo vezne enačbe, ki zagotavljajo izpolnitev notranjih vezi. Vezne enačbe zagotavljajo, da je vsota kvadratov razlik med približnimi in ocenjenimi vrednostmi koordinatnih neznank najmanjša možna:

$$\Delta^T \Delta = \min. \quad (5.6)$$

Izpeljavo veznih enačb izravnave z notranjimi vezmi med neznankami izvedemo za ravninsko geodetsko mrežo. Tako imamo štiri datumske parametre, ki jih moramo določiti (Preglednica 5-1). Dane imamo približne koordinate točk:

$$y_i^0, x_i^0, i = 1 \dots m.$$

Izravnane ali ocenjene koordinate lahko povežemo s približnimi koordinatami s Helmertovo transformacijo, kjer imamo naslednje transformacijske parametre:

- kot zasuka  $\omega$ ,
- merilo mreže  $s$ ,
- premika mreže v smeri obeh koordinatnih osi  $t_x$  in  $t_y$ :

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i^0 + \delta x_i \\ y_i^0 + \delta y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_i^0 \\ y_i^0 \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Glede na zgoraj naštetе vezi, ki jih morajo izpolniti neznanke oziroma koordinate točk v mreži, lahko pričakujemo, da se bo mreža zasukala za majhen kot  $\delta\omega$  ter spremenilo merilo mreže za majhno vrednost  $\delta s$ . Diferencialni spremembi zasuka in merila sta s prvotnima vrednostima zasuka in merila povezani z izrazoma:

$$\delta\omega = \omega - \omega^0 \text{ in } \delta s = s - s^0. \quad (5.8)$$

Določiti želimo torej štiri parametre za definiranje geodetskega datuma ravninske geodetske mreže ( $t_y$ ,  $t_x$ ,  $\omega$  in  $s$ ). Zato enačbo (5.8) lineariziramo v okolici približnih vrednosti  $s^0 = 1$  in  $\omega^0 = 0$ , tako da velja:

$$s = 1 + \delta s, \quad \omega = \delta\omega. \quad (5.9)$$

Če to upoštevamo, velja:

$$\begin{aligned} x_i^0 + \delta x_i &= t_x + 1 + \delta s \cdot \cos \delta\omega \cdot x_i^0 - \sin \delta\omega \cdot y_i^0, \\ y_i^0 + \delta y_i &= t_y + 1 + \delta s \cdot \sin \delta\omega \cdot x_i^0 + \cos \delta\omega \cdot y_i^0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Če predpostavimo, da je  $\delta\omega$  majhen kot ( $\sin \delta\omega \approx \delta\omega$  in  $\cos \delta\omega \approx 1$ ) in zanemarimo člene, v katerih nastopajo produkti popravkov približnih vrednosti neznanih transformacijskih parametrov, lahko enačbo (5.10) zapišemo kot:

$$\begin{aligned}\delta x_i &= t_x - \delta\omega \cdot y_i^0 + \delta s \cdot x_i^0, \\ \delta y_i &= t_y + \delta\omega \cdot x_i^0 + \delta s \cdot y_i^0.\end{aligned}\tag{5.11}$$

oziroma v matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} \delta x_i \\ \delta y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_i^0 & x_i^0 \\ 0 & 1 & x_i^0 & y_i^0 \end{bmatrix} \cdot [t_x \quad t_y \quad \delta\omega \quad \delta s]^T.\tag{5.12}$$

Vidimo, da je popravek koordinate  $y$  sestavljen iz premika  $t_y$ , člena  $\delta\omega \cdot x_i^0$ , ki vsebuje zasuk mreže in  $\delta s \cdot y_i^0$ , ki vsebuje spremembo merila mreže. Zahtevi, da se naj mreža v povprečju ne premakne, je enakovredna zahtevi, da naj bo vsota popravkov približnih vrednosti koordinat vseh točk enaka 0:

$$\sum_{i=1}^m \delta x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^m \delta y_i = 0.\tag{5.13}$$

Zahtevo, naj se mreža v povprečju ne zasuka, lahko zapišemo kot:

$$\sum_{i=1}^m y_i^0 \delta x_i - x_i^0 \delta y_i = 0.\tag{5.14}$$

Zahtevo, naj se velikost mreže v povprečju ne spremeni, lahko zapišemo kot:

$$\sum_{i=1}^m x_i^0 \delta x_i + y_i^0 \delta y_i = 0.\tag{5.15}$$

Enačbe od (5.12) do (5.15) lahko zapišemo v matrični obliki ali v obliki t.i. veznih enačb:

$$\mathbf{H}^T \mathbf{\Delta} = \mathbf{0},\tag{5.16}$$

kjer je  $\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ -y_1^0 & x_1^0 & -y_2^0 & x_2^0 & \dots & -y_m^0 & x_m^0 \\ x_1^0 & y_1^0 & x_2^0 & y_2^0 & \dots & x_m^0 & y_m^0 \end{bmatrix}$ .

Matrika  $\mathbf{H}$  predstavlja matriko Helmertove transformacije. Numerično primernejša je normirana oblika datumske matrike  $\mathbf{H}$ , kjer vsako vrstico matrike  $\mathbf{H}^T$  delimo s pripadajočo normo te vrstice, pred tem pa koordinatne komponente reduciramo na težišče mreže. Prvi dve vrstici v matriki  $\mathbf{H}^T$  podajata zahtevo, da se mreža ne premakne, tretja vrstica zahtevo, da se mreža ne zasuka in četrta, da merilo mreže ostane nespremenjeno. Če smo v mreži že opazovali katero od količin, izbrišemo ustrezno vrstico v matriki  $\mathbf{H}^T$ . Če je datum mreže zagotovljen na podlagi zunanjih opazovanj oz. zunanjih vezi, matrike  $\mathbf{H}$  ni potrebno sestavljati. Med matriko  $\mathbf{H}$  in matriko koeficientov enačb popravkov  $\mathbf{B}$  obstaja pomembna zveza:

$$\mathbf{BH} = \mathbf{0}. \quad (5.18)$$

Ker sta prostora, ki ga napenjajo vrstice matrike  $\mathbf{B}$  in pripadajoče matrike normalnih enačb  $\mathbf{N} = \mathbf{B}^T \mathbf{PB}$  enaka, lahko zapišemo tudi zvezo:

$$\mathbf{NH} = \mathbf{0}. \quad (5.19)$$

Iz enačbe (5.19) izhaja, da stolpci matrike  $\mathbf{H}$  predstavljajo lastne vektorje matrike  $\mathbf{N}$  za lastno vrednost  $\lambda = 0$  (Van Mierlo 1980).

### 5.2.3 Izravnava geodetske mreže po metodi najmanjših kvadratov z upoštevanjem notranjih vezi za določitev geodetskega datuma

Izravnava opazovanj v geodetski mreži po metodi najmanjših kvadratov z minimalnim številom notranjih vezi za definiranje geodetskega datuma mreže poteka po postopku izravnave funkcijsko odvisnih neznank:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + \mathbf{B}\Delta &= \mathbf{f} = \mathbf{d} - \mathbf{l}, \\ \mathbf{H}^T \Delta &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

V okviru izravnave po metodi najmanjših kvadratov moramo izpolniti zahtevo, da je  $\mathbf{v}^T \mathbf{Pv} = \min$ . Tako dobimo rešitev za vektor popravkov približnih vrednosti neznank  $\Delta$  z:

$$\Delta = \left( \mathbf{N} + \mathbf{H}\mathbf{H}^T{}^{-1} - \mathbf{H}\mathbf{H}^T \right) \mathbf{B}^T \mathbf{P}\mathbf{f}. \quad (5.21)$$

s pripadajočo matriko kofaktorjev in referenčno varianco a-posteriori:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\Delta\Delta} &= \left( (\mathbf{N} + \mathbf{H}\mathbf{H}^T)^{-1} - \mathbf{H}\mathbf{H}^T \right)^{-1}, \\ \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n - (2m - d)}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

kjer je:

$2m - d = \text{rang } \mathbf{B} = \text{rang } \mathbf{N}$  - razlika med številom koordinatnih neznank  $2m$  in defektom datuma  $d$  v mreži.

Z datumsko matriko ( $\mathbf{D}$  ali  $\mathbf{H}$ ) prevedemo singularni sistem v regularnega, ki ga lahko rešimo.

### 5.3 Transformacija S

Opazovanja v geodetski mreži ne podajajo vseh potrebnih informacij o koordinatnem sistemu oziroma geodetskem datumu mreže, v katerem so predstavljeni položaji točk. Za definiranje koordinatnega sistema je potrebno imeti na voljo določeno število datumskih parametrov, ki jih zagotovimo z vključitvijo ustreznega števila danih količin v izravnavo. Rešitev problema izravnave opazovanj v geodetski mreži po metodi najmanjših kvadratov, na osnovi minimalnega števila znanih datumskih parametrov, vodi v reševanje regularnega sistema normalnih enačb. Če ne zagotovimo potrebnega števila datumskih parametrov za definiranje geodetskega datuma, pride do singularnosti sistema normalnih enačb. Tak primer se pojavi v primeru proste mreže, kjer ne privzamemo nobene koordinate točke kot dane. Iskanje rešitve izravnave proste mreže oz. singularnega sistema normalnih enačb lahko izvedemo na dva načina:

- Prvi način je določitev minimalnega števila zunanjih vezi (glej enačbo (5.5) ali (5.16)) oz. definiranje potrebnega števila datumskih parametrov za definicijo koordinatnega sistema. Ko definiramo potrebno število datumskih parametrov, imamo opravka z regularnim sistemom normalnih enačb, ki omogoča pridobitev enolične rešitve za neznanke.

- Drugi način je rešitev singularnega sistema normalnih enačb. Ta rešitev ni enolično določena in zagotavlja pridobitev pristranske ocene neznank. Nato pa to rešitev preračunamo v enolično s transformacijo  $S$ .

### 5.3.1 Izravnava proste mreže in transformacija $S$

Zapišemo lahko sistem lineariziranih enačb opazovanj (enačba (3.1)), pri čemer predpostavimo, da smo predhodno odstranili orientacijske neznanke na vseh stojiščih. Če ne obravnavamo nobene točke kot dane, potem govorimo o izravnavi proste mreže in predstavlja enačba (3.1) singularni sistem  $n$  enačb opazovanj v geodetski mreži. Rešitev dobimo z rešitvijo sistema normalnih enačb (izrazi (3.1) in (3.2)):

$$\mathbf{N}\Delta = \mathbf{t} \rightarrow \Delta = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{t}, \quad (5.23)$$

kjer je:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B}, \\ \mathbf{t} &= \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Tako matrika koeficientov neznank  $\mathbf{B}$ , kot matrika normalnih enačb  $\mathbf{N}$  sta singularni in imata defekt ranga enak defektu datuma ( $d$ ) geodetske mreže (manjkajoče število potrebnih datumskih parametrov). Ker imata matriki  $\mathbf{B}$  in  $\mathbf{N}$  isto bazo prostora, veljajo za njiju enake lastnosti. Ker je  $\mathbf{N}$  singularna, velja, da  $\det(\mathbf{N}) = 0$ . To pomeni, da inverzna matrika  $\mathbf{N}^{-1}$  ne izpolni pogoja za navadno inverzijo matrike:

$$\mathbf{N}\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{I}. \quad (5.25)$$

Matrika  $\mathbf{N}$  izpolnjuje pogoje generalizirane inverzije, ki jo označimo z  $\mathbf{N}^-$  (Rao in Mitra 1971):

$$\mathbf{N}\mathbf{N}^- \mathbf{N} = \mathbf{N}. \quad (5.26)$$

Zato lahko zapišemo splošno rešitev za  $\Delta$ :

$$\Delta = \mathbf{N}^- \mathbf{t}. \quad (5.27)$$

Dejstvo je, da  $\mathbf{N}^-$  ni enolično določena oziroma obstaja neskončno mnogo matrik  $\mathbf{N}$ , ki izpolnjujejo pogoj (5.26). Tako dobimo neskončno mnogo rešitev za  $\Delta \mathbf{x}$ . Da bi transformirali neenolično in pristransko rešitev za  $\Delta$  v enolično in nepristransko rešitev, je potrebno poiskati primeren operator  $\mathbf{S}$ , ki bo izpolnil naslednji pogoj (Van Mierlo 1980):

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}\mathbf{N}^-\mathbf{N} = \mathbf{S}\mathbf{B}^-\mathbf{B}. \quad (5.28)$$

Operator  $\mathbf{S}$  transformira pristransko rešitev v koordinatno definirano rešitev z izbranimi premikoma, orientacijo in merilom in ga imenujemo matrika transformacije  $\mathbf{S}$ . Ena od možnosti je tudi uporaba psevdoinverzije za iskanje enolične rešitve:

$$\Delta_{pm} = \mathbf{N}^+\mathbf{t}. \quad (5.29)$$

$\mathbf{N}^+$  v enačbi (5.29) predstavlja Moore-Penroseovo psevdoinverzijo, ki določi tisto rešitev normalnih enačb, ki minimizira evklidsko oz. drugo normo vektorja  $\Delta \rightarrow \Delta^T \Delta = \min$ . (Rao in Mitra 1971).

Enačba (5.29) predstavlja rešitev proste mreže  $\Delta_{pm}$ , ki jo lahko izračunamo tudi iz neenolično definirane pristranske rešitve (5.27) z uporabo ustrezne transformacijske matrike  $\mathbf{S}_{pm}$ , ki je podana z izrazom (Van Mierlo 1980):

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{pm} &= \mathbf{B}^+\mathbf{B}, \\ \Delta_{pm} &= \mathbf{S}_{pm}\Delta = \mathbf{B}^+\mathbf{B}\Delta = \mathbf{B}^+\mathbf{l}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Z upoštevanjem lastnosti psevdoinverzije lahko dokažemo, da je matrika  $\mathbf{S}_{pm}$  idempotentna:

$$\mathbf{S}_{pm}\mathbf{S}_{pm} = \mathbf{B}^+\mathbf{B}\mathbf{B}^+\mathbf{B} = \mathbf{B}^+\mathbf{B} = \mathbf{S}_{pm}. \quad (5.31)$$

Matrika  $\mathbf{S}_{pm}$  izpolnjuje pogoj operatorja, ki preslika pristransko neenolično rešitev v koordinatno definirano rešitev (pogoj (5.28)):

$$\mathbf{S}_{pm} = \mathbf{S}_{pm}\mathbf{B}^-\mathbf{B} \text{ oziroma } \mathbf{S}_{pm} = \mathbf{S}_{pm}\mathbf{N}^-\mathbf{N}. \quad (5.32)$$

Dokaz:  $\mathbf{S}_{pm}\mathbf{B}^-\mathbf{B} = \mathbf{B}^+\mathbf{B}\mathbf{B}^-\mathbf{B} = \mathbf{B}^+\mathbf{B} = \mathbf{S}_{pm}$ .



Iskanje enolične rešitve psevdoinverzije preko matrike  $\mathbf{S}_{pm}$  ni najbolj praktično. Cilj je pokazati, da je možno transformirati pristransko rešitev v nepristransko z uporabo matrike  $\mathbf{S}_{pm}$ . To lahko razložimo na geometrijski način. Če predstavlja  $\mathbf{H}$  nulti prostor matrike  $\mathbf{N}$ , je nulti prostor  $d$  dimenzionalen ( $d$  je defekt datuma). Ker je  $\mathbf{N} = \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B}$ , obstajata zvezi (5.18) in (5.19). Matrika  $\mathbf{H}$  vsebuje podatke o premiku, zasuku in merilu mreže. Torej je matrika  $\mathbf{S}_{pm}$  linearni operator oz. ortogonalni projektor, ki projicira vektor  $\mathbf{\Delta}$  iz nultega prostora matrike  $\mathbf{B}$  v prostor, ki ga napenjajo stolpci matrike  $\mathbf{B}$  (Van Mierlo 1980, Teunissen 2003). Ker je prostor, ki ga napenjajo stolpci matrike  $\mathbf{I} - \mathbf{B}^+ \mathbf{B}$  enak kot nulti prostor matrike  $\mathbf{B}$ , oziroma ker sta prostora, ki ga napenjajo stolpci matrike  $\mathbf{H}$  in  $\mathbf{H} \mathbf{H}^+$  enaka, sta potemtakem enaka tudi prostora  $\mathbf{I} - \mathbf{B}^+ \mathbf{B}$  in  $\mathbf{H} \mathbf{H}^+$ . Zato lahko zapišemo transformacijsko matriko  $\mathbf{S}_{pm}$  kot:

$$\mathbf{S}_{pm} = \mathbf{I} - \mathbf{H} \mathbf{H}^+. \quad (5.33)$$

Enačba (5.33) predstavlja enega od načinov za izračun matrike  $\mathbf{S}_{pm}$ .

Za matriko  $\mathbf{H}$  dimenzije  $d \times 2m$  velja  $\mathbf{H}^+ = \mathbf{H}^T \mathbf{H}^+ \mathbf{H}^T$ . Če je  $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$  regularna, kar se zgodi v primeru enolično določenega in predoločenega geodetskega datuma, potem velja  $\mathbf{H}^+ = \mathbf{H}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{H}^T$ . Sedaj lahko  $\mathbf{S}_{pm}$  zapišemo kot:

$$\mathbf{S}_{pm} = \mathbf{I} - \mathbf{H} \mathbf{H}^T \mathbf{H}^+ \mathbf{H}^T = \mathbf{I} - \mathbf{H} \mathbf{H}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{H}^T. \quad (5.34)$$

Matrika  $\mathbf{S}_{pm}$  je singularna in ima enak defekt ranga kot matrika  $\mathbf{N}$  ali  $\mathbf{B}$  (ki je enak defektu datuma geodetske mreže). Matrika  $\mathbf{S}_{pm}$  torej predstavlja matriko transformacije  $S$ , ki transformira pristransko, neenolično rešitev  $\mathbf{\Delta}$  v enolično rešitev, za katero velja, da je  $\mathbf{\Delta}^T \mathbf{\Delta} = \min$ . To pomeni, da z  $\mathbf{S}_{pm}$  dobimo tak rezultat, kot če bi izravnavali prosto mrežo.  $\mathbf{S}_{pm}$  transformira rešitev v poljubnem enolično določenem datumu v rešitev proste mreže, kar je identično rešitvi, ko vse točke določajo datum. Vendar pa nas ne zanima samo, kako iz poljubne rešitve, izračunane v enolično določenem geodetskem datumu, preidemo v rešitev

izravnave proste mreže, ampak tudi, kako transformiramo rešitve za  $\Delta$  iz enega v drugi enolično določen datum:

$$\Delta_{gdi} = \mathbf{S}_{gdi} \Delta_{gdj}, \quad (5.35)$$

kjer je:

$\Delta_{gdi}$  – vektor popravkov približnih vrednosti koordinatnih neznank v datumu  $gdi$ ,

$\mathbf{S}_{gdi}$  – matrika transformacije S, ki projicira poljubno rešitev v rešitev v datumu  $gdi$ ,

$\Delta_{gdj}$  – vektor popravkov približnih vrednosti koordinatnih neznank v datumu  $gdj$ .

Opomba: indeksa  $gdi$  in  $gdj$  se nanašata izključno na enolično definirane geodetske datume geodetskih mrež.

Matriko  $\mathbf{S}_{gdi}$  dobimo z naslednjo enačbo:

$$\mathbf{S}_{gdi} = \mathbf{I} - \mathbf{H} \mathbf{H}^T \mathbf{E}_{gdi} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{E}_{gdi}, \quad (5.36)$$

kjer je:

$\mathbf{S}_{gdi}$  – matrika transformacije S dimenzij  $2m \times 2m$  (singularna, kvadratna, idempotentna, z defektom ranga  $d$ , enakem defektu datuma geodetske mreže),

$\mathbf{E}_{gdi}$  – matrika dimenzij  $2m \times 2m$ , katere izvendiagonalni elementi so enaki 0, na diagonali pa so vrednosti 1 samo na tistih mestih, ki pripadajo posamezni koordinatni komponenti, ki predstavlja dano količino za definiranje geodetskega datuma  $gdi$ .

Matriko  $\mathbf{E}_{gdi}$  lahko obravnavamo kot neke vrste utežno matriko in izraz (5.35) uteženo transformacijo S (Chen et al. 1990).

Zanima nas tudi ocena natančnosti transformiranih koordinat. Iz zakona o prenosu varianc in kovarianc lahko matriko kofaktorjev in pripadajočo kovariančno variančno matriko za transformirane koordinate zapišemo:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\Delta\Delta}^{gdi} &= \mathbf{S}_{gdi} \mathbf{Q}_{\Delta\Delta}^{gdj} \mathbf{S}_{gdi}^T, \\ \Sigma_{\Delta\Delta}^{gdi} &= \mathbf{S}_{gdi} \Sigma_{\Delta\Delta}^{gdj} \mathbf{S}_{gdi}^T. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Vemo, da velja enačba transformacije  $S$  (5.35) in da je transformacijska matrika singularna z defektom ranga enakim defektu datuma mreže. Ker je matrika  $S$  singularna, ne moremo izraziti vektorja neznanek  $\Delta_{gdj}$  kot  $\Delta_{gdj} = S_{gdi}^{-1} \Delta_{gdi}$ , ampak si pomagamo s psevdoinverzijo.

Obe strani enačbe (5.35) pomnožimo z leve z matriko  $S_{gdi}^+$ :

$$S_{gdi}^+ \Delta_{gdi} = S_{gdi}^+ S_{gdi} \Delta_{gdj} \quad (5.38)$$

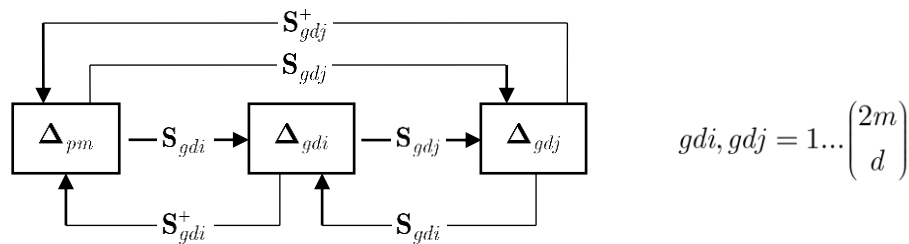
Ker je  $S_{gdi}^+ = S_{pm}^{gdi}$  in  $S_{gdi}^+ S_{gdi} = S_{pm}$  imamo:

$$S_{gdi}^+ \Delta_{gdi} = S_{gdi}^+ S_{gdi} \Delta_{gdj} = S_{pm}^{gdi} \Delta_{gdi} = S_{pm} \Delta_{gdj} = \Delta_{pm}, \quad (5.39)$$

kjer je:

$S_{pm}^{gdi}$  – matrika dimenzije  $2m \times 2m$ , enaka kot  $S_{pm}$  s stolpci enakimi 0 na mestih, ki pripadajo datumu  $gdi$ .

Vidimo, da ne glede na to, katero rešitev vzamemo, če jo pomnožimo s psevdoinverzijo matrike  $S$  v obravnavanem datumu, dobimo rešitev izravnave proste mreže oz. primer, ko vse točke definirajo datum ( $E_{gdi} = I$  – rešitev z definiranjem notranjih vezi za odpravo defekta datuma). Predstavimo lahko shemo transformacij rešitev iz enega v drugi geodetski datum geodetske mreže (Slika 5-1).



Slika 5-1: Shematski prikaz transformacije  $S$ .

Figure5-1: Scheme representation of  $S$  transformation.

Na zgornji sliki (Slika 5-1) vrednost  $\binom{2m}{d}$  predstavlja možno število enoličnih določitev geodetskega datuma.

## 5.4 Metode izbire skupnega geodetskega datuma mreže dveh terminskih izmer

Izbira primernege geodetskega datuma za oceno pravih vrednosti premikov in deformacij je bila predmet mnogih raziskav v zgodovini tega področja. Predvsem se tu osredotočimo na rezultate raziskave v okviru 6. Komisije FIG iz leta 1978, kjer so se različni raziskovalni centri po svetu vključili v proces poenotenja metod in postopkov deformacijske analize (Poglavje 1.3). Predstavili in kasneje uporabili bomo postopek razvit na univerzi v Delftu (Nizozemska) in pristop k določanju območij domnevno stabilnih točk, ki je bil razvit na univerzi New Brunswick (Fredericton, Kanada).

### 5.4.1 Testiranje homogenosti natančnosti dveh terminskih izmer

Vektor premikov, kot že večkrat omenjeno, računamo iz primerjave izravnanih koordinatnih komponent v dveh terminskih izmerah  $\mathbf{x}_1$  in  $\mathbf{x}_2$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2^0 + \Delta_2 - \mathbf{x}_1^0 + \Delta_1, \quad (5.40)$$

s pripadajočo matriko kofaktorjev:

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{uu}} = \mathbf{Q}_{\Delta_1\Delta_1} + \mathbf{Q}_{\Delta_2\Delta_2}. \quad (5.41)$$

Obe izmeri sta med seboj primerljivi, če obstaja homogenost natančnosti obeh terminskih izmer. To skladnost preverimo s statističnim testom, kjer imamo ničelno hipotezo:

$$H_0 : \text{homogenost natančnosti opazovanj v dveh izmerah: } E \hat{\sigma}_{0,1}^2 = E \hat{\sigma}_{0,2}^2 = \sigma_0^2,$$

nasproti alternativne hipoteze:

$$H_1 : \text{nehomogenost natančnosti opazovanj v dveh izmerah: } E \hat{\sigma}_{0,1}^2 \neq E \hat{\sigma}_{0,2}^2 \neq \sigma_0^2.$$

Statistično testiranje izvedemo s pomočjo testne statistike  $T$ , ki podaja razmerje med referenčno varianco a-posteriori med dvema terminskima izmerama:

$$T = \frac{\hat{\sigma}_{0,1}^2}{\hat{\sigma}_{0,2}^2}, \text{ če } \hat{\sigma}_{0,1}^2 > \hat{\sigma}_{0,2}^2 \text{ oziroma } T = \frac{\hat{\sigma}_{0,2}^2}{\hat{\sigma}_{0,1}^2}, \text{ če } \hat{\sigma}_{0,2}^2 > \hat{\sigma}_{0,1}^2, \quad (5.42)$$

kjer je:

$\hat{\sigma}_{0,1}^2$  in  $\hat{\sigma}_{0,2}^2$  - a-posteriori varianci za koordinatne neznanke v prvi in drugi terminski izmeri.

Izbrana testna statistika  $T$  (enačba (5.43)) se porazdeljuje po porazdelitvi  $F$  s prostostnima stopnjama  $f_1$  za prvo in  $f_2$  za drugo terminsko izmero (Savšek-Safić 2002). Če je testna statistika manjša ali enaka kritični vrednosti pri izbrani stopnji tveganja  $\alpha$ :

$$T \leq F_{f_1, f_2, 1-\alpha/2}, \quad (5.43)$$

potem ne moremo zavrniti ničelne hipoteze in lahko trdimo, da ni statistično značilnih razlik med variancama v prvi in drugi terminski izmeri. Lahko izračunamo skupno a-posteriori referenčno varianco obeh terminskih izmer, ki ima naslednjo obliko (Chen et al. 1990, Savšek-Safić 2002, Ambrožič 2001):

$$\hat{\sigma}_{0,12}^2 = \frac{f_1 \hat{\sigma}_{0,1}^2 + f_2 \hat{\sigma}_{0,2}^2}{f_1 + f_2}. \quad (5.44)$$

Če ugotovimo nehomogeno natančnost dveh izmer, potem ti dve izmeri nista primerni za medsebojno primerjavo. Vzrok temu je najpogosteje neenakost geodetskih datumov v izmerah ali nepravilna izbira uteži opazovanj v posamezni izmeri (Chen et al. 1990). Primerjava dveh terminskih izmer, s tem pa korektna deformacijska analiza, je v splošnem mogoča ob upoštevanju dveh osnovnih zahtev (Savšek-Safić 2002): (i) oba matematična modela temeljita na skupnem enolično določenem geodetskem datumu identičnih točk ter (ii) uporabljajo se enake približne koordinate točk kot vhodni podatek izravnave.

#### 5.4.2 Testiranje skladnosti oblike relativne geodetske mreže v dveh terminskih izmerah – postopek Delft

Relativne geodetske mreže so namenjene odkrivanju morebitnih premikov točk na objektu na osnovi relativnih odnosov točk v mreži. Pri morebitnem premikanju točk na objektu moramo ugotoviti, ali je objekt spremenil obliko. Če dokažemo statistično spremenjeno obliko objekta, moramo v nadaljevanju s testiranjem preveriti, katere točke so tiste, ki so se premaknile. Ostale točke obravnavamo kot točke, ki se verjetno niso premaknile. S temi točkami nastavimo matriko  $\mathbf{E}$  (poglavje 5.3.1, enačba (5.36)) in s transformacijo  $S$  izračunamo vektor  $\mathbf{\Delta}$ , ki verjetno podaja pravo oceno za vrednosti premikov točk v geodetski mreži.

Statistično analizo spremembe oblike relativne geodetske mreže v dveh terminskih izmerah naredimo s testiranjem naslednje ničelne hipoteze:

$$H_0 : \text{koordinate vseh točk v mreži se med izmerama niso spremenile: } \mathbf{u} = \mathbf{0},$$

nasproti alternativne hipoteze:

$$H_1 : \text{koordinate točk so se med dvema izmerama spremenile: } \mathbf{u} \neq \mathbf{0}.$$

Tvorimo testno statistiko (Van Mierlo 1978, Zemljak 2006, Heck et al. 1982):

$$T_2 = \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{Q}_u^+ \mathbf{u}}{f \hat{\sigma}_0^2}, \quad (5.45)$$

kjer je:

$f = f_1 + f_2 / 2$  – skupno (povprečno) število prostostnih stopenj za dve terminski izmeri,  
 $\hat{\sigma}_0^2$  – a-posteriori referenčna varianca za obe terminski izmeri (enačba (5.44)).

Opomba: Soavtor postopka Delft, Van Mierlo, uporablja (Van Mierlo 1978) v vseh enačbah a-priori varianco utežne enote, ki pa jo navadno privzamemo kot znano pri projektiranju geodetskih mrež, torej pred izvedbo meritev. Če pa izvedemo deformacijsko analizo po opravljenih terminskih izmerah, predlagamo, da se v enačbi (5.45) in tudi v vseh drugih enačbah, kjer nastopi  $\sigma_0^2$ , uporabi a-posteriori varianco enote uteži  $\hat{\sigma}_0^2$ , ki jo izračunamo po enačbi (5.44).

Testna statistika  $T_2$  se porazdeljuje po centralni porazdelitvi  $F$  s  $f$  prostostnimi stopnjami. Če je  $T_2 \leq F_{f, \infty, 1-\alpha/2}$ , ničelne hipoteze ne moremo zavrniti in trdimo, da se koordinate točk v mreži niso statistično značilno spremenile (in nadaljujemo s testiranjem spremembe velikosti mreže ali njenega dela). Če je  $T_2 > F_{f, \infty, 1-\alpha/2}$ , zavrnemo ničelno hipotezo in trdimo, da je mreža spremenila svojo obliko v času med obema terminskima izmerama. To pomeni, da so se spremenile koordinate točk v mreži med obema terminskima izmerama. Možno pa je, da so se spremenile samo koordinate točk dela mreže. Z nadaljnjimi testiranjmi poskušamo določiti tisti del mreže, ki je spremenil svojo obliko. Vektor  $\mathbf{u}$  in njemu pripadajočo matriko kofaktorjev koordinatnih razlik  $\mathbf{Q}_u$  razdelimo na dva dela: (i) del, ki ni spremenil svoje oblike

-  $F$  in (ii) del, ki je spremenil svojo obliko -  $B$  (Van Mierlo 1978, Zemljak 2006, Heck et al. 1982, Ambrožič 2001):

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_F \\ \mathbf{d}_B \end{bmatrix}, \quad (5.46)$$

$$\mathbf{Q}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{FF} & \mathbf{Q}_{FB} \\ \mathbf{Q}_{BF} & \mathbf{Q}_{BB} \end{bmatrix}.$$

Naj bo:

$$\mathbf{P}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{FF} & \mathbf{P}_{FB} \\ \mathbf{P}_{BF} & \mathbf{P}_{BB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{FF} & \mathbf{Q}_{FB} \\ \mathbf{Q}_{BF} & \mathbf{Q}_{BB} \end{bmatrix}^+ = \mathbf{Q}_u^+.$$

Kvadratno formo v števcu testne statistike  $T_2$  (enačba (5.45)) razcepimo na dva statistično neodvisna dela (Ambrožič 2001):

$$\mathbf{u}^T \mathbf{Q}_u^+ \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \mathbf{P}_u \mathbf{u}, \quad (5.47)$$

$$\mathbf{u}^T \mathbf{P}_u \mathbf{u} = \mathbf{u}_F^T \bar{\mathbf{P}}_{FF} \mathbf{u}_F + \bar{\mathbf{u}}_B^T \mathbf{P}_{BB} \bar{\mathbf{u}}_B, \quad (5.48)$$

kjer je:

$$\bar{\mathbf{u}}_B = \mathbf{u}_B + \mathbf{P}_{BB}^{-1} \mathbf{P}_{BF} \mathbf{u}_F \quad \text{in} \quad (5.49)$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{FF} = \mathbf{P}_{FF} - \mathbf{P}_{FB} \mathbf{P}_{BB}^{-1} \mathbf{P}_{BF}.$$

Matrike  $\mathbf{Q}_{FF}^+ = \mathbf{Q}_{FF}^- = \mathbf{P}_{FF}$ , kot tudi  $\mathbf{Q}_{FF}$ , so regularne, matrika  $\mathbf{Q}_{FF}$  pa mora biti singularna. Le v tem primeru je vektor koordinatnih razlik neodvisen od izbire koordinatnega sistema. Tako kvadratne forme, ki se nanaša na del mreže, ki ni spremenil svoje oblike, ne moremo izračunati po enačbi (5.48). Regularno matriko  $\mathbf{Q}_{FF}$  transformiramo v singularno z minimalno sledjo in defektom geodetskega datuma mreže  $d$  z uporabo transformacije  $S$  (Van Mierlo 1978, Marjetič in Stopar 2007):

$$\tilde{\mathbf{Q}}_u = \mathbf{S}_{FF} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{FF} & \mathbf{Q}_{FB} \\ \mathbf{Q}_{BF} & \mathbf{Q}_{BB} \end{bmatrix} \mathbf{S}_{FF}^T = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_{FF} & \tilde{\mathbf{Q}}_{FB} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{BF} & \tilde{\mathbf{Q}}_{BB} \end{bmatrix}, \quad (5.50)$$

kjer je:

$\mathbf{S}_{FF} = \mathbf{I} - \mathbf{H} \mathbf{H}^T \mathbf{E}_{FF} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{E}_{FF}$  – transformacijska matrika  $\mathbf{S}_{FF}$ ,

$\mathbf{E}_{FF} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{FF} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ , kjer je  $\mathbf{I}_{FF}$  enotska matrika,

$\mathbf{H}$  – datumska matrika minimalnega števila notranjih vezi (poglavje 5.2.2).

Prav tako moramo pretvoriti tudi vektor koordinatnih razlik  $\mathbf{u}$ :

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{S}_{FF} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_F \\ \mathbf{u}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_F \\ \tilde{\mathbf{u}}_B \end{bmatrix}. \quad (5.51)$$

Statistično analizo spremembe oblike dela geodetske mreže, za katerega predpostavimo, da ni spremenil svoje oblike, naredimo s testiranjem naslednje ničelne hipoteze:

$H_0$  : del mreže, katerega točke so vključene v vektor  $\mathbf{u}_F$ , ni spremenil svoje oblike, nasproti alternativne hipoteze:

$H_1$  : del mreže, katerega točke so vključene v vektor  $\mathbf{u}_F$ , je svojo obliko spremenil.

Tvorimo testno statistiko:

$$T_3 = \frac{\tilde{\mathbf{u}}_F^T \tilde{\mathbf{Q}}_{FF}^+ \tilde{\mathbf{u}}_F}{f_F \sigma_0^2}, \quad (5.52)$$

kjer je:

$f_F = 2m_F - d$  ( $2m_F$  se nanaša na obravnavo v ravnini),

$m_F$  – število točk dela mreže, ki ni spremenil svoje oblike,

$d$  – defekt geodetskega datuma mreže.

Testna statistika  $T_3$  se porazdeljuje po centralni porazdelitvi  $F$  s  $f_F$  prostostnimi stopnjami. Če je  $T_3 \leq F_{f_F, \infty, 1-\alpha/2}$ , ničelne hipoteze ne moremo zavrnila in trdimo, da se koordinate točk dela mreže niso statistično značilno spremenile. Če je  $T_3 > F_{f_F, \infty, 1-\alpha/2}$ , zavrnilo ničelno hipotezo in trdimo, da je del mreže spremenil svojo obliko v času med obema terminskima izmerama. To pomeni, da so se spremenile koordinate vsaj ene točke, ki nastopa v vektorju  $\mathbf{u}_F$ . Testiranje ponavljamo z izločanjem točk iz vektorja  $\mathbf{u}_F$  tako dolgo, dokler ničelne



hipoteze ne moremo zavrni. Testno statistiko za testiranje oblike dela mreže lahko sestavimo le za najmanj toliko točk, da je  $f_F > 0$ .

Postopek izločanja točk je naslednji: V prvi iteraciji izločamo po eno točko iz vektorja  $\mathbf{u}_F$ , ki vsebuje vse točke v relativni mreži in izračunamo pripadajočo testno statistiko  $T_3$ . Če geodetska mreža vsebuje  $m$  točk, izračunamo  $m$  testnih statistik  $T_3$  v prvi iteraciji. Najmanjša izračunana testna statistika  $T_3$  za posamezno izločeno točko nam pove, da je bil test za testiranje  $H_0$  najboljši in kvadratna forma  $\tilde{\mathbf{u}}_F^T \tilde{\mathbf{Q}}_{FF}^+ \tilde{\mathbf{u}}_F$  v tej iteraciji najmanjša. To pomeni, da se je pripadajoča izločena točka statistično značilno premaknila in jo izločimo iz vektorja  $\mathbf{u}_F$  in matrike  $\mathbf{Q}_{FF}$ . Naslednjo iteracijo naredimo brez izločene točke v prvi iteraciji in še brez ene točke. Ponovno poiščemo najmanjšo testno statistiko  $T_3$  in označimo pripadajočo točko kot točko, ki se je statistično značilno premaknila. Postopek iterativno ponavljamo toliko časa, da ničelne hipoteze ne moremo zavrni. Takrat trdimo, da se točke, ki so ostale v vektorju  $\mathbf{u}_F$ , niso statistično značilno premaknile, izločene točke pa so se statistično značilno premaknile.

S točkami, ki ostanejo v vektorju  $\mathbf{u}_F$  (se niso statistično značilno premaknile), definiramo matriko  $\mathbf{E}$  transformacije S. Z določeno matriko  $\mathbf{S}$  transformiramo vektor koordinatnih sprememb  $\mathbf{u}$  med dvema terminskima izmerama v datumsko pogojeno rešitev. Ta rešitev naj bi podajala realno oceno vektorja koordinatnih sprememb, ki jih uporabimo pri izračunu deformacijskih parametrov in premikov točk geodetske mreže.

### 5.4.3 Iskanje primerne datuma z uporabo robustnih statističnih metod

V primeru iskanja optimalnega geodetskega datuma z metodami robustne statistike (Chen et al. 1990) obravnavamo funkcionalni model transformacije S. Imamo vektor premikov točk  $\mathbf{u}$  in pripadajočo matriko kofaktorjev  $\mathbf{Q}_{uu}$  kot razliko rezultatov izravnave (proste mreže) dveh terminskih izmer. S transformacijo S lahko rešitev transformiramo v poljubni geodetski datum  $gdj$  (enačba (5.35) in (5.36)). Funkcionalni model transformacije S (enačba (5.36)) je torej:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{gdj} &= \mathbf{S}_{gdj} \mathbf{u}_{gdi} = \left( \mathbf{I} - \mathbf{H} \mathbf{H}^T \mathbf{E}_{gdj} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{E}_{gdj} \right) \mathbf{u}_{gdi}, \\ \mathbf{Q}_{uu}^{gdj} &= \mathbf{S}_{gdj} \mathbf{Q}_{uu}^{gdi} \mathbf{S}_{gdj}^T, \end{aligned} \quad (5.53)$$

kjer indeks  $gdi$  in  $gdj$  označuje geodetski datum.

Če ponovno zapišemo Gauss-Markov funkcionalni model (3.1) geodetskih mrež, imamo (Teunissen 2003):

$$\mathbf{v} + \mathbf{B}\Delta = \mathbf{f} = \mathbf{d} - \mathbf{l}. \quad (5.54)$$

V teoriji izravnave po metodi najmanjših kvadratov iščemo take rešitve, ki izpolnjujejo pogoj minimalne vsote kvadratov popravkov opazovanj. Te rešitve dobimo v primeru, ko izpolnimo pogoj ortogonalnosti med vektorjem popravkov opazovanj in prostorom matrike  $\mathbf{B}$  (Teunissen 2003), pri čemer upoštevamo različen vpliv opazovanj, ki ga podajamo z matriko uteži  $\mathbf{P}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{v} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{f} - \mathbf{B} \Delta &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (5.55)$$

iz katerega izhajajo normalne enačbe:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \Delta = \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{f}. \quad (5.56)$$

Iz (5.55) in (5.56) izhajajo rešitve izravnave po metodi najmanjših kvadratov (na tem mestu jih posebej označujemo z strešico):

$$\begin{aligned} \hat{\Delta} &= \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{f} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{t}, \\ \hat{\mathbf{l}} &= \mathbf{d} - \mathbf{B} \hat{\Delta}, \\ \hat{\mathbf{v}} &= \mathbf{f} - \mathbf{B} \hat{\Delta} = \mathbf{f} - \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{f} = \left( \mathbf{I} - \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \right) \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Primerjava modela (5.53) in (5.54) kaže na to, da funkcionalni model transformacije  $\mathbf{S}$  (5.53) dejansko predstavlja Gauss-Markov model, ki povezuje "opazovanja"  $\mathbf{u}_{gdi}$ , popravke "  $\mathbf{u}_{gdj}$  ter neznanke vektorja transformacijskih parametrov  $\mathbf{t}_S$  (glej enačbe (5.12) do (5.16)):

$$\mathbf{u}_{gdj} + \mathbf{H} \mathbf{t}_S = \mathbf{u}_{gdi}, \quad (5.58)$$

kjer je rešitev za  $\mathbf{t}_S$ :

$$\mathbf{t}_S = \mathbf{H}^T \mathbf{E} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{E} \mathbf{u}_{gdi}. \quad (5.59)$$

Matrika transformacije  $S$  in matrika  $\mathbf{H} \mathbf{H}^T \mathbf{E} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{E}$  predstavljata ortogonalna projektorja, ki projicirata vektor opazovanj  $\mathbf{u}_{gdi}$  na dve ortogonalni komponenti:  $\mathbf{t}_S$  in  $\mathbf{u}_{gdj}$ .

Če bi reševali model (5.58), bi iskali rešitev za  $\mathbf{t}_S$  pod pogoji metode najmanjših kvadratov, tokrat minimuma vsote kvadratov elementov vektorja  $\mathbf{u}_{gdj}$  s predhodno nastavljeno matriko uteži  $\mathbf{E}$ . Model transformacije  $S$  podaja torej tisto rešitev, ki minimizira evklidsko normo vektorja koordinatnih komponent točk mreže (enačba (5.6)).

Matrika  $\mathbf{H}$  je datumska matrika notranjih vezi, ki vključuje vse točke geodetske mreže ali drugače: matrika, ki zagotavlja, da vse točke geodetske mreže definirajo datum (primer: prosta mreža). To pomeni, da je matrika  $\mathbf{E}$  kot matrika uteži tista, ki določa, katerim točkam dodati večji oziroma manjši vpliv pri definiranju datuma. Želimo torej nastaviti tako matriko uteži  $\mathbf{E}$ , ki bo preko matrike  $\mathbf{S}$  definirala optimalni geodetski datum oziroma na koncu zagotavljala optimalno rešitev za vektor  $\mathbf{u}_{gdj}$ .

V matematičnem smislu primerno definiran geodetski datum predstavlja pogoj za uspešno reševanje modela (5.58), ki predstavlja parametrični model (tudi vsak model izravnave predstavlja parametrični model). Parametrični modeli imajo v splošnem nekaj prednosti in slabosti (Hampel et al. 1986):

- pojav grobih pogreškov vpliva na računane parametre,
- model je samo idealizirana aproksimacija realnosti, ki pa je seveda na ta način matematično veliko lažje obvladljiva,
- parametričnemu modelu pripada dokaj enostaven stohastični model,
- lahko, da je parametrični model napačno izbran,

- parametrični modeli ločujejo informacije iz opazovanj na strogo strukturne in strogo slučajne spremenljivke.

Pri definiranju geodetskega datuma v funkcionalnem modelu (5.58) se lahko pojavi problem točk, ki so se premaknile. Te točke predstavljajo v modelu transformacije S neke vrste grobo pogrešena opazovanja (enačba (5.53)). Ta problem lahko rešimo z robustnimi statističnimi metodami, ki v splošnem minimizirajo vpliv grobo pogrešenih opazovanj v modelu. Optimalni geodetski datum lahko določimo z uporabo metode največjega verjetja (ang. *MLE - Maximum Likelihood Estimation*) ali ocene  $M$ , ki omogoča določitev najverjetnejše vrednosti za iskan parameter. V splošnem uporaba ocene  $M$  za rešitev obravnavanega funkcionalnega modela zahteva določitev minimuma funkcije odstopanj (Jager et al. 2005, Valero in Moreno 2005) ali popravkov  $\mathbf{u}_{gdj}$ . V obravnavanem primeru transformacije S iščemo minimum funkcije (Jager et al. 2005, Chen et al. 1990, Hampel et al. 1986):

$$\rho \mathbf{u}_{gdj} = \min. \quad (5.60)$$

Za ekstrem (minimum) funkcije  $\rho \mathbf{u}_{gdj}$  velja, da je prvi odvod te funkcije po  $\mathbf{u}_{gdj}$  enak 0. Prvi odvod definira vplivno funkcijo (Hampel et al. 1986), ki je oblike (Jager et al. 2005, Valero in Moreno 2005):

$$\psi \mathbf{u}_{gdj} = \frac{\partial \rho \mathbf{u}_{gdj}}{\partial \mathbf{u}_{gdj}} = 0. \quad (5.61)$$

Ker je  $\mathbf{u}_{gdj}$  odvisen od  $\mathbf{t}_S$ , za določitev minimuma uporabimo pravilo posrednega odvajanja odvisne funkcije (Jager et al. 2005) in imamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \mathbf{u}_{gdj} \mathbf{t}}{\partial t_p} &= \frac{\partial}{\partial t_p} \sum_k \rho u_{gdj}^k \mathbf{t}_S = \sum_k \frac{\partial \rho u_{gdj}^k \mathbf{t}_S}{\partial u_{gdj}^k} \cdot \frac{\partial u_{gdj}^k}{\partial t_p} = \\ &= \sum_k \psi u_{gdj}^k \cdot \frac{\partial u_{gdj}^k}{\partial t_p} = 0, \\ \sum_k \psi u_{gdj}^k \cdot \frac{\partial u_{gdj}^k}{\partial t_p} &= \sum_k \psi u_{gdj}^k \mathbf{h}^k = 0, \end{aligned} \quad (5.62)$$

kjer je:

$u_{gdj}^k$  je  $k$ -ti element vektorja  $\mathbf{u}_{gdj}$ ,  $k = 1 \dots 2m$  (št. koord. komponent),

$\mathbf{h}^k$  je  $k$ -ta vrstica matrike  $\mathbf{H}$ , ki je dimenzije  $2m \times d$  ( $d$  - defekt datuma),

$p = t_x, t_y, \omega, ds$  - indeks, ki predstavlja transformacijske parametre med dvema koordinatnima sistemoma (geodetskima datumoma).

Iz (5.62) izhaja pogoj ortogonalnosti (5.55) za določitev optimalne rešitve modela transformacije S:

$$\mathbf{H}^T \begin{bmatrix} \psi u_{gdj}^1 \\ \psi u_{gdj}^2 \\ \vdots \\ \psi u_{gdj}^{2m} \end{bmatrix} = \mathbf{H}^T \begin{bmatrix} \frac{\psi u_{gdj}^1}{u_{gdj}^1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\psi u_{gdj}^2}{u_{gdj}^2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\psi u_{gdj}^{2m}}{u_{gdj}^{2m}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{gdj}^1 \\ u_{gdj}^2 \\ \vdots \\ u_{gdj}^{2m} \end{bmatrix} = \mathbf{H}^T \mathbf{E} \mathbf{u}_{gdj} = \mathbf{0}. \quad (5.63)$$

Za določitev minimuma funkcije  $\rho$  (enačba (5.60)) lahko uporabimo kot oceno  $M$  normo  $L_1$  oziroma prvo normo vektorja  $\mathbf{u}_{gdj}$  (Chen et al. 1990, Jager et al. 2005):

$$\rho \mathbf{u}_{gdj} = \|\mathbf{u}_{gdj}\|_1 = \min., \quad (5.64)$$

$$\sum_k \rho u_{gdj}^k = \sum_k |u_{gdj}^k| = \sum_k |u_{gdj}^k - \mathbf{h}^k \mathbf{t}_S| = \min.$$

Če izberemo za oceno  $M$  normo  $L_1$ , potem je vplivna funkcija teoretično definirana z (Jager et al. 2005):

$$\psi u_{gdj}^k = \begin{cases} +1, & \rho u_{gdj}^k > 0 \\ -1, & \rho u_{gdj}^k < 0 \end{cases} \rightarrow \psi u_{gdj}^k = 1. \quad (5.65)$$

Iz (5.63) in upoštevanjem izraza (5.65) za vplivno funkcijo v primeru uporabe norme  $L_1$  kot ocene  $M$ , določimo obliko diagonalne utežne matrike  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E} = \text{diag}_k \frac{1}{|u_{gdj}^k|}. \quad (5.66)$$

Za določitev rešitve ali določitev minimuma izraza (5.64) uporabimo iterativni postopek prilagajanja uteži v diagonalni matriki  $\mathbf{E}$ , ki jo na začetku izberemo kot enotsko matriko.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_r^1 &= \mathbf{I}_{2m \times 2m}, \text{ za } it=1, \\ \mathbf{E}_r^{it} &= \text{diag}_k \left[ \frac{1}{|u_{r,gdj}^{it-1,k}|} \right]. \end{aligned} \quad (5.67)$$

kjer je:

$it$  je število ponovitve ali iteracije,

$u_{r,gdj}^{it,k}$  je  $k$ -ti element vektorja  $\mathbf{u}_{r,gdj}$  po  $it$ -ti iteraciji za referenčne točke  $r$ .

Postopek ponavljamo toliko časa, dokler razlika med dvema iteracijama za vektor  $\mathbf{u}_{gdj}$  ni manjša od izbranega kriterija prekinitve iteracijskega postopka (npr. polovica povprečne natančnosti premikov). Po končanem iteracijskem postopku izračunamo vrednost vektorja premikov referenčnih točk  $r$  in pripadajočo matriko kofaktorjev:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{r,gdj}^{it} &= \mathbf{S}_r^{it} \mathbf{u}_{r,gdi}, \\ \mathbf{Q}_{r,gdj}^{it} &= \mathbf{S}_r^{it \text{ T}} \mathbf{Q}_{r,gdi} \mathbf{S}_r^{it}. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Verjetno mirovanje referenčnih točk nato ocenjujemo na podlagi znanih intervalov zaupanja za posamezno točko ob izbrani stopnji tveganja. Če je izračunani premik referenčne točke (enačba (5.68)) zunaj intervala zaupanja, potem to točko označimo kot verjetno nestabilno.

Problem nepoznavanja ali neprimerne izbire geodetskega datuma lahko torej rešujemo z minimizacijo prve norme vektorja premikov referenčnih točk (Chen et al. 1990). Ta način zagotavlja geodetski datum, ki je robusten (odporen) na (referenčne) točke, ki se verjetno niso premaknile. Tako omogoča z uporabo transformacije  $S$  rešitev proste mreže na optimalno izbran geodetski datum določitev realnih premikov vseh točk geodetske mreže.

## 5.5 Odvisnost deformacij od relativne spremembe geodetskega datuma med dvema terminskima izmerama

Neizpolnjevanje zahtev (i) in (ii) iz poglavja 5.1 lahko privede do napačnih oziroma popačenih vrednosti tenzorja deformacij, ki povzročijo zavajajoče končne sklepe o deformacijskem stanju obravnavanega objekta. V nadaljevanju se bomo osredotočili predvsem na zahtevo prvega pogoja, saj je le-tega bistveno težje popolnoma izpolniti.

Če upoštevamo dejstvo, da imamo v dveh terminskih izmerah različno definirane koordinatne sisteme (geodetske datume –  $gd1$  in  $gd2$ ) lahko (5.2) zapišemo kot:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}} &= \mathbf{x}_2^{gd2} - \mathbf{x}_1^{gd1}, \\ \tilde{\mathbf{u}} &= \left[ \mathbf{t}_2 + s_2 \mathbf{R}_2 \mathbf{N}_2^{-\text{(II)}} \mathbf{B}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{f}_2 + \mathbf{x}_2^0 \right] - \left[ \mathbf{t}_1 + s_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{N}_1^{-\text{(I)}} \mathbf{B}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{f}_1 + \mathbf{x}_1^0 \right], \\ \tilde{\mathbf{u}} &= \mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1 + s_2 \mathbf{R}_2 \mathbf{N}_2^{-\text{(II)}} \mathbf{B}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{f}_2 - s_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{N}_1^{-\text{(I)}} \mathbf{B}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{f}_1 + s_2 \mathbf{R}_2 \mathbf{x}_2^0 - s_1 \mathbf{R}_1 \mathbf{x}_1^0.\end{aligned}\quad (5.69)$$

kjer se indeksa 1 in 2 nanašata na epohi  $t_1$  in  $t_2$ , oznaki I in II pa na različna tipa generalizirane inverzije v epohi  $t_1$  in  $t_2$ .

V (5.69) obravnavamo vektor  $\tilde{\mathbf{u}}$  kot razliko koordinat točk mreže z:

- različnima premikoma izhodišča koordinatnega sistema ( $\mathbf{t}_1$  in  $\mathbf{t}_2$ ),
- različnima vrednostima rotacije (rotacijski matriki  $\mathbf{R}_1$  in  $\mathbf{R}_2$ ),
- različnima meriloma mreže (skalarja  $s_1$  in  $s_2$ ).

Enačba (5.69) je splošna in poleg različnega koordinatnega izhodišča ( $\mathbf{t}_1$  in  $\mathbf{t}_2$ ), merila ( $s_1$  in  $s_2$ ) ter orientacije ( $\mathbf{R}_1$  in  $\mathbf{R}_2$ ) upošteva tudi različno natančnost opazovanj ( $\mathbf{P}_1$  in  $\mathbf{P}_2$ ), različno geometrijo mreže ( $\mathbf{B}_1$  in  $\mathbf{B}_2$ ) ter možnost uporabe različnih tipov generalizirane inverzije matrike normalnih enačb ( $\mathbf{N}^{-\text{(I)}}$  in  $\mathbf{N}^{-\text{(II)}}$ ).

Če v geodetski mreži v različnih epohah predpostavimo enako izhodišče koordinatnega sistema ( $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2$ ), enako rotacijo ( $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$ ), enake izhodiščne vrednosti približnih koordinat

točk mreže ( $\mathbf{x}_2^0 = \mathbf{x}_1^0$ ) ter če so v mreži opazovane dolžine (merilo mreže znano:  $s_1 = s_2 = 1$ ), potem je koordinatna razlika definirana kot:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{N}_2^{-(II)} \mathbf{B}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{f}_2 - \mathbf{N}_1^{-(I)} \mathbf{B}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{f}_1. \quad (5.70)$$

Iz zgornjega izhaja preprosta ugotovitev, da razlik koordinat točk med dvema izmerama ne moremo preprosto enačiti z realnimi premiki teh točk, ker nimamo opravka z dvema identičnima koordinatnima sistemoma v obeh izmerah. Izračunan premik zahteva natančno poznavanje koordinatnega sistema oziroma korektno določitev geodetskega datuma za posamezno terminsko izmero. Kljub vsem predpostavkam v (5.70) vektor koordinatnih sprememb  $\tilde{\mathbf{u}}$  še vedno ne moremo obravnavati kot vektor premikov točk mreže. Problem ostaja v tipu generalizirane inverzije, ki je lahko za različni epohi različen. Problem lahko v praksi rešimo na dva načina (Xu et al. 2000):

- prva možnost je izbira ustrezne množice potrebnih datumskih količin v mreži za definiranje geodetskega datuma mreže ali
- optimalna izbira enotnega tipa generalizirane inverzije za matriko normalnih enačb, s čimer dobimo spremembe koordinat, ki lahko predstavljajo premike točk geodetske mreže:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{N}_2^{-} \mathbf{B}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{f}_2 - \mathbf{N}_1^{-} \mathbf{B}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{f}_1 = \mathbf{u}. \quad (5.71)$$

Najbolj splošno uveljavljen način definiranja geodetskega datuma je z uporabo notranjih vezi v prosti mreži na celotni mreži ali pa samo njenem delu. V matematičnem smislu gre za minimizacijo evklidske norme vektorja koordinatnih neznank  $\|\Delta\|_2 = \Delta^T \Delta = \min.$  (5.6). Ta pristop zahteva, da je vsota popravkov koordinatnih neznank (za vse točke ali samo izbrano podmnožico točk) po posameznih koordinatnih komponentah enaka nič. To seveda nima osnove v realnosti. Vendar vsi načini privedejo do rešitve, ki pa je lahko samo ena v množici in ni nujno, da ta rešitev predstavlja realne vrednosti premikov točk. Vse te rešitve so ekvivalentne pogoju datumске vezne enačbe:

$$\mathbf{H}^T \Delta = \mathbf{0}. \quad (5.72)$$

Rešitev (5.71) s svojimi predpostavkami ni v ničemer boljša ali slabša od katerekoli druge rešitve (5.69), saj ne vsebuje več informacij o deformacijah objekta, predstavljenega z



geodetsko mrežo. Z raziskavami je zgolj na empiričen način pokazano (Xu et al. 2000), da je edini pravilen pristop pri obravnavi deformacij na podlagi rezultatov sprememb koordinat točk geodetske mreže pravilno izbran, enoličen in identičen geodetski datum v obeh epohah, ki jih primerjamo med sabo. Definicija geodetskega datuma posamezne terminske izmere naj torej poteka klasično z izravnavo vpete mreže, ki ga definirajo stabilne točke ali pa naknadno z uporabo transformacije  $S$  iz proste mreže izračunanih koordinatnih komponent na izbran geodetski datum (Marjetič in Stopar 2007).

Pri definiciji geodetskega datuma je potrebno paziti, da je datum geodetske mreže določen enolično. Potrebne datumske parametre definiramo s toliko datumskimi količinami, kot je defekt datuma. V nasprotnem primeru, to je v primeru predločenega datuma, posegamo v notranjo geometrijo mreže. Z definicijo datuma npr. z več danimi količinami, kot je defekt datuma, pridobimo rešitev, ki minimizira drugo normo za vektor neznank, ki pripada koordinatnim komponentam danih točk (Caspary 1988):

$$\|\Delta_k\|_2 = \Delta_k^T \Delta_k = \min., \quad (5.73)$$

kjer je:

$k$  – število danih koordinatnih komponent točk v mreži.

To pomeni, da izračunamo tudi spremembe koordinat točk, ki jih obravnavamo kot točke, ki se verjetno niso premaknile, kar seveda ni v redu. V primeru predločenega datuma transformacija  $S$  namreč ni več linearna (Marjetič in Stopar 2007).

Za pravilno obravnavo premikov in deformacij je torej potreben pravilen enolično definiran in identičen geodetski datum v obeh epohah. Pri tem se najprej zastavlja vprašanje, kako zagotoviti pravilno definiran geodetski datum. Kako ugotoviti, katere količine so tiste, ki lahko zagotavljajo primerno koordinatno osnovo za korektno deformacijsko analizo? Nekaj klasičnih metod smo opisali že v poglavjih 5.4.2 in 5.4.3. Na drugi strani pa je problem tudi v relativni razliki v definiciji geodetskega datuma med dvema izmerama.

Vpliv spremembe geodetskega datuma  $\Delta gd = gd2 - gd1$  med dvema terminskima izmerama za obravnavano geodetsko mrežo lahko ugotovimo na dva načina. Prvi je, da s spreminjanjem

vrednosti datumskih parametrov (zasuka in merila) računamo vrednosti deformacijskih parametrov v geodetski mreži. To storimo posredno preko matrike gradienta vektorskega polja premikov  $\mathbf{G}$  v posamezni točki. Simulirano funkcijsko odvisnost posameznega deformacijskega parametra v izbrani točki (za izbrano obliko geodetske mreže) lahko direktno grafično predstavimo. Poleg grafične empirične predstavitve funkcijske odvisnosti deformacijskih parametrov bomo funkcijsko odvisnost tudi analitično izpeljali. Analizo vpliva spremembe datumskih parametrov ločimo za spremembo merila in rotacije geodetske mreže, kot bo pokazano v nadaljevanju. Translacije ne obravnavamo, ker nima nobenega vpliva na deformacije v posamezni točki mreže.

### 5.5.1 Analiza vpliva spremembe datumskih količin na deformacije

Raziskava vpliva geodetskega datuma na premike in parametre deformacij in rotacij temelji na simulaciji različnih geodetskih datumov v dveh terminskih izmerah in na analitični določitvi funkcijskih zvez med datumskimi parametri in vrednostmi deformacij in zasukov v mreži.

Predpostavimo, da imamo v časovnem trenutku  $t_1$  opravka z rešitvijo geodetske mreže  $\mathbf{x}_1$ . V časovnem trenutku  $t_2$  pa imamo isto geodetsko mrežo, v kateri je v časovnem intervalu  $\Delta t = t_2 - t_1$  prišlo do deformacij, ki imajo za posledico premik točk mreže  $\mathbf{u}$ . Ker nas zanima samo vpliv relativne spremembe geodetske datuma ( $\Delta gd$ ) glede na izmero v  $t_1$  s koordinatno rešitvijo  $\mathbf{x}_1$ , lahko na osnovi izrazov (5.69) zapišemo:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{x}_2^{\Delta gd} - \mathbf{x}_1 = \left[ \mathbf{t} + s\mathbf{R}_{x'y',xy} \mathbf{x}_1 + \mathbf{u} \right] - \mathbf{x}_1. \quad (5.74)$$

Sprememba geodetskega datuma  $\Delta gd$  se izraža v podobnostni transformaciji koordinatnega vektorja  $\mathbf{x}_1$  za:

- translacijo  $\mathbf{t}$ ,
- spremembo merila  $s = 1 + ds$  ter
- rotacijo  $\omega$  iz koordinatnega sistema  $xy$  (za  $\mathbf{x}_1$  v epohi  $t_1$ ) v koordinatni sistem  $x'y'$  (za  $\mathbf{x}_2$  v epohi  $t_2$ ).

Poenostavimo zapis koordinatnega vektorja  $\mathbf{x}_2^{\Delta gd} = \mathbf{x}'$  in  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}$ . Imamo (glej poglavje 2.5):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{t} + s \mathbf{R}_{x'y',xy} \mathbf{x}, \\ x' &= t_x + s \left[ x + u_x \cos \omega - y + u_y \sin \omega \right], \\ y' &= t_y + s \left[ x + u_x \sin \omega + y + u_y \cos \omega \right]. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Zapišemo lahko vektor premikov  $\tilde{\mathbf{u}}$  po posameznih koordinatnih komponentah:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{x'} &= x' - x = t_x + s \left[ x + u_x \cos \omega - y + u_y \sin \omega \right] - x, \\ \tilde{u}_{y'} &= y' - y = t_y + s \left[ x + u_x \sin \omega + y + u_y \cos \omega \right] - y. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Tensor majhnih deformacij in tensor majhnih zasukov se z upoštevanjem (2.19) v "novem" koordinatnem sistemu  $x'y'$  zapiše kot:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}' &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'x'} & \varepsilon_{x'y'} \\ \varepsilon_{y'x'} & \varepsilon_{y'y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{u}_{x'}}{\partial x'} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_{x'}}{\partial y'} + \frac{\partial \tilde{u}_{y'}}{\partial x'} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_{x'}}{\partial y'} + \frac{\partial \tilde{u}_{y'}}{\partial x'} \right) & \frac{\partial \tilde{u}_{y'}}{\partial y'} \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\omega}' &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_{x'}}{\partial y'} - \frac{\partial \tilde{u}_{y'}}{\partial x'} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_{y'}}{\partial x'} - \frac{\partial \tilde{u}_{x'}}{\partial y'} \right) & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Parcialni odvodi v (5.77) se računajo s pomočjo pravil za transformacijo gradienta vektorskega polja (glej poglavje 2.5). Za izračun posamezne komponente tenzorja majhnih deformacij in tenzorja majhnih zasukov uporabimo verižno pravilo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_{i'}}{\partial x_{j'}} &= \frac{\partial \tilde{u}_{i'}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_{j'}} + \frac{\partial \tilde{u}_{i'}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x_{j'}}, \\ i, j &= x, y. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Za izračun parcialnega odvoda potrebujemo Jacobijevo matriko transformacije iz (5.75):

$$\mathbf{J}_{x'y',xy} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{bmatrix} =$$

$$= s \begin{bmatrix} \cos \omega \ 1 + \varepsilon_{xx} & -\sin \omega \frac{\partial u_y}{\partial x} & \cos \omega \frac{\partial u_x}{\partial y} & -\sin \omega \ 1 + \varepsilon_{yy} \\ \sin \omega \ 1 + \varepsilon_{xx} & +\cos \omega \frac{\partial u_y}{\partial x} & \sin \omega \frac{\partial u_x}{\partial y} & +\cos \omega \ 1 + \varepsilon_{yy} \end{bmatrix}, \quad (5.79)$$

$$\mathbf{J}_{x'y',xy}^{\Gamma -1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial x}{\partial y'} \\ \frac{\partial y}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial y'} \end{bmatrix} = \quad (5.80)$$

$$= \frac{1}{s \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon_{xx} & 1 + \varepsilon_{yy} & -\frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{pmatrix}} \begin{bmatrix} \sin \omega \frac{\partial u_x}{\partial y} + \cos \omega \ 1 + \varepsilon_{yy} & -\cos \omega \frac{\partial u_x}{\partial y} + \sin \omega \ 1 + \varepsilon_{yy} \\ -\sin \omega \ 1 + \varepsilon_{xx} & -\cos \omega \frac{\partial u_y}{\partial x} & \cos \omega \ 1 + \varepsilon_{xx} & -\sin \omega \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

Elemente tenzorja majhnih deformacij in tenzorja majhnih zasukov (5.77) izrazimo s komponentami tenzorja majhnih deformacij terminske izmere  $t_1$ :

- za normalno deformacijo,

$$\varepsilon_{x'x'} \ s, \omega = 1 + \frac{-1 + \varepsilon_{yy} \cos \omega - \frac{\partial u_x}{\partial y} \sin \omega}{s \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon_{xx} & 1 + \varepsilon_{yy} & -\frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{pmatrix}}, \quad (5.81)$$

$$\varepsilon_{y'y'} \ s, \omega = 1 + \frac{-1 + \varepsilon_{xx} \cos \omega + \frac{\partial u_y}{\partial x} \sin \omega}{s \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon_{xx} & 1 + \varepsilon_{yy} & -\frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{pmatrix}},$$

- za strižno deformacijo,

$$\varepsilon_{x'y'} \ s, \omega = \frac{\varepsilon_{xy} \cos \omega + \frac{1}{2} \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy} \sin \omega}{s \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon_{xx} & 1 + \varepsilon_{yy} & -\frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{pmatrix}}, \quad (5.82)$$

- in za rotacijo,

$$\omega' s, \omega = \frac{\omega \cos \omega - \frac{1}{2} 2 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} \sin \omega}{s \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon_{xx} & 1 + \varepsilon_{yy} & -\frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{pmatrix}}. \quad (5.83)$$

Z izrazi (5.81) do (5.83) za normalni deformaciji v smeri osi  $x$  in  $y$ , strižno deformacijo ter rotacijo lahko zapišemo funkcijsko odvisnost matrike gradienta v spremenjenem koordinatnem sistemu  $x'y'$  od spremembe datumskih količin:

$$\mathbf{G}' s, \omega = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{u}_{x'}}{\partial x'} & \frac{\partial \tilde{u}_{x'}}{\partial y'} \\ \frac{\partial \tilde{u}_{y'}}{\partial x'} & \frac{\partial \tilde{u}_{y'}}{\partial y'} \end{bmatrix} = \mathbf{I} - s \mathbf{G} + \mathbf{I}^{-1} \mathbf{R}_{x'y',xy}^T, \text{ za } i,j = x,y, \quad (5.84)$$

kjer je:

$\mathbf{I}$  – enotska matrika dimenzije  $2 \times 2$ ,

$\mathbf{G}$  – matrika gradienta vektorskega polja premikov v osnovnem koordinatnem sistemu  $xy$ ,

$\mathbf{R}$  – matrika rotacije med koordinatnima sistemoma (glej (2.49)).

Z upoštevanjem lastnosti matrike gradienta vektorskega polja premikov  $\mathbf{G}$  (2.28) ter izrazov za glavne komponente deformacij (poglavje 2.6) lahko izpeljemo tudi funkcijsko odvisnost od spremembe merila ali spremembe rotacije za katerikoli deformacijski parameter (npr. glavne normalne in strižne deformacije).

V nadaljevanju bomo vpliv spremembe datumskih količin na računane deformacijske parametre analizirali na izbranem primeru geodetske mreže (Slika 6-1). Postopek obravnave vplivov lahko iz praktičnega primera posplošimo na katerokoli obliko (geometrijo) geodetske mreže.

## 6 PRIMER OBRAVNAVE DEFORMACIJ V GEODETSKI MREŽI

Obpravnavamo ravninsko geodetsko mrežo dvanajstih točk (Slika 6-1). Geodetska mreža je po obliki in velikosti izbrana tako, da kar najbolj zajema realno stanje, s katerim se srečujemo pri običajnih nalogah deformacijske analize (npr. naloge spremljanja premikov vodnih pregrad, premikov zemeljskih plazov, itd.). V mreži bomo računali deformacije in rotacije, raziskali njihove statistične lastnosti in na konkretnem primeru iskali odvisnost deformacij od spremembe geodetskega datuma med epohama.

Preglednica 6-1: Koordinate točk v izbrani geodetski mreži.

Table 6-1: Coordinates of points in geodetic network.

	epoha 1	
T	$x$ [m]	$y$ [m]
1	330.0325	644.3316
2	681.7345	209.2384
3	1288.8392	100.4651
4	1360.0170	635.9645
5	856.9534	661.3471
6	1050.1843	1045.9561
7	649.1559	1268.9611
8	995.9023	1508.8545
9	748.7254	1861.7558
10	870.1463	2045.8337
11	832.4640	2439.0910
12	578.2152	2681.0670

Na podlagi izbranih položajev točk lahko v mreži računsko simuliramo opazovanja horizontalnih smeri in dolžin z metodo Monte Carlo (Rubinstein 1981, Savšek-Safić 2002). V simulirani mreži imamo:

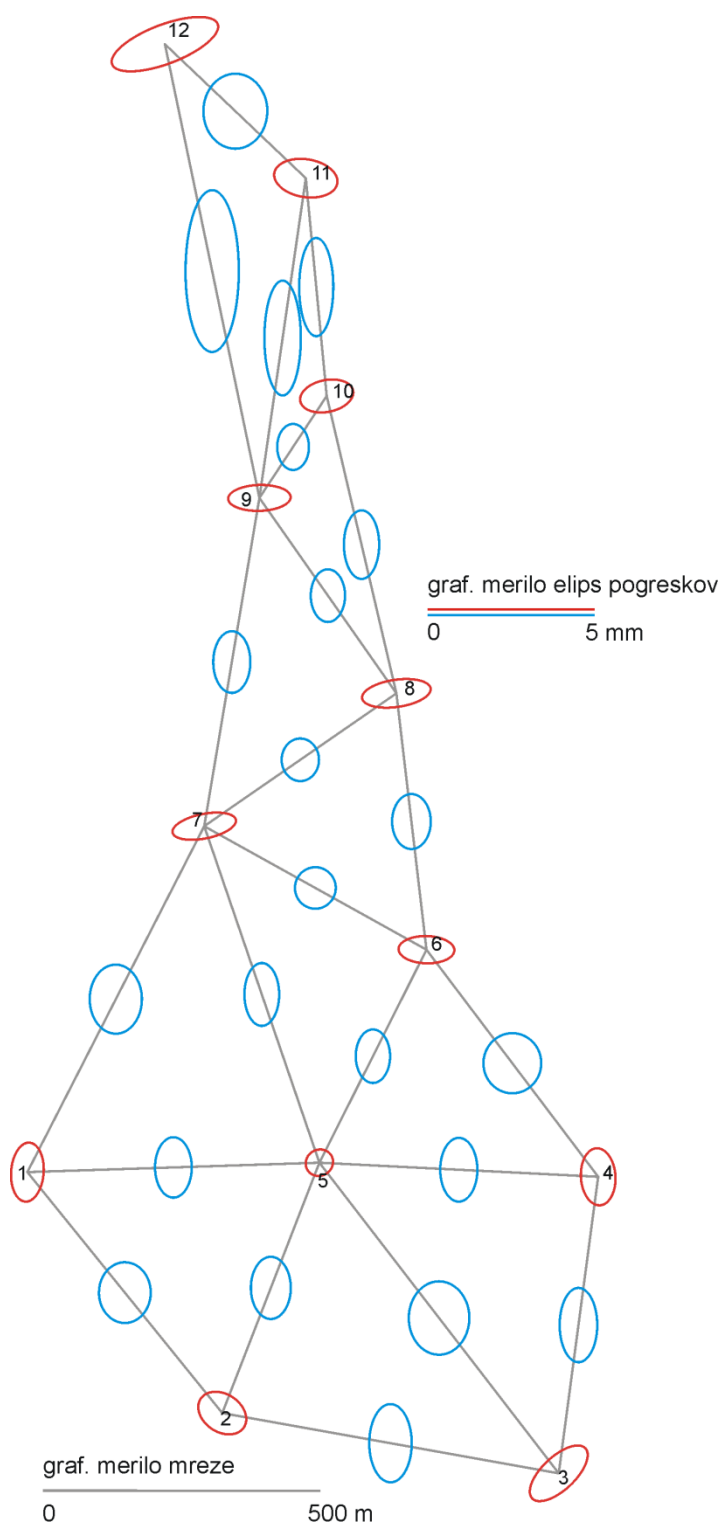
- $n = 86$  - 43 smeri in 43 dolžin,
- $m = 12 \rightarrow 2m = 24$  koordinatnih neznank,
- 53 nadštevilnih opazovanj,
- $d = 3$ , defekt geodetskega datuma mreže – trije neznani datumski parametri (2 translaciji in 1 rotacija, Preglednica 5-1),
- referenčna a-priori standardna deviacija, iz katere sestavimo ustrezno matriko uteži opazovanj. Pri tem pazimo, da uskladimo uteži za dolžine z utežmi za smeri (utež smeri prilagodimo glede na razdaljo med točkama):

npr. za dolžine:  $\sigma_{0,dol} = 1$  mm in za smeri:  $\sigma_{0,smer} = 1''$ .

Mrežo izravnamo po metodi najmanjših kvadratov kot prosto mrežo, kar pomeni, da v mreži ne privzamemo nobene točke kot dane z upoštevanjem nekaterih predpostavk (Marjetič in Stopar 2007) iz poglavja 5.2.2:

- koordinate težišča mreže (povprečje približnih koordinat točk v mreži) se po izravnavi ne smejo spremeniti,
- mreža se glede na težišče ne sme zasukati,
- povprečna razdalja med težiščem in posameznimi točkami mreže mora ostati nespremenjena.

Rezultati izravnave po metodi najmanjših kvadratov so definitivne koordinate točk in ocena natančnosti izravnanih koordinat. Ocenjene natančnosti izravnanih koordinat točk grafično predstavimo z absolutnimi in relativnimi elipsami pogreškov (Slika 6-1). Izbrana geodetska mreža je nehomogene natančnosti, saj elipse pogreškov niso enakomerne velikosti. Elipse so večje v delu z slabšo geometrijo mreže. Poleg tega mreža glede natančnosti ni izotropna. Natančnost v točkah ni enaka v vseh smereh, kar opisujejo dokaj sploščene elipse pogreškov, predvsem v delu proti točki 12.



Slika 6-1: Izbrana geodetska mreža 12 točk z izrisanimi absolutnimi (rdeče) in relativnimi (modro) elipsami pogreškov.

Figure 6-1: Chosen geodetic network of 12 points and with absolute (red) and relative (blue) error ellipses.



## 6.1 Analiza robustnosti geodetske mreže

Kot smo že omenili v poglavju 3.3, lahko kakovost geometrije geodetske mreže kontroliramo na podlagi znane geometrije mreže (znanih približnih vrednosti položajev točk mreže), opazovanj v mreži ter rezultatov izravnave proste mreže tako, da določimo občutljivost geodetske mreže v smislu odzivnosti mreže na morebitne neodkrite grobe pogreške v opazovanjih. Pogoji za oceno občutljivosti oziroma neobčutljivosti ali robustnosti mreže je, da mora biti geodetski datum mreže definiran na osnovi minimalnega števila vezi med datumskimi količinami. Rešitev izravnave proste mreže po metodi najmanjših kvadratov izpolnjuje ta pogoj.

Iz primerjave relativnih in absolutnih elips pogreškov (Slika 6-1) vidimo, da je geometrija mreže v delu proti točki 12 slabša. Zato lahko pričakujemo, da bo rezultat analize robustnosti mreže kazal na to, da je v tem delu mreža tudi najbolj občutljiva, torej bolj dovzetna na neodkrite grobe pogreške v opazovanjih.

Z uporabo lastnosti tenzorja majhnih deformacij in tenzorja majhnih zasukov ter matrike gradienta vektorskega polja premikov  $\mathbf{G}$  (glej Poglavlje 3.3, enačbe (3.23) - (3.27)) za vsako točko izračunamo  $n$  ( $n = 86$ ) vrednosti vsakega od parametrov ( $\varepsilon, \gamma, \omega$ ) za obravnavani primer geodetske mreže. Te vrednosti predstavljajo deformacije in rotacije zaradi maksimalne vrednosti neodkritega grobega pogreška v posameznem opazovanju  $\delta l_{\max, i}$ . Nato poiščemo maksimalne absolutne vrednosti iz celotnega vzorca deformacij in rotacij (Preglednica 6-2).

Zanimiv je podatek o tem, katero opazovanje oziroma pripadajoča maksimalna vrednost neodkritega grobega pogreška v tem opazovanju povzroči maksimalno absolutno vrednost za posamezen deformacijski parameter na posamezni točki (Preglednica 6-3). Rezultati kažejo, da neodkriti grobi pogreški v opazovanih dolžinah močneje kot horizontalni koti vplivajo na nepravilne zaključke o deformacijah v obravnavani točki. Iz tega lahko sklepamo, da je potrebno v geodetski mreži več pozornosti posvetiti opazovanim dolžinam, katerih neodkriti grobi pogreški imajo večji vpliv na izračunane koordinate točk.

Preglednica 6-2: Maksimalne vrednosti deformacijskih parametrov zaradi maksimalne vrednosti neodkritih grobih pogreškov v opazovanjih.

Table 6-2: Maximum values of strain parameters and rotation as a result of maximum values of undetected gross errors in observations.

točka	$\varepsilon_{1,\max}^i$ [ppm]	$\alpha_\varepsilon$ [°]	$\gamma_{1,\max}^i$ [ppm]	$\alpha_\gamma$ [°]	$\omega_{i,\max}$ [ppm]
1	3.00	42	1.81	138	1.77
2	3.46	163	2.00	17	1.91
3	2.07	151	1.54	80	1.91
4	3.24	34	1.91	146	1.87
5	1.14	40	0.72	140	1.84
6	1.96	41	1.15	139	1.66
7	1.90	47	1.09	9	0.90
8	2.52	21	1.43	159	1.20
9	3.87	32	2.10	148	1.98
10	5.13	5	2.79	175	2.73
11	10.40	25	6.05	155	4.05
12	7.92	53	4.22	127	3.33

Preglednica 6-3: Določitev povezave in tipa opazovanja, katerega maksimalna vrednost neodkritega grobega pogreška najbolj vpliva na deformacijo v točki.

Table 6-3: Definition of observation, which undetected maximum value of gross error mainly affects the strains and rotations in point.

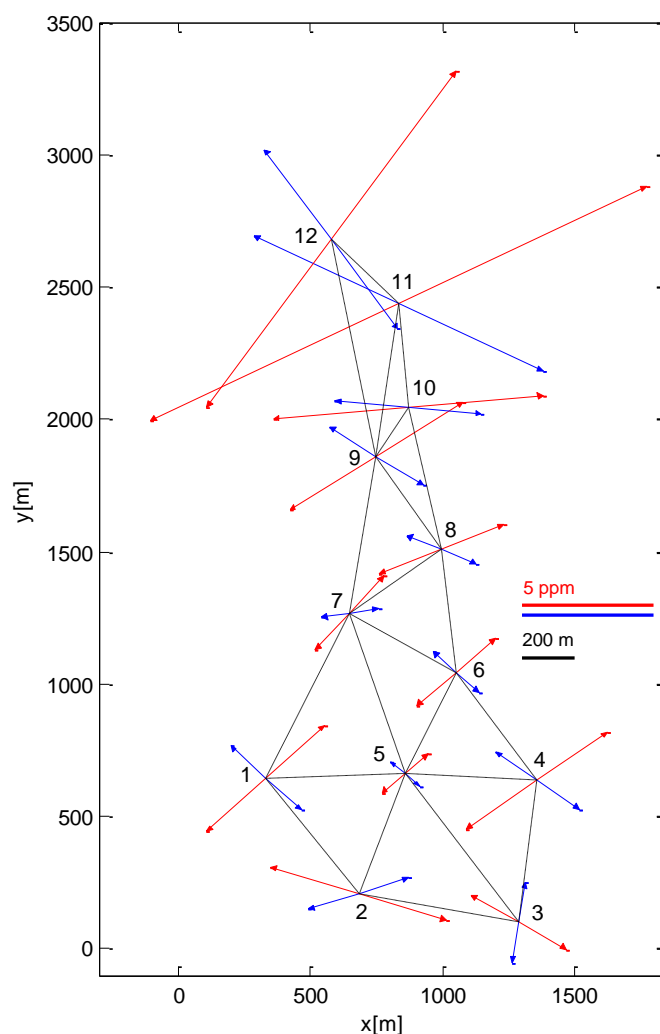
Točka	$\varepsilon_{1,\max}^i$			$\gamma_{1,\max}^i$			$\omega_{i,\max}$		
	od	do	tip op.	od	do	tip op.	od	do	tip op.
1	1	5	dol.	1	5	dol.	6	8	dol.
2	5	2	dol.	5	2	dol.	7	1	dol.
3	4	3	dol.	3	5	dol.	4	6	dol.
4	5	4	dol.	5	4	dol.	6	8	dol.
5	1	5	dol.	1	5	dol.	6	8	dol.
6	5	4	dol.	5	4	dol.	9	7	dol.
7	1	5	dol.	1	7	dol.	10	8	dol.
8	8	7	dol.	8	7	dol.	5	6	dol.
9	8	7	dol.	8	7	dol.	8	6	dol.
10	11	9	dol.	11	9	dol.	7	9	dol.
11	10	9	dol.	10	9	dol.	8	10	dol.
12	11	12	dol.	11	12	dol.	10	11	dol.

Rezultate analize robustnosti geodetske mreže na osnovi izračunanih mer deformacij lahko primerjamo s klasično kovariančno analizo kakovosti vzpostavljene geometrije geodetske

mreže in opravljenih opazovanj na podlagi standardnih elips pogreškov. Orientacija absolutnih elips pogreškov kaže na to, da gre za večjo natančnost opazovanih dolžin, ker so elipse sploščene prečno na glavne smeri povezav med točkami. Ugotovimo lahko, da se natančnost zmanjšuje z oddaljevanjem od glavnega dela mreže (šesterokotnik 1-2-3-4-5-6-7) in je tako najmanjša v točki 12. V točki 12 z vidika natančnosti geometrija mreže zagotavlja najslabše rezultate oziroma je neke vrste glede tega najšibkejša.

Za razliko od klasične kovariančne analize podaja analiza robustnosti geodetske mreže preko vrednosti mer deformacij porazdeljevanje vpliva neodkritih grobih pogreškov na položaje točk v mreži. V skladu s pričakovanji in primerljivo s klasično kovariančno analizo, kažejo rezultati izračuna na dokaj slabo robustnost geodetske mreže v delu mreže proti točki 12 in se povečuje proti osrednjemu delu mreže (šesterokotnik 1-2-3-4-5-6-7). Osrednji šesterokotnik predstavlja bolj robusten ali močnejši del mreže, to je tisti z večjim številom povezav (opazovanj med točkami) in boljšo geometrijo mreže. Mreža je najbolj robustna v točki 5. Vse to pomeni, da maksimalni neodkrit grobi pogrešek (ki ne bo npr. odkrit z metodo *Data Snooping*) ne bo imel velikega vpliva na izračunane deformacije v točkah v osrednjem delu, medtem ko bo ta vpliv znatno večji proti točki 12.

Rezultati analize robustnosti geodetske mreže kažejo tudi na to, da izbrana geodetska mreža omogoča testiranje različnih lastnosti, kot so npr. vplivi sprememb opazovanj v odvisnosti od položaja v mreži. Torej je izbrana geometrija primerna za dokaj splošno in realno obravnavo lastnosti deformacij, ki se v točkah mreže lahko pojavijo.



Slika 6-2: Maksimalne vrednosti deformacijskih parametrov (rdeča – normalna deformacija, modra – strižna deformacija) v posamezni točki.

Figure 6-2: Maximum values of deformation parameters (red – normal strain, blue – shear strain) in each point.

## 6.2 Določitev statističnih lastnosti deformacijskih parametrov v točki

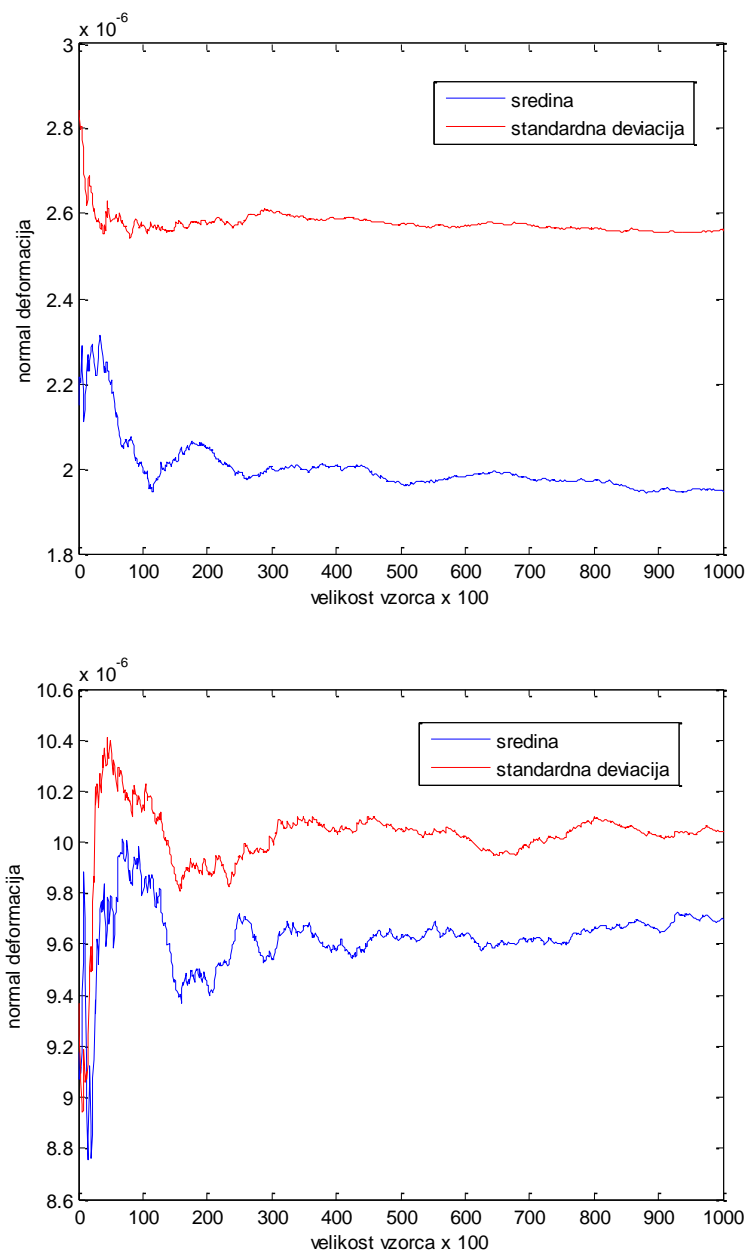
Statistične lastnosti tenzorja deformacij in pripadajočih deformacijskih parametrov določamo na primeru že obravnavane ravninske geodetske mreže (Slika 6-1). Mreža je izbrana tako, da imamo del mreže s predpostavljeno dobro geometrijo mreže (okoli točke 5). Za drugi del mreže (proti točki 12) pa predpostavljamo, da bo bolj občutljiv na deformacije v mreži (z

manjšo stopno zaznavnosti deformacij). Na tem delu mreže predpostavljamo, da izračunane deformacije v točkah ne bodo podajale pravih deformacij ali deformacijskega stanja objekta. Lahko analiziramo rezultate klasične variančne analize na primeru (Slika 6-1). Vidimo, da so natančnosti položajev točk precej slabše na delu proti točki 12, kar je posledica slabe geometrije mreže v tem delu. Okoli točke 12 so namreč slabši geometrijski preseki merskih povezav dolžin in smeri. Poleg tega je tudi število merskih povezav za določitev koordinat točk manjše, kar pomeni manjše število nadštevilnosti. Pričakujemo, da mreža v tem delu ne bo sposobna zaznati majhnih vrednosti deformacij in rotacij, kar pomeni večja območja zaupanja za deformacijske parametre.

Statistične lastnosti deformacijskih parametrov določamo s simulacijami opazovanj v mreži. Za vsak simuliran niz opazovanj z izravnavo po metodi najmanjših kvadratov izračunamo popravke približnih koordinat točk mreže. Uporabimo izravnavo proste mreže. Te popravke obravnavamo kot neke vrste premike, iz katerih računamo tenzor deformacij in rotacij ter pripadajoče parametre deformacij in rotacij v posameznih točkah geodetske mreže. Če upoštevamo vse simulacije, imamo za vsako točko mreže vzorec velikosti  $sim$  izračunanih parametrov deformacij in rotacij  $(\varepsilon, \gamma, \omega)$ . Za določitev oblike in velikosti območij zaupanja kot mer zaznavnosti deformacij za posamezen parameter, je potrebno najprej določiti kritične intervale ob naprej izbrani stopnji zaupanja  $1 - \alpha$  v posameznem kotnem intervalu ali sektorju (glej poglavje 4.1). Kritične vrednosti lahko določimo ob empirično določenih porazdelitvenih funkcijah (glej poglavje 6.2.2).

### 6.2.1 Izbira velikosti vzorca – število simulacij

Uporabimo metodo Monte Carlo (Rubinstein 1981, Savšek-Safić 2002) za simulacijo števila  $sim$  nizov opazovanih horizontalnih smeri in dolžin za izbrane merske povezave med točkami geodetske mreže (Slika 6-1). Velikost vzorca (število  $sim$ ) je pomembno za izračun pravilne ocene statističnih lastnosti izbrane slučajne spremenljivke. Primerna velikost vzorca je prav tako določena empirično. Glede na to, da obravnavane statistične lastnosti vključujejo tudi izračun momentov prvega in drugega reda vzorca slučajne spremenljivke, lahko te vrednosti izračunamo po določenem številu izvedenih simulacij.



Slika 6-3: Konvergenca aritmetične sredine in standardne deviacije normalne deformacije za točko 5 (zgoraj) in točko 12 (spodaj).

Figure 6-3: Convergence of arithmetic average and standard deviation of normal strain for point 5 (above) and point 12 (below).

Iz grafa (Slika 6-3) vidimo, da vrednosti obeh momentov porazdelitve slučajne spremenljivke konvergirajo k neki vrednosti. Lahko zaključimo, da je izbrano število  $sim = 100000$  predvidoma dovolj veliko za objektivno analizo statističnih lastnosti deformacijskih parametrov kot slučajnih spremenljivk.

### 6.2.2 Empirična določitev verjetnostne porazdelitve parametrov deformacij v točkah geodetske mreže

Z razdelitvijo celotnega vzorca velikosti  $sim$  na posamezne kotne intervale dobimo v vsakem kotnem intervalu  $sim_{sec}$  izračunanih vrednosti posameznega deformacijskega parametra. Z množico izračunanih deformacijskih parametrov v posameznem sektorju lahko izrišemo empirično določeno porazdelitveno funkcijo. Zaradi dvoma v normalnost verjetnostne porazdelitve parametrov glavnih deformacij izvedemo test Kolmogorov Smirnova skladnosti verjetnostne porazdelitve z normalno porazdelitvijo z ničelno hipotezo (Lilliefors 1967):

$$H_0: \text{slučajna spremenljivka je normalno porazdeljena: } X \sim N(\mu, \sigma),$$

nasproti alternativne hipoteze:

$$H_1: \text{slučajna spremenljivka ni normalno porazdeljena: } X \not\sim N(\mu, \sigma).$$

Statistični test skladnosti porazdelitve posameznega parametra z normalno porazdelitvijo izvedemo za vsako posamezno točko. Numerični rezultati z 1% tveganjem kažejo, da za marsikatero smer oziroma kotni interval ne moremo govoriti o normalni porazdelitvi deformacijskega parametra. Test ne zavrne ničelne hipoteze predvsem v smereh z nizko frekvenco pojavnosti in majhno amplitudo deformacijskih parametrov. Kot je mogoče ugotoviti iz rezultatov, je v sektorjih z zavrnjeno ničelno hipotezo vrednost testne statistike zelo blizu pripadajoče kritične vrednosti ob izbranem tveganju  $\alpha = 1\%$ . Rezultati so zbrani v preglednicah (Preglednica 6-4 in Preglednica 6-5), kjer sta izračunana tudi oba momenta porazdelitve za izbran parameter deformacij in rotacij v posameznem kotnem sektorju (enačba (4.1)).

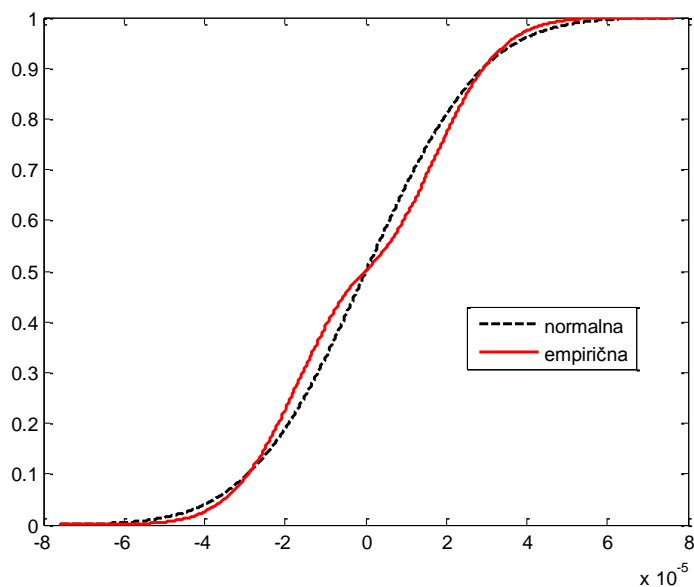
Iz rezultatov (Preglednica 6-4 in Slika 6-4), ki so izračunani za točko 12, je razvidno, da je verjetnostna porazdelitev normalne deformacije simetrična vendar vidno odstopa od normalne porazdelitve. Na ostalih točkah je situacija podobna, zato tukaj ne bomo podajali numeričnih rezultatov za ostale točke.

Podoben rezultat (Preglednica 6-5 in Slika 6-5) dobimo tudi pri strižni deformaciji. Razlika je v tem, da test Kolmogorov Smirnova zavrne ničelno hipotezo o normalnosti verjetnostne porazdelitve testne statistike za vse obravnavane smeri.

Preglednica 6-4: Statistične lastnosti glavne normalne deformacije v točki 12.

Table 6-4: Statistical properties of principal normal strain in point 12.

točka 12	test Kolmogorov Smirnova $\alpha = 1\%$			interval zaupanja $\alpha = 5\%$		teor. vrednosti $\alpha = 5\%$		momenta porazdelitve		srednja smer v sektorju [°]
	zavrnilno $H_0$ ?	testna statistika	kritična vrednost	spodnja meja [ppm]	zgornja meja [ppm]	spodnja	zgornja	srednja vrednost [ppm]	standardna deviacija [ppm]	
1	Da	0.0302	0.0169	-20.3219	20.5433	-1.8491	1.8832	-0.0759	10.9493	4.5
2	Da	0.0246	0.0190	-18.5970	17.9309	-1.9182	1.8501	-0.0030	9.6934	13.5
3	Da	0.0298	0.0195	-17.6320	17.0450	-1.8876	1.8390	-0.0674	9.3055	22.5
4	Da	0.0257	0.0186	-16.9184	16.8615	-1.8641	1.9110	-0.2385	8.9480	31.5
5	Da	0.0182	0.0159	-17.3420	16.2671	-1.9973	1.8848	-0.0503	8.6575	40.5
6	Da	0.0202	0.0119	-17.1915	17.1410	-1.8739	1.8694	-0.0044	9.1718	49.5
7	Da	0.0217	0.0076	-19.4050	19.1882	-1.8772	1.8636	-0.0384	10.3168	58.5
8	Da	0.0206	0.0059	-18.9558	19.2445	-1.8702	1.8889	0.0493	10.1621	67.5
9	Ne	0.0052	0.0084	-14.1234	14.1438	-1.9315	1.9429	-0.0317	7.2959	76.5
10	Ne	0.0060	0.0127	-11.9871	12.1811	-1.9465	1.9401	0.1166	6.2184	85.5
11	Ne	0.0107	0.0169	-11.7915	11.2080	-1.9826	1.8857	-0.0037	5.9457	94.5
12	Ne	0.0152	0.0190	-12.0383	11.2802	-2.0274	1.9113	-0.0352	5.9204	103.5
13	Ne	0.0169	0.0195	-12.2625	12.0456	-2.0034	1.9864	-0.0568	6.0926	112.5
14	Ne	0.0081	0.0186	-12.3151	12.6863	-1.9218	1.9744	0.0167	6.4169	121.5
15	Da	0.0187	0.0159	-14.3416	14.6173	-1.9031	1.9627	-0.0854	7.4912	130.5
16	Da	0.0202	0.0119	-18.8744	18.6719	-1.9054	1.8739	0.0553	9.9349	139.5
17	Da	0.0437	0.0076	-30.8835	30.5242	-1.8408	1.8132	0.0524	16.8057	148.5
18	Da	0.0647	0.0059	-39.9685	40.2605	-1.7437	1.7707	-0.1622	22.8286	157.5
19	Da	0.0509	0.0084	-33.6691	33.4745	-1.7989	1.8055	-0.1583	18.6284	166.5
20	Da	0.0461	0.0127	-24.3771	24.4871	-1.8314	1.8176	0.1472	13.3914	175.5



Slika 6-4: Porazdelitvena funkcija za normalno deformacijo (sektor 18 – 157.5°) v točki 12.

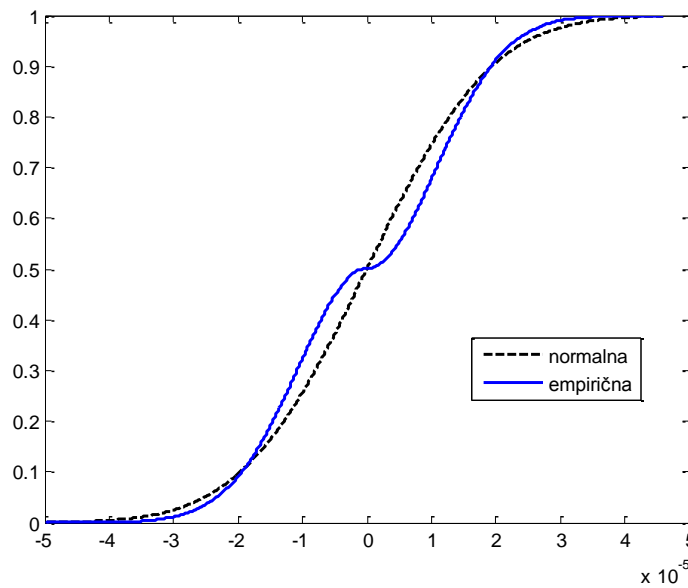
Figure 6-4: Probability function for normal strain (sector 18 – 157.5°) in point 12.



Preglednica 6-5: Statistične lastnosti glavne strižne deformacije v točki 12.

Table 6-5: Statistical properties for principal shear strain in point 12.

točka 12	test Kolmogorov Smirnova $\alpha = 1\%$			interval zaupanja $\alpha = 5\%$		teor. vrednosti $\alpha = 5\%$		momenta porazdelitve		
sektor	zavrtno $H_0?$	testna statistika	kritična vrednost	spodnja meja [ppm]	zgornja meja [ppm]	spodnja	zgornja	srednja vrednost [ppm]	standardna deviacija [ppm]	srednja smer v sektorju [°]
1	da	0.0830	0.0119	-13.3175	13.5587	-1.7376	1.7672	0.0072	7.6685	4.5
2	da	0.0778	0.0076	-21.5309	21.3833	-1.7745	1.7553	0.0429	12.1575	13.5
3	da	0.0822	0.0059	-26.6718	26.5070	-1.7461	1.7416	-0.0481	15.2479	22.5
4	da	0.0807	0.0083	-20.0004	19.7997	-1.7852	1.7695	-0.0125	11.1966	31.5
5	da	0.0841	0.0127	-12.5297	12.5534	-1.7577	1.7588	0.0080	7.1330	40.5
6	da	0.0846	0.0164	-9.4042	9.7664	-1.7612	1.7902	0.1027	5.3981	49.5
7	da	0.0876	0.0189	-8.2458	8.1415	-1.7180	1.7408	-0.1063	4.7379	58.5
8	da	0.0872	0.0198	-7.9717	7.8687	-1.7124	1.8099	-0.2706	4.4971	67.5
9	da	0.0912	0.0185	-8.3033	8.0954	-1.7158	1.7454	-0.1740	4.7378	76.5
10	da	0.0852	0.0159	-9.9916	10.0341	-1.7276	1.7482	-0.0382	5.7615	85.5
11	da	0.0830	0.0119	-13.5589	13.3098	-1.7672	1.7366	-0.0072	7.6685	94.5
12	da	0.0778	0.0076	-21.3978	21.5146	-1.7565	1.7732	-0.0429	12.1575	103.5
13	da	0.0822	0.0059	-26.5143	26.6580	-1.7420	1.7452	0.0481	15.2479	112.5
14	da	0.0807	0.0083	-19.8101	19.9927	-1.7704	1.7845	0.0125	11.1966	121.5
15	da	0.0841	0.0127	-12.5672	12.5251	-1.7607	1.7570	-0.0080	7.1330	130.5
16	da	0.0846	0.0164	-9.7769	9.4035	-1.7922	1.7610	-0.1027	5.3981	139.5
17	da	0.0876	0.0189	-8.1798	8.2363	-1.7489	1.7159	0.1063	4.7379	148.5
18	da	0.0872	0.0198	-7.8951	7.9630	-1.8158	1.7105	0.2706	4.4971	157.5
19	da	0.0912	0.0185	-8.1010	8.2571	-1.7466	1.7061	0.1740	4.7378	166.5
20	da	0.0852	0.0159	-10.0421	9.9496	-1.7496	1.7203	0.0382	5.7615	175.5



Slika 6-5: Porazdelitvena funkcija za strižno deformacijo (sektor 3 – 22.5°) v točki 12.

Figure 6-5: Probability function for shear strain (sector 3 – 22.5°) in point 12.

Ko imamo v točki empirično določene porazdelitvene funkcije v posameznih smereh, lahko določimo meje intervalov zaupanja. Uporabimo interpolacijo za določitev spodnje in zgornje kritične vrednosti ob izbranem tveganju  $\alpha$ . Kritična vrednost  $KV$  je za standardizirano obliko določena kot (Marjetič et al. 2010):

$$KV_{w,i}^{\alpha/2, \text{std}} = \frac{KV_{w,i}^{\alpha/2} - \bar{j}_i}{s_{w,i}} \quad (\text{spodnja}), \quad (6.1)$$
$$KV_{w,i}^{1-\alpha/2, \text{std}} = \frac{KV_{w,i}^{1-\alpha/2} - \bar{j}_i}{s_{w,i}} \quad (\text{zgornja}),$$

kjer je:

$$w = \varepsilon, \gamma, \omega,$$

$$i = 1, \dots, 12 \quad (12 - \text{število točk v obravnavani geodetski mreži}),$$

$s$  – standardna deviacija vzorca.

Na podlagi opravljenega statističnega testiranja skladnosti empirično določenih verjetnostih porazdelitev deformacijskih parametrov z normalno porazdelitvijo lahko ugotovimo (Preglednica 6-4, Preglednica 6-5 in Preglednica 6-6):

- Verjetnostna porazdelitev normalne deformacije  $\varepsilon$  je odvisna od obravnavane smeri v posamezni točki. Statistični test zavrne hipotezo o normalnosti v večini obravnavanih smeri (sektorjev) za normalno deformacijo.
- Verjetnostna porazdelitev strižne deformacije  $\gamma$  ni normalna - velja za vse smeri.
- Diferencialna rotacija v točki  $\omega$  je zaradi linearne funkcijske povezave (3.27) s premiki točk normalno porazdeljena (Preglednica 6-6).

Znane meje intervalov zaupanja v posameznih smereh omogočajo določitev območij zaupanja na posameznih točkah za posamezni deformacijski parameter (glavno normalno in strižno deformacijo). Iz izrisa območij zaupanja za oba deformacijska parametra (Slika 6-6) lahko ugotovimo, da se velikost in oblika območja zaupanja razlikuje med točkami. Za točke v šesterokotniku 1-2-3-4-6-7 s centralno točko 5 so območja zaupanja ob 5% tveganju dokaj

majhna in homogena po obliki (približno krogi) za oba parametra. Proti točki 12 pa ta območja postajajo heterogena z dvema izrazitima glavnima smerema.

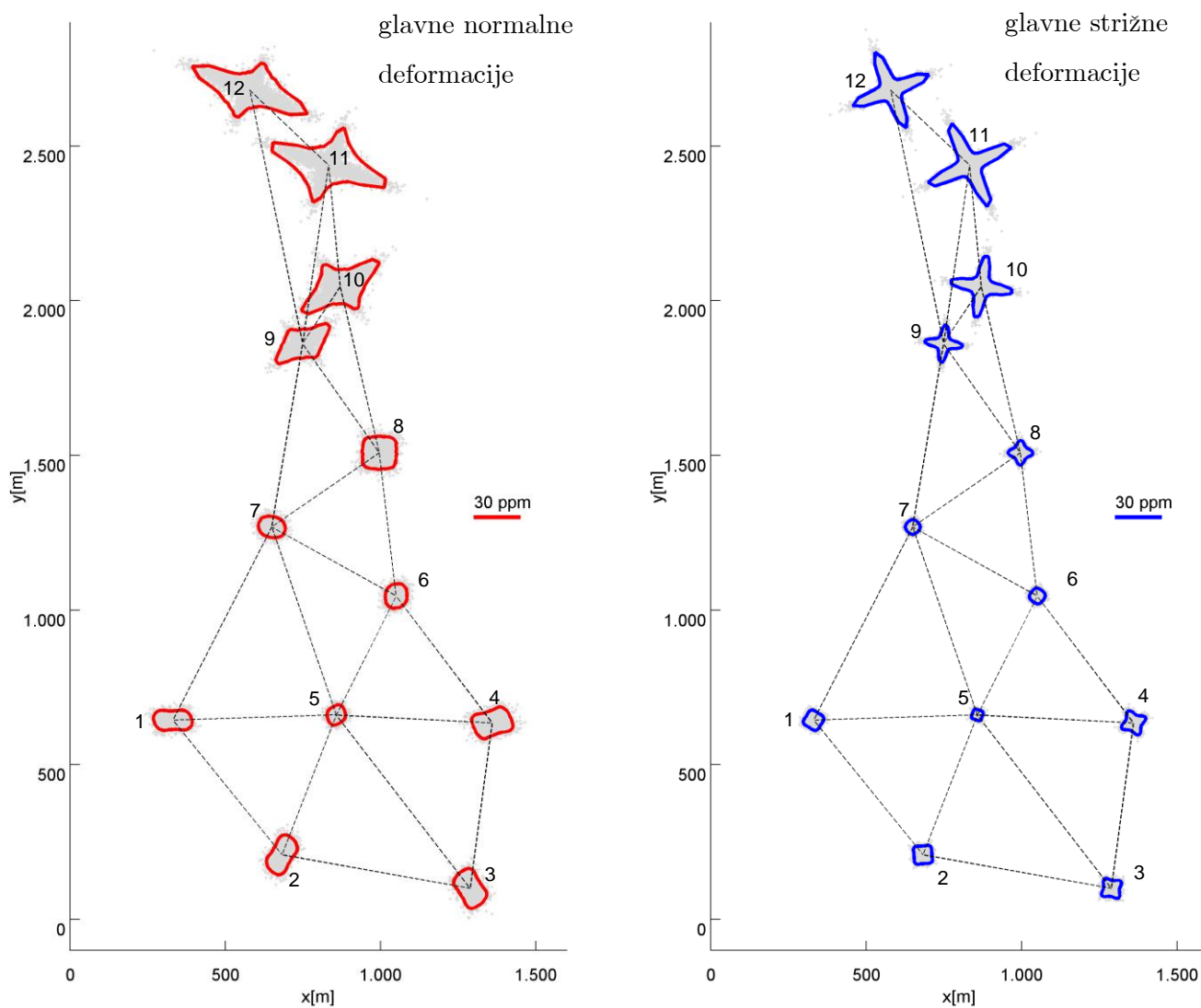
Preglednica 6-6: Statistične lastnosti rotacij v posameznih točkah mreže.

Table 6-6: Statistical properties of rotations in each network point.

T	Kolmogorov-Smirnov test $\alpha = 1\%$			interval zaup. – KI $\alpha = 5\%$		teor. vrednosti $\alpha = 5\%$		momenta 1. in 2. reda	
	zavrmeno $H_0?$	testna statistika	kritična vrednost	spodnja meja [ppm]	zgoranja meja [ppm]	spodnja	zgoranja	srednja vrednost [ppm]	standardna deviacija [ppm]
1	ne	0.0018	0.0033	-7.1106	7.1363	-1.9618	1.9623	0.0120	3.6307
2	ne	0.0015	0.0033	-8.8574	8.8485	-1.9651	1.9598	0.0076	4.5112
3	ne	0.0025	0.0033	-8.2624	8.2842	-1.9599	1.9627	0.0052	4.2183
4	ne	0.0014	0.0033	-8.5802	8.5477	-1.9688	1.9610	0.0010	4.3585
5	ne	0.0020	0.0033	-5.7415	5.7420	-1.9653	1.9587	0.0099	2.9264
6	ne	0.0023	0.0033	-5.1773	5.2129	-1.9621	1.9668	0.0117	2.6445
7	ne	0.0021	0.0033	-4.4759	4.4707	-1.9645	1.9564	0.0066	2.2818
8	ne	0.0015	0.0033	-6.3869	6.3840	-1.9670	1.9614	0.0076	3.2509
9	ne	0.0017	0.0033	-9.3719	9.3444	-1.9637	1.9651	-0.0172	4.7639
10	ne	0.0021	0.0033	-13.9922	14.0447	-1.9566	1.9720	-0.0286	7.1366
11	ne	0.0016	0.0033	-22.2820	22.2084	-1.9636	1.9616	-0.0255	11.3345
12	ne	0.0023	0.0033	-19.7337	19.6044	-1.9708	1.9632	-0.0264	9.9996

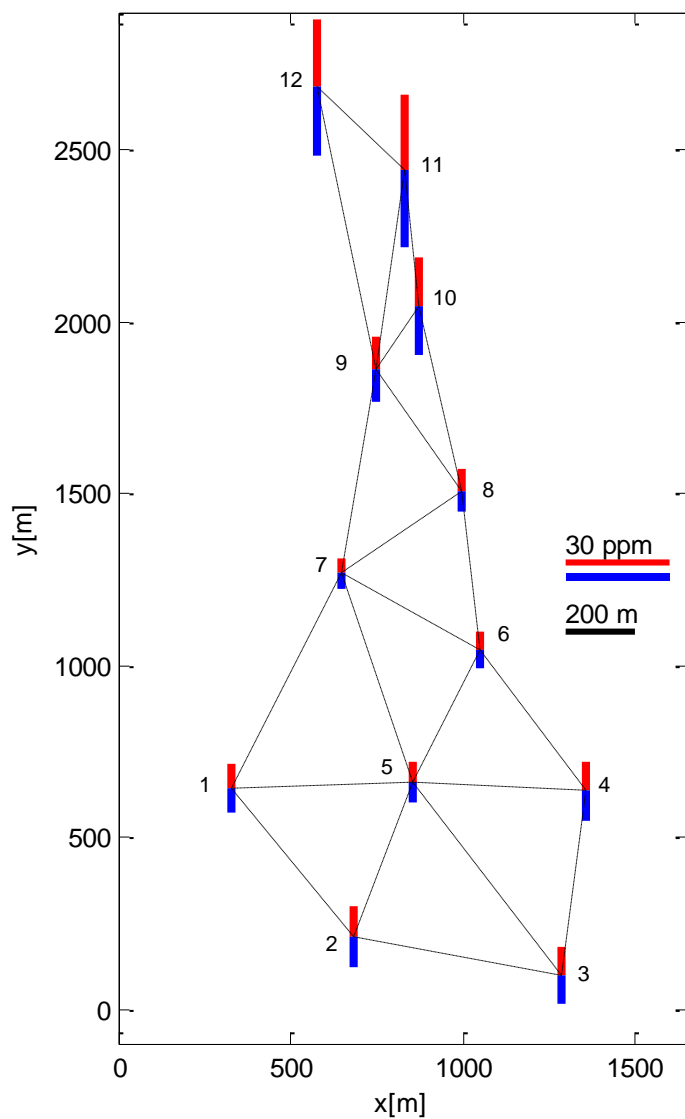
Rezultati kažejo na to, da je obravnavana geodetska mreža s svojo geometrijo v območju proti točki 12 bolj občutljiva za deformacije, torej z vidika deformacijskih merjenj manj primerna za ugotavljanje deformacij nižjih velikostnih redov.

Ker je diferencialna rotacija normalno porazdeljena slučajna spremenljivka neodvisno od obravnavane smeri, lahko njene statistične lastnosti predstavimo z intervali zaupanja (Slika 6-7). Tako kot pri normalnih in strižnih deformacijah se velikost intervalov povečuje z oddaljevanjem od geometrijsko primernejšega dela mreže.



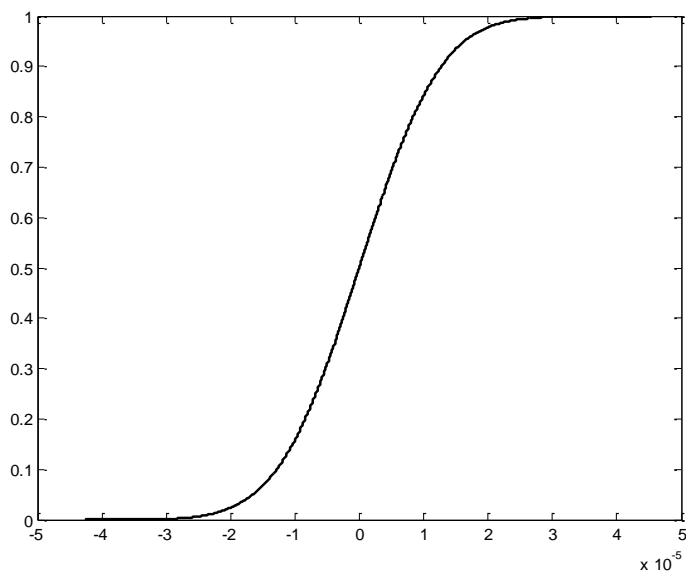
Slika 6-6: 95% območja zaupanja za normalne (levo) in strižne (desno) deformacije.

Figure 6-6: 95% confidence areas for normal (left) and shear (right) strain.



Slika 6-7: 95% intervali zaupanja za rotacijo v točkah (modra – negativno, rdeča – pozitivno).

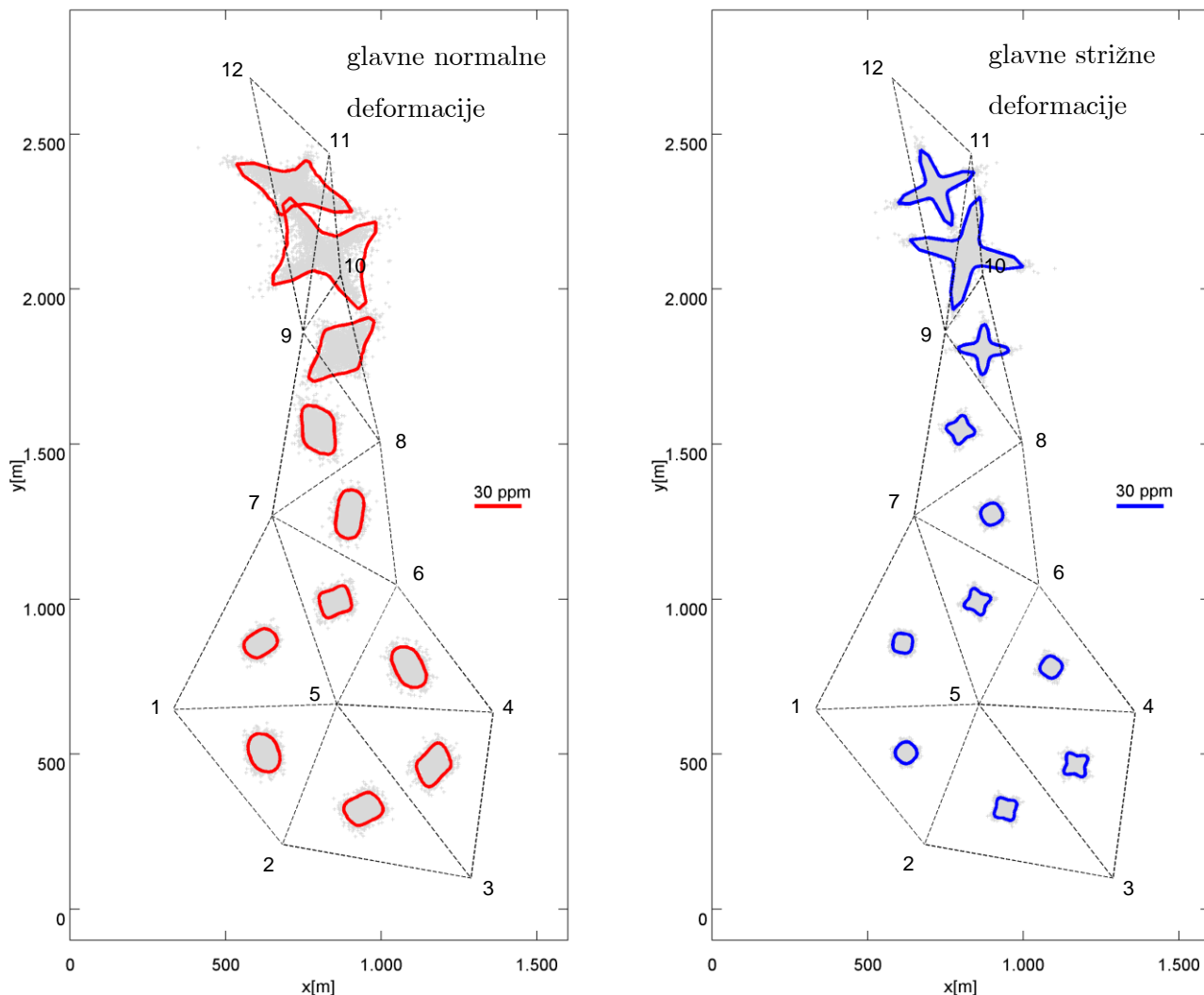
Figure 6-7: 95% confidence intervals for rotations in network points (blue – negative, red – positive).



Slika 6-8: Porazdelitvena funkcija za rotacijo v točki 12.

Figure 6-8: Probability function for rotation in point 12.

Dejstvo je, da je deformacijski tenzor v točki odvisen od vektorskega polja premikov, definiranega iz premikov sosednjih točk (3.16). Zato sam premik točke nima neposrednega vpliva na deformacijo v tej točki. Glede na to, da ugotavljamo vrednost deformacij pod predpostavko homogenih deformacij na zaključenih podobmočjih, je primerna predstavitev deformacij in območij zaupanja za posamezne deformacijske parametre tudi v težiščih trikotnikov, določenih z Delaunayevo triangulacijo. Rezultati izračuna območij zaupanja (Slika 6-9) ne kažejo na bistveno drugačne velikosti, oblike in usmerjenosti območij.

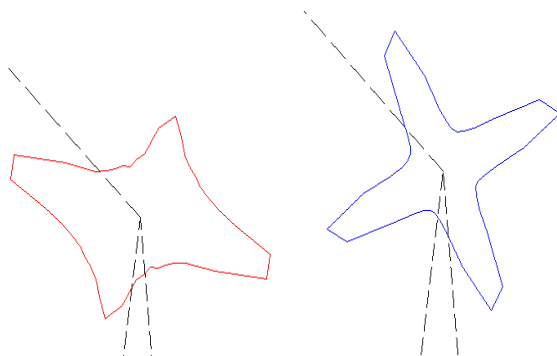


Slika 6-9: 95% območja zaupanja za normalne (levo) in strižne (desno) deformacije v težiščih trikotnikov.

Figure 6-9: 95% confidence areas for normal (left) and shear (right) strain in centres of triangles.

Velikosti in oblike območij zaupanj za deformacijske parametre relativno glede na ostale točke oziroma območja so dovolj različne, da lahko iz teh rezultatov povzamemo nekatere zaključke. Območja zaupanja so manjša in bolj homogene oblike (podobna krogom) v delih mreže, ki ima boljšo geometrijo mreže. Kvaliteta geometrije v tem primeru pomeni dovolj nadštevlnih merskih povezav s primernejšo razporeditvijo. Vsaka deformacija, ki se bo

pojavi v geodetski mreži, bo opredeljena kot statistično značilna pri nižjih vrednostih v predelih z manjšimi območji zaupanja oziroma višjo stopnjo zaznavnosti deformacij.



Slika 6-10: Oblika območja zaupanja na točki 11 (rdeče – normalna, modro – strižna).

Figure 6-10: The shape of confidence area at point 11 (red – normal strain, blue – shear strain).

Poleg splošne ocene kakovosti geometrije mreže v posameznih predelih lahko na posamezni točki ocenimo smeri, v katerih je mreža šibka, tam je bolj dovzetna na deformacije. Na sliki (Slika 6-10) vidimo, da so v smereh povezav, ki so merjene iz ali proti točki, območja zaupanja bolj sploščena. Razlog temu je, da merjene povezave predstavljajo tudi merjene dolžine, ki v smeri povezave veliko bolje definirajo položaj točke. Če bi tej točki (na sliki je prikazana točka 11) dodali še kakšno mersko povezavo, potem bi dobili manjša območja z bolj homogeno obliko. Primer so točke 1 – 7 v obravnavani mreži (Slika 6-6).

### 6.2.3 Primer določitve statistično značilne deformacije v geodetski mreži

Kot naslednji primer obravnavamo situacijo, v kateri geodetski mreži (Slika 6-1) vsilimo določeno deformacijo. Predpostavimo torej, da se je v geodetski mreži med dvema terminskima izmerama zgodil premik točk  $\mathbf{u}$  (Preglednica 6-7). Izbrani premiki točk povzročijo glede na območja zaupanja statistično značilno normalno in strižno deformacijo na nekaterih točkah, ki jo lahko grafično predstavimo (Slika 6-11). Na sliki so narisani vektorji premikov točk z debelejšo vijolično puščico. Če izračunane vrednosti deformacijskih parametrov, ki jih predstavimo vektorsko na osnovi izračunane smeri, segajo izven območij zaupanja, potem je obravnavana deformacija v točki statistično značilna ob tveganju  $\alpha = 5\%$  (izrisana so 95% območja zaupanja za deformacije v točkah).



Preglednica 6-7: Premiki med dvema terminskima izmerama.

Table 6-7: Displacements between two epochs.

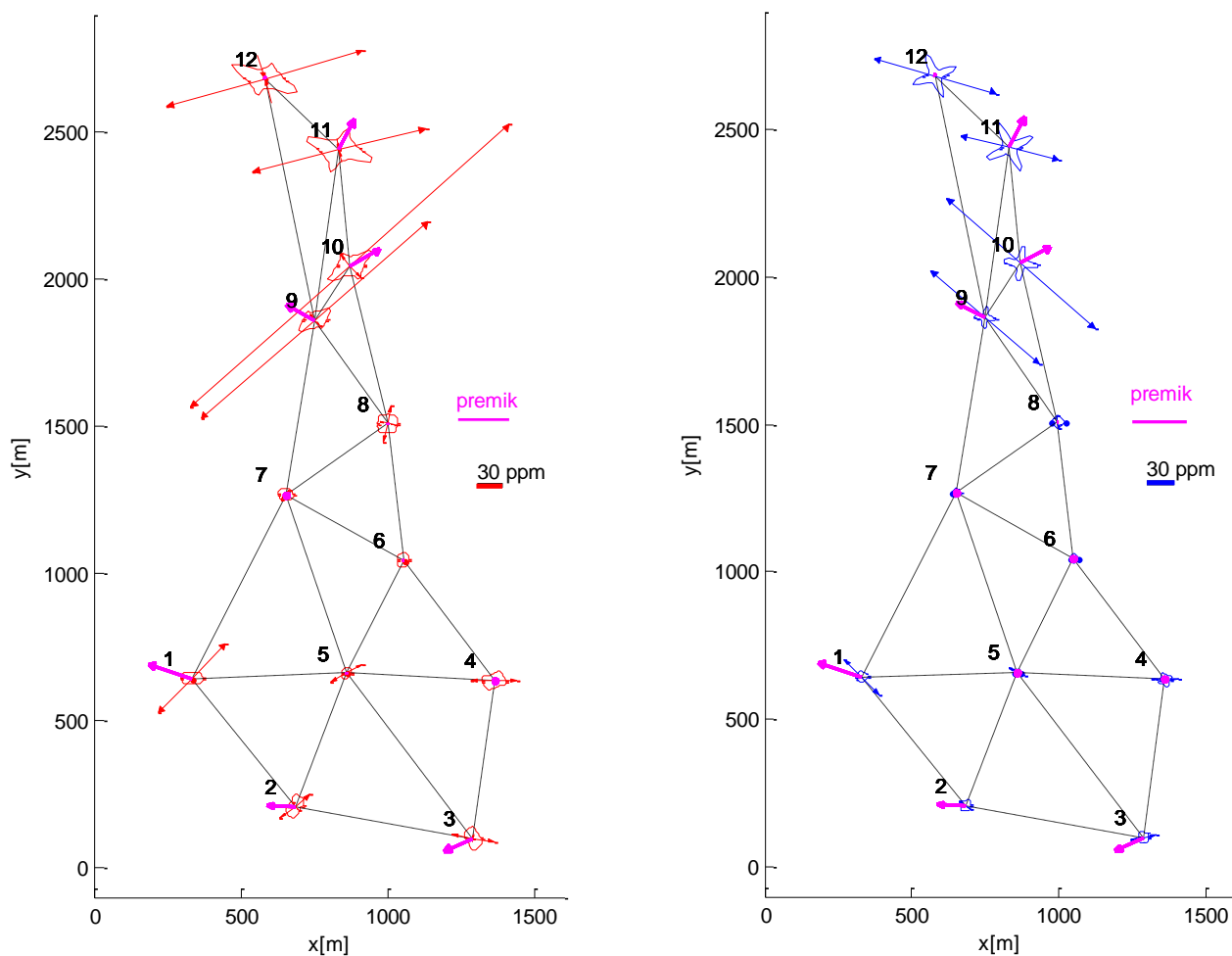
T	epoha 1		vektor premikov		epoha 2	
	$x$ [m]	$y$ [m]	$u_x$ [m]	$u_y$ [m]	$x$ [m]	$y$ [m]
1	330.0325	644.3316	<b>-0.0300</b>	<b>+0.0100</b>	330.0025	644.3416
2	681.7345	209.2384	<b>-0.0200</b>	0.0000	681.7145	209.2384
3	1288.8392	100.4651	<b>-0.0200</b>	<b>-0.0100</b>	1288.8192	100.4551
4	1360.0170	635.9645	0.0000	0.0000	1360.0170	635.9645
5	856.9534	661.3471	0.0000	0.0000	856.9534	661.3471
6	1050.1843	1045.9561	0.0000	0.0000	1050.1843	1045.9561
7	649.1559	1268.9611	0.0000	0.0000	649.1559	1268.9611
8	995.9023	1508.8545	0.0000	0.0000	995.9023	1508.8545
9	748.7254	1861.7558	<b>-0.0200</b>	<b>+0.0100</b>	748.7054	1861.7658
10	870.1463	2045.8337	<b>+0.0200</b>	<b>+0.0100</b>	870.1663	2045.8437
11	832.4640	2439.0910	<b>+0.0100</b>	<b>+0.0200</b>	832.4740	2439.1110
12	578.2152	2681.0670	0.0000	0.0000	578.2152	2681.0670

V preglednici (Preglednica 6-8) so izračunane vrednosti deformacijskih parametrov na vseh točkah obravnavane mreže in pripadajoče smeri. Izračun deformacijskih parametrov je izveden na podlagi pravih premikov (Preglednica 6-7). Izračunana je tudi vrednost povprečne rotacije mreže ( $\bar{\omega}$ ). Ta rotacija predstavlja rotacijo celotne mreže zaradi premikov točk in je ne obravnavamo kot datumsko spremembo, kar bomo obravnavali v nadaljevanju.

Preglednica 6-8: Izračunane "prave" vrednosti deformacijskih parametrov v geodetski mreži.

Table 6-8: Computed true values of strains and rotations in geodetic network.

T	$\varepsilon_1$ [ppm]	$\varepsilon_2$ [ppm]	$\alpha_{\varepsilon_1}$ [°]	$\gamma_1$ [ppm]	$\alpha_{\gamma_1}$ [°]	$\omega_i$ [ppm]	$\varepsilon_{xx}$ [ppm]	$\varepsilon_{yy}$ [ppm]	$\varepsilon_{xy}$ [ppm]
1	55.38	-0.44	46	27.91	134	21.78	55.36	-0.42	-1.14
2	22.43	7.21	36	7.61	144	18.82	22.08	7.55	2.27
3	26.05	-3.94	169	15.00	11	23.82	5.54	16.57	13.95
4	27.20	-3.63	178	15.41	2	9.94	10.90	12.66	15.39
5	21.39	1.65	29	9.87	151	14.90	19.94	3.10	5.15
6	0.00	0.00	0	0.00	0	0.00	0.00	0.00	0.00
7	7.76	1.29	51	3.23	129	1.62	7.68	1.37	-0.71
8	20.94	7.59	76	6.68	104	6.95	17.49	11.03	-5.85
9	168.64	6.23	41	81.20	139	22.50	167.84	7.03	11.38
10	239.80	16.98	42	111.41	138	36.61	239.18	17.60	11.73
11	99.79	-15.15	13	57.47	167	-37.02	67.02	17.62	51.89
12	113.62	-30.41	15	72.01	165	-21.48	78.02	5.19	62.13
						$\bar{\omega} = +1.69''$			



Slika 6-11: Glavne normalne (levo) in strižne (desno) deformacije v točkah mreže.

Figure 6-11: Principal normal (left) and shear (right) strains in network points.

Iz konkretnega primera lahko hitro ocenimo (Slika 6-11), da približno enake velikosti premikov točk povzročijo znatno večje deformacije v točkah s slabše definirano geometrijo mreže (območje proti točki 12).

Izračun deformacij lahko prikažemo tudi na realnem primeru izravnave dveh terminskih izmer. V obeh terminskih izmerah simuliramo opazovanja dolžin in horizontalnih kotov s predpostavljeno a-priori standardno deviacijo za dolžine  $\sigma_{0,dol} = 1 \text{ mm}$  in za smeri  $\sigma_{0,smer} = 1''$  (predpostavimo, da smo uporabili najnatančnejše instrumente za merjenje kotov

in dolžin). Nato obe terminski izmeri izravnamo kot prosti mreži, kar pomeni, da upoštevamo pogoje za definiranje geodetskega datuma z notranjimi vezmi (Poglavje 5.2.2). Z izravnavo proste mreže v obeh terminskih izmerah z istimi približnimi koordinatami točk in enakim tipom generalizirane inverzije v enačbi (5.71) zagotovimo približno enak, skupen geodetski datum. Ker so deformacijske količine neodvisne od izbire skupnega geodetskega datuma, dobimo realne vrednosti deformacijskih parametrov. Iz izrisa deformacij v mreži (Slika 6-11) lahko ocenimo statistično značilnost deformacij. Deformacije, ki ob izbranem tveganju  $\alpha = 5\%$  segajo izven izračunanih 95% območij zaupanja (Poglavje 6.2) za posamezno točko, označimo kot statistično značilne. Premiki točk so ocenjeni s pomočjo transformacije S vektorja koordinatnih razlik izravnavne prostih mrež na geodetski datum točk, za katere ne moremo trditi, da so se premaknile. Te točke določimo s postopki testiranja skladnosti oblike mrež v dveh epohah (Poglavje 5.4.2). Rezultate prikazujemo v preglednici (Preglednica 6-9).

Preglednica 6-9: Parametri deformacij in rotacij iz izravnave simuliranih opazovanj dveh terminskih izmer.

Table 6-9: Strains and rotations from the least squares adjustment of two epochs.

T	$\varepsilon_1$ [ppm]	$\sigma_{\varepsilon_1}$ [ppm]	$\varepsilon_2$ [ppm]	$\sigma_{\varepsilon_2}$ [ppm]	$\alpha_{\varepsilon_1}$ [°]	$\gamma_1$ [ppm]	$\sigma_{\gamma_1}$ [ppm]	$\alpha_{\gamma_1}$ [°]	$\omega_i$ [ppm]	$\sigma_{\omega_i}$ [ppm]	$\varepsilon_{xx}$ [ppm]	$\sigma_{\varepsilon_{xx}}$ [ppm]	$\varepsilon_{yy}$ [ppm]	$\sigma_{\varepsilon_{yy}}$ [ppm]	$\varepsilon_{xy}$ [ppm]	$\sigma_{\varepsilon_{xy}}$ [ppm]
1	53.07	4.80	-1.63	5.14	45	27.35	3.62	135	20.78	3.41	53.07	4.66	-1.63	4.98	-0.12	3.41
2	25.54	12.91	6.95	12.88	31	9.30	6.23	149	18.15	11.29	24.40	15.99	8.09	15.94	4.47	11.29
3	28.10	3.59	-2.38	3.65	174	15.24	2.21	6	22.58	2.86	9.86	4.24	15.86	3.85	14.94	2.86
4	29.61	13.02	-2.29	12.84	5	15.95	7.87	175	8.55	10.26	16.53	15.09	10.80	13.91	15.69	10.26
5	23.22	11.48	0.00	10.85	31	11.61	7.48	149	13.58	8.29	21.80	12.10	1.41	11.34	5.55	8.29
6	1.72	9.84	-2.46	8.79	45	2.09	9.18	135	-0.67	1.62	1.72	2.64	-2.46	1.87	-0.01	1.62
7	8.44	15.98	1.02	11.99	43	3.71	8.71	137	0.30	11.12	8.43	17.85	1.03	13.26	0.29	11.12
8	24.30	19.70	9.36	16.45	74	7.47	6.97	106	7.22	16.76	20.87	28.68	12.79	17.34	-6.28	16.76
9	168.15	68.00	7.75	31.74	42	80.20	35.65	138	23.68	39.30	167.65	71.38	8.25	32.91	8.96	39.30
10	238.66	73.20	16.49	27.84	43	111.09	36.32	137	37.28	41.81	238.31	78.37	16.84	29.14	8.84	41.81
11	92.00	41.96	-15.33	31.82	13	53.66	24.43	167	-34.68	28.10	61.52	50.75	15.15	24.16	48.39	28.10
12	106.32	4.25	-30.36	3.38	15	68.34	2.71	165	-19.13	2.79	72.64	4.64	3.33	2.84	58.90	2.79
									$\bar{\omega} = 1.68''$							

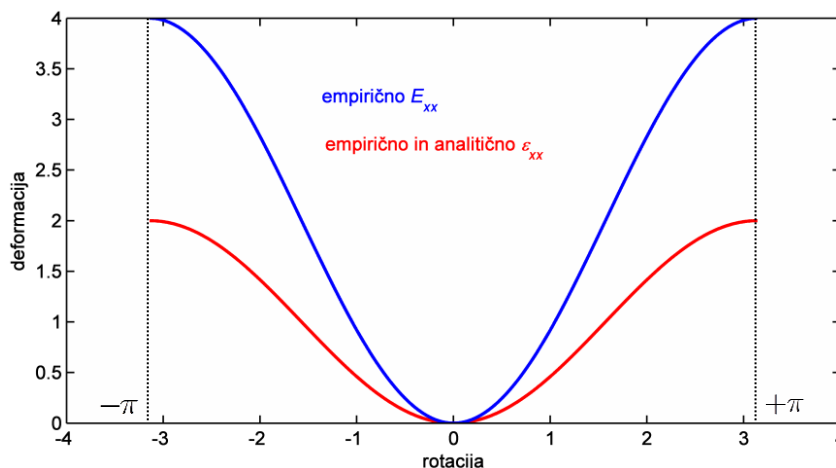
Ocenjene so tudi natančnosti deformacijskih parametrov na osnovi zakona o prenosu varianc in kovarianc v izravnavi po metodi najmanjših kvadratov. Primerjava rezultatov izračuna "pravih" vrednosti deformacij in deformacij na podlagi simuliranih opazovanj (Preglednica 6-8

in Preglednica 6-9) kažejo manjša odstopanja. Ta so posledica vpliva spremembe opazovanj znotraj lastnega intervala zaupanja pri simulaciji meritev.

### 6.3 Analiza vpliva relativne spremembe geodetskega datuma med dvema izmerama

#### 6.3.1 Vpliv razlike v rotaciji geodetske mreže

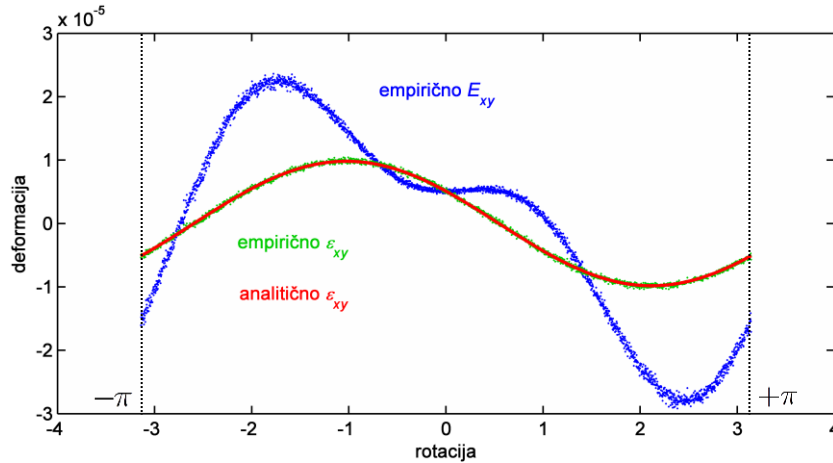
Iz simulacij posameznih rotacij mreže v drugi časovni epohi in analitičnih zvez (5.81) lahko grafično predstavimo odvisnost vrednosti elementov tenzorja malih deformacij od spremembe vrednosti rotacije koordinatnega sistema. Vidimo lahko (Slika 6-12 in Slika 6-13), da se analitično določena (enačbe (5.81)) funkcijska odvisnost (rdeče) popolnoma ujema s empirično določitvijo (zeleno) na intervalu  $[-\pi, +\pi]$ . Poleg tega lahko vidimo, da se empirično določena normalna deformacija  $E_{xx}$  iz tenzorja velikih deformacij (Poglavje 2.2.1) pričakovano ujema z normalno deformacijo  $\varepsilon_{xx}$  iz tenzorja malih deformacij do določenega kota rotacije (Slika 6-12).



Slika 6-12: Funkcijska odvisnost normalne deformacije  $E_{xx}$  in  $\varepsilon_{xx}$  od spremembe rotacije na intervalu  $[-\pi, +\pi]$  na točki 5.

Figure 6-12: Relationship of normal strain  $E_{xx}$  and  $\varepsilon_{xx}$  with respect to rotation on interval  $[-\pi, +\pi]$  at point 5.

Pri strižni deformaciji  $\varepsilon_{xy}$  na prvi pogled ne moremo ugotoviti ujemanja tenzorja malih in velikih deformacij (Slika 6-13).



Slika 6-13: Funkcijska odvisnost strižne deformacije  $E_{xy}$  in  $\varepsilon_{xy}$  od spremembe rotacije na intervalu  $[-\pi, +\pi]$  na točki 5.

Figure 6-13: Relationship of shear strain  $E_{xy}$  and  $\varepsilon_{xy}$  with respect to rotation on interval  $[-\pi, +\pi]$  at point 5.

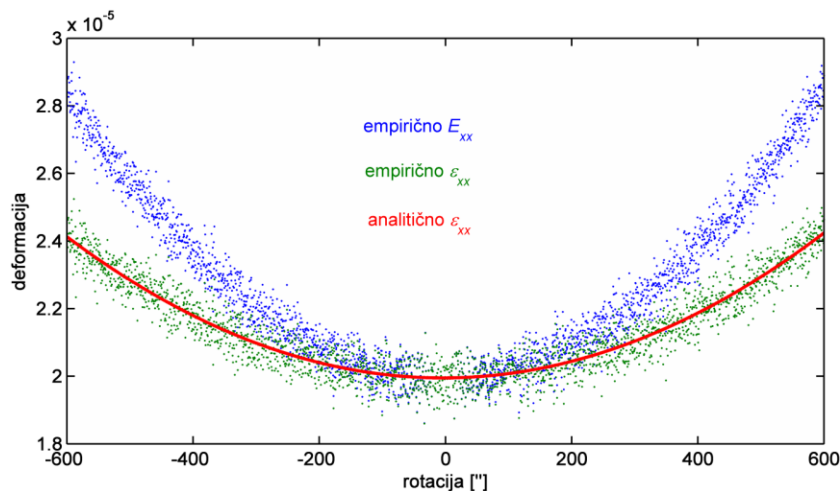
Vrednost strižne deformacije ne presega 20 ppm. Lahko trdimo, da vrednost strižne deformacije v primerjavi z normalno kljub rotaciji ostaja skoraj nespremenjena, zlasti pri manjših vrednostih rotacije geodetske mreže.

V realnosti ne moremo pričakovati rotacij do velikosti  $\pi$ . Glede na to, da v geodetski mreži ni pričakovati spremembe rotacije mreže za več kot nekaj kotnih minut, je primernejša obravnava na manjšem intervalu, npr.  $[-600'', +600'']$ .

Grafa (Slika 6-14 in Slika 6-15) kažeta, da je na intervalu rotacije  $[-600'', +600'']$  obravnava tenzorja malih deformacij dovolj korektna. Razlika med tenzorjem malih in velikih deformacij je praktično zanemarljiva v primeru strižne deformacije, medtem ko ta razlika pri normalni deformaciji znaša okoli 4 ppm na točki 5. Podobna situacija je tudi na vseh preostalih točkah mreže, zato jih v nalogi ne podajamo.

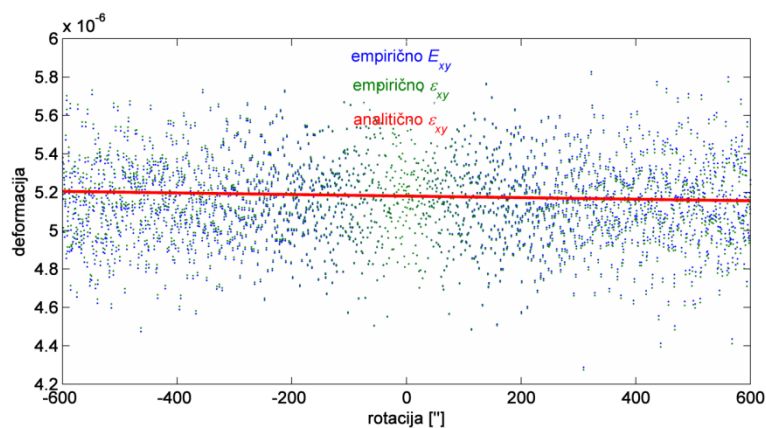
Imamo torej specifično obliko krivulje funkcijske odvisnosti normalne deformacije (velja za normalne deformacije po posameznih oseh kot tudi glavne normalne deformacije) od kota

spremembe rotacije geodetske mreže med dvema izmerama. Oblika funkcijske krivulje omogoča določitev lokalnega ekstrema funkcije. Definiran je z izenačitvijo prvega odvoda funkcije z vrednostjo nič.



Slika 6-14: Funkcijska odvisnost normalne deformacije  $E_{xx}$  in  $\varepsilon_{xx}$  od spremembe rotacije na intervalu  $[-600'', +600'']$  na točki 5.

Figure 6-14: Relationship of normal strain  $E_{xx}$  and  $\varepsilon_{xx}$  with respect to rotation on interval  $[-600'', +600'']$  at point 5.



Slika 6-15: Funkcijska odvisnost strižne deformacije  $E_{xy}$  in  $\varepsilon_{xy}$  od spremembe rotacije na intervalu  $[-600'', +600'']$  na točki 5.

Figure 6-15: Relationship of shear strain  $E_{xy}$  and  $\varepsilon_{xy}$  with respect to rotation on interval  $[-600'', +600'']$  at point 5.

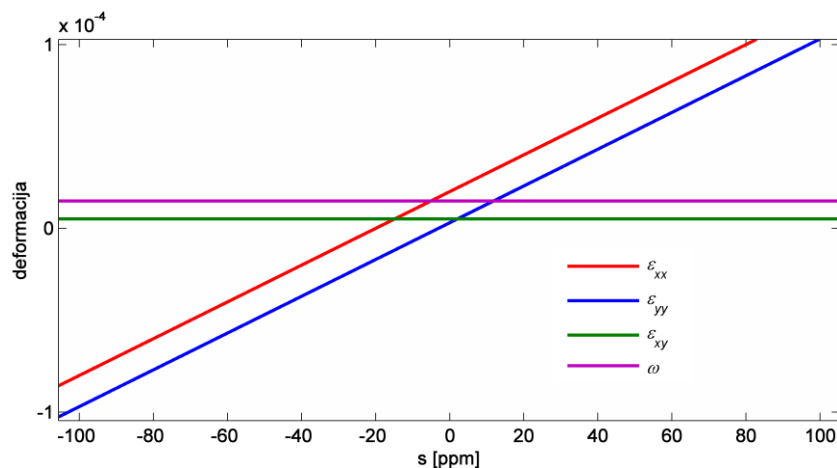
Imamo primer, da na točki obstaja neka realna deformacija. Tedaj je ob predpostavki enakega geodetskega datuma v obeh izmerah, položaj lokalnega minimuma  $\omega_{\min}^{\varepsilon_{xx}}$ ,  $\omega_{\min}^{\varepsilon_{yy}}$  na abscisni osi definiran z izrazom (izhajamo iz izrazov (5.81)):

$$\omega_{\min}^{\varepsilon_{xx}} = \arctan\left(-\frac{\frac{\partial u_x}{\partial y}}{1 + \varepsilon_{yy}}\right), \quad \omega_{\min}^{\varepsilon_{yy}} = \arctan\left(\frac{\frac{\partial u_y}{\partial x}}{1 + \varepsilon_{xx}}\right). \quad (6.2)$$

Iz (6.2) je razvidno, da se lokalni minimum pojavi vedno pri istem kotu rotacije. Položaj minimuma je neodvisen od merila mreže. V točkah, v katerih ni deformacije, je lokalni minimum pri vrednosti nič ( $\omega_{\min}^{\varepsilon_{ii}} = 0$ ).

### 6.3.2 Vpliv razlike v merilu geodetske mreže med epohama

Na enak način kot vpliv razlike rotacije mreže analiziramo vpliv relativne spremembe dolžinskega merila med dvema terminskima izmerama. Empirično s spreminjanjem merila mreže ali pa na podlagi analitično izpeljanih izrazov (5.81) na nekem izbranem intervalu računamo deformacijske parametre v točkah geodetske mreže, ki jih lahko grafično predstavimo.



Slika 6-16: Funkcijska odvisnost normalne in strižne deformacije ter rotacije od spremembe dolžinskega merila med dvema izmerama na točki 5.

Figure 6-16: Relationship of normal and shear strain and rotation with respect to the change of scale between two survey epochs at point 5.

Iz grafa (Slika 6-16) je razvidno, da so deformacijski parametri v linearni funkcijski zvezi s spremembo merila (na tem intervalu spremembe  $s$ ). Tako kot v primeru analize vpliva rotacije vrednost strižne deformacije  $\varepsilon_{xy}$  ostaja konstantna ne glede na spremembo merila.

Iz analize vplivov spremembe rotacije in merila geodetske mreže na računane deformacijske parametre v geodetski mreži lahko zaključimo:

- Relativna sprememba rotacije in merila med terminskima izmerama praktično nima vpliva na vrednost strižne deformacije  $\varepsilon_{xy}$  v točki.
- Diferencialna rotacija v točki je pričakovano v linearni funkcijski zvezi z relativno spremembo rotacije mreže in je neodvisna od spremembe merila.
- Relativna sprememba rotacije vpliva na vrednosti normalnih deformacij v posameznih koordinatnih oseh. Oblika funkcijske zveze omogoča določitev lokalnega ekstrema.
- Vpliv spremembe merila na normalne deformacije je linearen. S povečevanjem relativne razlike dolžinskega merila med dvema izmerama se povečujejo vrednosti normalnih deformacij, kar je pričakovano glede na definicijo normalnih deformacij.

Predpostavljamo, da poznavanje funkcijskih odvisnosti deformacijskih parametrov od relativnih sprememb datumskih količin med dvema izmerama ponuja možnost določitve in upoštevanja spremembe datuma za določitev realnih deformacij in premikov točk v geodetski mreži. To bomo raziskali v nadaljevanju.

### 6.3.3 Možnost določitve relativne spremembe geodetskega datuma med dvema izmerama

Opravka imamo s primerom, da se je v znanem časovnem obdobju med dvema izmerama v mreži zgodila deformacija obravnavanega objekta. Na podlagi geodetskih opazovanj v mreži točk, ki diskretizirajo objekt, z izravnavo po metodi najmanjših kvadratov izračunamo koordinate točk v posamezni izmeri. Izpostavili smo problem neenotnosti geodetskega datuma v dveh ločenih izmerah (poglavje 5.1), ki je pogoj za oceno realnih deformacij objekta. Če nimamo enakega geodetskega datuma v obeh izmerah, s koordinatnimi razlikami definirane deformacije in premiki točk ne odražajo realnih deformacij in premikov. Izjema je le vrednost



strižne deformacije  $\varepsilon_{xy}$ , ki je praktično konstanta neodvisno od rotacije in merila mreže (poglavje 6.3.1). Torej je nujno upoštevanje dejstva, da so deformacije količine, odvisne od geodetskega datuma. V praksi je skoraj nemogoče zagotoviti v dveh terminskih izmerah enak koordinatni sistem mreže. Razlogov je več:

- dane točke, ki definirajo koordinatni sistem, so se morda med obema epohama premaknile,
- pogrešek meritev orientacijske smeri povzroči rotacijo celotne mreže,
- merilo dolžin ni enako v obeh izmerah (nepoznavanje merske frekvence elektrooptičnega razdaljemera).

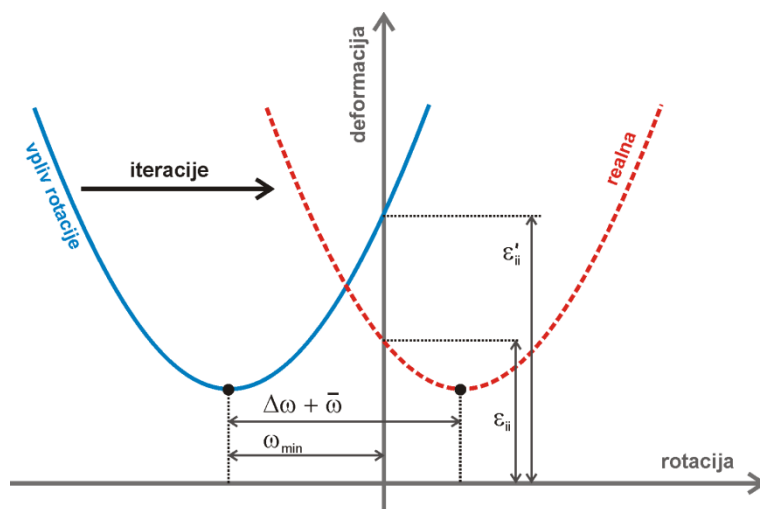
Analitično in empirično smo določili funkcijske povezave med relativno spremembo datumskih količin (orientacije in merila mreže) ter vrednostmi deformacijskih parametrov v posamezni točki mreže (poglavji 5.5.1 in 6.3). S temi zvezami skušamo določiti relativno spremembo datuma med dvema izmerama in jo nato upoštevati.

V izbranem realnem primeru dveh terminskih izmer predpostavljamo relativno spremembo datuma druge izmere glede na prvo. Z analitičnimi izrazi (5.81), lahko pa tudi s simulacijami različnih vrednosti spremembe posameznega datumskega parametra (merila in orientacije), določimo funkcijsko krivuljo izbranega deformacijskega parametra. Predvidevamo, da bo mogoče zaznati premik krivulje glede na izhodiščno (tisto, ki ni podvržena vplivu spremembe datumskih parametrov) za vrednosti spremembe datumskega parametra, ki je skrit v koordinatni rešitvi druge izmere glede na prvo. Z znanimi relativnimi spremembami datumskih parametrov lahko nato popravimo koordinate točk druge izmere z uporabo štiriparametrične transformacije. S tem obe terminski izmeri datumsko uskladimo in nato računamo realne vrednosti deformacij. Ob izbiri primerne enolično določenega datuma lahko računamo realne vrednosti premikov točk. Uporabimo znane metode testiranja skladnosti oblike mreže ali robustne metode (poglavji 5.4.1 in 5.4.2)

Pri določitvi relativne spremembe rotacije bomo uporabili le lastnosti normalnih deformacij. Strižne deformacije so skoraj konstantne na nekem manjšem omejenem intervalu, ki je velikostnega reda skrajnih sprememb rotacije v geodetskih nalogah (npr.  $[-600'', +600'']$ ). Če obstaja relativna sprememba rotacije mreže  $\Delta\omega$  med dvema izmerama, predvidevamo, da

bo prišlo do vzporednega premika sinusoidne funkcijske krivulje normalne deformacije na abscisi za vrednost  $\Delta\omega$  (Slika 6-17).

Za določitev  $\Delta\omega$  nas v prvi fazi zanima položaj funkcijske krivulje, ki je podvržena vplivu spremembe rotacije (modra krivulja, Slika 6-17). To krivuljo lahko določimo na dva načina. Prvi način je empiričen. Simuliramo različne vrednosti spremembe rotacije druge izmere glede na prvo in računamo vrednosti normalnih deformacij v posamezni točki mreže. Analitični izrazi (5.81) nam namigujejo obliko zapisa regresijske krivulje za deformacijske parametre tipa  $f \omega = a \sin \omega + b \cos \omega + c$ . Koeficiente krivulj na posamezni točki mreže določimo z metodo najmanjših kvadratov. Iz znane regresijske krivulje, ki je podvržena vplivu spremembe rotacije, enostavno določimo položaj lokalnega minimuma (Slika 6-17). Drugi način je analitičen. Predhodno smo izpeljali analitične izraze (5.81), ki povezujejo deformacijske parametre s spremembami datumskih parametrov med dvema obravnavanima epohama. S temi izrazi imamo definirano obliko modre krivulje (Slika 6-17) in tudi položaj lokalnega minimuma.



Slika 6-17: Horizontalni premik krivulje funkcijske odvisnosti normalne deformacije od relativne spremembe rotacije med dvema izmerama.

Figure 6-17: Horizontal shift of curve of normal strain due to unbalanced rotation between two epochs in geodetic network.

Kako sedaj določiti iskani premik  $\Delta\omega$ ? Ker prave vrednosti normalne deformacije ne poznamo, ne poznamo minimuma realne krivulje (rdeča). Kljub nepoznavanju prave krivulje

(rdeče) za normalno deformacijo, lahko problem rešimo na iterativen način z naslednjim algoritmom:

**KORAK 1:**

Iz izrazov (6.2) določimo vrednosti minimuma za normalni deformaciji v obeh koordinatnih smereh (za modro krivuljo, Slika 6-17). V izračunu minimuma vzamemo vrednosti normalnih deformacij in parcialnih odvodov (iz matrike gradienta vektorskega polja premikov  $\mathbf{G}$ ) v izhodišču, to je pri (simulirani) spremembi rotacije mreže  $\omega = 0$ . Te vrednosti vsebujejo še nedefiniran vpliv spremembe rotacije mreže. Na ta način dobimo za vsako točko mreže odmik minimuma  $\Delta\omega_{\min}$  od ordinatne osi.

$$\Delta\omega_{\min}^{\varepsilon_{xx}}{}^i = \arctan \left( \frac{\left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)'^{i-1}}{1 + \varepsilon_{yy}'^{i-1}} \right)_{\omega=0}, \quad (6.3)$$

$$\Delta\omega_{\min}^{\varepsilon_{yy}}{}^i = \arctan \left( \frac{\left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)'^{i-1}}{1 + \varepsilon_{xx}'^{i-1}} \right)_{\omega=0},$$

kjer je:

$i$  – iteracija,

$\Delta\omega_{\min}^{\varepsilon_{xx}}{}^i$ ,  $\Delta\omega_{\min}^{\varepsilon_{yy}}{}^i$  - položaj minimuma krivulje odvisnosti normalne deformacije od relativne spremembe rotacije mreže na abscisni osi (rotacija) v trenutni iteraciji,

$\varepsilon_{xx}'^{i-1}$ ,  $\varepsilon_{yy}'^{i-1}$  - vrednost normalne deformacije pri vrednosti  $\omega = 0$  v predhodni iteraciji,

$\left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)'_{\omega=0}{}^{i-1}$ ,  $\left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)'_{\omega=0}{}^{i-1}$  - vrednost parcialnega odvoda pri vrednosti  $\omega = 0$  v predhodni

iteraciji.

## KORAK 2:

Izračunamo povprečen odmik minimuma  $\overline{\Delta\omega}_{\min}$  od izhodišča za vse točke in za normalni deformaciji po obeh koordinatnih oseh ( $\varepsilon_{xx}$  in  $\varepsilon_{yy}$ ).  $\overline{\Delta\omega}_{\min}$  predstavlja približek relativne spremembe rotacije mreže med obema izmerama.

## KORAK 3:

Ker iščemo spremembe rotacije druge terminske izmere glede na prvo, zasukamo nazaj (uporabimo štiriparametrično transformacijo) izračunane koordinate točk druge izmere. S koordinatami točk druge izmere, ki so proste spremembe rotacije  $\overline{\Delta\omega}_{\min}$ , izračunamo spremembe koordinat med obema izmerama, iz njih ponovno deformacijske parametre in celoten postopek ponovimo.

Iteracijski postopek ustavimo, ko vrednost  $\overline{\Delta\omega}_{\min}$  konvergira k določeni vrednosti. Rezultat tega postopka so položaji točk v obeh terminskih izmerah, med katerimi ni rotacije mreže zaradi napačne definicije geodetskega datuma.

Za izbrano testno geodetsko mrežo predpostavimo drugo terminsko izmero z izbranimi premiki točk (vektor  $\mathbf{u}$ , Preglednica 6-7). Drugi izmeri vsilimo npr. spremembo geodetskega datuma za vrednost relativne spremembe rotacije  $\Delta\omega = +60''$  in relativno spremembo merila  $\Delta s = -30$  ppm. Rezultati iterativnega postopka kažejo na hitro konvergenco, saj je po drugi iteraciji razlika med korakoma praktično zanemarljiva (Preglednica 6-11).

Odstopanje minimuma dejanske (modre) in realne (rdeče) krivulje je enako za vse točke in za obe normalni deformaciji. V vrednosti izračunane relativne razlike v orientaciji mrež med izmerama se pojavi tudi dodatek spremembe rotacije velikosti  $\bar{\omega}$  ( $\bar{\omega} = -1.68''$ ). Ta vrednost predstavlja povprečno rotacijo mreže zaradi premikov točk mreže. Seveda je v realnosti ne poznamo. Jo pa lahko ocenimo iz postopkov izravnave proste mreže z istimi približnimi koordinatami točk v obeh izmerah (Preglednica 6-7) ter pomočjo definicije datuma geodetske mreže s testiranjem skladnosti oblike v dveh izmerah (poglavje 5.4.2) ali uporabo robustnih metod (poglavje 5.4.3). V obravnavanem primeru "prava" vrednost povprečne rotacije mreže zaradi premikov znaša približno  $1.69''$  (izračunano iz "pravih" vrednosti deformacij v mreži –

Preglednica 6-8). Z odsekom "realne" krivulje na ordinatni osi bi lahko določili pravo vrednost deformacijskega parametra oziroma deformacije v točki, ki je prosta vpliva relativne spremembe orientacije mreže med dvema epohama.

Preglednica 6-10: Sprememba geodetskega datuma druge izmere glede na prvo izmero.

Table 6-10: Change in geodetic datum between the first and second epoch.

T	epoha 1 $\mathbf{x}_1$		$1 + \Delta s \cdot \mathbf{R}_{\Delta\omega} \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{u}$	epoha 2 $\mathbf{x}_2$ ( $\Delta\omega = +60''$ , $\Delta s = -30$ ppm)	
	$x$ [m]	$y$ [m]		$x$ [m]	$y$ [m]
1	330.0025	644.3416		329.8396	644.5123
2	681.7145	209.2384		681.4144	209.3199
3	1288.8192	100.4551		1288.4693	100.3633
4	1360.0170	635.9645		1359.8207	635.8359
5	856.9534	661.3471		856.7796	661.3640
6	1050.1843	1045.9561		1050.1165	1045.9053
7	649.1559	1268.9611		649.1651	1269.0202
8	995.9023	1508.8545		995.9708	1508.8056
9	748.7054	1861.7658		748.8840	1861.7782
10	870.1663	2045.8437		870.3948	2045.8152
11	832.4740	2439.1110		832.8180	2439.0817
12	578.2152	2681.0670		578.6372	2681.1043

Preglednica 6-11: Rezultati iterativnega postopka.

Table 6-11: Results of iterations.

T	$\Delta\omega_{\min}^{\varepsilon_{xx}}$ ["]			$\Delta\omega + \bar{\omega}$ ["]	$\Delta\omega_{\min}^{\varepsilon_{yy}}$ ["]			$\Delta\omega + \bar{\omega}$ ["]
	iteracija 1	iteracija 2	iteracija 3		razlika 1 - 3	iteracija 1	iteracija 2	
1	-64.27	-2.59	-2.59	-61.68	-64.73	-3.04	-3.04	-61.68
2	-64.38	-2.70	-2.70	-61.68	-63.41	-1.73	-1.73	-61.68
3	-67.78	-6.10	-6.10	-61.68	-62.02	-0.34	-0.34	-61.68
4	-65.20	-3.52	-3.52	-61.68	-58.85	2.83	2.83	-61.68
5	-64.13	-2.45	-2.45	-61.68	-62.00	-0.31	-0.31	-61.68
6	-59.98	1.70	1.70	-61.68	-59.97	1.71	1.71	-61.68
7	-60.19	1.49	1.49	-61.68	-60.45	1.23	1.23	-61.68
8	-60.23	1.46	1.46	-61.68	-62.61	-0.93	-0.93	-61.68
9	-66.98	-5.30	-5.30	-61.68	-62.31	-0.63	-0.63	-61.68
10	-69.97	-8.29	-8.29	-61.68	-65.18	-3.50	-3.50	-61.68
11	-63.06	-1.38	-1.38	-61.68	-41.59	20.09	20.09	-61.68
12	-68.38	-6.69	-6.69	-61.68	-42.69	18.99	18.99	-61.68

Do sedaj smo obravnavali samo spremembo rotacije geodetske mreže. Če nas zanima relativna sprememba dolžinskega merila med dvema terminskima izmerama v povezavi z lastnostmi tenzorja deformacij in pripadajočimi deformacijskimi parametri, ne moremo dobiti rešitve. Povezave deformacijskih parametrov s spremembami merila geodetske mreže so linearne. S tem nimamo karakteristične ali oporne točke preko katere bi lahko, tako kot v primeru sprememb rotacij, iskali prave položaje krivulje funkcijske odvisnosti. Problem je tudi v tem, da so vrednosti sprememb dolžinskega merila oziroma normalne deformacije v posameznih točkah v primerjavi s spremembami merila zaradi napačne definicije geodetskega datuma precej večje. Kljub temu je, v primerjavi z relativno spremembo rotacije mreže, problem iskanja relativne spremembe dolžinskega merila manjši. Lahko ga rešimo tako, da med seboj primerjamo vse merjene dolžine v obeh obravnavanih izmerah in dobimo oceno faktorja povečave dolžin med obema izmerama. Ali pa z rešitvijo predločenega sistema za parametre štiriparametrične transformacije ocenimo vrednost spremembe dolžinskega merila. Zaključimo s tem, da je nepoznavanje orientacije ali rotacije mreže veliko bolj problematično kot sprememba dolžinskega merila.

#### 6.4 Primeri različnih definicij geodetskega datuma in vplivi na računane premike in deformacije v točkah

Imamo dve terminski izmeri dolžin in horizontalnih smeri v obravnavani geodetski mreži (Slika 6-1). Predpostavimo, da se je v času med obema izmerama zgodil že obravnavani premik izbranih točk mreže (Preglednica 6-7). Za obe izmeri umetno generiramo opazovanja dolžin ( $\sigma_{0,dol} = 1 \text{ mm}$ ) in horizontalnih smeri ( $\sigma_{0,smer} = 1''$ ), ki jih izravnamo po metodi najmanjših kvadratov.

Deformacijsko analizo izvajamo na podlagi izračunanih sprememb koordinat točk med obema terminskima izmerama. Ker želimo preveriti vpliv definicije geodetskega datuma na računane premike in deformacije, obravnavamo različne načine izračuna koordinat točk v posamezni terminski izmeri. Koordinate točk izračunamo z:

- izravnavo proste mreže z enakimi približnimi koordinatami točk za obe terminski izmeri,

- izravnavo proste mreže za obe terminski izmeri z enakimi približnimi koordinatami točk in izvedbo deformacijske analize po postopku Delft in uporabo robustnih metod za definiranje geodetskega datuma referenčnih točk,
- izravnavo vpete geodetske mreže v obeh terminskih izmerah.

#### 6.4.1 Izravnava proste mreže z enakimi približnimi koordinatami točk

Najprej izvedemo izravnavo proste mreže. Za obe izmeri najprej izvedemo test homogenosti natančnosti (poglavje 5.4.1) ob izbranem tveganju  $\alpha = 5\%$ . Ker testna statistika  $T_1$  ni v kritičnem območju (izraz (5.43)), ničelne domneve ne moremo zavrniti:

$$T_1 = 0.9058 \in 0.6147, 1.6269$$

Ne moremo trditi, da sta izmeri različne natančnosti, zato ju lahko primerjamo med seboj. Izračunamo skupno a-posteriori referenčno varianco obeh terminskih izmer ob prostostnih stopnjah  $f_1 = f_2 = 65$  (za obravnavano geodetsko mrežo):

$$\hat{\sigma}_{0,1} = 0.3388, \hat{\sigma}_{0,2} = 0.3559,$$
$$\hat{\sigma}_{0,12} = \sqrt{\frac{f_1 \hat{\sigma}_{0,1}^2 + f_2 \hat{\sigma}_{0,2}^2}{f_1 + f_2}} = 0.3474.$$

Rezultati izravnave so podrejeni pogojem za izravnavo proste mreže (poglavje 5.2.2), kar pomeni, da ni povprečne rotacije, spremembe merila in premika težišča mreže po izravnavi. Torej s tem ni spremembe geodetskega datuma med dvema terminskima izmerama, če v izravnavi privzamemo enake približne koordinate točk mreže v obeh izmerah. Lahko trdimo, da je taka definicija geodetskega datuma primerna za izračun deformacij, ki so se zgodile med dvema epohama v mreži (Preglednica 6-13). Vrednosti deformacij so primerljive s pravimi vrednostmi deformacij (Preglednica 6-8). Razlika je posledica slučajnih pogreškov opazovanj dolžin in kotov v geodetski mreži.

Način definicije datuma, kot ga zagotavlja prosta mreža, pa seveda ni primeren za izračun vrednosti premikov v točkah. Vrednosti izračunanih sprememb koordinat točk ne predstavljajo vrednosti premikov točk v geodetski mreži (Preglednica 6-12). Prav tako način

obravnave proste geodetske mreže ne podaja prave rotacije v točkah. Izračunana povprečna rotacija geodetske mreže pri obravnavi proste mreže znaša  $-0.37''$  (Preglednica 6-13). Prava rotacija mreže zaradi samih premikov točk bi morala biti približno  $+1.7''$  (Preglednica 6-8)

Preglednica 6-12: Izračunane spremembe koordinat iz rezultatov izravnave proste mreže.

Table 6-12: Estimated coordinate changes as the result of free network adjustments.

T	epoha 1		vektor premikov				epoha 2	
	$x$ [m]	$y$ [m]	$u_x$ [m]	$\sigma_{u_x}$ [m]	$u_y$ [m]	$\sigma_{u_y}$ [m]	$x$ [m]	$y$ [m]
1	330.0328	644.3314	-0.0204	0.0022	0.0033	0.0025	330.0124	644.3347
2	681.7356	209.2406	-0.0075	0.0012	-0.0076	0.0036	681.7281	209.2330
3	1288.8396	100.4668	-0.0021	0.0019	-0.0107	0.0040	1288.8375	100.4561
4	1360.0202	635.9610	0.0079	0.0020	0.0122	0.0025	1360.0281	635.9732
5	856.9511	661.3456	0.0129	0.0006	0.0028	0.0022	856.9640	661.3484
6	1050.1830	1045.9578	0.0066	0.0011	0.0000	0.0017	1050.1896	1045.9578
7	649.1535	1268.9605	0.0074	0.0012	-0.0044	0.0016	649.1609	1268.9561
8	995.9007	1508.8554	0.0031	0.0011	-0.0049	0.0019	995.9038	1508.8505
9	748.7260	1861.7553	-0.0210	0.0008	0.0036	0.0028	748.7050	1861.7589
10	870.1483	2045.8343	0.0171	0.0007	0.0034	0.0033	870.1654	2045.8377
11	832.4641	2439.0895	0.0049	0.0012	0.0128	0.0048	832.4690	2439.1023
12	578.2150	2681.0677	-0.0089	0.0021	-0.0104	0.0058	578.2061	2681.0573

Preglednica 6-13: Deformacije in rotacije iz rezultatov izravnave proste mreže.

Table 6-13: Strains and rotations from the free network adjustment.

T	$\varepsilon_1$ [ppm]	$\sigma_{\varepsilon_1}$ [ppm]	$\varepsilon_2$ [ppm]	$\sigma_{\varepsilon_2}$ [ppm]	$\alpha_{\varepsilon_1}$ [°]	$\gamma_1$ [ppm]	$\sigma_{\gamma_1}$ [ppm]	$\alpha_{\gamma_1}$ [°]	$\omega_i$ [ppm]	$\sigma_{\omega_i}$ [ppm]	$\varepsilon_{xx}$ [ppm]	$\sigma_{\varepsilon_{xx}}$ [ppm]	$\varepsilon_{yy}$ [ppm]	$\sigma_{\varepsilon_{yy}}$ [ppm]	$\varepsilon_{xy}$ [ppm]	$\sigma_{\varepsilon_{xy}}$ [ppm]
1	60.36	9.09	3.30	9.72	43	28.53	6.27	137	13.67	7.02	60.26	9.58	3.41	10.25	2.42	7.02
2	36.52	12.86	17.07	12.86	9	9.72	4.17	171	10.37	12.16	29.90	17.23	23.69	17.17	9.21	12.16
3	43.36	7.62	1.52	8.13	157	20.92	4.85	23	8.24	6.21	7.48	9.19	37.39	8.36	14.63	6.21
4	35.52	20.37	-14.77	21.16	166	25.14	14.87	14	-12.18	14.50	-1.40	21.32	22.15	19.66	22.22	14.50
5	23.08	14.50	1.31	13.97	18	10.89	8.37	162	3.40	11.52	18.73	16.81	5.66	15.75	8.71	11.52
6	-8.97	3.03	-12.73	2.72	49	1.88	0.49	131	-10.02	2.84	-8.99	4.63	-12.72	3.29	-0.25	2.84
7	3.27	40.24	-4.62	33.78	54	3.94	35.00	126	-6.62	12.46	3.07	20.00	-4.42	14.86	-1.23	12.46
8	21.69	24.53	-1.99	20.61	79	11.84	14.19	101	0.89	17.66	14.35	30.22	5.35	18.27	-10.95	17.66
9	167.82	72.05	3.27	33.38	43	82.27	38.86	137	15.48	40.53	167.54	73.62	3.56	33.94	6.87	40.53
10	238.17	71.16	15.20	26.97	43	111.48	35.51	137	31.33	40.43	237.86	75.80	15.51	28.18	8.23	40.43
11	106.58	41.32	-15.96	30.29	14	61.27	23.81	166	-45.54	27.30	74.83	49.30	15.78	23.47	53.69	27.30
12	119.19	8.89	-31.61	7.40	17	75.40	5.54	163	-30.50	5.46	85.21	9.75	2.37	7.07	63.00	5.46
									$\bar{\omega} = -0.37''$							



### 6.4.2 Definicija geodetskega datuma s klasičnimi metodami deformacijske analize

Koordinatne razlike izravnave proste mreže za obe terminski izmeri in pripadajoča matrika kofaktorjev predstavlja osnovo za testiranje skladnosti oblike mreže med dvema izmerama po postopku Delft (poglavje 5.4.2). Ker je testna statistika  $T_2 = 513.71 > F_{f,\infty,1-\alpha/2} = 2.60$ , lahko trdimo, da je mreža spremenila obliko med izmerama. S testno statistiko  $T_3$  s postopnim izločanjem točk lociramo tisti del mreže, kjer sprememba oblike ni statistično značilna.

Postopek izločanja točk in pripadajoče vrednosti testne statistike  $T_3$  ter kritične vrednosti so podane v preglednici (Preglednica 6-14). Iz rezultatov lahko vidimo, da postopek poleg točk, ki so se dejansko premaknile, izloči tudi nekaj točk, ki se niso premaknile. Da postopek izloči točko 12 kot točko, ki se je statistično značilno premaknila, je predvsem posledica položaja te točke v mreži. Kot je bilo že na različne načine ugotovljeno, točka leži na območju s slabo geometrijo mreže. Že rezultati analize robustnosti mreže na tem delu so pokazali, da majhna sprememba geodetskega opazovanja rezultira dokaj veliko računsko spremembo položaja točke in deformacij. Bolj nenavaden je rezultat izločitve točke 4 in 5, ki jih postopek izloči kot zadnji dve. Verjetno je tu razlog izločitve predvsem numerične narave. Vrednost testne statistike je blizu meje kritične vrednosti zavrnitve.

Preglednica 6-14: Rezultati postopka določanja premikajočih točk.

Table 6-14: Results of detecting moving points.

izločena T	$T_{3,\min}$	$F_{f_F,\infty,1-\alpha/2}$	$f_F$
9	127.0656	1.5865	19
12	103.5757	1.6228	17
1	84.9098	1.6664	15
10	62.9296	1.7202	13
2	42.8769	1.7886	11
3	7.6042	1.8799	9
11	4.0790	2.0096	7
4	2.8064	2.2141	5
5	1.6202	2.6049	3

Rezultati postopka testiranja skladnosti oblike mreže med dvema izmerama določijo točke 6, 7 in 8 kot točke, za katere ne moremo trditi, da so se statistično značilno premaknile. Te točke lahko definirajo geodetski datum, zato lahko nastavimo ustrezno matriko  $\mathbf{E}$  transformacije S. Transformiramo vektor koordinatnih sprememb med dvema terminskima izmerama (Preglednica 6-12) v datumsko pogojeno rešitev.

Preglednica 6-15: Ocenjene vrednosti premikov točk v geodetski mreži.

Table 6-15: Estimated values of point displacements in geodetic network.

T	$u_x$ [m]	$\sigma_{u_x}$ [m]	$u_y$ [m]	$\sigma_{u_y}$ [m]
1	-0.0306	0.0024	0.0105	0.0028
2	-0.0208	0.0021	-0.0030	0.0041
3	-0.0162	0.0025	-0.0104	0.0046
4	-0.0024	0.0020	0.0120	0.0028
5	0.0028	0.0010	0.0062	0.0024
6	-0.0007	0.0007	0.0020	0.0011
7	0.0017	0.0010	0.0005	0.0004
8	-0.0009	0.0005	-0.0025	0.0012
9	-0.0225	0.0012	0.0078	0.0028
10	0.0169	0.0014	0.0067	0.0036
11	0.0075	0.0025	0.0164	0.0055
12	-0.0045	0.0036	-0.0050	0.0065

Rešitev (Preglednica 6-15) naj bi podajala realno oceno vektorja premikov točk mreže, ki jih uporabimo pri izračunu deformacij in rotacij v točkah geodetske mreže.

Matriko  $\mathbf{E}$  transformacije S, ki jo izračunamo s postopkom Delft, lahko nadgradimo z uporabo robustnih statističnih metod (poglavje 5.4.3). S postopkom iterativnega prilagajanja uteži določimo v matriki  $\mathbf{E}$  različne uteži in s tem različne vplive posamezne točke, za katere ne moremo trditi, da so se statistično značilno premaknile (to ugotovimo s postopkom Delft). Te točke obravnavamo kot referenčne točke. Ponovno uporabimo transformacijo S za izračun vektorja premikov točk.

Iz premikov točk mreže (Preglednica 6-16) izračunamo ponovno deformacije in rotacije v točkah mreže. Glede na to, da s transformacijo S vektorja koordinatnih sprememb izravnave proste mreže ohranjamo identični geodetski datum v obeh izmerah ni pričakovati spremembe vrednosti deformacij.

Preglednica 6-16: Diagonalni elementi matrike **E** in ocenjene vrednosti premikov.

Table 6-16: Diagonal elements of matrix **E** and estimated point displacements.

T	$E_{xx}$	$E_{yy}$	$u_x$ [m]	$\sigma_{u_x}$ [m]	$u_y$ [m]	$\sigma_{u_y}$ [m]
1	0	0	-0.0302	0.0029	0.0101	0.0027
2	0	0	-0.0207	0.0024	-0.0035	0.0041
3	0	0	-0.0161	0.0023	-0.0112	0.0048
4	0	0	-0.0020	0.0018	0.0111	0.0030
5	0	0	0.0032	0.0011	0.0056	0.0025
6	4834	774	-0.0001	0.0002	0.0013	0.0013
7	443	8505	0.0024	0.0015	0.0000	0.0001
8	3933	312	-0.0001	0.0002	-0.0032	0.0014
9	0	0	-0.0215	0.0015	0.0072	0.0030
10	0	0	0.0180	0.0015	0.0061	0.0037
11	0	0	0.0088	0.0026	0.0158	0.0057
12	0	0	-0.0031	0.0037	-0.0055	0.0066

Preglednica 6-17: Deformacije in rotacije iz ocenjenih premikov po postopku iterativnega prilagajanja uteži v matriki **E** v transformaciji S.

Table 6-17: Strains and rotations from the estimated displacements as the result of iterative reweight S-transformation.

T	$\varepsilon_1$ [ppm]	$\sigma_{\varepsilon_1}$ [ppm]	$\varepsilon_2$ [ppm]	$\sigma_{\varepsilon_2}$ [ppm]	$\alpha_{\varepsilon_1}$ [°]	$\gamma_1$ [ppm]	$\sigma_{\gamma_1}$ [ppm]	$\alpha_{\gamma_1}$ [°]	$\omega_i$ [ppm]	$\sigma_{\omega_i}$ [ppm]	$\varepsilon_{xx}$ [ppm]	$\sigma_{\varepsilon_{xx}}$ [ppm]	$\varepsilon_{yy}$ [ppm]	$\sigma_{\varepsilon_{yy}}$ [ppm]	$\varepsilon_{xy}$ [ppm]	$\sigma_{\varepsilon_{xy}}$ [ppm]
1	60.36	9.09	3.30	9.72	43	28.53	6.27	137	21.34	7.02	60.26	9.58	3.41	10.25	2.42	7.02
2	36.52	12.86	17.07	12.86	9	9.72	4.17	171	18.05	12.16	29.90	17.23	23.69	17.17	9.21	12.16
3	43.36	7.62	1.52	8.13	157	20.92	4.85	23	15.91	6.21	7.48	9.19	37.39	8.36	14.63	6.21
4	35.52	20.37	-14.77	21.16	166	25.14	14.87	14	-4.51	14.50	-1.40	21.32	22.15	19.66	22.22	14.50
5	23.08	14.50	1.31	13.97	18	10.89	8.37	162	11.07	11.52	18.73	16.81	5.66	15.75	8.71	11.52
6	-8.97	3.03	-12.73	2.72	49	1.88	0.49	131	-2.34	2.84	-8.99	4.63	-12.72	3.29	-0.25	2.84
7	3.27	40.24	-4.62	33.78	54	3.94	35.00	126	1.05	12.46	3.07	20.00	-4.42	14.86	-1.23	12.46
8	21.69	24.53	-1.99	20.61	79	11.84	14.19	101	8.56	17.66	14.35	30.22	5.35	18.27	-10.95	17.66
9	167.82	72.05	3.27	33.38	43	82.27	38.86	137	23.15	40.53	167.54	73.62	3.56	33.94	6.87	40.53
10	238.17	71.16	15.20	26.97	43	111.48	35.51	137	39.00	40.43	237.86	75.80	15.51	28.18	8.23	40.43
11	106.58	41.32	-15.96	30.29	14	61.27	23.81	166	-37.87	27.30	74.83	49.30	15.78	23.47	53.69	27.30
12	119.19	8.95	-31.61	7.47	17	75.40	5.64	163	-22.83	5.61	85.21	9.75	2.37	7.07	63.00	5.61
									$\bar{\omega} = +1.21''$							

Deformacije se bistveno ne spremenijo, so pa spremembe pri rotacijah v točkah. Tako srednja vrednost rotacije znaša +1.21", kar predstavlja boljšo oceno rotacije mreže med dvema

izmerama, ki je posledica premikov točk. Če v izračunu deformacij in rotacij uporabimo vektor ocenjenih premikov točk izračunanih s postopkom Delft, znaša povprečna vrednost rotacije mreže +1.11", kar je nekoliko slabši rezultat. Torej s postopkom iterativnega prilagajanja uteži matrice **E** transformacije S dobimo nekoliko boljše rezultate pri rotaciji mreže.

### 6.4.3 Primer napačne definicije geodetskega datuma

Na koncu pogledjmo še primer napačne definicije geodetskega datuma v drugi terminski izmeri. Geodetsko mrežo vpnemo na dve točki (točko 2 in točko 5) oziroma na štiri koordinatne komponente teh dveh točk. Po izravnavi vpete geodetske mreže so popravki približnih koordinat točke 2 in 5 enaki nič. Ker pa se je točka 2 premaknila, to pomeni, da se razlika med koordinatami točk 2 in 5 in dejanskim položajem teh dveh točk prenese na celotno mrežo. Glede na pravi premik točke 2 (Preglednica 6-7) lahko pričakujemo rotacijo in spremembo merila celotne mreže. Preden izračunamo vrednosti premikov in deformacij lahko predvidevamo, da bo predvsem večji vpliv napake v merilu geodetske mreže. Z vpetjem mreže na dve točki (4 koordinatne komponente teh dveh točk) avtomatično zanemarimo dejstvo, da je z merjenimi dolžinami merilo mreže že definirano.

Preglednica 6-18: Izračunane koord. spremembe iz rezultatov izravnave vpete mreže na točki 2 in 5.

Table 6-18: Estimated coordinate changes as the result of network adjustments with fixed points 2 and 5.

T	epoha 1		vektor premikov				epoha 2	
	$x$ [m]	$y$ [m]	$u_x$ [m]	$\sigma_{u_x}$ [m]	$u_y$ [m]	$\sigma_{u_y}$ [m]	$x$ [m]	$y$ [m]
1	330.0300	644.3347	-0.0142	0.0013	-0.0155	0.0014	330.0157	644.3192
2	681.7345	209.2384	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	681.7345	209.2384
3	1288.8439	100.4613	-0.0125	0.0021	0.0198	0.0015	1288.8314	100.4811
4	1360.0273	635.9604	-0.0219	0.0019	0.0261	0.0014	1360.0053	635.9865
5	856.9534	661.3471	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	856.9534	661.3471
6	1050.1886	1045.9623	-0.0252	0.0012	-0.0103	0.0017	1050.1634	1045.9520
7	649.1561	1268.9686	-0.0173	0.0018	-0.0351	0.0022	649.1388	1268.9335
8	995.9075	1508.8646	-0.0414	0.0023	-0.0332	0.0032	995.8662	1508.8314
9	748.7318	1861.7688	-0.0679	0.0032	-0.0449	0.0047	748.6639	1861.7239
10	870.1560	2045.8491	-0.0398	0.0038	-0.0477	0.0056	870.1161	2045.8014
11	832.4729	2439.1082	-0.0631	0.0052	-0.0534	0.0080	832.4098	2439.0549
12	578.2222	2681.0897	-0.0756	0.0064	-0.0931	0.0093	578.1467	2680.9967

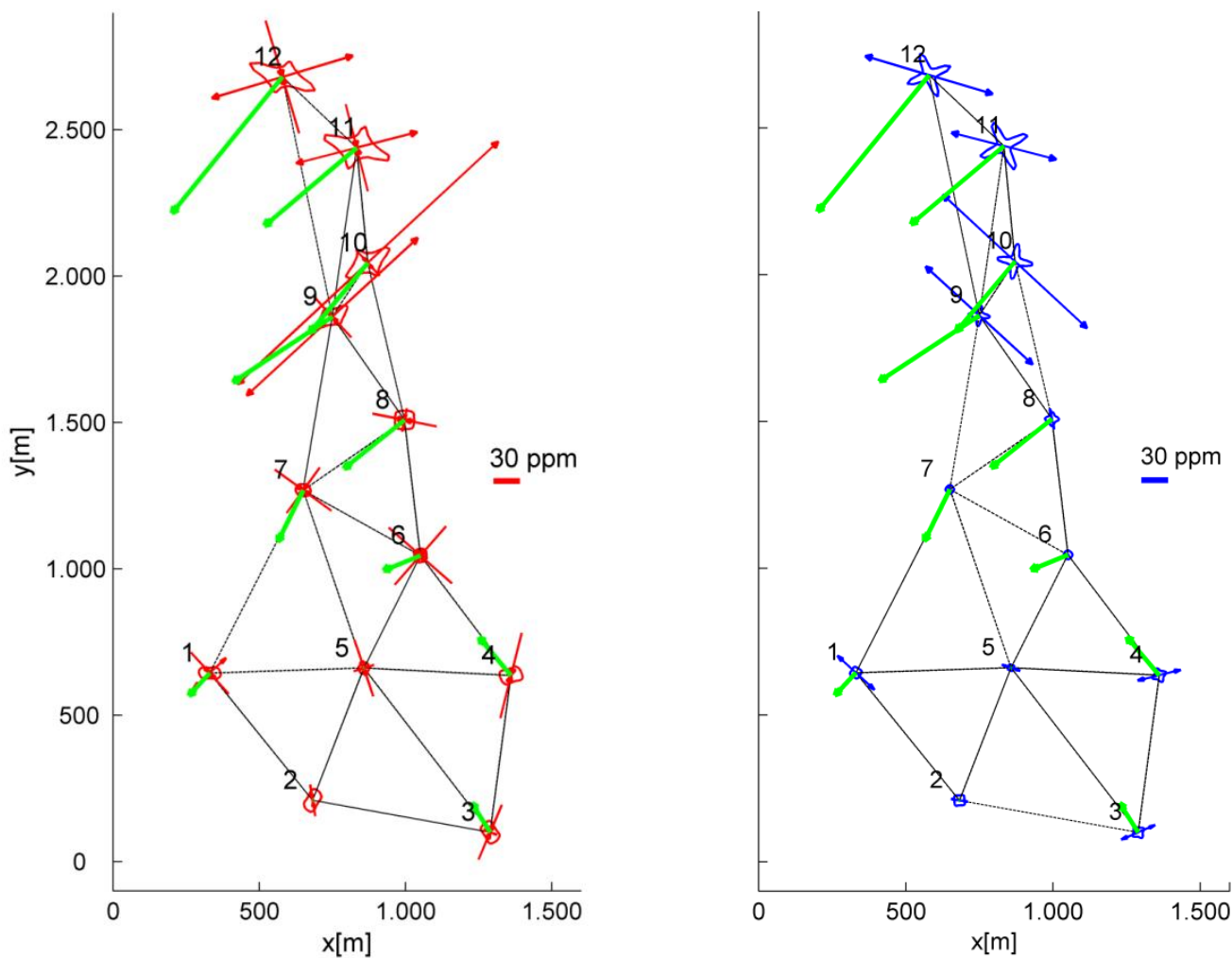
Preglednica 6-19: Deformacije in rotacije iz rezultatov izravnave vpete mreže na točki 2 in 5.

Table 6-19: Strains and rotations from the result of network adjustment with fixed points 2 and 5.

T	$\varepsilon_1$ [ppm]	$\sigma_{\varepsilon_1}$ [ppm]	$\varepsilon_2$ [ppm]	$\sigma_{\varepsilon_2}$ [ppm]	$\alpha_{\varepsilon_1}$ [°]	$\gamma_1$ [ppm]	$\sigma_{\gamma_1}$ [ppm]	$\alpha_{\gamma_1}$ [°]	$\omega_i$ [ppm]	$\sigma_{\omega_i}$ [ppm]	$\varepsilon_{xx}$ [ppm]	$\sigma_{\varepsilon_{xx}}$ [ppm]	$\varepsilon_{yy}$ [ppm]	$\sigma_{\varepsilon_{yy}}$ [ppm]	$\varepsilon_{xy}$ [ppm]	$\sigma_{\varepsilon_{xy}}$ [ppm]
1	25.16	48.32	-31.90	49.25	43	28.53	48.28	137	-17.81	7.02	25.06	9.58	-31.80	10.25	2.42	7.02
2	1.32	15.43	-18.13	15.42	9	9.72	9.48	171	-21.10	12.16	-5.30	17.23	-11.51	17.17	9.21	12.16
3	8.16	8.82	-33.69	9.43	157	20.92	6.69	23	-23.24	6.21	-27.72	9.19	2.19	8.36	14.63	6.21
4	0.32	17.83	-49.97	18.49	166	25.14	10.94	14	-43.66	14.50	-36.60	21.32	-13.05	19.66	22.22	14.50
5	-12.12	12.78	-33.90	12.41	18	10.89	5.10	162	-28.08	11.52	-16.48	16.81	-29.54	15.75	8.71	11.52
6	-44.17	2.88	-47.94	2.80	49	1.88	0.12	131	-41.49	2.84	-44.19	4.63	-47.92	3.29	-0.25	2.84
7	-31.93	12.90	-39.82	12.15	54	3.94	1.37	126	-38.10	12.46	-32.13	20.00	-39.62	14.86	-1.23	12.46
8	-13.51	20.40	-37.19	17.94	79	11.84	7.57	101	-30.59	17.66	-20.85	30.22	-29.85	18.27	-10.95	17.66
9	132.62	96.92	-31.93	50.07	43	82.27	65.63	137	-16.00	40.53	132.33	73.62	-31.64	33.94	6.87	40.53
10	202.96	83.91	-20.00	32.35	43	111.48	49.08	137	-0.15	40.43	202.66	75.80	-19.69	28.18	8.23	40.43
11	71.37	46.80	-51.17	34.28	14	61.27	30.62	166	-77.02	27.30	39.62	49.30	-19.42	23.47	53.69	27.30
12	83.99	10.59	-66.81	9.12	17	75.40	7.30	163	-61.98	5.93	50.01	10.53	-32.83	8.15	63.00	5.93
									$\bar{\omega} = -6.86''$							

Rezultat napačne definicije geodetskega datuma so torej močno popačene vrednosti premikov točk mreže in vrednosti glavnih normalnih deformacij v točkah geodetske mreže (Preglednica 6-19 in Slika 6-18). Največji vpliv ima napačno definirano merilo. Vpliv spremembe rotacije je skoraj zanemarljiv za tako vrednost rotacije. Vrednosti strižnih deformacij ne glede na spremembo merila in rotacije mreže ostajajo nespremenjene, kar smo pokazali in dokazali že v predhodnih poglavjih (poglavje 5.5).

Zaključimo lahko, da je za pravilen izračun deformacij, rotacij ter premikov nujno pravilno definirati geodetski datum mreže. Napake v definiciji geodetskega datuma v posamezni terminski izmeri in tudi razlike med izmerama vodijo v napačne izračune deformacij in s tem v popačeno sliko deformacijskega stanja obravnavanega objekta.



Slika 6-18: Premiki (zeleno), glavne normalne (rdeče) in strižne (modro) deformacije v geodetski mreži vpeti na točki 2 in 5.

Figure 6-18: Displacements (green), principal normal (red) and shear (blue) strains in geodetic network fixed to points 2 and 5.



## 7 ZAKLJUČEK

Deformacije v geodetski mreži smo obravnavali kot mehanske deformacije objekta, ki ga diskretizira geodetska mreža. Parametre deformacij in rotacij smo računali iz tenzorja deformacij in tenzorja rotacij, ki je v funkcijski zvezi z vektorskim poljem premikov točk. Zaradi specifične predstavitve objekta s točkami geodetske mreže smo deformacije in rotacije v točkah geodetske mreže obravnavali pod predpostavko, da so deformacije med točkami mreže homogene. To je edini sprejemljiv način, saj imamo opravka z diskretnimi podatki o vektorskem polju premikov območja (merskega objekta), pokritega s točkami geodetske mreže. Deformacije in rotacije v točki geodetske mreže določimo iz znanih sprememb položajev sosednjih točk, ki so z obravnavano povezane z opazovanji. Ker obravnava vpliva deformacij med dvema sosednjima točkama ni vezana na predpostavko o diferencialni bližini dveh točk, smo pri izračunu uvedli utežno matriko, s katero smo poudarili vpliv deformacij točk, ki so bližje obravnavani točki.

Za uspešno deformacijsko analizo oziroma določitev statistične značilnosti deformacij in rotacij je potrebno določiti verjetnostno porazdelitev parametrov deformacij in rotacij kot slučajnih spremenljivk. S tem vprašanjem so se ukvarjali že mnogi znanstveniki, ki so skušali analitično izpeljati porazdelitvene lastnosti deformacij in rotacij. Kljub temu smo mi izbrali empirični pristop. Empirično smo določili porazdelitveno funkcijo za glavno normalno in glavno strižno deformacijo ter rotacijo v obravnavani točki geodetske mreže z uporabo simulacij opazovanj v mreži po metodi Monte Carlo. Ugotovili smo naslednje.:



- Porazdelitev verjetnosti parametrov deformacij (glavne normalne in glavne strižne deformacije) je odvisna od obravnavane smeri v točki.
- Porazdelitev verjetnosti parametrov deformacij je odvisna od lokalne geometrije (povezav in vrste opazovanj) geodetske mreže v delu, kjer se točka nahaja.
- Porazdelitvi verjetnosti glavne normalne deformacije ali deformacije merila ter glavne strižne deformacije nista normalni in tudi ne simetrični.
- Parameter rotacije je normalno porazdeljen neodvisno od položaja točke v mreži.

Z empirično določenimi statističnimi lastnostmi parametrov deformacij v posamezni točki lahko v konkretnem primeru obravnave dveh terminskih izmer geodetske mreže ugotovljamo statistično značilnost deformacij. Empirično določena verjetnostna porazdelitev v točki, ki je odvisna od obravnavane smeri, nam omogoča določitev območij zaupanja. Velikost in oblika območij zaupanja, za predpostavljeno natančnost meritev, je odvisna od lokacije točke v geodetski mreži in lokalne geometrije (povezav in vrste opazovanj) geodetske mreže in nam podaja stopnjo zaznavnosti deformacij mreže v izbrani točki. Večja kot so območja zaupanja bolj je mreža občutljiva za deformacije in s tem manj primerna za ugotavljanje manjših vrednosti deformacij in rotacij.

Poleg statističnih lastnosti deformacij in rotacij v geodetski mreži nas je zanimal tudi vpliv geodetskega datuma na računane deformacije in rotacije. Deformacijsko stanje obravnavanega telesa (objekta, ki ga diskretizira geodetska mreža) je neodvisno od izbire koordinatnega sistema, v katerem to stanje predstavljamo. Kljub temu izbira geodetskega datuma v dveh primerjanih terminskih izmerah ni poljubna. Geodetski datum mora biti definiran z datumskimi parametri, ki ostajajo nespremenjeni v nekem obravnavanem časovnem intervalu med dvema izmerama. Glavni razlog je ta, da spremembe koordinatnega sistema med dvema epohama vplivajo na vrednosti deformacij in rotacij v točkah geodetske mreže. Izpeljali smo analitične izraze vpliva spremembe geodetskega datuma med dvema izmerama na vrednosti deformacij in rotacij v točkah geodetske mreže. S tem smo dokazali, da deformacije in rotacije niso datumsko neodvisne količine. Prišli smo do pomembnega zaključka, da ima relativna sprememba rotacije vpliv na vrednosti normalnih deformacij ter zanemarljiv vpliv na vrednost strižne deformacije v točki. Vpliv spremembe merila na normalne deformacije je linearen. Glavni problem je v spremembi rotacije koordinatnega sistema med dvema

izmerama, ki ima največji vpliv na normalne deformacije in seveda rotacije v točkah mreže. Po drugi strani pa te spremembe geodetskega datuma praktično nimajo vpliva na vrednosti strižnih deformacij.

Na koncu smo na primeru različnih definicij geodetskega datuma pokazali dejanski vpliv na računane deformacije in premike točk. Rezultati kažejo na to, da v primeru poljubnega identičnega datuma (primer izravnave proste mreže) v obeh primerjanih terminskih izmerah ni vpliva na računane deformacije. Vendar ne moremo izračunati pravih rotacij v točkah. Posledično zaradi napačne rotacije tudi ne moremo izračunati pravih premikov točk mreže. Praktično smo preverili, da problem razlike v definiciji geodetskega datuma med dvema izmerama skoraj v celoti predstavlja problem razlike rotacije geodetske mreže. Razlika v merilu po našem mnenju ni tako problematična, saj jo lahko dokaj enostavno ocenimo iz primerjave merjenih dolžin med dvema izmerama.



## 8 POVZETEK

Namen doktorske naloge je bil predstaviti deformacije obravnavanega objekta na drugačen način. Za razliko od splošno uveljavljenih metod deformacijske analize smo deformacije predstavili v smislu mehanskih deformacij in rotacij fizičnega objekta, ki ga diskretizira geodetska mreža. Deformacije niso predstavljene samo z geometrijskimi premiki točk mreže, ampak skušamo določiti mehanske deformacije v posamezni točki deformabilnega objekta. Mehanske deformacije numerično predstavimo z dvema parametroma: normalno deformacijo in strižno deformacijo. Poleg tega obravnavamo tudi rotacijo v točki. Iz teorije mehanike trdnih teles (Shames in Cozzarelli 1997, Stanek in Turk 1998, Srpčič 2003 ...) in na osnovi že opravljenih raziskav predvsem tujih avtorjev (Berber et al. 2003 in 2006, Vaniček 1972, Vaniček et al. 2001 in 2007, Ašanin 1986 ...) smo najprej predstavili način izračuna deformacij v posamezni točki geodetske mreže.

Deformacije v diskretnih točkah geodetske mreže so funkcije vektorskega polja premikov na območju, ki ga pokriva geodetska mreža. Deformacijske parametre računamo iz matrike gradienta vektorskega polja premikov  $\mathbf{G}$  (enačba (2.26)), ki ima lastnosti tenzorja (poglavje 2.3). Ker imamo v geodetski mreži specifičen primer, je potrebno pri izračunu matrike gradienta upoštevati določene predpostavke. Točke z izračunanimi spremembami koordinat kot potencialnimi premiki diskretno opisujejo vektorsko polje premikov. Zato za območja med točkami vpeljemo predpostavko homogenih deformacij. To pomeni, da predpostavimo linearno spreminjanje vektorskega polja premikov na povezavah med točkami. Na ta način lahko v neki izbrani točki računamo deformacije iz znanih premikov okoliških točk mreže. Nastavimo linearni model, ki povezuje izračunane spremembe koordinat z elementi matrike

gradienta  $\mathbf{G}$  (izrazi (3.14)). V primeru predoločenosti uporabimo za določitev matrike  $\mathbf{G}$  izravnavo po metodi najmanjših kvadratov.

Za razliko od nam znane literature spremembam koordinat sosednjih točk ne damo enakega vpliva na računane vrednosti elementov matrike  $\mathbf{G}$ . Vpeljemo utežno matriko  $\mathbf{P}_F$ , kjer poudarimo vpliv oddaljenosti od točke, v kateri računamo deformacije (poglavje 3.2). Utež koordinatne spremembe v posamezni točki je obratno-sorazmerna kvadratu razdalje od točke, v kateri računamo deformacije. Smiselnost izraza za uteži smo preverili s postopki optimizacije geometrije geodetskih mrež 2. reda.

Predpostavimo, da so se točke med dvema epohama premaknile ali drugače, da se je obravnavani objekt deformiral. Način izračuna velikosti deformacij poznamo. Nimamo pa še načina, kako te vrednosti statistično ovrednotiti in jih definirati kot statistično značilne oziroma neznačilne. Statistična ocena značilnosti velikosti deformacij je izvedena s statističnim testiranjem ob izbrani stopnji tveganja  $\alpha$ . Statistično testiranje lahko opravimo na podlagi znane verjetnostne porazdelitve testne statistike, s katero določimo meje intervala zaupanja (ob stopnji tveganja  $\alpha$ ). Kot se je izkazalo tudi v predhodnih raziskavah (Savšek-Safić 2002), smo upravičeno dvomili v normalnost verjetnostne porazdelitve deformacijskih parametrov. Ker matematične povezave deformacijskih parametrov z vektorskim poljem premikov niso linearne, verjetnostna porazdelitev ni normalna. Dela mnogih avtorjev (Cai et al. 2005, Cai in Grafarend 2007, Xu in Grafarend 1996 ter Soler in Gelder 1991) so se omejila na iskanje porazdelitvenih lastnosti deformacij, računanih iz tenzorja deformacij ali matrike gradienta vektorskega polja. V nalogi pa smo namesto analitičnega pristopa izbrali empiričen način določitve verjetnostne porazdelitve deformacijskih parametrov. S simulacijami po postopku Monte Carlo smo umetno generirali različne nize opazovanj v mreži, jih izravnali in z rezultati izravnave proste mreže računali vrednosti deformacij na vseh točkah mreže v posamezni simulaciji. Na ta način dobimo vzorec vrednosti deformacij za posamezno točko mreže.

Glede na to, da so deformacije v točki vektorske količine, ki jim pripada določena smer, smo verjetnostno porazdelitev deformacij obravnavali v ravnini. V posamezni smeri smo empirično določali porazdelitveno funkcijo deformacije. S statističnimi testiranjmi se je izkazalo, da

verjetnostna porazdelitev deformacijskih parametrov v večini smeri ni normalna. Z znanimi porazdelitvami glede na smer lahko določimo orientacijsko pogojene intervale zaupanja za posamezni deformacijski parameter v izbrani točki. Pojem intervala zaupanja tako razširimo na dve dimenziji. Govorimo o območjih zaupanja, katerih velikost in oblika (Slika 6-6) je pogojena z natančnostjo in vrsto meritev v geodetski mreži. Velikost območij zaupanja je odvisna tudi od kakovosti geometrije geodetske mreže. Iz rezultatov izračuna lahko ugotovimo, da slabša geometrija mreže povzroči večja območja zaupanja z veliko bolj nepravilno obliko. Z empirično določitvijo območij zaupanja za izbrano geodetsko mrežo in izbran instrumentarij (ki ga uporabljamo pri izmeri) dobimo tako uporabno orodje za določitev statistično značilnih deformacij točk kot tudi mero kakovosti geometrije geodetske mreže. Izračun deformacij v izbrani geodetski mreži je bil izveden ob vnaprej izbranih premikih točk geodetske mreže. Iz izrisov izračunanih deformacij in območij zaupanja smo lahko hitro ugotovili, na katerih točkah je prišlo do statistično značilnih deformacij.

Z znanimi statističnimi lastnosti deformacij oziroma bolj splošno tenzorja deformacij je bil namen raziskati naslednjo lastnost deformacij. Deformacije opisujejo stanje obravnavanega objekta. Deformacijsko stanje je brez večjih matematičnih dokazov neodvisno od izbire geodetskega datuma ali koordinatnega sistema, v katerem to stanje opisujemo. Ta neodvisnost je bila tudi dokazana (poglavje 2.5).

Geodetski datum v geodetski mreži definirajo datumske količine, ki definirajo izhodišče, orientacijo in merilo koordinatnega sistema. Izbira geodetskega datuma v mreži v epohah, ki ju primerjamo ni poljubna. Za definiranje geodetskega datuma moramo izbrati take datumske količine, ki se v časovnem intervalu med dvema izmerama niso spremenile. Imamo več metod, ki smo jih tudi detajlno opisali (poglavje 5.2). Te načine definicije datuma uporabljajo tudi klasične metode deformacijske analize.

Kljub datumski invariantnosti tenzorja deformacij obstaja problem. V geodetskih nalogah deformacijske analize primerjamo rezultate izravnave dveh terminskih izmer. V vsaki epohi prevzamemo nek geodetski datum. V primeru, da geodetska datuma med izmerama nista usklajena, primerjava koordinat točk ne odraža realnega stanja deformacij. Deformacijski parametri so odvisni od relativne spremembe koordinatnega sistema, v katerem računamo

koordinate točk mreže v dveh različnih epohah. To je bilo empirično dokazano (Xu et al. 2000). Za razliko od empiričnega pristopa smo datumsko odvisnost deformacijskih parametrov analitično izpeljali. Matematične povezave (enačbe (5.81)) kažejo na to, da so deformacije odvisne od spremembe dolžinskega merila in orientacije mreže, popolnoma neodvisne pa so od translacije ali položaja izhodišča koordinatnega sistema, kar je tudi pričakovano.

V konkretnem primeru obravnavane geodetske mreže smo grafično predstavili datumsko odvisnost deformacij (normalnih, strižnih) in rotacij (Slika 6-14 do Slika 6-16) od spremembe rotacije in merila med dvema epohama. Prišli smo do naslednjih zaključkov.:

- Sprememba rotacije in merila med terminskima izmerama ima zanemarljiv vpliv na vrednost strižne deformacije v točki.
- Diferencialna rotacija v točki je v linearni funkcijski zvezi z relativno spremembo rotacije mreže in je neodvisna od spremembe merila.
- Relativna sprememba rotacije vpliva na vrednosti normalnih deformacij v posameznih koordinatnih oseh. Oblika funkcijske zveze je sinusoidna in omogoča določitev lokalnega ekstrema.
- Vpliv spremembe merila na normalne deformacije je linearen. S povečevanjem relativne razlike dolžinskega merila med dvema izmerama se povečujejo vrednosti normalnih deformacij, kar je pričakovano glede na definicijo normalnih deformacij.

Te ugotovitve omogočajo boljšo predstavo o vplivu spremembe datuma geodetske mreže med dvema izmerama. Predvsem je zanimiva ugotovitev glede vpliva rotacije. Funkcijska odvisnost računanih glavnih normalnih deformacij od spremembe rotacije ima izrazito sinusoidno obliko. Ta oblika funkcijske krivulje nam omogoča določitev lokalnega ekstrema funkcije. Izraz za položaj lokalnega minimuma (enačba (6.2)) omogoča eno od možnosti določitve spremembe rotacije mreže med dvema izmerama. Uporabili smo iterativni postopek določevanja položaja minimuma funkcijske krivulje in računali nove približke deformacijskih parametrov (za normalno in strižno deformacijo, enačbe (6.3)). Razlika položajev minimuma funkcijske krivulje med začetnim (dejanskim) stanjem in po ustavitvi iterativnega postopka na osi spremembe orientacije mreže rezultira spremembo rotacije koordinatnega sistema med

dvema izmerama. Izveden je bil izračun na primeru mreže in z izbrano relativno spremembo datuma med dvema izmerama. Rezultati kažejo, da predstavlja razlika v rotaciji vsoto spremembe rotacije mreže in rotacije zaradi samih premikov točk.

Na koncu smo na primeru različnih definicij geodetskega datuma pokazali dejanski vpliv na računane deformacije in premike točk geodetske mreže. Rezultati kažejo na to, da v primeru poljubnega identičnega datuma (primer izravnave proste mreže) v obeh primerjanih terminskih izmerah ni vpliva na računane deformacije. Vendar ne moremo izračunati pravih rotacij v točkah. Posledično zaradi napačne rotacije tudi ne moremo izračunati pravih premikov točk mreže. Zaključimo lahko, da problem razlike v definiciji geodetskega datuma med dvema izmerama skoraj v celoti predstavlja problem razlike orientacije geodetske mreže. Razlika v merilu po našem mnenju ni tako problematična, saj jo lahko dokaj enostavno ocenimo iz primerjave merjenih dolžin med dvema izmerama.





## 9 SUMMARY

The aim of this dissertation was to present the deformation of the object in different way. In contrast to the generally accepted methods of deformation analysis, we represented the deformations in terms of mechanical strains and rotations of a physical object, which is discretized by the points of geodetic network. Deformations are presented not only by the geometric displacements of points, but also with the mechanical strains in each point of the deformable object. Mechanical strains are numerically represented by two parameters: the normal strain and the shear strain. In addition, the rotation in point is also discussed. From the theory of mechanics of solids (Shames and Cozzarelli 1997, Stanek & Turk 1998, Srpčič 2003...) and based on research already carried out mainly by foreign authors (Berber et al. 2003 and 2006, Vaniček 1972, Vaniček et al. 2001 and 2007, Ašanin 1986 ...), we first introduced the method for estimating strains and rotations in each point of the geodetic network.

Strains in the points of a geodetic network are the functions of vector field of displacements. Strain parameters are computed from the displacement gradient matrix  $G$  (Equation (2.26)), which has tensor properties (Section 2.3). Since we are dealing with a specific case in the geodetic network, it is necessary to take into account some assumption for the computation of displacement gradient matrix. Points with the computed changes in coordinates as the potential displacements discretely define vector field of displacements. Therefore, for the areas between points, the assumption of homogeneous strains is introduced. This means that we assume a vector field of displacements linearly changing on the connections between two points. In this way, strains and rotations at the particular point can be computed from the

known displacements of the surrounding points. We set the linear model, which connects the computed changes of coordinates with the elements of the displacement gradient matrix  $G$  (Equation (3.14)). In the overdetermined case the method of least squares adjustment is used to compute the solution for  $G$ .

Unlike the known literature we assumed that the changes of the coordinates of neighbouring points do not have the same impact on the computed values of displacement gradient matrix  $G$ . Thus, we introduced a weight matrix  $\mathbf{P}_F$ , which gives the proper treatment of the deformation influence of distant points (Section 3.2). The weights in  $\mathbf{P}_F$  can be defined as inverse square of distance between two points, in order to further reduce the impact of strains and rotations occurred at distant points. The appropriateness of the equation for the weights was checked by the procedures of geometry optimization of geodetic networks of second order.

Let us assume that the points between the two epochs have moved or the observed object has deformed. The method for computing strains is known. We do not know how these values can be statistically evaluated and consequently treated as statistically significant or insignificant. The statistical estimator for the significance level of strains and rotations is carried out at the chosen level of risk  $\alpha$ . Statistical testing can be done on the basis of a known probability distribution of test statistics, which determine the limits of the confidence interval. As it was also shown in the previous studies (Savšek-Safić 2002), we reasonably doubted in the normality of the probability distribution of strain parameters. Since the mathematical relations of strain parameters with the vector field of displacements are not linear, the probability distribution is not normal. Works of many authors (Cai et al. 2005, Cai and Grafarend 2007, Xu and Grafarend 1996 and Soler and Gelder 1991) are dealing with the analytical derivation of the probability distributions of strains, computed from the strain tensor or displacement gradient matrix. In our work, we decide to choose an empirical approach to determine the probability distribution of strain parameters. Using simulations by the method of Monte Carlo, we artificially generated different sets of observations in the network. Each set of observations was adjusted by the least squares method in free network. These results were then used to compute the strains and rotations at each point in the

geodetic network in each simulation. In this way we got a sample of deformations for each point in the network.

Taking into account that the strains in points are vector quantities, with a certain direction, we considered a probability distribution of the strain parameters in the plane. We defined the empirical distribution function of strain parameter for each direction. The statistical tests proved that the probability distribution of the principal strain parameters in most directions is not normal. With the known probability distributions for each direction in a certain point the direction oriented confidence intervals can be determined. The concept of confidence interval can be extended to two dimensions. We are talking about confidence areas, the size and shape (Figure 6-6) of which are conditional on the accuracy and type of geodetic measurements in the network. The size of the confidence areas also depends on the quality of the geometry of the geodetic network. From the computational results we can conclude that the weaker geometry of the network causes larger confidence areas with irregular shape. The empirical determination of confidence intervals of strains for the selected geodetic network and selected measuring equipment can be treated as a useful tool for determining statistically significant strains in points as well as the rate of the quality of the geodetic network geometry. Computation of strains in the selected network was carried out at preselected displacements of points. From the graphical representation of the computed principal strains, vectors and appertaining confidence areas the statistically significant strains can be easily determined.

With the known statistical properties of strains or more generally of strain tensors the purpose was to explore the next strain property. Since the strains describe the deformation state of the observed object, they are invariant to the choice of geodetic datum or coordinate system, where the deformation state is described. This invariance was mathematically derived in Section 2.5.

Geodetic datum in the geodetic network is defined by the datum parameters, which define the origin, the orientation and the scale of the coordinate system. The choice of the geodetic datum in two compared surveying epochs is not arbitrary. The definition of the geodetic datum has to be done with such datum parameters that do not change in time interval

between two epochs. There are several methods for datum definition available, explained in Section 5.2 and applied in classical methods of deformation analysis.

Despite the datum invariance of strain tensor, there is a problem. In the geodetic deformation analysis the results of network adjustments of two surveying epochs are compared. In each epoch some geodetic datum is used. In case that the datums of two epochs are not identical, the comparison of the coordinates of points does not reflect the real deformation state of the object. Strain parameters and rotations are dependent on the relative changes of the coordinate system, where coordinates of points of the network are computed in two different epochs. This has been empirically demonstrated (Xu et al. 2000). Unlike the empirical approach we analytically derived the datum dependence of strain parameters and rotations. Mathematical relationships (Equations (5.81) to (5.83)) show that the strains and rotations are dependent on scale change and change in rotation of the network and completely independent of the translation or position of the origin of the coordinate system.

From the analysis of the influence of rotation and scale difference on strains and rotation parameters, the following can be concluded:

- Change of rotation influences the values of normal strains. The shape of the curve is sinusoidal and allows us to determine the local minimum.
- As expected, the rotation at point is in linear relationship with the change of rotation and is independent of scale change.
- The change in rotation and the scale of the whole network between two epochs has practically no impact on the value of shear strain at particular point.
- The impact of the scale changes of the whole network on the normal strain is linear. By increasing the scale change between two epochs, the normal strain values increase.

These findings provide a better picture of the influence of the change of the geodetic datum between two surveying epochs. In particular, it is interesting to observe the impact of rotation. Functional relationship of computed principal normal strains from the change of rotation has a sinusoidal shape. This shape of functional curve allows us to determine the local extreme. The equation for the position of the local minimum (Equation (6.2)) provides us an option of computing the change in network rotation between two epochs. We used an

iterative process to determine the position of the minimum of functional curve. In each iteration we were computing a new approximate values of strain parameters (for normal and shear strain, Equation (6.3)). The difference in position of minimum between the initial curve (actual situation) and at the end of an iterative process results in a change of rotation of the coordinate system between two surveying epochs. The computation was carried out in the case of the selected network and the chosen relative change in geodetic datum between two epochs. The results show that a difference in the rotation represents the sum of the network rotation and rotation caused by the point displacements.

Finally, we showed the real impact of the different definitions of geodetic datum on the computed strains and rotations and displacements in the geodetic network. The results show that in the case of arbitrary but identical geodetic datum (adjustment of free network) there is no influence on computed strains in either of the compared epochs. But we cannot compute the true rotations in points. Consequently we cannot compute the real displacements of points. We can conclude that the problem of differences in the definition of geodetic datum between two epochs is almost entirely the problem of rotation change of geodetic network. In our opinion the difference in scale is not so problematic, since it can be quite easily estimated by comparing the measured length between the two epochs.



## LITERATURA

- Ambrožič, T. 2001. Deformacijska analiza po postopku Hannover. *Geodetski vestnik* 45,1-2: 48-53.
- Ašanin, S. 1986. Prilog obradi i analizi geodetskih merenja za određivanje pomeranja i deformacija objekta i tla. Doktorska disertacija. Beograd, Univerzitet u Beogradu, Gradjevinski fakultet, Institut za geodeziju.
- Baarda, W. 1981. S-transformations and Criterion matrices. Delft, Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy 5, 1: 168 str.
- Berber, M. 2006. Robustness Analysis of Geodetic Networks. Technical Report No 242. Fredericton, NB, Canada, University of New Brunswick, Department of Geodesy and Geomatics Engineering: 138 str.
- Berber, M., Dare, P. J., Vaniček, P., Craymer, M. R., 2003. On the application of robustness analysis to geodetic networks. Annual Conference of the Canadian Society for Civil Engineering, Moncton, New Brunswick, Kanada, CSCE: (GCI-461-1)- (GCI-461-7).
- Berber, M., Dare, P., Vaniček, P. 2006. Robustness Analysis of Two-Dimensional Networks. *J. Surv. Eng.* 132, 4: 168-175.
- Bronštejn, J. N., Semendjajev, K. A. 1978. Matematični priročnik. Ljubljana, Tehniška založba Slovenije: 699 str.
- Cai, J., and Grafarend, E. 2007b. Statistical analysis of the eigenspace components of the two-dimensional, symmetric rank-two strain tensor derived from the space geodetic



measurements (ITRF92 - ITRF2000 data set) in central Mediterranean and Western Europe. *Geophys. J. Int.*, 168, 1: 449-472.

- Cai, J., Grafarend E., and Schaffrin B. 2005. Statistical inference of the eigenspace components of a two-dimensional, symmetric rank two random tensor. *J. Geodesy*, 78, 7-8: 425-436.
- Cai, J., Grafarend, E. 2007a. The statistical analysis of geodetic deformation (strain rate) derived from the space geodetic measurements of BIFROST project in Fennoscandia. *J. Geodyn.*, 43, 2: 214-238.
- Caspary, W. F. 1988. Concepts of network and deformation analysis. Kensington, N. S. W., Avstralija, The University of New South Wales.
- Chen, Y. Q., Chrzanowski, A., Secord, J. M. 1990. A Strategy for the Analysis of the Stability of Reference Points in Deformation Measurements. *CISM Journal ACSGC*, 44(2): 141-149.
- Chrzanowski, A., Chen, Y. Q., and Secord, J. M. 1983. Analysis of the Simulated Monitoring Network Using the Fredericton Approach. (ed. W. Welsch) *Deformationsanalysen '83, Geometrische Analyse und Interpretation von Deformationen Geodatischer Netze. Schriftenreihe, Wissenschaftlicher Studiengang Vermessungswesen. München, Hochschule der Bundeswehr München.*
- Chrzanowski, A., Chen, Y. Q., Romero, P., Secord, J. M. 1986. Integration of Geodetic and Geotechnical Deformation Surveys in the Geosciences. *Tectonophysics*, 130: 369-383
- Chrzanowski, A., Chen, Y. Q., Secord, J. M. 1983. On the Strain Analysis of Tectonic Movements Using Fault Crossing Geodetic Surveys. *Tectonophysics* 97: 297-315.
- Grigillo, D., Stopar, B. 2003: Metode odkrivanja grobih pogoškov v geodetskih opazovanjih. *Geodetski vestnik* 47, 4: 387-403
- Hampel, F. R., Ronchetti, E. M., Rousseeuw, P. J., Stahel, W.A. 1986. *Robust Statistics – The Approach Based on Influence Functions*. New York, John Wiley&Sons: 502 str.
- Heck, B., Kok, J. J., Welsch, W., M., Baumer, R., Chrzanowski, A., Chen, Y. Q., Secord, J. M. 1982. Report of the FIG-Working Group on the Analysis of Deformation

Measurements. 3rd International Symposium on Deformation Measurements by Geodetic Methods, 25.-27. Avgust, Budimpešta. Vol. 3: 373-414.

- Jager, R., Muller, T., Saler, H., Schwalbe, R. 2005. *Klassische und robuste Ausgleichungsverfahren*. Heidelberg, Wichmann Verlag: 340 str.
- Krizanič, F. 1962. *Vektorji, matrike, tenzorji*. Ljubljana, Mladinska knjiga: 267 str.
- Kuang, S. 1996. *Geodetic Network Analysis and Optimal Design: Concepts and Applications*. Chelsea, Michigan, Ann Arbor Press, Inc: 368 str.
- Lilliefors, H. W. 1967. On the Kolmogorov-Smirnov test for normality with mean and variance unknown. *J. Statistical Assn.*, 62, 318: 399–402.
- Marjetič, A., Ambrožič, T., Turk, G., Sterle, O., Stopar, B. 2010. Statistical properties of Strain and Rotation Tensors in Geodetic Network, *Journal of Surveying Engineering*, 136, 3: 102-110.
- Marjetič, A., Stopar, B. 2007. Geodetski datum in S-transformacija. *Geodetski vestnik* 51, 3: 549-564.
- Michel, V., Person, T. 2003. From geodetic monitoring to deformation tensors and their reliability. (ed. Stiros, S. C., Pytharouli S.) 11<sup>th</sup> FIG Symposium on Deformation Measurements. Santorini. Patras University, Dept. Of Civil Engineering.
- Mozetič, B. 2005. *Uporabnost izbranih metod deformacijske analize na praktičnih primerih geodetskih mrež*. Magistrsko delo. Ljubljana, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo: 141 str.
- Prószyński, W. 2003. Is the Minimum-Trace Datum Definition Theoretically Correct as Applied in Computig 2D and 3D Displacements?. (ed. Stiros, S. C., Pytharouli S.) 11<sup>th</sup> FIG Symposium on Deformation Measurements. Santorini, Patras University, Dept. Of Civil Engineering.
- Rao, C. R., Mitra, S. K. 1972. *Generalized Inverse of Matrices and its Application*. New York, John Wiley&Sons: 256 str.
- Rubinstein, R. Y. 1986. *Monte carlo optimization, simulation and sensitivity of queueing networks*. New York, John Wiley&Sons: 260 str.

- Savšek Safić, S. 2002: Optimalna metoda določanja stabilnih točk v deformacijski analizi. Doktorska disertacija. Ljubljana, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo: 211 str.
- Savšek-Safić, S., Ambrožič, T., Stopar, B., Turk, G. 2006. Determination of Point Displacements in the Geodetic Network. *J. Surv. Eng.*, 132, 2: 58-63.
- Shames, I. H., Cozzarelli, F. A. 1997. *Elastic and Inelastic Stress Analysis*. Washington, Taylor&Francis, Revised Printing: 722 str.
- Soler, T., Van Gelder, B. H. W. 1991. On covariances of eigenvalues and eigenvectors of second-rank symmetric tensors. *Geophys. J. Int.*, 105, 2: 537-546.
- Soler, T., Van Gelder, B. H. W. 1991. On covariances of eigenvalues and eigenvectors of second-rank symmetric tensors. *Geophys. J. Int.*, 105, 2: 537-546.
- Soler, T., Van Gelder, B. H. W. 2006. Corrigendum: On covariances of eigenvalues and eigenvectors of second-rank symmetric tensors. *Geophys. J. Int.*, 165, 1: 382-382.
- Srpčič, S. 2003. *Mehanika trdnih teles*. Ljubljana, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo: 651 str.
- Stanek, M., Turk, G. 1998. *Osnove mehanike trdnih teles*. Ljubljana, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo: 254 str.
- Sterle, O. 2007. *Združevanje klasičnih geodetskih in GNSS-opazovanj v geodinamičnih raziskavah*. Magistrsko delo. Ljubljana, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo: 118 str.
- Stopar, B. 2001. Second order design of horizontal GPS net. *Surv. Rev.*, 36, 279: 44-53.
- Teunissen, P. J. G. 2003. *Adjustment Theory*. Delft, Netherlands, VSSD: 193 str.
- Turk, G. 2010. *Verjetnostni račun in statistika*. Učbenik, delovna različica, FGG, Ljubljana.
- Valero, J. L. B., Moreno, S. B. 2005. Robust estimation in geodetic network. *Fisica de la Terra*, 17, 7-22.
- Van Mierlo, J. 1978. A testing procedure for analyzing geodetic deformation measurements. 2nd FIG Symposium on Deformation Measurements by Geodetic Methods, Bonn.

- Van Mierlo, J. 1980. Free Network Adjustment and S – transformation. Deutsche Geod. Komm., Karlsruhe, Series B, št. 252: 41-45.
- Vaniček, P. 1972. Tensors. Lecture Notes, Fredericton, University of New Brunswick, Kanada: 100 str.
- Vaniček, P., Craymer, M. R., Krakiwsky, E. J. 2001. Robustness analysis of geodetic horizontal networks. Journal of Geodesy 75: 199-209.
- Vaniček, P., Grafarend, E. W., Berber, M. 2007. Strain invariants. Journal of Geodesy 82, 4-5: 263-268.
- Welsch, W. 1982. Description of homogenous horizontal strains and some remarks to their analysis. München, DKG.
- Welsch, W., Zhang, Y. 1983. Einige Methoden zur Untersuchung kongruenter und Affiner Beziehungen in geodatischen Unberwacungsnetzen zur Ermittlung von Deformationen.“ Deformationsanalysen '83, Geometrische Analyse und Interpretation von Deformationen Geodatischer Netze (ed. W. Welsch), Schriftenreihe, Wissenschaftlicher Studiengang Vermessungswesen. Muenchen, Hochschule der Bundeswehr Muenchen.
- Wolf, H. 1994. Ausgleichungs Rechnung I. Universität Bonn, Bonn, Instituts für theoretische Geodäsie, Ferd. Dümmlers Verlag.
- Xu, P., Grafarend, E. 1996. Probability distribution of eigenspectra and eigendirections of a twodimensional, symmetric rank two random tensor. J. Geodesy, 70, 7: 419-430.
- Xu, P., Schimada, S., Fujii, Y., Tanaka, T. 2000. Invariant geodynamical information in geometric geodetic measurements. Geophysical Journal International 142: 586-602.
- Zemljak, M. 2006. Določitev premikov točk v geodetski mreži po postopku Delft. Diplomaska naloga. Ljubljana, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.