

Univerza
v Ljubljani
Fakulteta
*za gradbeništvo
in geodezijo*

*Janova 2
1000 Ljubljana, Slovenija
telefon (01) 47 68 500
faks (01) 42 50 681
fgg@fgg.uni-lj.si*



Podiplomski program Gradbeništvo
Konstrukcijska smer

Kandidat:

Matija Gams

Geometrijska točna dinamična analiza elastičnih in armiranobetonskih okvirnih konstrukcij

Doktorska disertacija št. 178

Mentor:
prof. dr. Miran Saje

Somentor:
prof. dr. Igor Planinc

Ljubljana, 14. 3. 2008

BIBLIOGRAFSKO-DOKUMENTACIJSKA STRAN IN IZVLEČEK

UDK: 531.3:624.012.45(043.2)
Avtor: Matija Gams
Mentor: prof. dr. Miran Saje
Somentor: izr. prof. dr. Igor Planinc
Naslov: Geometrijsko točna dinamična analiza elastičnih in armiranobetonskih okvirnih konstrukcij
Obseg in oprema: 213 str., 9 pregl., 37 sl., 267 en.
Ključne besede: točna kinematika, Reissnerjev nosilec, dinamika, časovna integracija, optimizacija dinamičnih sistemov, armirani beton

Izvleček

V disertaciji se ukvarjamo z dinamiko kinematično točnih ravninskih elastičnih in armiranobetonskih konstrukcij. Osrednja tema je upoštevanje točnih (Reissnerjevih) kinematičnih zvez v problemih, povezanih z dinamiko ravninskih nosilcev z upoštevanjem osnih, strižnih in upogibnih deformacij. Znotraj te (širše) teme je disertacija razdeljena na štiri podteme. V sklopu prve rešujemo problem dinamike elastičnih nosilcev na način, kjer kot edine neznane funkcije upoštevamo deformacijske količine. Izkaže se, da direkten pristop numerično ni najbolj učinkovit, saj v njem nastopa gnezdenje integralov in zato razvijemo izboljššan numerični algoritem za reševanje takih problemov. Lastnosti osnovne in izboljšane formulacije preverimo na numeričnih primerih. V nadaljevanju disertacije se lotimo vprašanja časovne integracije, pri čemer se omejimo na končne elemente, v katerih so interpolirane le kinematične količine (pomiki in zasuki). V sklopu te teme predstavimo klasični pristop k integraciji, zatem pa temeljito preučimo t.i. energijski pristop. Energijski pristop izhaja iz pogoja ohranjanja mehanske energije, ki je kriterij stabilnega reševanja. Med analizo energijskih integratorjev izpeljemo še nov časovni integrator, ki temelji na upoštevanju šibkih (časovno odvajanih) kinematičnih enačb. Za vse analizirane integratorje analitično in numerično preverimo ohranjevalne lastnosti energije in ostalih količin gibanja. Znotraj te teme v integratorje vgradimo še numerično dušenje, ki se lahko s specialnim novim algoritmom samodejno vklaplja in izklaplja. Pokaže se, da tako dušenje manj prizadene nihanje v osnovnih nihajnih oblikah, kar preverimo tudi z numeričnimi primeri. Tretja tema disertacije se ukvarja z optimizacijo elastičnih nosilcev v dinamiki. Prispevek v sklopu te teme predstavlja razvoj in aplikacija občutljivostne analize za novo razviti šibki časovni integrator. Razvito orodje omogoča reševanje izrednega nabora problemov iz optimizacije dinamičnih sistemov, kjer se lahko optimira tako oblika in odpornost konstrukcij na dinamično obtežbo, kot tudi operacije in geometrija strojnih manipulatorjev. V zaključnem delu disertacije se ukvarjamo s kinematično točno dinamiko armiranobetonskih konstrukcij. Razviti računski postopek verificiramo s primerjavo s programom Opensees in validiramo na eksperimentalnih rezultatih. Razvoj večine numeričnih postopkov v disertaciji temelji na programskih sistemih AceGen in AceFEM, ki omogočata razvoj programske kode končnih elementov v simbolnem zapisu in optimizacijo generirane kode ter zmogljivo vsestransko okolje za preverjanje in uporabo analiz s končnimi elementi.

BIBLIOGRAPHIC-DOCUMENTALISTIC INFORMATION

UDC 531.3:624.012.45(043.2)
Author: Matija Gams
Supervisor: prof. dr. Miran Saje
Co-supervisor: Assoc. prof. dr. Igor Planinc
Title: Geometrically exact dynamic analysis of elastic and reinforced concrete frame structures
Notes: 213 p., 9 tab., 37 fig., 267 eq.
Key words: exact kinematics, Reissner's beam, dynamics, time integration, optimization of dynamic systems, reinforced concrete

Summary

The dissertation deals with dynamics of geometrically exact elastic and reinforced concrete planar structures. The main topic is the treatment of exact (Reissner's) kinematic equations in problems concerning dynamics of planar beams. The kinematic equations include axial, bending as well as shear strains. The dissertation is divided into four themes. The first theme concerns solving the problem of dynamics of elastic planar beams by taking the strains as the only unknown functions. It turns out that the direct approach to solving problems, defined in this way, is numerically inefficient as it involves multiple nesting of integrals. An enhancement of the approach is therefore developed and tested on numerical examples. In the next theme we discuss the issue of time integration in kinematically exact dynamics. During the analysis we restrict ourselves to displacement and rotation based finite elements, which is the standard approach to solving problems in mechanics. The classical approach is presented first followed by the detailed energy approach. As a part of the analysis of energy conservation based integrators, a new time integration scheme is developed. It is based on the use of kinematic equations, which are differentiated with respect to time. Conservational properties of all analysed integration schemes are analytically and numerically tested. The schemes have been supplemented with numerical dissipation, which can be arbitrarily turned on or off according to a special algorithm in order to affect the lower modes of response as little as possible. This is also verified by the numerical examples. The third theme of the dissertation deals with the optimization of kinematically exact elastic structures. This part of the dissertation contributes to the development and the application of the sensitivity analysis for the newly developed time integration scheme. A wide array of problems dealing with optimization of dynamical systems can be solved. These problems include the optimization of shape and resistance of structures as well as the loading regimes and the optimal shape of mechanical manipulators. In the final part of the dissertation, the dynamics of kinematically exact reinforced concrete structures is discussed. A numerical procedure is developed, verified by the Opensees program and validated by experimental results. The majority of the numerical procedures presented in the dissertation have been developed in AceGen and AceFEM computer programs, through the symbolic programming of the finite element computer code and the expression optimization. These programs have been found to offer a versatile environment for testing and using finite element based analyses.

Zahvale

Od srca se zahvaljujem mentorju prof. Miranu Sajetu in izr. prof. Igorju Planincu za strokovno vodstvo pri pripravi doktorske disertacije. Vajina predanost znanosti je vredna najvišjega spoštovanja!

Posebna zahvala gre moji ženi Ivani, ki mi je tekom študija neomajano stala ob strani.

Za podporo med študijem se iskreno zahvaljujem svojim staršem.

Hvaležen sem tudi vsem sodelavcem na Katedri za mehaniko za prijetno in prijateljsko vzdušje. Med njimi moram izpostaviti sodelavce, s katerimi sem si v času študija delil pisarno: Bojana Časa, Sebastjana Bratino, Nano Krauberger, Tomaža Hozjana in Mojco Markovič.

Za prijetne znastvene pogovore, ki so pripomogli pri nastanku tega dela sem hvaležen več ljudem, kot jih je možno napisati na to stran. Med njimi moram izpostaviti Miho Kramarja in Mateja Rozmana, ki sta mi pomagala bolj, kot bi od njiju lahko pričakoval.

KAZALO VSEBINE

1	UVOD	1
1.1	Predstavitev problema in pregled stanja na področju dinamike ravninskih okvirnih konstrukcij	1
1.2	Vsebina dela	7
2	OPIS PROBLEMA	9
2.1	Uvod	9
2.2	Osnovne količine	9
2.3	Osnovni izreki in definicije	11
2.4	Vodilne/glavne enačbe	13
2.5	Analiza zapisanih enačb	15
3	DINAMIKA LINEARNO ELASTIČNIH LINIJSKIH KONČNIH ELEMENTOV Z INTERPOLACIJO DEFORMACIJSKIH KOLIČIN	17
3.1	Teorija	17
3.2	Metoda uteženih ostankov	19
3.3	Galerkinova metoda končnih elementov	20
3.4	Numerični vidik formulacije	21
3.5	Numerični primer	22
3.6	Sklepi	23
3.7	Izboljšava elementov z interpolacijo deformacij	23
3.8	Numerični primer	27
3.9	Sklepi	28
4	DINAMIKA LINEARNO ELASTIČNIH LINIJSKIH KONČNIH ELEMENTOV Z INTERPOLACIJO KINEMATIČNIH KOLIČIN	30
4.1	Uvod	30

4.2	Klasičen pristop	30
4.3	Energijsko konzervativne sheme	34
4.3.1	Deformacijska energija	35
4.3.1.1	Algoritmi s krepkimi kinematičnimi vezmi	36
4.3.1.2	Algoritmi s šibkimi kinematičnimi vezmi	38
4.3.2	Kinetična energija	41
4.3.3	Obtežba in potencial zunanjih sil	43
4.3.4	Povzetek enačb	44
4.3.5	Ohranjanje gibalne količine	44
4.3.6	Ohranjanje vrtilne količine	45
4.4	Algoritmi	47
4.5	Numerični primer	49
4.6	Sklepi	52
4.7	Dušenje	53
4.8	Numerični primer	56
4.9	Sklepi	61
5	OPTIMIZACIJA V DINAMIKI LINEARNO ELASTIČNIH LINIJSKIH NOSILCEV	62
5.1	Uvod	62
5.2	Optimizacijski problem	63
5.3	Projektne spremenljivke	64
5.4	Občutljivostna analiza	64
5.5	Optimizacijski algoritem	66
5.6	Numerični primer	66
5.7	Sklepi	69
6	DINAMIKA ARMIRANOBETONSKIH LINIJSKIH KONSTRUKCIJ	70
6.1	Uvod	70
6.2	Materialni modeli	70
6.2.1	Jeklo	71
6.2.2	Beton	73
6.3	Integracija po prerezu	76
6.4	Numerična primera	78
6.4.1	Pushover analiza (Prohitech)	78

6.4.2	Dinamična analiza montažne hale	84
6.5	Sklepi	91
7	KNJIŽNICA KONČNIH ELEMENTOV	92
7.1	Uvod	92
7.1.1	Kinematične teorije	92
7.1.2	Stopnje interpolacije in integracije	94
7.1.3	Materialni modeli	94
7.1.4	Časovni integratorji	94
7.1.5	Vrsta analize in oznake elementov	94
7.1.6	Uporabne funkcije	94
7.2	Knjižnica končnih elementov	95
7.2.1	Končni elementi za statično analizo	95
7.2.2	Končni elementi za dinamično analizo	96
8	ZAKLJUČKI	97
8.1	Prispevki k znanosti	99
	VIRI	100
	PRILOGE	109

KAZALO SLIK

Slika 2.1	Geometrija nosilca, krajevni vektorji in vektor pomikov, levo; linijska in točkovna obtežba, sredina; smeri rezultant napetosti ter prečni prerez, desno.	10
Slika 3.1	Geometrija problema, levo; zasuk v vpetišču v odvisnosti od časa, desno.	21
Slika 3.2	Odziv sistema in primerjava z rezultati Sima in Vu-Quoca (1986).	22
Slika 3.3	Računski model konzole z obtežbo, levo; povs prostega konca (v_B) v odvisnosti od časa, desno.	26
Slika 4.1	Geometrijski podatki o primeru, levo; odvisnost obtežbe od časa, desno.	49
Slika 4.2	Let špageta.	50
Slika 4.3	Shematski prikaz primerov ob vklopu in izklopu dušenja.	54
Slika 4.4	Geometrija in obtežba Bauchaujevega nihala.	55
Slika 4.5	Bauchaujevo nihalo: vodoravni in navpični pomik v točki B	56
Slika 4.6	Bauchaujevo nihalo: povečava vodoravnih in navpičnih pomikov v točki B s slike 4.5.	57
Slika 4.7	Bauchaujevo nihalo: disipacija energije z različnimi stopnjami dušenja.	58
Slika 4.8	Bauchaujevo nihalo: temna območja so dušena.	59
Slika 4.9	Bauchaujevo nihalo: notranje sile.	59
Slika 4.10	Bauchaujevo nihalo: frekvenčni sestav odziva notranjih sil.	60
Slika 5.1	Tipična uporaba projektnih spremenljivk: klasične, levo; oblike, sredina; vzbu- janja, desno.	64
Slika 5.2	Računski model okvirja. CP je oznaka za kontrolno točko, DE pa za projektno telo.	66
Slika 5.3	Pomik podpor v odvisnosti od časa.	67
Slika 5.4	Pomiki na sredini višine konstrukcije s črtkano črto in na vrhu konstrukcije s polno črto po prvi fazi optimizacije, levo in po končani optimizaciji, desno.	68
Slika 5.5	Oblika konstrukcije po prvi fazi optimizacije, levo in po končani optimizaciji, desno.	68

Slika 6.1	Shematski prikaz določitve točke T_0	71
Slika 6.2	Zgodovina deformacije v odvisnosti od 'časa', levo. Pripadajoča napetost, desno. . .	73
Slika 6.3	Zgodovina deformacije v odvisnosti od 'časa', levo. Pripadajoča napetost, desno. . .	75
Slika 6.4	Prerez, skrajno levo. Razdelitev prereza na lamele in njihovo številčenje, sredina. Ilustracija treh možnih integracij po prerezu, desno.	77
Slika 6.5	Fotografija celotne konstrukcija z označenim analiziranim delom.	78
Slika 6.6	Fotografija (levo) in načrt (desno) obravnavanega dela konstrukcije v vzdolžni smeri.	78
Slika 6.7	Načrt konstrukcije v prečni smeri, levo. Računski model, desno.	79
Slika 6.8	Armaturni načrt konstrukcije z označenimi območji prečnih prerezov in sodelujočimi širinami.	80
Slika 6.9	Prečni prerezi.	81
Slika 6.10	Rezultat monotone pushover analize.	82
Slika 6.11	Rezultat ciklične pushover analize.	83
Slika 6.12	Geometrija obravnavane konstrukcije; s puščicami sta označeni mesti nanosa obtežbe.	84
Slika 6.13	Prečni prerez stebra z vzdolžno in strižno armaturo.	85
Slika 6.14	Računski model konstrukcije.	85
Slika 6.15	Normaliziran akceleroogram.	86
Slika 6.16	Odziv na obremenitev skalirano z 0.14 g.	88
Slika 6.17	Odziv na obremenitev skalirano z 0.35 g.	89
Slika 6.18	Odziv na obremenitev skalirano z 0.525 g.	90

LIST OF FIGURES

Figure 2.1	Geometry of the beam, position vectors and vector of displacements, left; distributed and point loads, middle; stress resultants and cross-section, right.	10
Figure 3.1	Geometry of the problem, left; rotation at pinned end vs time, right.	21
Figure 3.2	Response of the system and comparison to results of Simo and Vu-Quoc (1986).	22
Figure 3.3	Cantilever beam model and load, left; time-history response for tip deflection v_B , right.	26
Figure 4.1	Geometrical data, left; loads vs time, right.	49
Figure 4.2	Free flight of spaghetti.	50
Figure 4.3	Schematic representations of cases when damping is engaged and disengaged.	54
Figure 4.4	Geometry and loading of the Bauchau swinging pendulum.	55
Figure 4.5	Bauchau swinging pendulum: horizontal and vertical displacements at point B	56
Figure 4.6	Bauchau swinging pendulum: magnification of the horizontal and vertical displacements at point B from Fig. 4.5.	57
Figure 4.7	Bauchau swinging pendulum: energy dissipation with different levels of damping.	58
Figure 4.8	Bauchau swinging pendulum: dark areas mark presence of damping.	59
Figure 4.9	Bauchau swinging pendulum: internal forces.	59
Figure 4.10	Bauchau swinging pendulum: frequency content of internal forces.	60
Figure 5.1	Typical applications of design variables: classical, left; shape, center; actuation, right.	64
Figure 5.2	The model of the frame. CP are control points and DE design elements.	66
Figure 5.3	Movement of supports vs time.	67
Figure 5.4	Displacements at mid-height and at the top of the structure are plotted with dashed and full line, respectively. The results of the first phase are on the left hand side and the final results on the right hand side of the figure.	68
Figure 5.5	The shape of the structure after the first phase of optimization is on the left hand side and the final shape on the right hand side of the figure.	68

Figure 6.1	Schematical representation of locating point T_0	71
Figure 6.2	Strain history in the fibre, left. Related stress, right.	73
Figure 6.3	Strain history in the fibre, left. Corresponding stress, right.	75
Figure 6.4	Cross-section, left. Division and enumeration of the cross-section into layers, middle. Illustrations of some of the possible integration schemes, right.	77
Figure 6.5	Photography of the entire structure. The analysed section is framed.	78
Figure 6.6	Photography (left) and plan (right) of the analysed section of the structure in longitudinal direction.	78
Figure 6.7	Schematics of the structure in transversal direction, left. Mathematical model of the structure, right.	79
Figure 6.8	Plan of reinforcement with marked cross-sections and effective widths.	80
Figure 6.9	Cross-sections.	81
Figure 6.10	The results of the monotone pushover analysis.	82
Figure 6.11	The results of the cyclic pushover analysis.	83
Figure 6.12	The geometry of the structure; arrows depict locations and directions of the loads.	84
Figure 6.13	Cross-section of the beam with longitudinal and shear reinforcement.	85
Figure 6.14	Numerical model of the structure.	85
Figure 6.15	Normalized accelerogram.	86
Figure 6.16	Response to loads scaled to 0.14 g.	88
Figure 6.17	Response to loads scaled to 0.35 g.	89
Figure 6.18	Response to loads scaled to 0.525 g.	90

KAZALO PREGLEDNIC

Preglednica 3.1	Izboljšana formulacija.	26
Preglednica 3.2	Osnovna verzija formulacije.	27
Preglednica 4.1	Algoritmi iz Newmarkove družine integratorjev.	31
Preglednica 4.2	Parametri algoritmov.	43
Preglednica 4.3	Špaget: rezultati računa.	50
Preglednica 6.1	Parametri materialnega modela za jeklo.	70
Preglednica 6.2	Parametri materialnega modela za beton.	73
Preglednica 7.1	Knjižnica končnih elementov za statično analizo.	94
Preglednica 7.2	Knjižnica končnih elementov za dinamično analizo.	95

LIST OF TABLES

Table 3.1	Numerically improved formulation.	26
Table 3.2	Basic version of the formulation.	27
Table 4.1	Algorithms of the Newmark family of integrators.	31
Table 4.2	Algorithm parameters.	43
Table 4.3	Spaghetti: results.	50
Table 6.1	Parameters of the steel material model.	70
Table 6.2	Parameters of the concrete material model.	73
Table 7.1	Finite element library for static analysis.	94
Table 7.2	Finite element library for dynamic analysis.	95

1 UVOD

1.1 Predstavitev problema in pregled stanja na področju dinamike ravninskih okvirnih konstrukcij

Linijski nosilci so osnovni gradniki matematičnih modelov gradbenih konstrukcij ter mehanizmov in manipulatorjev v strojni, letalski in vesoljski industriji. Temeljito razumevanje njihovega mehanskega obnašanja je zato pogoj uspešne analize. Mehaniko nosilcev lahko opišemo s štirimi neodvisnimi pojavi: z ravnotežjem, s kinematiko, s konstitucijo in s konsistenčnimi pogoji.

V gradbenih konstrukcijah ima od teh pojavov na odziv nedvomno najbolj pomemben vpliv konstitucija oz. materialni zakoni. Parametri materialnih zakonov so določeni z eksperimenti in so kot taki podatek v analizi.

Velik vpliv na odziv ima tudi kinematika. Kinematične teorije lahko razdelimo na tri skupine: na linearno teorijo, na točno teorijo in na teorije med linearno in točno. Za nekatere slednje se uporablja izraz 'teorije drugega reda'. Točna kinematična teorija (tudi 'geometrijsko točna' in 'Reissnerjeva') ima izmed omenjenih najširše območje veljavnosti, ki pa ni neomejeno. Njene najbolj značilne lastnosti so upoštevanje obtežbe na deformirani obliki nosilca, povezanost upogibnega in osnega deformiranja in upoštevanje striga. Linearna teorija ima ravno nasprotno lastnosti – obtežbo upošteva na začetni legi in ne upošteva povezanosti upogibnega in osnega deformiranja. Zato je njeno območje veljavnosti najožje. Edina prednost linearne kinematične teorije je njena preprostost in linearna forma, ki vedno omogoča analitično reševanje, če je material linearno elastičen. Teoriji sta si v resnici bolj blizu, kot bi lahko ocenili iz diametralno nasprotnih lastnosti, saj linearno teorijo dobimo z *linearizacijo* točne teorije.

Konsistenčni pogoji so pogoji, s katerimi zahtevamo enakost konstitucijskih in ravnotežnih notranjih sil. Pri večini formulacij teh pogojev v eksplicitni obliki ni, v določenih pa so in imajo vpliv na njihove lastnosti, toda več o njih in njihovem vplivu na lastnosti v nadaljevanju.

Ravnotežje namenoma omenjamo zadnje, saj je za gradbenike ravnotežje osnovni pojem in vsakdanji kruh. Ravnotežje v statiki pomeni ničelnost rezultant sil in momentov. Če v dinamiki produkte pospeškov in mas nadomestimo z linijskimi obtežbami, si lahko ravnotežje v dinamičnem smislu predstavljamo na enak način. V disertaciji bomo pokazali, da tako dinamično ravnotežje ni edino možno in bomo predstavili alternativno, t.i. 'energijsko dinamično ravnotežje'.

Za formuliranje in reševanje problemov moramo te pojave združiti. To bomo naredili na različne načine, vedno pa bomo uporabili kinematično točno teorijo, ki je zato rdeča nit disertacije, skupna vsem problemom, ki jih bomo obravnavali. Najprej se bomo dotaknili fundamentalnega vprašanja izbire neznanih funkcij, zatem se bomo ukvarjali s problemom časovne integracije in takrat se bomo srečali z energijskim ravnotežjem. V sklopu obravnavanja časovne stabilnosti se bomo ukvarjali tudi z vprašanjem

najbolj učinkovitega numeričnega dušenja. Posebno poglavje bo namenjeno optimizaciji v dinamiki geometrijsko točnih elastičnih nosilcev. Na koncu bomo točno kinematično teorijo uporabili še pri modeliranju armiranobetonskih konstrukcij v dinamiki.

V splošnem lahko med formulacijami za dinamiko nosilcev zasledimo dva fundamentalno različna opisa gibanja dinamičnega sistema. Prvi pristop je t.i. pristop premikajočega se ogrodja oz. 'floating frame', kjer so kinematične spremenljivke sistema določene glede na toge skelete konstrukcij, ki opišejo togi del gibanja in se premikajo skupaj s podajnim okvirjem. Prednost tega pristopa je, da so pomiki in zasuki togih okvirjev lahko poljubno veliki, deformacijske količine pa so običajno majhne. Zato ima izraz za potencialno energijo nosilca preprosto obliko. Slabost pristopa je, da so, kljub majhnim deformacijam glede na togi skelet, enačbe izrazito nelinearne in da so vztrajnostni členi v posameznih smereh močno povezani - glej Crisfield in Shi (1994), Hsiao in Jang (1991) in Kane, Likins in Levinson (1983). Včasih ta pristop imenujemo korotacijski oz. 'co-rotational'. Drugi pristop, ki se je bolj uveljavil in ga privzemamo tudi v tem delu, se imenuje vztrajnostni oz. 'inertial frame approach'. Pri njem se kinematične spremenljivke določi glede na fiksni koordinatni sistem in zato so izrazi za vztrajnostne člene preprosti. Nelinearnost enačb in problema pa se pojavi pri zapisu togostnega dela enačb oz. deformacijske energije nosilca.

Različnih formulacij za opis dinamike ravninskih elastičnih nosilcev s točnimi ali nelinearnimi geometrijskimi zvezami je več. Formulacije, ki interpolirajo pomike in zasuke, so predstavili Crisfield in Shi (1994), Crisfield, Galvanetto in Jelenić (1997), Hsiao in Jang (1991), Ibrahimbegović in Mamouri (1999), Sansour, Sansour in Wriggers (1996), Simo in Vu-Quoc (1986), Simo, Tarnow in Doblare (1995), formulacije z interpolacijo absolutnih koordinat v vozliščih pa von Dombrowski (2003), Dufva, Sapanen in Mikkola (2005), Omar in Shabana (2001), Shabana (1997) in Shabana (1998). Formulacije z interpolacijo absolutnih vozliščnih koordinat se v izvorniku imenujejo 'ANCF' oz. 'absolute nodal coordinate formulation'. Jelenić (1990) in Vratinar (1998) sta predstavila formulacije, v katerih se interpolirajo izključno zasuki.

Prva tema, s katero se v disertaciji spoprimemo, je vprašanje izbire neznanih količin. Ker je možnosti veliko, se osredotočimo na možnost upoštevanja deformacijskih količin kot osnovnih neznank problema. Ta možnost je zanimiva zato, ker ima tako formulirani problem posebno obliko enačb, ki prinese nekatere ugodne lastnosti. Posebnost oblike enačb je v tem, da v njih eksplicitno nastopajo konsistenčni pogoji. Pomembnejše lastnosti formulacij s tako obliko enačb so odpornost na blokiranje, popolna konsistentnost količin in velika natančnost. Podobno obliko enačb imajo tudi formulacije, ki za neznane funkcije upoštevajo le zasuke. Taka je Jelenićeva (1990) formulacija za dinamično analizo hiperelastičnih nosilcev in Vratinarjeva (1998) dinamična analiza idealno elastičnih nosilcev z drugo časovno integracijsko shemo in s kolokacijsko metodo. Izključno na zasukih temelji tudi statična analiza ravninskih okvirjev Sajeta in sodel. (1990, 1991, 1994, 1997) in Jelenića in Sajeta (1994, 1995). Zelo podobno obliko enačb imajo tudi formulacije za analizo statičnih problemov, ki temeljijo na deformacijah. Prvi je take elemente izpeljal Planinc (1998), ko je analiziral problem stabilnosti elastičnih in elastoplastičnih ravninskih nosilcev. Končne elemente z interpolacijo deformacijskih količin je uporabil tudi Bratina s sodelavci (2003, 2004) pri požarni analizi ravninskih armiranobetonskih konstrukcij in Čas (2004) pri analizi kompozitnih nosilcev z zdrsom med sloji. Zupan (2001, 2003) in Zupan in Saje (2003) sta jih uporabila pri modeliranju prostorskih nosilcev, Hozjan, Turk in Srpčič (2007) pa pri analizi jeklenih konstrukcij med požarom. Schnabl (2007) je z njimi modeliral kompozitne nosilce med požarom z upoštevanjem oglenenja lesa. Krauberger s sodel. (2007) je podobne enačbe s konsistenčnimi pogoji uporabila kot izhodišče za določitev uklonskih sil armiranobetonskih stebrov.

Formulacija, ki jo zgradimo okoli interpolacije deformacijskih količin, uporablja vztrajnostni pristop in,

podobno kot deformacijske formulacije za statične primere, eksplicitno zadošča konsistenčnim enačbam. Formulacija je relativno zapletena, dobljeni sistem enačb pa ni samo diferencialen, temveč diferencialno-algebrski. S tem so povezane težave pri časovni integraciji.

V drugem delu disertacije se odmaknemo od elementov z interpolacijo deformacij, saj za osnovne neznane količine privzamemo kinematične spremenljivke in se spoprimemo s temo časovne integracije. Ključni problem časovne integracije v nelinearni dinamiki je stabilnost. Kuhl in Crisfield (1999) celo trdita, da je stabilnost bolj pomembna od natančnosti. Kljub temu pa se ukvarjamo z metodami z vsaj kvadratično konvergenco, saj nižje stopnje konvergence niso sprejemljive.

Matematični model gradbenih konstrukcij v geometrijsko točni teoriji nosilcev je ponavadi predstavljen s togim sistemom diferencialnih enačb. Togost enačb je posledica za rede velikosti različnih togosti posameznih delov konstrukcije ali pa bistveno različnih osnih in upogibnih togosti nosilca. Togost lahko povzročijo tudi nenadne spremembe v sistemu, ki so lahko posledica hitre spremembe obtežbe. Dodaten izvor togosti je uporaba metode Lagrangevih množiteljev za upoštevanje kinematičnih vezi, saj postane sistem enačb zaradi algebrskih vezi diferencialno-algebrski. Algebrskim enačbam pripadajo neskončne lastne vrednosti (Gams, Planinc in Saje (2007c)), zato so inherentno togi. K integraciji takih problemov so prispevali Bauchau, Damilano in Theron (1995), Bauchau in Theron (1996a, b), Bauchau, Bottasso in Trainelli (2003), Betsch in Steinmann (2003), Bottasso, Bauchau in Choi (2002), Bottasso in Borri (1998), Goicolea in Orden (2002) in Ibrahimbegović s sodel. (2000). Zelo pogosto so togi tudi podajni mehanizmi (angl. 'flexible multibody systems'), kjer so podajni nosilci med sabo povezani z različnimi vrstami vezi oz. členkov (Bauchau in Theron (1996a)). Tipična značilnost togih sistemov je pojav visokih frekvenc umetnega izvora. Sposobnost kontroliranja teh frekvenc je zagotovilo kakovostne in časovno stabilne metode.

Integriranje togih enačb je zelo težavno, saj je problem časovne nestabilnosti pri njih najbolj izrazit. Klasične integracijske sheme, ki so bile razvite za linearne sisteme, kot je npr. Newmarkova družina integratorjev in α integratorji, imajo pri reševanju nelinearnih togih diferencialnih enačb velike probleme, kar so nazorno pokazali Crisfield, Galvanetto in Jelenić (1997), Géraudin in Cardona (2001), Ibrahimbegović in Mamouri (1999), Jelenić in Crisfield (2001), Stander in Stein (1995) in Erlicher, Bonaventura in Bursi (2002).

Stabilnost metode lahko izboljšamo na več načinov. En izmed pristopov je, da v formulacijo vpeljemo numerično dušenje, ki disipira energijo višjih oblik nihanja. Osnovni namen numeričnega dušenja je iz odziva izločiti višje frekvence, toda z dušenjem se pogosto izboljša tudi stabilnost reševanja. Zelo razširjena je disipativna shema Hilberja, Hughesa in Taylorja (1977) oz. metoda HHT in njena posplošitev, HHT- α metoda Chunga in Hulberta (1993). Ti shemi sta zelo učinkoviti pri reševanju linearnih sistemov, saj sta tedaj brezpogojno stabilni, pri reševanju nelinearnih sistemov pa po poročanju Géraudina in Cardone (2001) pogosto zadovoljivo delujeta, vedno pa ne.

Bauchau, Damilano in Theron (1995) in Crisfield, Galvanetto in Jelenić (1997) so na praktičnih primerih pokazali, da lahko pride do rasti mehanske energije tudi v primeru uporabe teh shem (z dušenjem), kar neizogibno vodi v nestabilnost.

Numerično dušenje so na nekoliko drugačen način implementirali Kuhl in Crisfield (1999) na prostorskem paličju in Kuhl in Ramm (1999) na lupinah in ta pristop poimenovali posplošeni energijski količinski pristop oz. 'generalized energy momentum'. Njihov pristop je kombinacija pristopa posplošenih α metod in pristopa z ohranjanjem energije in količin Sima, Tarnowa in Doblareja (1995).

Nezvezni oz. 'time-discontinuous' Galerkinov pristop za dušenje v svojih delih uporabijo Bauchau in Theron (1996a, b), Bottasso in Borri (1998) in Bottasso, Bauchau in Choi (2002). Armero in Romero

(2001a, b) vpeljeta disipacijo energije z diferenčno metodo.

Goicolea in Orden (2002) za dušenje pri reševanju nelinearnega Hamiltonskega sistema uporabita koncept diskretnih odvodov in kazensko metodo (angl. 'penalty method') za zadoščanje vezi. Poročata o izredni učinkovitosti in robustnosti svojega pristopa. Romero in Armero (2002) vpeljeta dušenje v formulacijo prek spremenjenih konstitucijskih enačb. Enak pristop uporabita Ibrahimbegović in Mamouri (2002) na prostorskih nosilcih.

Za reševanje togih enačb gibanja v splošnem Hamiltonskem kontekstu s časovno zvezno (angl. 'time-continuous') Galerkinovo metodo so svoje pristope predstavili tudi Betsch in Steinmann (2000) in Bui (2003). Pristop Armera in Petőcza (1999) temelji na modificiranem računu deformacij. Vse omenjene sheme so implicitne in dokazano disipirajo energijo nelinearnih sistemov, kar je po Belytschku in Schoeberlu (1975) formalen dokaz stabilnosti sheme. Bottasso, Borri in Trainelli (2001) so pokazali, da lahko disipacijo za nelinearne sisteme vpeljejo tudi v eksplicitne integratorje družine Runge-Kutta.

V pričujoči disertaciji je razvita nova shema z dušenjem, ki deluje na deformacijah – podobno kot postopek Armera in Petőcza (1999), le da je nadgrajena z algoritmom, ki po potrebi vklaplja in izklaplja dušenje. Slednje tako deluje le na mestih in pri časih, ko je to potrebno. Analiza frekvenčnega odziva pokaže, da s tem načinom disipiramo manj osnovnih frekvenc.

Drug pristop za izboljšanje stabilnosti je vpeljava dodatnih vezi po metodi Lagrangevih množiteljev, s katerimi se eksplicitno zagotavlja ohranjanje energije in količin gibanja. Po poročanju Kuhla in Ramma (1996) rezultati kažejo, da take metode popolnoma ohranjajo zahtevane količine, vendar vseeno niso stabilne.

Tretji pristop za izboljšanje stabilnosti reševanja so t.i. konzervativne sheme, ki algoritemsko ohranjajo energijo in količine gibanja. Algoritemsko ohranjanje pomeni, da rešitev enačb problema avtomatično zadosti tudi pogojem ohranjanja količin. Take sheme so brezpogojno stabilne (Hughes (1992)), vendar se lahko v odzivu pojavijo nerealistično visoke frekvence, kar lahko po poročanju Bauchauja, Damišana in Theron (1995) vpliva na hitrost konvergence in uspešnost Newton-Raphsonovega postopka reševanja sistema enačb. Pionirska dela na področju energijsko konzervativnih shem so predstavili Simo, Tarnow in Wong (1992), Simo, Tarnow in Doblare (1995) in Stander in Stein (1996). Ibrahimbegović s sodel. (1999, 2002) je razvil podobno shemo kot Simo, Tarnow in Doblare (1995), vendar z drugačno interpolacijo zasukov. Tej razliki bomo namenili nekaj besed tudi v nadaljevanju. Energijske sheme uporabljajo t.i. 'midpoint' pravila, ki enačbe izvrednotijo pri sredinskem času, vendar jih lahko v primeru nelinearnih zvez interpretiramo na več načinov, kot je nazorno pokazal Graham (2001).

Jelenić in Crisfield (2001) sta implementirala energijsko shemo za prostorske nosilce, v kateri členke modelirata s t.i. 'master-slave' pristopom. Crisfield in Shi (1996) sta izpeljala energijski integrator za korotacijsko formulacijo ravninskega paličja. Sansour, Sansour in Wriggers (1996) so uporabili midpoint formulacijo za ravninske nosilce z uporabo Cosseratove teorije nosilcev.

Znatno del disertacije se ukvarja z analizo energijskih shem za časovno integracijo in v sklopu teh analiz razvijemo novo energijsko konzervativno shemo, za katero bomo pokazali tudi ohranjanje gibalne in vrtilne količine. Posebnost formulacije je, da se upošteva kinematične enačbe v časovno odvajani obliki in da se deformacije računa na inkrementni način. Tip formulacije in interpolacije sledi delu Sima in Vu-Quoca (1986), kjer se privzame vztrajnostni pristop in interpolira vse kinematične spremenljivke, končne enačbe pa so diferencialne.

Prvič so idejo o inkrementnem računu deformacij in upoštevanju kinematičnih enačb v šibki obliki predstavili Sansour, Wriggers in Sansour (1997) za lupine. Kasneje je Sansour s sodel. (2002) ta pristop apliciral na klasično in kaotično gibanje lupin in dinamično stabilnost lupin. Sansour, Wriggers in San-

sour (2004) so predstavili posplošeno teorijo s takim pristopom, ki načelno velja za poljubne konstrukcije in 3D kontinuum.

V disertaciji se bežno dotaknemo tudi optimizacije. V splošnem predstavlja optimizacija možnost zado-
stiti kriterijem naloge ceneje, hitreje, boljše in bolj učinkovito. Potencial možnosti in razpon optimizacije
je za podajne nosilce izredno velik – od lažjih, cenejših in bolj odpornih konstrukcij, do manipulatorjev
in robotskih rok, ki izkoriščajo podajnost mehanizma, da nalogo opravijo hitreje in z manjšo porabo
energije.

Začetki poglobljenih analiz optimizacije linearnih dinamičnih sistemov segajo v sedemdeseta leta prej-
šnjega stoletja, kot poročajo Kang, Park in Aurora (2006), ki v svojem članku temeljito opišejo razvoj
gradientnih metod optimizacije na področju dinamike linearnih sistemov. Le stežka pa najdemo dela, ki
bi se ukvarjala z optimizacijo kinematično ali pa materialno nelinearnih problemov. Glavni razlog je re-
lativno zahteven račun odziva konstrukcije, ki je hkrati tudi motiv za uporabo gradientnih optimizacijskih
metod, kot navajajo Cardoso in Arora (1992) in Arora in Dutta (1997).

Stupkiewicz (2001) v svojem prispevku pokaže, kako dobiti približne vrednosti za občutljivostno anali-
zo v nelinearnih dinamičnih problemih. Kulkarni in Noor (1995) opišeta občutljivostno analizo ravnin-
skih viskoplastičnih konstrukcij glede na materialne parametre. Cho in Choi (2000a, b) v svojih delih
predstavita postopek občutljivostne analize in gradientne optimizacije v primeru optimizacije prerezov
in oblike konstrukcije. Optimizacijo ciklično obremenjenih elastoplastičnih konstrukcij opisujejo tudi
Sousa, Cardoso in Valido (1997). Pedersen (2004) v svojem prispevku opiše optimizacijo topologije
elastoplastičnih ravninskih nosilcev.

V sklopu optimizacije podajnih nosilcev z novo razvitim integratorjem za podajne elastične nosilce s
šibkimi kinematičnimi vezmi in inkrementnim načinom računa deformacij izpeljemo in implementiramo
občutljivostno analizo, ki je ena izmed ključnih komponent optimizacije. Za reševanje optimizacijskega
problema uporabimo optimizacijski algoritem, ki so ga razvili Kegl, Butinar in Kegl (2002) in je im-
plementiran v računalniškem programu 'iGO' (M. Kegl, 2007). Tukaj predstavljamo le posebnosti, s
katerimi se srečamo ob optimiranju dinamičnih problemov in posebnosti integratorja in elementa, ki jih
moramo pri tem upoštevati.

Ko kinematično točno teorijo ravninskih nosilcev nadgradimo z materialnim modelom betona po Popo-
vicsu (1973), ki razbremenjevanje v tlačni coni upošteva po Karsanu in Jirsi (1963) in z materialnim
modelom jekla po Menegottu in Pintu (1973), se nam odpre možnost modeliranja armiranobetonskih
konstrukcij in testiranja časovno integracijskih shem na materialno nelinearnih problemih.

Dinamične analize armiranobetonskih konstrukcij z upoštevanjem prej omenjenih materialnih mode-
lov so dolga leta temeljile na geometrijsko linearni teoriji, saj so bili znanstveniki bolj osredotočeni na
modeliranje različnih materialnih pojavov. Analize, ki bi hkrati upoštevale geometrijsko in materialno
nelinearnost, so zato redke. Najpogosteje uporabljeni načini za upoštevanje geometrijske nelinearnosti v
teoriji konstrukcij so t.i. $P-\Delta$ metode ali pa t.i. teorije drugega reda, ki niso veljavne v primeru velikih
deformacij.

Razvoj materialno nelinearnih modelov v teoriji konstrukcij se je začel s končnimi elementi s koncentri-
rano plastičnostjo (plastični členki), kot v svojih preglednih delih navajajo Taucer, Spacone in Filippou
(1991) ter Spacone, Taucer in Filippou (1996). Taki elementi se v praksi še danes veliko uporabljajo,
predvsem na račun svoje zanesljivosti in relativne preprostosti, vendar pa so sposobni opisati le nekaj
osnovnih pojavov v armiranobetonskih konstrukcijah. Alternativa tem elementov so elementi s t.i. po-
razdeljeno plastičnostjo oziroma elementi z integracijo po t.i. vlaknih (angl. 'fiber elements'). Vlakna
predstavljajo materialne niti, iz katerih je sestavljen prečni prerez. Vsaka nit ima svoj neodvisen ma-

terialni zakon in z integracijo napetosti po materialnih nitih (vlaknih) dobimo konstitucijske notranje sile v prečnem prerezu. Primerjavo nekaterih elementov s točkovno in porazdeljeno plastičnostjo lahko najdemo v članku Coma, De Stefana in Ramascota (2003), kjer je ugotovljeno, da dajo elementi z integracijo po vlaknih bistveno boljše rezultate kot elementi s točkovno plastičnostjo, saj so v nasprotju z elementi s točkovno plastičnostjo inherentno sposobni upoštevati interakcijo osne sile in upogibnega momenta.

Elementi z integracijo po vlaknih, osnovani na klasični metodi končnih elementov, kjer se interpolirajo kinematične količine, imajo v statičnih problemih po poročanju Taucerja, Spaconeja in Fillipouja (1991) težave pri modeliranju mehčanja materiala. Mehčanje je upoštevanje nosilnosti po preseženi maksimalni nosilnosti in je zelo značilno za armiranobetonske konstrukcije. Takrat postanejo elementi numerično zelo občutljivi, saj raziskovalci poročajo o problemih z nestabilnostjo reševanja, predvsem v povezavi z neustrezno interpolacijo, ki ne uspe zajeti koncentracije ukrivljenosti v plastičnih členkih. Za pristop, ki interpolira kinematične količine, se je v krogih, ki se ukvarjajo z armiranobetonskimi konstrukcijami, uveljavil izraz 'togostni'. Alternativa temu pristopu je 'podajnostni' pristop, ki temelji na interpolaciji sil in se je zelo uveljavil, predvsem po objavi članka Spaconeja, Taucerja in Filippouja (1996). V njem so namreč rešene ključne ovire za vgradnjo podajnostnih elementov v standardne programe za analizo po metodi končnih elementov. Podajnostno formulacijo sta Neuenhofer in Filippou (1998) razširila na geometrijsko nelinearnost z upoštevanjem interakcije osnega in upogibnega deformiranja, vendar pa morajo deformacije v tej formulaciji ostati majhne, čeprav velikost pomikov ni omejena (teorija drugega reda). Njuna formulacija je osnovana na interpolaciji ukrivljenosti po dolžini nosilca.

Petrangeli in Ciampi (1997) v svojem članku ugotavljata prednosti podajnostnega pristopa v primerjavi s togostnim pristopom in mešanimi pristopi, vendar le za geometrijsko linearno teorijo. Ademar in White (2005) opravita podobno analizo, toda uporabita teorijo drugega reda, katere veljavnost omejeta na srednje velike rotacije in majhne deformacije, ali pa P- Δ metodo. Njun zaključek je, da je mešana formulacija najboljša za materialno in geometrijsko nelinearne probleme.

Sivaselvan in Reinhorn (2002) za dinamično analizo armiranobetonskih konstrukcij uporabita podajnostni pristop, toda namesto običajnih končnih elementov sestavljata makro elemente, ki potekajo med fizičnimi vozlišči konstrukcije. Uporabljene geometrijske zveze so točne, toda uporabljena je korotacijska formulacija. S splošnim programom za reševanje diferencialno algebrskih enačb lahko analizirata konstrukcije do porušitve.

Članek Hjelmstada in Tacirogluja (2003) poskuša sistematično primerjati geometrijsko (teorija drugega reda) in materialno nelinearne formulacije, kjer je posebna pozornost namenjena računski zahtevnosti. Primerjane so tri variacijsko konsistentne formulacije, ki jih splošno lahko označimo kot eno, dvo in tripoljske oz. kot klasični pristop (interpolacije in variacije pomikov), Hellinger-Reissnerjev pristop (interpolacije in variacije pomikov in napetosti) ter mešani pristop, ki dopušča interpolacijo in variacije tako pomikov kot deformacij in napetosti. Zaključek v članku je, da čistega zmagovalca med formulacijami ni, le določene formulacije so bolj primerne za določene vrste problemov.

Lokalizacijo deformacij v statični analizi armiranobetonskih okvirjev so učinkovito opisali Bratina, Saje in Planinc (2004). Njihova formulacija temelji na končnih elementih z interpolacijo deformacij, s kratkimi končnimi elementi na mestih pričakovanih koncentracij deformacij. Posebnost kratkih elementov je, da se lahko mehčajo. Z večanjem obtežbe preko maksimalne nosilnosti se v kratkih elementih povečajo deformacije in zmanjša odpornost. Ostali elementi ne morejo preiti v mehčanje in se lahko le razbremenijo. Lokalizacijo s končnimi elementi z interpolacijo kinematičnih količin in Timošenkovo teorijo nosilcev sta Ehrlich in Armero (2005) modelirala z nezveznostjo pomikov v območju plastičnih členkov.

1.2 Vsebina dela

Delo je, poleg uvodnega poglavja, sestavljeno še iz sedmih poglavij, ki obravnavajo različne teme iz dinamike ravninskih nosilcev. V drugem poglavju 'Opis problema' zberemo vse izreke, definicije in količine, potrebne za opis dinamike elastičnih ravninskih nosilcev in predstavimo osnovno obliko enačb problema. Enačbe in neznanke analiziramo ter predstavimo možnosti za izbiro osnovnih neznanh količin problema. Izbira osnovnih neznanh funkcij je namreč ključno in izhodiščno vprašanje, ponuja pa izredno velik nabor možnosti.

V tretjem poglavju 'Dinamika linearno elastičnih linijskih končnih elementov z interpolacijo deformacijskih količin' izpeljemo in rešimo dinamični problem ravninskih elastičnih nosilcev, v katerem so edine neznane funkcije deformacije. Izkaže se, da so izpeljani elementi neobčutljivi na blokiranje ter zelo natančni. Žal pa imajo v osnovni obliki formulacije dve izraziti pomanjkljivosti: (i) v računskem smislu so izredno neučinkoviti in (ii) v kombinaciji z Newmarkovo časovno integracijsko shemo so nestabilni. Zato v nadaljevanju tega poglavja z modifikacijo metode drastično izboljšamo numerično učinkovitost, z izbiro druge časovne integracijske sheme pa občutno izboljšamo problem časovne stabilnosti, vendar ga žal ne odpravimo popolnoma. Osnovno in izboljšano formulacijo preverimo in primerjamo na praktičnih računskih primerih. Rezultati računa potrdijo teoretične ugotovitve.

V obsežnem četrtem poglavju 'Dinamika linearno elastičnih linijskih končnih elementov z interpolacijo kinematičnih količin' rešujemo problem tako, da obravnavamo pomike in zasuk kot osnovne neznanke problema. Tak pristop je sicer najbolj razširjen v komercialnih programih in tudi med raziskovalci. V prvem delu poglavja predstavimo klasični pristop ter njegovo aplikacijo na nelinearne probleme, zatem pa pozornost namenimo t.i. energijskemu pristopu. Posebnost tega pristopa je, da integratorjev ne izpeljemo iz osnovnih enačb, temveč iz izreka o ohranitvi mehanske energije. Veljavnost tega izreka je namreč potreben in zadosten pogoj za brezpogojno stabilnost. Iz energijskega izhodišča je možno izpeljati več različnih integratorjev in to tudi storimo, dodatno pa izpeljemo še nov integrator za ravninske nosilce, ki prav tako zadošča pogoju stabilnosti. Ohranjevalne lastnosti integratorjev analitično dokažemo, zatem pa preverimo tudi z računskim primerom. Potrdijo se vse teoretične ugotovitve: ohranjanje energije in količin je neodvisno od velikosti časovnega koraka in stopnje interpolacije. V zaključnem delu tega poglavja na integratorje apliciramo še dušenje, ki deluje na deformacijah. Posebnosti in novosti pristopa sta dve: (i) dušenje je odvisno od trigonometrične funkcije \arctan in ne od linearne funkcije, kot običajno, ter (ii) v dušenje vključimo algoritem, ki z relativno malim številom dodatnih parametrov dobro ugotovi, ali je dušenje potrebno ali ne. S tem, ko dušenje apliciramo le na mestih, kjer je to potrebno in le pri časih, ko je to potrebno, dosežemo, da se udušijo le najvišje frekvence, odziv v osnovnih nihajnih oblikah pa ostane relativno nedotaknjen.

Sledi peto poglavje 'Optimizacija v dinamiki linearno elastičnih linijskih nosilcev', kjer predstavljamo osnovne koncepte optimizacije prerezov, oblike konstrukcije in premikov podpor. Te koncepte apliciramo na novo razvito formulacijo s šibkim integratorjem in povprečno rotacijsko matriko, za katero predstavimo tudi občutljivostno analizo. Na zanimivem primeru prikažemo možnost optimizacije oblike, v prilogi pa optimizacijo premikanja podpor. Optimizacija premikanja podpor spada v skupino kontrolnih problemov.

V šestem poglavju 'Dinamika armiranobetonskih linijskih konstrukcij' najprej predstavimo materialne modele za dinamično (ciklično) obremenjevanje betona in jekla. Te modele zatem vgradimo v računalniški program v kombinaciji z različnimi časovno integracijskimi shemami. Materialni model validiramo in verificiramo s primerjavo eksperimentalnega 'pushover' testa in numerične simulacije armiranobetonske konstrukcije, zatem pa še z dinamičnim testom preproste konstrukcije.

V sedmem poglavju opišemo knjižnico končnih elementov, ki so osnovani na interpolaciji kinematičnih količin. Elementi so razdeljeni v dve knjižnici: eno za elemente za statično analizo '2DBSta' in drugo za elemente za dinamično analizo '2DBDyn'. V knjižnici '2DBSta' so zbrani končni elementi za statično analizo elastičnih, jeklenih in armiranobetonskih konstrukcij in imajo vgrajene tri možne kinematične teorije – linearno, teorijo drugega reda in točno Reissnerjevo teorijo. V knjižnici so na voljo elementi s poljubnim materialnim modelom v kombinaciji s štirimi različnimi stopnjami interpolacije, od linearne do četrtega reda, in poljubno od treh kinematičnih teorij. Skupno je v knjižnici 36 končnih elementov. V knjižnici '2DBDyn' so elementi za dinamično analizo, vendar le v kombinaciji z linearno in Reissnerjevo kinematično teorijo. Na voljo so v kombinaciji s tremi materialnimi modeli in redi interpolacij od linearnega do četrtega. Elementi so izdelani za sedem različnih integratorjev: Newmarkov integrator (Newmark (1959)), integrator Hilberta, Hughesa in Taylorja (1977), integrator Standerja in Steina (1996), integrator Sima, Tarnowa in Doblareja (1995), integrator Ibrahimbegovića in Mamourija (1999) ter dva nova integratorja, ki sta razvita v tej disertaciji. Imenujemo ju šibki integrator s povprečno rotacijsko matriko in šibki z midpoint rotacijsko matriko.

Končni elementi so razviti v programskem okolju AceGen (Korelc (2006)). To okolje omogoča avtomatsko generacijo programske kode za končne elemente in simbolno odvajanje. Vsi elementi so pripravljene za delovanje v okolju AceFEM z naborom spremljajočih funkcij za analizo rezultatov in vmesnih rezultatov. Oba programa sta sicer komercialna, toda marsikateri primer je možno izračunati z demo verzijo, ki omejuje le število končnih elementov in računskih korakov v analizi. Demo verziji sta dostopni na internetnem naslovu www.fgg.uni-lj.si/Symech. Knjižnici končnih elementov in spremljajoča dokumentacija so javno dostopni na internetnem naslovu www.km.fgg.uni-lj.si/Matija/index.htm. Dostop do njih je omočen tudi skozi izmenjevalnik končnih elementov AceShare znotraj programskega sistema AceFEM.

V osmem, sklepnem poglavju so povzeti zaključki disertacije in opisani prispevki k znanosti.

2 OPIS PROBLEMA

2.1 Uvod

Problemi v gradbeništvu so definirani z geometrijo konstrukcije, gradbenim materialom in obtežbo. Vsaka od teh kategorij je ponavadi zelo zapletena, tako da tudi navidezno preproste konstrukcije kmalu postanejo matematično tako zapletene, da analitične rešitve ne obstajajo. Ko problem obravnavamo dinamično, je primerov, za katere obstajajo analitične rešitve, še manj, saj so znane le za kombinacijo geometrijske linearnosti, linearno elastičnega materiala, matematično regularnih oblik (npr. nosilec, cilindar, ipd.) in matematično preprostih oblik obtežb, kot so konstantna, linearna ali periodična po času (npr. Paz in Leigh (2004)). Ob očitnem pomanjkanju analitičnih rešitev se gradbeniki pri projektiranju gradbenih konstrukcij praviloma poslužujemo v računalniške programe vgrajenih numeričnih metod.

Besedilo obravnava dinamiko elastičnih, jeklenih in armiranobetonskih linijskih konstrukcij, ki jih lahko modeliramo z v začetni legi ravnimi, ravninskimi nosilci z neomejenimi pomiki in zasuki. Da lahko problem matematično opišemo, najprej vpeljemo osnovne količine, s katerimi je problem opisan, zatem naštejemo osnovne izreke in definicije in na koncu zapišemo vodilne enačbe problema.

2.2 Osnovne količine

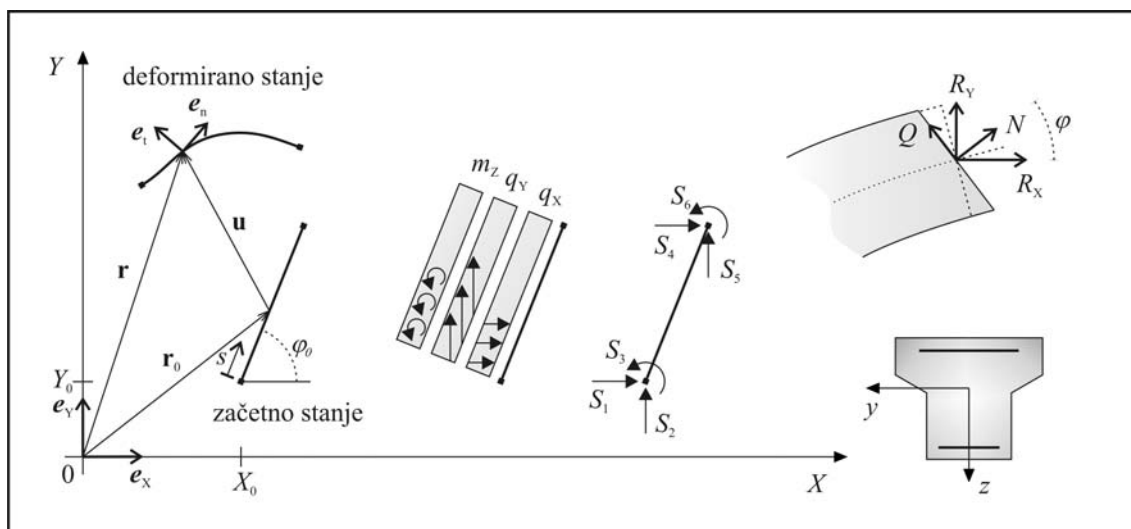
Osnovne količine, s katerimi opišemo geometrijo nosilca, so prikazane na sliki 2.1. X in Y sta osi globalnega koordinatnega sistema, y in z pa osi lokalnega koordinatnega sistema prereza.

Kinematične spremenljivke. S tem terminom označujemo pomik $\mathbf{u}(s, t)$ in zasuk $\varphi(s, t)$ materialne točke težiščne osi nosilca, določene z ločno dolžino s točke v nedeformirani legi. Obe količini sta funkciji ločne dolžine s in časa t . Vektor pomikov $\mathbf{u}(s, t)$ ima komponenti v globalnih smereh X in Y , ki ju označujemo z $u(s, t)$ in $v(s, t)$. Globalni koordinatni sistem je označen na sliki 2.1. Zasuk $\varphi(s, t)$ predstavlja zasuk prečnega prereza nosilca. Kadar strižne deformacije niso prisotne, predstavlja zasuk $\varphi(s, t)$ zasuk težiščne osi (Vratanar in Saje (1999)). V nadaljevanju besedila zapis funkcijske odvisnosti od časa in kraja pogosto opuščamo.

Deformacijske spremenljivke. Definicije deformacij je podal Reissner (1972). Podane so glede na težiščno os in jih označujemo z $\varepsilon(s, t)$ in $\kappa(s, t)$, kjer sta komponenti vektorja

$$\varepsilon(s, t) = [\varepsilon(s, t), \gamma(s, t)]^T \quad (2.1)$$

osna deformacija $\varepsilon(s, t)$ in strižna deformacija $\gamma(s, t)$. Osna deformacija deluje v smeri normale na prerez. Strižna deformacija γ predstavlja zasuk prečnega prereza glede na normalo na deformirano težiščno os nosilca.



Slika 2.1: Geometrija nosilca, krajevni vektorji in vektor pomikov, levo; linijska in točkovna obtežba, sredina; smeri resultant napetosti ter prečni prerez, desno.

Figure 2.1: Geometry of the beam, position vectors and vector of displacements, left; distributed and point loads, middle; stress resultants and cross-section, right.

Zaradi ravninske narave problema so deformacije simetrične glede na lokalno os z in neodvisne od lokacije v smeri lokalne osi y (slika 2.1).

Konstitucijske spremenljivke. Konstitucijske spremenljivke so rezultante napetosti po prerezu. Označujemo jih z $\mathbf{N}_C(s, t)$ in $M_C(s, t)$. V vektorju $\mathbf{N}_C(s, t) = [N_C(s, t), Q_C(s, t)]^T$ se 'skrivata' konstitucijska osna in prečna sila, $M_C(s, t)$ je konstitucijski upogibni moment. Računamo jih s konstitucijskimi enačbami, ki so zapisane v nadaljevanju teksta.

Ravnotežne spremenljivke. Ravnotežne spremenljivke oz. ravnotežne sile v prečnem prerezu so $\mathbf{N}(s, t)$ in $M(s, t)$. Vektor $\mathbf{N}(s, t) = [N(s, t), Q(s, t)]^T$ je sestavljen iz ravnotežne osne in ravnotežne prečne sile. Ravnotežne spremenljivke dobimo tako, da konstrukcijo na izbranem mestu prerežemo in na podlagi dinamičnih ravnotežnih enačb (od tod njihovo ime) določimo neznane sile $\mathbf{N}(s, t)$ in $M(s, t)$ v prečnem prerezu.

Osnovni opis lege in prereza. Lokacija poljubne materialne točke na težiščni osi v začetnem stanju ravnega, a za kot φ_0 zasukanega nosilca, je določena s krajevnim vektorjem \mathbf{r}_0 :

$$\mathbf{r}_0(s) = \begin{bmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 + s \cos \varphi_0 \\ Y_0 + s \sin \varphi_0 \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

kjer je s ločna dolžina nedeformiranega nosilca, X_0 in Y_0 pa sta koordinati pri $s = 0$ oz. na začetku nosilca. Ta materialna točka na osi deformiranega nosilca je določena s krajevnim vektorjem $\mathbf{r}(s, t)$:

$$\mathbf{r}(s, t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}(s, t) = \begin{bmatrix} X + u(s, t) \\ Y + v(s, t) \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Z A označujemo ploščino prečnega prereza, z A_s ploščino strižnega prečnega prereza in z J vztrajnostni moment prečnega prereza nosilca glede na njegovo težišče. Nosilec je v osi obtežen z linijsko obtežbo \mathbf{q}

in linijsko momentno obtežbo m_Z ; obe sta merjeni na enoto dolžine nedeformiranega nosilca. Komponenta \mathbf{q} v globalni smeri X je q_X , komponenta v globalni smeri Y pa q_Y . $\mathbf{\Lambda}$ je rotacijska matrika, ki pri matričnem množenju z leve zasuka vektor v protiurnem smislu; zapiše se:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Rotacijska matrika $\mathbf{\Lambda}$ je ortogonalna matrika, zato med drugim velja $\mathbf{\Lambda}^{-1} = \mathbf{\Lambda}^T$, kar bomo v nadaljevanju pridoma izkoriščali. Dodatno velja še:

$$\mathbf{\Lambda}' = \mathbf{W}\mathbf{\Lambda}\varphi', \quad (2.5)$$

kjer smo z apostrofom $(\bullet)' = d(\bullet)/ds$ označili odvajanje po ločni koordinati s ; \mathbf{W} je antisimetrična matrika:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Omenimo še, da je množenje matrik $\mathbf{\Lambda}$ in \mathbf{W} komutativno, tudi če je katerakoli od matrik transponirana.

Ko vpeljemo še oznaki E in G za elastični in strižni elastični modul, lahko togostne in vztrajnostne lastnosti prečnega prereza zapišemo z matrikama

$$\mathbf{c}_E = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & GA_S \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{c}_\rho = \begin{bmatrix} A\rho & 0 \\ 0 & A\rho \end{bmatrix} = A\rho \mathbf{I}, \quad (2.8)$$

kjer je \mathbf{I} identitetna matrika velikosti 2×2 .

2.3 Osnovni izreki in definicije

Če ne upoštevamo termomehanskih zakonov, ki niso predmet disertacije, za obravnavani problem veljajo štirje osnovni izreki na katere se bomo v nadaljevanju sklicevali in jih zato na tem mestu zapišemo.

Izrek o ohranitvi mase pravi, da se masa poljubnega dela konstrukcije, če mu nič mase ne dodamo in nič ne odvezamo, ne spreminja. Iz tega sledi, da je

$$\rho dV = \rho_0 dV_0, \quad (2.9)$$

kjer sta ρ in dV gostota materiala in infinitezimalni delec volumna v trenutni (deformirani) legi ter ρ_0 in dV_0 isti količini v začetni (nedeformirani) legi.

Izrek o ohranitvi energije pravi, da se mehanska energija sistema ohranja, če na sistem deluje le konzervativna obtežba, lahko pa se spreminja njena oblika (npr. iz kinetične v deformacijsko). Mehanska energija sistema se lahko ohranja tudi, če je sistem podprt.

Izrek o gibalni količini pravi, da je odvod gibalne količine $\dot{\mathbf{p}}$ sistema (telesa, nosilca) v vsakem trenutku enak rezultanti zunanjih sil \mathbf{R}_{rez} , ki delujejo nanj:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R}_{rez}. \quad (2.10)$$

Gibalna količina je definirana kot

$$\mathbf{p} = \int_0^L A \rho \dot{\mathbf{u}} ds. \quad (2.11)$$

Za poljuben algoritem, ki želi ohranjati gibalno količino neobremenjenega sistema, mora veljati $\Delta \mathbf{p} = 0$. Ker iz tega pogoja sledi $\dot{\mathbf{p}} = 0$, lahko iz enačbe oz. izreka o gibalni količini (2.10) razberemo, da mora biti rezultanta zunanjih sil enaka nič, če želimo imeti ohranjanje gibalne količine. Ker podpore na konstrukcijo predstavljajo obtežbo, je očitno, da se v primeru podpor gibalna količina v splošnem ne ohranja. V primeru ohranjanja energije so podpore lahko prisotne, saj na mestih podpor ni pomikov in s tem je potencial zunanjih sil na teh mestih enak nič.

Izrek o vrtilni količini pravi, da je odvod vrtilne količine \dot{L} sistema (telesa, nosilca) v vsakem trenutku enak rezultanti zunanjih momentov M_{rez} , ki delujejo nanj:

$$\dot{L} = M_{rez}. \quad (2.12)$$

Vrtilna količina sistema je definirana kot

$$L = \int_0^L (\mathbf{r} \times \mathbf{p} + J \rho \dot{\varphi}) ds. \quad (2.13)$$

Vektorski produkt v enačbi (2.13) je zapisan za dvorazsežna vektorja in je definiran v naslednjem razdelku. Če želimo doseči ohranjanje vrtilne količine konstrukcije, ta ne sme biti podprta, kar lahko pokažemo s podobno izpeljavo kot pri gibalni količini.

Definicija vektorskega produkta v ravnini. Matematična operacija vektorskega množenja je definirana v trirazsežnem prostoru. Zato vpeljemo definicijo vektorskega produkta za množenje dvorazsežnih vektorjev, ki jo bomo uporabljali v tem delu. Definicijo vpeljemo s štirimi generičnimi simboli a , b , c in d :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a d - b c. \quad (2.14)$$

Vektorsko množenje vrne skalar, ki pove velikost (dolžino) vektorja, pravokotnega na ravnino vektorjev množiteljev. Ker vektorja množitelja ležita v ravnini (X, Y) , je smer pravokotnega vektorja v globalni smeri Z . Vektorsko množenje pa lahko zapišemo tudi z vpeljavo prej opisane matrike \mathbf{W} :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^T \mathbf{W}^T \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

V besedilu po potrebi uporabljamo oba zapisa – vektorskega in matričnega.

Deformacijska energija ravninskega nosilca je definirana kot:

$$\Pi_{\text{def}} = \frac{1}{2} \int_0^L (EA \varepsilon^2 + GA_S \gamma^2 + EJ \kappa^2) ds = \frac{1}{2} \int_0^L (\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{c}_E \boldsymbol{\varepsilon} + EJ \kappa^2) ds. \quad (2.16)$$

Potencial zunanjih sil je definiran kot:

$$\Pi_{\text{zun}} = -\mathbf{S}^T \mathbf{U}^* - \int_0^L (\mathbf{q}^T \mathbf{u} + m_Z \varphi) ds, \quad (2.17)$$

kjer je $\mathbf{S} = [S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6]^T$ vektor točkovnih sil v krajiščih nosilca (pri $s = 0$ in $s = L$), \mathbf{U}^* pa vektor pomikov v krajiščih nosilca, ki ima enako obliko in smer kot vektor točkovnih sil. Potencial zunanjih sil je po definiciji negativno *delo*.

Potencialna energija je vsota deformacijske energije in potenciala zunanjih sil:

$$\Pi_{\text{pot}} = \Pi_{\text{def}} + \Pi_{\text{zun}}. \quad (2.18)$$

Kinetična energija je definirana z naslednjim izrazom:

$$\Pi_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \int_0^L (A\rho \dot{u}^2 + A\rho \dot{v}^2 + EJ \dot{\varphi}^2) ds = \frac{1}{2} \int_0^L (\dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{c}_\rho \dot{\mathbf{u}} + EJ \dot{\varphi}^2) ds. \quad (2.19)$$

Mehanska energija oziroma totalna energija je definirana kot vsota kinetične in potencialne energije:

$$\Pi = \Pi_{\text{kin}} + \Pi_{\text{pot}}. \quad (2.20)$$

2.4 Vodilne/glavne enačbe

Dinamične ravnotežne enačbe. Če si produkt mase in pospeška predstavljamo kot negativno linijsko obtežbo, lahko dinamične ravnotežne enačbe interpretiramo kot ravnotežne enačbe, t.j. kot zahtevo, da je vsota vseh sil in vsota vseh momentov na sistem enaka nič. Za konstrukcije lahko ravnotežne enačbe zapišemo na dva različna načina: lahko jih zapišemo v obliki, ki velja v vsaki točki na nosilcu. Taki obliki pravimo krepka. Lahko pa jih zapišemo v obliki, ki zahteva, da je ravnotežje zadoščeno v nekem povprečnem smislu. To je t.i. šibka oblika.

Krepke ravnotežne enačbe se zapišejo za posamezno točko konstrukcije in imajo obliko diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned} (\mathbf{\Lambda N})' + \mathbf{q} &= A\rho \ddot{\mathbf{u}}, \\ M' + \mathbf{r}' \times \mathbf{\Lambda N} + m_Z &= J\rho \ddot{\varphi}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Z nadpisnimi pikami označujemo odvajanje po času t . Primer šibke oblike ravnotežnih enačb je princip virtualnega dela, ki se glasi:

$$\int_0^L [\mathbf{N}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} + M \delta \kappa - (\mathbf{q}^T - \ddot{\mathbf{u}} \mathbf{c}_\rho) \delta \mathbf{u} - (m_Z - J\rho \ddot{\varphi}) \delta \varphi] ds = 0. \quad (2.22)$$

V enačbi (2.22) smo z δ označili variacijo. V analitičnem smislu sta krepka in šibka oblika enačb enakovredni: če velja šibka, velja tudi krepka in obratno. Ko količine v teh enačbah diskretiziramo, pa ta enakost ne velja več. Dodatno lahko ugotovimo, da princip virtualnega dela velja v integralskem smislu, krepke ravnotežne enačbe pa eksplicitno v vsaki točki. Tretja, iz numeričnega vidika najbolj pomembna razlika je, da v krepki obliki enačb (2.21) nastopajo za eno stopnjo višji odvodi kot v šibki (2.22). To implicira zahtevo zveznosti prvih odvodov neznanih količin (C_1 zveznost) in ne samo zveznosti neznanih količin samih (C_0 zveznost). Zienkiewicz, Taylor in Zhu (2005) navajajo, da se pogosto zgodi, da formulacije s šibkimi ravnotežnimi enačbami (z implicirano C_0 zveznostjo) dajejo bolj 'fizikalno realistične' rezultate.

Matrični produkt $\mathbf{\Lambda N}$, ki nastopa v enačbi (2.21), bomo včasih nadomestili z oznako \mathbf{R} . \mathbf{R} je vektor projekcij rezultant napetosti na globalni smeri X in Y (shematski prikaz je tudi na sliki 2.1, desno zgoraj):

$$\mathbf{\Lambda N} = \mathbf{R} = [R_X, R_Y]^T. \quad (2.23)$$

Kinematične enačbe. Naše izhodišče za opis zveze (vezi) med kinematičnimi in deformacijskimi spremenljivkami so Reissnerjeve enačbe (Reissner (1972)). Zapišemo jih v naslednji obliki:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{\Lambda}^T (\mathbf{u} + \mathbf{r}_0)' + \mathbf{c}_1 = \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{r}' + \mathbf{c}_1, \\ \kappa &= \varphi'\end{aligned}\quad (2.24)$$

oziroma v komponentni obliki:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ \gamma \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u + X)' \cos \varphi + (v + Y)' \sin \varphi - 1 \\ -(u + X)' \sin \varphi + (v + Y)' \cos \varphi \\ \varphi' \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Smiselno je zapisati še obratne zveze, kjer so pomiki izraženi z deformacijami, saj se bomo v nadaljevanju nanje sklicevali:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}' &= \mathbf{\Lambda} (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{c}_1), \\ \varphi' &= \kappa.\end{aligned}\quad (2.26)$$

Enačbe (2.24) oz. (2.25) so izpeljane in veljavne ob naslednjih predpostavkah:

- pomiki in deformacije so po velikosti neomejeni¹;
- prečni prerez ostane po deformiranju nosilca raven in nedeformiran (tog);
- prečni prerez po deformiranju nosilca ni več nujno pravokoten na os nosilca;
- enačbe upoštevajo vpliv osnih, strižnih in upogibnih deformacij na pomike;
- enačbe veljajo za ravne in ukrivljene nosilce.

Ker so enačbe zapisane v ravnini, velja še:

- prečni prerez je poljuben, toda simetričen glede na ravnino (X, Y) ;
- materialne lastnosti se po prerezu spreminjajo poljubno, toda simetrično glede na ravnino (X, Y) ;
- gibanje izven ravnine (X, Y) ni možno.

Konstitucijske enačbe. S konstitucijskimi enačbami iz znane deformacije in materialnega zakona v točki osi nosilca določimo konstitucijske notranje sile v prerezu. Zveze matematično zapišemo

$$\begin{aligned}N_c &= \int_A \sigma_{nn}(\varepsilon) dA, \\ Q_c &= \int_A \sigma_{nt}(\gamma) dA, \\ M_c &= \int_A \sigma_{nn}(\varepsilon) z dA.\end{aligned}\quad (2.27)$$

σ_{nn} in σ_{nt} označujeta napetosti v ravnini prereza, določeni z normalo \mathbf{e}_n (slika 2.1). Napetost σ_{nn} deluje v smeri normale, napetost σ_{nt} pa v smeri tangente na ravnino. To sta edini od nič različni napetosti in sta funkciji le deformacij.

¹Edina omejitev je fizikalna, ki preprečuje, da bi se material stisnil v točko: $\varepsilon > -1$

Napetosti v geometrijsko nelinearnih problemih v splošnem niso trivialna reč, saj smo dolžni uporabljati take napetosti, ki so fizikalno komplementarne deformacijam. Fizikalna komplementarnost pomeni, da je produkt deformacij in napetosti enak deformacijski energiji. Reissnerjeve deformacije so energijsko komplementarne 2. Piola-Kirchhoffovim napetostim. Ker za obravnavane materiale poznamo materialni zakon na nivoju 2. Piola-Kirchhoffovih napetosti σ_{nn} in Reissnerjevih deformacij ε , so te zveze izhodišče za račun konstitucijskih spremenljivk. Za odnos med strižnimi deformacijami in napetostmi predpostavimo linearno elastični zakon. Bolj podrobno bomo funkcije $\sigma_{nn}(\varepsilon)$ spoznali v poglavju ‘6.2 Materialni modeli’.

Pri izpeljavi časovnih integratorjev, ki omogočajo ohranjanje energije, uporabljamo linearno elastični material. Za tak materialni zakon znamo enačbe (2.27) analitično integrirati in dobimo:

$$\begin{aligned} N_c &= EA \varepsilon, \\ Q_c &= GA_S \gamma, \\ M_c &= EJ \kappa, \end{aligned} \quad (2.28)$$

oziroma v matričnem zapisu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_c \\ M_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_E \varepsilon \\ EJ \kappa \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Konsistenčne enačbe zahtevajo enakost konstitucijskih sil \mathbf{N}_c in M_c z ravnotežnimi \mathbf{N} in M :

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_c &= \mathbf{N}, \\ M_c &= M. \end{aligned} \quad (2.30)$$

2.5 Analiza zapisanih enačb

Zapisi smo štiri skupine enačb (ravnotežne, kinematične, konstitucijske in konsistenčne) za štiri skupine neznank (kinematične, deformacijske, ravnotežne in konstitucijske). V vsaki skupini enačb nastopajo tri enačbe, torej skupaj 12 enačb; v vsaki skupini neznank pa nastopajo po tri neznane funkcije, torej skupaj prav tako 12 neznanih funkcij.

Da bi sistem 12 enačb za 12 neznanih funkcij lahko rešili, ga moramo prevesti na sistem n algebrajskih enačb za n neznanih diskretnih neznank. Prvi korak v tem postopku je *odločitev*, katere od neznank bomo ohranili kot osnovne neznanke in katere bomo izrazili z njimi. Če se na primer odločimo, da bodo naše osnovne neznanke le kinematične spremenljivke, t.j. pomik in zasuk, potem moramo deformacijske, ravnotežne in konstitucijske neznanke izraziti v odvisnosti od pomikov in zasuka, za kar imamo na voljo dve skupini enačb. Tak pristop je sicer najbolj pogost v mehaniki in je tudi detajlno opisan v poglavju ‘Dinamika linearno elastičnih linijskih končnih elementov z interpolacijo kinematičnih količin’. Vendar pa ni edini; drug pristop, ki je prav tako predstavljen v tem delu, je, da za neznane količine (funkcije) izberemo deformacije ter vse ostale funkcije izrazimo z njimi; temeljito je opisan v naslednjem poglavju. V taki formulaciji se poleg deformacij kot edinih neznanih funkcij pojavijo tudi dodatni neznani parametri.

V splošnem se ni potrebno omejiti na izbiro cele skupine neznank, saj je prav tako možno izpeljati formulacije, kjer se interpolirajo npr. le zasuki (Jelenić (1990)², Saje in Jelenić (1994), Jelenić in Saje (1995), Saje s sodelavci (1997), Vratnar (1998)), ali pa le pomiki v globalnem koordinatnem sistemu

²Delo je nastalo kot razširitev del Sajeta (1990, 1991) na dinamiko. Ti dve deli sta pomembni kot pionirski deli na področju geometrijsko točne teorije nosilcev, kjer se za neznane količine uporabljajo le zasuki, za določitev deformacij ε in γ pa se izkoristijo konsistenčni pogoji.

(Shabana (1997, 1998)). Svoboda pri izbiri neznanih funkcij je celo tako velika, da lahko kot neznanke obravnavamo vse količine.

3 DINAMIKA LINEARNO ELASTIČNIH LINIJSKIH KONČNIH ELEMENTOV Z INTERPOLACIJO DEFORMACIJSKIH KOLIČIN

3.1 Teorija

Kot smo ugotovili pri analizi vodilnih enačb v poglavju 3, moramo osnovne neznane količine *izbrati*. V tem poglavju si za osnovne neznane količine izberemo deformacijske količine ε in κ . Razloge in motive za tako izbiro utemeljujemo z izkušnjami raziskovalcev s temi elementi v statiki, ki so detajlno opisane v literaturi (Planinc (1998), Planinc, Saje in Čas (2001), Bratina (2003), Bratina, Saje in Planinc (2004)).

Naš cilj je, da vodilne enačbe problema pripeljemo do rešljive oblike (sistem n enačb za n diskretnih neznank) iz izhodišča, da *se interpolira le deformacijske količine*.

Zaradi preglednosti še enkrat zapišimo že nekajkrat omenjene skupine osnovnih enačb, tokrat v obliki, primerni za vpeljavo interpolacije deformacij. Iz kinematičnih enačb izrazimo kinematične spremenljivke v odvisnosti od deformacijskih:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= \mathbf{\Lambda} (\varepsilon - \mathbf{c}_1) - \mathbf{r}'_0, \\ \varphi' &= \kappa. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Pri zapisu ravnotežnih enačb (2.21) upoštevamo projekcije rezultant napetosti na globalne osi po enačbi (2.23) in \mathbf{r}' nadomestimo z izrazom iz enačbe (2.26); tako dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{R}' &= A\rho\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{q}, \\ M' - \mathbf{\Lambda} (\varepsilon - \mathbf{c}_1) \times \mathbf{\Lambda}\mathbf{N} + m_Z &= J\rho\ddot{\varphi}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ko upoštevamo še enačbo (2.15) za matrični zapis vektorskega produkta in izraz okrajšamo, dobimo

$$\begin{aligned} \mathbf{R}' &= A\rho\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{q}, \\ M' - (\varepsilon - \mathbf{c}_1)^T \mathbf{W}^T \mathbf{N} + m_Z &= J\rho\ddot{\varphi}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ker smo se omejili na linearno elastične materiale, se konstitucijske enačbe glasijo:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{c}_E \varepsilon, \\ M &= EJ \kappa. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Problem je definiran s pripadajočimi naravnimi ali bistvenimi robnimi pogoji pri $s = 0$:

$$\begin{array}{l} \mathbf{R} \\ M \end{array} \Big|_{s=0} = \begin{array}{l} [-S_1, -S_2]^T \\ -S_3 \end{array} \quad \text{ali} \quad \begin{array}{l} \mathbf{u} \\ \varphi \end{array} \Big|_{s=0} = \begin{array}{l} [U_1^*, U_2^*]^T \\ U_3^* \end{array}, \quad (3.5)$$

pri $s = L$:

$$\begin{array}{l} \mathbf{R} \\ M \end{array} \Big|_{s=L} = \begin{array}{l} [S_4, S_5]^T \\ S_6 \end{array} \quad \text{ali} \quad \begin{array}{l} \mathbf{u} \\ \varphi \end{array} \Big|_{s=L} = \begin{array}{l} [U_4^*, U_5^*]^T \\ U_6^* \end{array} \quad (3.6)$$

in z začetnimi pogoji:

$$\begin{array}{l} \mathbf{u} \\ \varphi \\ \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\varphi} \end{array} \Big|_{t=0} = \begin{array}{l} \mathbf{u}_0(s) \\ \varphi_0(s) \\ \dot{\mathbf{u}}_0(s) \\ \dot{\varphi}_0(s) \end{array}. \quad (3.7)$$

Zapisani sistem enačb (3.1), (3.3) in (3.4) ob robnih pogojih (3.5) in (3.6) ter začetnih pogojih (3.7) predstavlja sistem devetih enačb za devet neznanih funkcij po kraju in času: \mathbf{u} , φ , ε , κ , \mathbf{R} , M . Število neznanih funkcij želimo zmanjšati tako, da bodo osnovne neznanke le deformacije; to naredimo tako, da pomike in notranje sile zapišemo v odvisnosti od deformacij.

Pomike izrazimo v odvisnosti od deformacij tako, da integriramo kinematične enačbe (3.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(s) &= \mathbf{u}(0) + \int_0^s (\mathbf{\Lambda} (\varepsilon - \mathbf{c}_1) - \mathbf{r}'_0) ds, \\ \varphi(s) &= \varphi(0) + \int_0^s \kappa ds. \end{aligned} \quad (3.8)$$

S tem smo kinematične enačbe (3.1) izločili iz nabora osnovnih enačb. V odvisnosti od deformacij moramo izraziti tudi notranje sile, kar storimo tako, da integriramo enačbe (3.3):

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(s) &= \mathbf{R}(0) + \int_0^s (A\rho\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{q}) ds, \\ M(s) &= M(0) + \int_0^s [(\varepsilon - \mathbf{c}_1)^T \mathbf{W}^T \mathbf{N} - m_Z + J\rho\ddot{\varphi}] ds. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Od enačb tako ostanejo le konsistentne. Ravnotežne sile \mathbf{N} in M v konsistentnih enačbah računamo z enačbami (3.9) in (2.23), ki sedaj postanejo funkcije deformacij.

Pozornost usmerimo še k robnim pogojem pri $s = L$. Sile $\mathbf{R}(L)$ in $M(L)$ ter pomiki $\mathbf{u}(L)$ in $\varphi(L)$ so zdaj prek enačbe (3.8) funkcije deformacij. Ko to upoštevamo v naravnih robnih pogojih, dobimo:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(L) &= \mathbf{R}(0) + \int_0^L (A\rho\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{q}) ds, \\ M(L) &= M(0) + \int_0^L [(\varepsilon - \mathbf{c}_1)^T \mathbf{W}^T \mathbf{N} - m_Z + J\rho\ddot{\varphi}] ds. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Bistveni robni pogoji pri $s = L$ pa postanejo:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(L) &= \mathbf{u}(0) + \int_0^L (\mathbf{\Lambda} (\varepsilon - \mathbf{c}_1) - \mathbf{r}'_0) ds, \\ \varphi(L) &= \varphi(0) + \int_0^L \kappa ds. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Če želimo enačbe problema rešiti z metodo končnih elementov, morajo enačbe vsebovati pomike in zasuke v krajiščih. V standardnih formulacijah, kjer so pomiki osnovne neznanke problema, temu ni potrebno posvečati posebne pozornosti, saj robne vrednosti pomikov in zasuka prek vozliščnih vrednosti inherentno nastopajo v enačbah. V našem primeru ni tako in zato moramo k osnovnim enačbam, od katerih so preostale le konsistentne enačbe, dodati še bistveni robni pogoj (3.11) pri $s = L$. Ta poseg v osnovne enačbe problema ima daljnosežne posledice in je posebnost te formulacije, saj imamo zaradi

tega poleg diferencialnih enačb tudi algebrajske enačbe. S tem postane sistem enačb diferencialno-algebrajski in bistveno bolj zapleten za reševanje. Ko k enačbam dodamo še naravne robne pogoje, se enačbe problema glasijo:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N} - \mathbf{c}_E \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{0}, \\
 M - EJ \kappa &= 0, \\
 \mathbf{u}(L) - \mathbf{u}(0) - \int_0^L (\boldsymbol{\Lambda} (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{c}_1) - \mathbf{r}'_0) ds &= \mathbf{0}, \\
 \varphi(L) - \varphi(0) - \int_0^s \kappa ds &= 0, \\
 \mathbf{R}(0) + [S_1, S_2]^T &= \mathbf{0}, \\
 M(0) + S_3 &= 0, \\
 \mathbf{R}(0) + \int_0^L (A\rho\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{q}) ds - [S_4, S_5]^T &= \mathbf{0}, \\
 M(0) + \int_0^L [(\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{c}_1)^T \mathbf{W}^T \mathbf{N} - m_Z + J\rho\ddot{\varphi}] ds - S_6 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Ob teh enačbah moramo upoštevati tudi zveze, podane v enačbah (3.8) in (3.9), ki pa so le predpisi za račun pomikov in sil v odvisnosti od deformacij. Edine neznane *funkcije* koordinate s , ki nastopajo v enačbah, so deformacije $\boldsymbol{\varepsilon}$ in κ ; v enačbah pa nastopa še devet neznanih *parametrov*: $\mathbf{u}(0)$, $\varphi(0)$, $\mathbf{R}(0)$, $M(0)$, $\mathbf{u}(L)$, $\varphi(L)$. Vse omenjene količine so funkcije časa t . Enačbe rešujemo z metodo končnih elementov, kot je opisano v naslednjem poglavju.

3.2 Metoda uteženih ostankov

Z metodo uteženih ostankov lahko enačbe problema (3.12) zapišemo v integralni obliki, kar ima, kot navajajo Zienkiewicz, Taylor in Zhu (2005), določene prednosti. V skladu s to metodo sistem enačb (3.12) pomnožimo s *poljubnimi* utežmi, ki jih označimo z $\boldsymbol{\Xi}$ in Θ , ter integriramo po območju veljavnosti enačbe. Uteži $\boldsymbol{\Xi} = \boldsymbol{\Xi}(s)$ so funkcije kraja, uteži Θ pa so skalarji.

Ker sta le prvi dve enačbi veljavni na območju $s \in [0, L]$, integriramo le njiju. Ostale enačbe so veljavne le v enem od krajišč nosilca, zato integriranje ni potrebno. Tako dobimo:

$$\begin{aligned}
 \int_0^L (\mathbf{N} - \mathbf{c}_E \boldsymbol{\varepsilon})^T \boldsymbol{\Xi}_1 ds &= 0, \\
 \int_0^L (M - EJ \kappa) \boldsymbol{\Xi}_2 ds &= 0, \\
 \left(\mathbf{u}(L) - \mathbf{u}(0) - \int_0^L (\boldsymbol{\Lambda} (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{c}_1) - \mathbf{r}'_0) ds \right)^T \boldsymbol{\Theta}_1 &= 0, \\
 (\varphi(L) - \varphi(0) - \int_0^s \kappa ds) \Theta_2 &= 0, \\
 \left(\mathbf{R}(0) + [S_1, S_2]^T \right)^T \boldsymbol{\Theta}_3 &= 0, \\
 (M(0) + S_3) \Theta_4 &= 0, \\
 \left(\mathbf{R}(L) - \mathbf{R}(0) - \int_0^L (A\rho\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{q}) ds \right)^T \boldsymbol{\Theta}_5 &= 0, \\
 \left(M(L) - M(0) - \int_0^L [(\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{c}_1)^T \mathbf{W}^T \mathbf{N} - m_Z + J\rho\ddot{\varphi}] ds \right) \Theta_6 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Z izbiro različnih utežnih funkcij dobi metoda uteženih ostankov različna imena. Če vpeljemo za utežne funkcije enake nastavke kot za neznane funkcije, se metoda imenuje Galerkinova metoda. Če vpeljemo Diracove delta funkcije, je metoda kolokacijska.

3.3 Galerkinova metoda končnih elementov

Interpolacija po kraju. Za interpolacijo neznanih funkcij uporabimo Lagrangeve polinome stopnje n_{itp} , ki jih označujemo s $P_i, i = 1, \dots, n_{itp}$:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \kappa \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_{itp}} P_i \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_i \\ \kappa_i \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}_i$ in κ_i označujeta diskretne vrednosti deformacij v interpolacijskih točkah, ki jih ekvidistantno razporedimo po dolžini elementa: $s_i = (i - 1) \frac{L}{n_{itp} - 1}$. Ker želimo izpeljati Galerkinovo metodo končnih elementov, izberemo enak nastavek tudi za interpolacijo uteži:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Xi}_1 \\ \Xi_2 \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n_{itp}} P_j \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Xi}_{1,j} \\ \Xi_{2,j} \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Uteži $\boldsymbol{\Theta}_i$ so konstante in ne funkcije, zato jih ni potrebno aproksimirati. Ko interpolacijska nastavka (3.14) in (3.15) vstavimo v enačbe (3.13), dobimo:

$$\begin{aligned} \int_0^L (\mathbf{N} - \mathbf{c}_E \sum_{i=1}^{n_{itp}} P_i \boldsymbol{\varepsilon}_i)^T \sum_{j=1}^{n_{itp}} P_j \boldsymbol{\Xi}_{1,j} ds &= 0, \\ \int_0^L (M - EJ \sum_{i=1}^{n_{itp}} P_i \kappa_i) \sum_{j=1}^{n_{itp}} P_j \Xi_{2,j} ds &= 0, \\ \left(\mathbf{u}(L) - \mathbf{u}(0) - \int_0^L (\boldsymbol{\Lambda} (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{c}_1) - \mathbf{r}'_0) ds \right)^T \boldsymbol{\Theta}_1 &= 0, \\ (\varphi(L) - \varphi(0) - \int_0^s \kappa ds) \boldsymbol{\Theta}_2 &= 0, \\ \left(\mathbf{R}(0) + [S_1, S_2]^T \right)^T \boldsymbol{\Theta}_3 &= 0, \\ (M(0) + S_3) \boldsymbol{\Theta}_4 &= 0, \\ \left(\mathbf{R}(L) - \mathbf{R}(0) - \int_0^L (A\rho\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{q}) ds \right)^T \boldsymbol{\Theta}_5 &= 0, \\ \left(M(L) - M(0) - \int_0^L [(\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{c}_1)^T \mathbf{W}^T \mathbf{N} - m_Z + J\rho\ddot{\varphi}] ds \right) \boldsymbol{\Theta}_6 &= 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ker so uteži $\boldsymbol{\Xi}_{1,j}, \Xi_{2,j}$ in $\boldsymbol{\Theta}_i$ poljubne vrednosti, morajo biti členi, s katerimi so te uteži pomnožene, enaki nič, da bo enačbam (3.16) identično zadoščeno. Tako dobimo sistem $3 n_{itp} + 9$ enačb za $3 n_{itp} + 9$ neznanek:

$$\mathbf{g} \equiv \begin{bmatrix} \int_0^L (\mathbf{N} - \mathbf{c}_E \sum_{i=1}^{n_{itp}} P_i \boldsymbol{\varepsilon}_i) P_j ds = \mathbf{0}, \quad j = 1, \dots, n_{itp} \\ \int_0^L (M - EJ \sum_{i=1}^{n_{itp}} P_i \kappa_i) P_j ds = 0, \quad j = 1, \dots, n_{itp} \\ \mathbf{u}(L) - \mathbf{u}(0) - \int_0^L (\boldsymbol{\Lambda} (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{c}_1) - \mathbf{r}'_0) ds = \mathbf{0} \\ \varphi(L) - \varphi(0) - \int_0^s \kappa ds = 0 \\ \mathbf{R}(0) + [S_1, S_2]^T = \mathbf{0} \\ M(0) + S_3 = 0 \\ \mathbf{R}(L) - \mathbf{R}(0) - \int_0^L (A\rho\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{q}) ds = \mathbf{0} \\ M(L) - M(0) - \int_0^L [(\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{c}_1)^T \mathbf{W}^T \mathbf{N} - m_Z + J\rho\ddot{\varphi}] ds = 0 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Zapisani sistem enačb je semi-diskreten sistem diferencialno-algebrskih enačb. Pred reševanjem moramo vpeljati še diskretizacijo po času in s tem sistem prevesti na algebrskega. Opomnimo, da dobljeni sistem enačb nima standardne oblike $\mathbf{M} \ddot{\boldsymbol{\Upsilon}} + \mathbf{K}(\boldsymbol{\Upsilon}) \boldsymbol{\Upsilon} + \mathbf{F}(\boldsymbol{\Upsilon}) = \mathbf{0}$, kjer bi \mathbf{M} predstavljal masno matriko, \mathbf{K} togostno matriko, \mathbf{F} residual in $\boldsymbol{\Upsilon}$ vektor neznanih količin.

Interpolacija in integracija po času. Za interpolacijo po času uporabimo Newmarkovo (Newmark (1959)) časovno integracijsko shemo (o časovni integraciji bo v nadaljevanju še veliko govora, predvsem v naslednjem poglavju). V enačbah nastopajo prvi in drugi časovni odvodi količin ε_i , κ_i , $\mathbf{u}(0)$, $\varphi(0)$, ki jih po času interpoliramo z Newmarkovimi diskretizacijskimi nastavki:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i,n+1} &= \varepsilon_{i,n} + \frac{\Delta t^2}{2} ((1 - 2\beta_t) \ddot{\varepsilon}_{i,n} + 2\beta_t \ddot{\varepsilon}_{i,n+1}) \quad i = 1, \dots, n_{itp} \\ \kappa_{i,n+1} &= \kappa_{i,n} + \frac{\Delta t^2}{2} ((1 - 2\beta_t) \ddot{\kappa}_{i,n} + 2\beta_t \ddot{\kappa}_{i,n+1}) \quad i = 1, \dots, n_{itp} \\ \mathbf{u}(0)_{n+1} &= \mathbf{u}(0)_n + \frac{\Delta t^2}{2} ((1 - 2\beta_t) \ddot{\mathbf{u}}(0)_{i,n} + 2\beta_t \ddot{\mathbf{u}}_{i,n+1}) \\ \varphi(0)_{n+1} &= \varphi(0)_n + \frac{\Delta t^2}{2} ((1 - 2\beta_t) \ddot{\varphi}(0)_n + 2\beta_t \ddot{\varphi}(0)_{n+1}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{i,n+1} &= \dot{\varepsilon}_{i,n} + \Delta t ((1 - \gamma_t) \ddot{\varepsilon}_{i,n} + \gamma_t \ddot{\varepsilon}_{i,n+1}) \quad i = 1, \dots, n_{itp} \\ \dot{\kappa}_{i,n+1} &= \dot{\kappa}_{i,n} + \Delta t ((1 - \gamma_t) \ddot{\kappa}_{i,n} + \gamma_t \ddot{\kappa}_{i,n+1}) \quad i = 1, \dots, n_{itp} \\ \dot{\mathbf{u}}(0)_{n+1} &= \dot{\mathbf{u}}(0)_{i,n} + \Delta t ((1 - \gamma_t) \ddot{\mathbf{u}}_{i,n} + \gamma_t \ddot{\mathbf{u}}_{i,n+1}) \\ \dot{\varphi}(0)_{n+1} &= \dot{\varphi}(0)_n + \Delta t ((1 - \gamma_t) \ddot{\varphi}(0)_n + \gamma_t \ddot{\varphi}(0)_{n+1}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Indeks $(\bullet)_n$ označuje znane (skonvergirane) vrednosti pri času t_n , indeks $(\bullet)_{n+1}$ pa vrednosti pri času $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, kjer je Δt velikost časovnega koraka. β_t in γ_t sta parametra Newmarkove časovno integracijske sheme. Pri vrednostih $\beta_t = 1/4$ in $\gamma_t = 1/2$ dobimo znano in pogosto uporabljano trapezno pravilo s konstantnimi pospeški.

Enačbi (3.18) in (3.19) se pri implementaciji uporabljata v obrnjeni obliki, saj iz enačbe (3.18) iz znanih vrednosti $(\bullet)_{n+1}$ računamo pospeške $(\ddot{\bullet})_{n+1}$, ki jih nato vstavimo v enačbo (3.19), da dobimo hitrosti $(\dot{\bullet})_{n+1}$.

3.4 Numerični vidik formulacije

Ko poznamo diskretne vrednosti deformacij v integracijskih točkah $\varepsilon_{i,n+1}$ in $\kappa_{i,n+1}$, lahko izvednotimo vse ostale količine. Problem je v tem, da ti računi niso preprosti, saj zahtevajo izvednotenje večkrat vgnezenih integralov. Denimo, da želimo izračunati vrednosti projekcij sil \mathbf{R} v i -ti točki. Po enačbi (3.9) je za to potrebno integrirati pospešek $\ddot{\mathbf{u}}$, ki ga dobimo z dvakratnim odvajanjem pomika \mathbf{u} iz enačbe (3.8) po času :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(s_i) &= \mathbf{R}(0) + \int_0^{s_i} (A\rho\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{q}) ds = \\ &= \mathbf{R}(0) + \int_0^{s_i} \left(A\rho\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{0}) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\int_0^s (\mathbf{\Lambda} (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{c}_1) - \mathbf{r}'_0) ds \right) - \mathbf{q} \right) ds. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Ker je potrebno vse integrale izvednotiti numerično, vpeljava dvojne integracije drastično poveča število računskih operacij, saj je potrebno za izvednotenje v vsaki integracijski točki zunanega integrala izvednotiti celoten notranji integral. Število potrebnih računskih operacij za izvednotenje enojnega integrala, n_{itg} , naraste na $n_{itg} + n_{itg}^2$ operacij za izvednotenje integrala z enim vgnezenim integralom. Pri izvednotenju izraza v enačbi (3.20) se dejansko pojavi še eno vgnezdenje, ker v rotacijski matriki $\mathbf{\Lambda}$ nastopajo zasuki, ki se jih računa z integracijo upogibnih deformacij po enačbi (3.8). V seštevku je najbolj zapleten člen v togostni matriki kar petkrat gnezden. To je računsko izredno potratno in algoritem je v takšni obliki nekonkurenčen drugim formulacijam.

Pomembno je tudi vprašanje stopnje integracije n_{itg} , saj v izrazu nastopajo kombinacije trigonometričnih funkcij, za katere ne moremo vnaprej določiti zadostne stopnje integracije in ne preostane nam drugega, kot da jo določimo s poskušanjem.

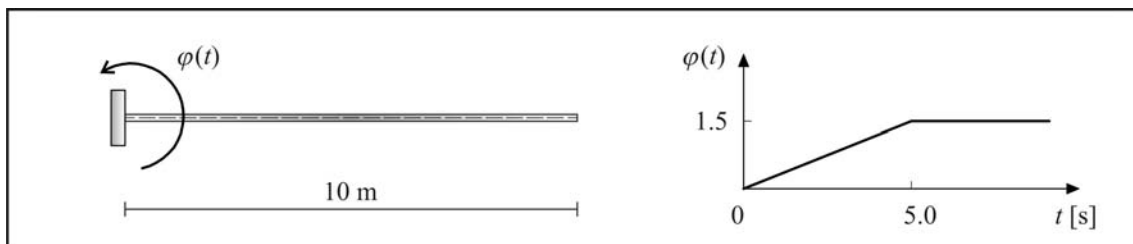
3.5 Numerični primer

Zasuk robotske roke. Račun obravnava t.i. dvig podajne robotske roke, ki sta ga za testiranje zmogljivosti in natančnosti formulacij geometrijsko točnih nosilcev predlagala Simo in Vu-Quoc (1986). 10 m dolga podajna ravna robotska roka leži na tleh, zatem pa se jo v vpetem vozlišču zasuka okoli navpične osi za 1.5 radianov v 5 sekundah, kot je prikazano na sliki 3.1.

Materialni parametri primera so:

$$\begin{aligned} EA = GA_S = 10000 \text{ N}, \quad EI = 500 \text{ N/cm}^2, \\ A\rho = 1 \text{ kg/cm}, \quad J\rho = 10 \text{ kg cm}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

zasuk v vpetišču v odvisnosti od časa pa je prikazan na sliki 3.1, desno.

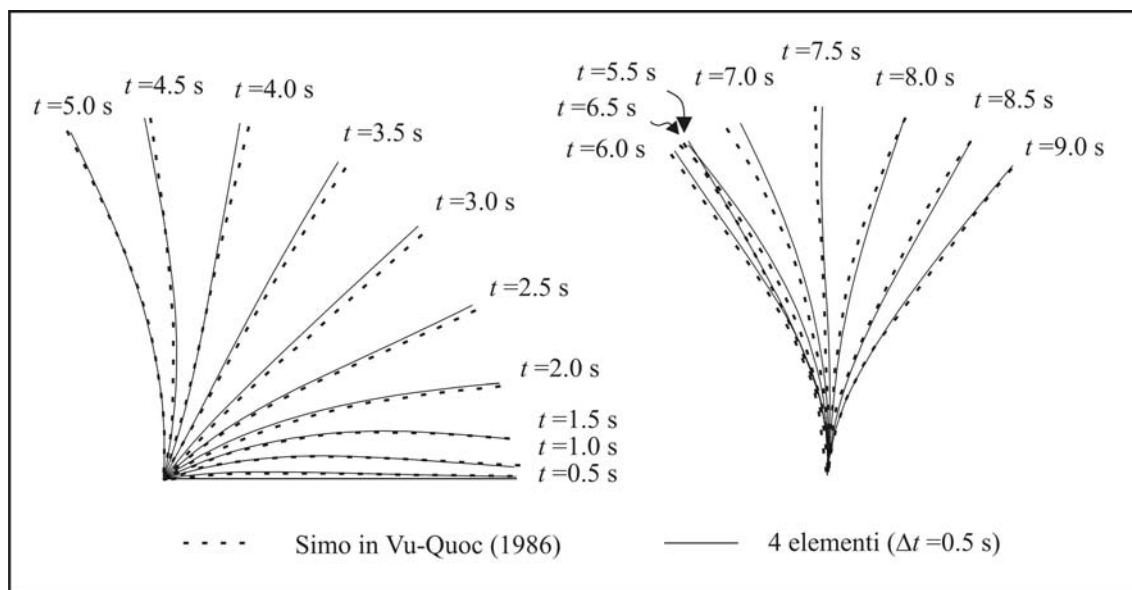


Slika 3.1: Geometrija problema, levo; zasuk v vpetišču v odvisnosti od časa, desno.

Figure 3.1: Geometry of the problem, left; rotation at pinned end vs time, right.

Problem rešimo s štirimi končnimi elementi s konstantno interpolacijo deformacij in 5-točkovno Lobattovo integracijo, za časovno integracijo uporabimo trapezno pravilo ($\beta_t = 1/4$ in $\gamma_t = 1/2$) ter konstantni časovni korak $\Delta t = 0.5$ s. Rezultati so prikazani na sliki 3.2, kjer so za primerjavo vrisani tudi rezultati, ki sta jih dobila Simo in Vu-Quoc (1986) s končnimi elementi z linearno interpolacijo pomikov ter s selektivno reducirano integracijo zaradi preprečitve blokiranja.

Opazimo lahko, da se rezultati obeh formulacij dobro ujemajo. Do blokiranja deformacijskih elementov ni prišlo. Več numeričnih testov te formulacije lahko bralec najde v članku Gamsa s sodel. (2007a) v prilogi A.



Slika 3.2: Odziv sistema in primerjava z rezultati Sima in Vu-Quoca (1986).
Figure 3.2: Response of the system and comparison to results of Simo and Vu-Quoc (1986).

3.6 Sklepi

Izpeljali in implementirali smo končne elemente, ki temeljijo na interpolaciji deformacijskih količin kot edinih neznanih funkcijah problema. V formulaciji so uporabljene točne kinematične zveze, v katerih upoštevamo vpliv osnih, upogibnih in strižnih deformacij. Na numeričnih primerih se je pokazala velika natančnost teh elementov tudi v primerih mrež z majhnim številom končnih elementov. Ker elementi ne blokirajo, ni potrebno uporabiti nobenih posebnih ukrepov za odpravljanje blokiranja, kar je prednost.

V računih se je pokazalo, da kombinacija Newmarkove časovne integracijske sheme in elementov z interpolacijo deformacij ni brezpogojno stabilna. To se pokaže z rastjo mehanske energije sicer konzervativne konstrukcije ter končno v izgubi konvergence Newton-Raphsonovega postopka reševanja sistema nelinearnih algebrskih enačb. Kot zadnje pa omenimo, da je formulacija s stališča računskih časov inferiorna v primerjavi z drugimi formulacijami zaradi gnezdenja integralov.

Zadnji dve hibi formulacije poskušamo odpraviti v naslednjem razdelku. Problem časovne nestabilnosti občutno zmanjšamo, ne pa tudi odpravimo, z uporabo drugačne časovne integracijske sheme, numerično zahtevnost pa bistveno zmanjšamo z drugačnim pristopom k reševanju.

3.7 Izboljšava elementov z interpolacijo deformacij

Izboljšava numeričnega postopka. S posebnim ukrepom se je možno izogniti gnezdenju integralov v izrazih. Ideja, ki nas pripelje do tega ukrepa, posnema 'filozofijo' numerične integracije.

Pri numerični integraciji integrand interpoliramo z interpolacijskimi funkcijami P_i^* kot linearno kombinacijo interpolacijskih funkcij in vrednosti integranda. Ta interpolacija, zapisana na poljubni generični

funkciji $f(\xi)$, se glasi:

$$f(\xi) = \sum_{i=1}^{n_{itp}} f(\xi_i) P_i^*(\xi). \quad (3.22)$$

S ξ smo označili neodvisno spremenljivko, s ξ_i pa njene vrednosti v izbranih (zaenkrat poljubnih) interpolacijskih točkah. Opozorimo, da je na desni strani enačbe (3.22) le $P_i^*(\xi)$ funkcija koordinate ξ . Pri integriranju enačbe (3.22) po spremenljivki ξ na območju $\xi \in [-1, 1]$, $f(\xi_i)$ predstavljajo konstante. Integracijo interpolacijskih funkcij $P_i^*(\xi)$ opravimo le enkrat, ker se ne spreminjajo in njihove integrale označimo z w_i . Tako se integral enačbe (3.22) zapiše:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{n_{itp}} w_i f(\xi_i). \quad (3.23)$$

S pravilno izbiro interpolacijskih funkcij in interpolacijskih točk lahko izboljšamo natančnost integracije. Za integracijo polinomov je optimalna izbira Gaussova integracija, ki pri danem številu interpolacijskih točk n_{itp} točno zintegriira polinom najvišje možne stopnje. Vendar pa pri tej integraciji ni uteži pri koordinatah $\xi = \pm 1$, kar si pri materialno nelinearnih nosilcih želimo. Dobra izbira integracije, ki vsebuje integracijske točke tudi pri $\xi = \pm 1$, je t.i. Gauss-Lobattova integracija oz. skrajšano Lobattova integracija. Vsa sodobna matematična okolja (Mathematica, Matlab) uporabljajo adaptivno določevanje stopnje integracije, da lahko izračunajo integrale do zahtevane natančnosti. V metodi končnih elementov takih prijemov praviloma ne uporabljamo.

V primeru naše formulacije se zgoraj opisana ideja numerične integracije implementira na naslednji način: začnemo z interpoliranjem odvodov pomikov iz enačbe (3.1):

$$\mathbf{u}'(s) = \sum_{i=1}^{n_{itp}} P_i(s) (\mathbf{\Lambda} (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{c}_1) - \mathbf{r}'_0)_i. \quad (3.24)$$

Ta interpolacija ni običajna, saj ne interpoliramo direktno osnovnih neznanih funkcij kot npr. v enačbah (3.14) ali (3.15), temveč iz njih izpeljane izraze. Z integriranjem enačbe (3.24) dobimo pomike:

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{u}(0) + \sum_{i=1}^{n_{itp}} {}^I P_i(s) (\mathbf{\Lambda} (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{c}_1) - \mathbf{r}'_0)_i. \quad (3.25)$$

Z oznako ${}^I P_i(s) = \int_0^s P_i d\xi$ za $i = 1, \dots, n_{itp}$ smo označili integrale Lagrangevih polinomov. Zasuke dobimo direktno z integracijo zadnje izmed enačb (3.1):

$$\varphi(s) = \varphi(0) + \sum_{i=1}^{n_{itp}} {}^I P_i(s) \kappa_i. \quad (3.26)$$

Nadalje interpoliramo tudi odvod ravnotežnega momenta, ki je zapisan v ravnotežnih enačbah (3.3):

$$\mathbf{M}' = \sum_{i=1}^{n_{itp}} P_i(s) ((\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{c}_1)^T \mathbf{W}^T \mathbf{N} - m_Z + J\rho\ddot{\varphi})_i. \quad (3.27)$$

Po integraciji dobimo

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(0) + \sum_{i=1}^{n_{itp}} {}^I P_i(s) ((\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{c}_1)^T \mathbf{W}^T \mathbf{N} - m_Z + J\rho\ddot{\varphi})_i. \quad (3.28)$$

Z enačbami (3.25), (3.26) in (3.28) dobimo pomike, zasuke in momente v poljubni točki samo z integriranjem Lagrangevih polinomov, kar je potrebno storiti le enkrat. Interpolacije, ki jih opisujemo v tem poglavju, so le nastavki za numerično izvedenost integralov in jih ne smemo šteti za interpolacijo v smislu metode končnih elementov.

Analogno kot v primeru pomikov, zasuka in momenta postopamo pri računu pospeškov, ki so vgnезdeni pri računu notranjih sil \mathbf{R} in M :

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{u}}(s) &= \ddot{\mathbf{u}}(0) + \sum_{i=1}^{n_{itp}} {}^I P_i(s) \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{\Lambda} (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{c}_1) - \mathbf{r}'_0)_i, \\ \ddot{\varphi}(s) &= \ddot{\varphi}(0) + \sum_{i=1}^{n_{itp}} {}^I P_i(s) \ddot{\kappa}_i.\end{aligned}\quad (3.29)$$

Po integraciji dobimo:

$$\begin{aligned}\int_0^L \ddot{\mathbf{u}}(s) ds &= \dot{\mathbf{u}}(0) s + \sum_{i=1}^{n_{itp}} {}^{II} P_i(s) \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{\Lambda} (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{c}_1) - \mathbf{r}'_0)_i, \\ \int_0^L \ddot{\varphi}(s) ds &= \dot{\varphi}(0) s + \sum_{i=1}^{n_{itp}} {}^{II} P_i(s) \ddot{\kappa}_i,\end{aligned}\quad (3.30)$$

kjer smo z ${}^{II} P_i(s) = \int_0^s \int_0^\xi P_i d\eta d\xi$ označili druge integrale Lagrangevih polinomov.

Kolokacijska metoda končnih elementov. Zaradi želje, da še bolj zmanjšamo število integralov po nosilcu, vrsto metode spremenimo v kolokacijsko. Motiv je tudi v tem, da želimo ves čas delati le z vrednostmi v interpolacijskih točkah, ki bi se ujemale s kolokacijskimi točkami, kar bi še nadalje poenostavilo numerični postopek. Interpolacijske in posledično tudi kolokacijske točke so še vedno ekvidistantno razporejene po nosilcu. Nastavki za interpolacijo deformacij ostanejo enaki kot prej, uteži Ξ pa sedaj aproksimiramo z Diracovimi funkcijami:

$$\begin{bmatrix} \Xi_1 \\ \Xi_2 \end{bmatrix} = \delta_j(s) \begin{bmatrix} \Xi_{1,j} \\ \Xi_{2,j} \end{bmatrix}, \quad \text{za } j = 1, \dots, n_{itp}\quad (3.31)$$

kjer je δ_i Diracova funkcija:

$$\delta_j(s) = \begin{cases} \infty; & \text{če } s = s_j \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}\quad (3.32)$$

in zanjo velja $\int_0^L \delta_j(s) ds = 1$ za $j = 1, \dots, n_{itp}$. S s_j za $j = 1, \dots, n_{itp}$, smo označili koordinate kolokacijskih točk. Zaradi ujemanja kolokacijskih in interpolacijskih točk pri $i = j$ velja $s_i = s_j$.

Enačbe (3.13) z vpeljavo utežnih funkcij (3.31) postanejo:

$$\begin{aligned}(\mathbf{N} - \mathbf{c}_E \sum_{i=1}^{n_{itp}} P_i \boldsymbol{\varepsilon}_i)^T \Xi_{1,j} &= 0, \quad j = 1, \dots, n_{itp} \\ (M - EJ \sum_{i=1}^{n_{itp}} P_i \kappa_i) \Xi_{2,j} &= 0, \quad j = 1, \dots, n_{itp} \\ \left(\mathbf{u}(L) - \mathbf{u}(0) - \int_0^L (\mathbf{\Lambda} (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{c}_1) - \mathbf{r}'_0) ds \right)^T \Theta_1 &= 0, \\ (\varphi(L) - \varphi(0) - \int_0^L \kappa ds) \Theta_2 &= 0, \\ \left(\mathbf{R}(0) + [S_1, S_2]^T \right)^T \Theta_3 &= 0, \\ (M(0) + S_3) \Theta_4 &= 0, \\ \left(\mathbf{R}(L) - \mathbf{R}(0) - \int_0^L (A\rho\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{q}) ds \right)^T \Theta_5 &= 0, \\ \left(M(L) - M(0) - \int_0^L [(\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{c}_1)^T \mathbf{W}^T \mathbf{N} - m_Z + J\rho\ddot{\varphi}] ds \right) \Theta_6 &= 0.\end{aligned}\quad (3.33)$$

Ker so uteži $\Xi_{1,j}$, $\Xi_{2,j}$ in Θ_i poljubne, morajo biti člani, s katerimi so pomnožene, enaki nič, če želimo, da je enačbam (3.33) identično zadoščeno. Zaradi ujemanja interpolacijskih in kolokacijskih točk lahko

izpustimo množenje z Lagrangevimi polinomi (slednji so taki, da ima i -ti polinom P_i v i -ti interpolacijski točki s_i vrednost 1, v ostalih pa 0) in indeks j nadomestimo z indeksom i ter dobimo

$$\mathbf{g} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{N}_i - \mathbf{c}_E \boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, n_{\text{itp}} \\ M_i - EJ \kappa_i = 0, \quad i = 1, \dots, n_{\text{itp}} \\ \mathbf{u}(L) - \mathbf{u}(0) - \int_0^L (\boldsymbol{\Lambda} (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{c}_1) - \mathbf{r}'_0) ds = \mathbf{0} \\ \varphi(L) - \varphi(0) - \int_0^s \kappa ds = 0 \\ \mathbf{R}(0) + [S_1, S_2]^T = \mathbf{0} \\ M(0) + S_3 = 0 \\ \mathbf{R}(L) - \mathbf{R}(0) - \int_0^L (A\rho\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{q}) ds = \mathbf{0} \\ M(L) - M(0) - \int_0^L [(\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{c}_1)^T \mathbf{W}^T \mathbf{N} - m_Z + J\rho\ddot{\varphi}] ds = 0 \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Zopet smo dobili sistem $3 n_{\text{itp}} + 9$ enačb za $3 n_{\text{itp}} + 9$ neznank, ki pa nima standardne oblike. Omenimo še to, da smo na nivoju končnega elementa iz formulacije izločili vsakršno integracijo, le Lagrangeve polinome je potrebno že pred začetkom analize dvakrat zaporedoma integrirati. Količine $^I P_i$ in $^{II} P_i$ so odvisne od dolžine elementov in zato jih je potrebno pripraviti za vsak element posebej.

Časovna integracija. Za interpolacijo po času tokrat uporabimo t.i. sredinsko oz. midpoint časovno integracijsko shemo (npr. Stander in Stein (1995)). O midpoint integraciji bomo podrobno govorili v naslednjem poglavju, zato naj omenimo le, da ob pravilni uporabi midpoint časovne integracije postanejo nelinearni končni elementi, osnovani na pomikih, brezpogojno stabilni, ker zadoščajo kriteriju ohranjanja energije. Preveriti smo želeli, če ta ugodna lastnost velja tudi za deformacijske končne elemente. Pri teh elementih moramo poleg časovnih odvodov, ki jih računamo po sredinskem pravilu, zadoščati tudi enačbam dinamičnega ravnotežja pri sredinskem času $t_m = t_n + \Delta t/2$. Pri vrednotenju količin pri sredinskem času pa je potrebno skoraj praviloma uporabiti aritmetično povprečje. Diskretizacijski nastavki so:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{i,m} &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}_{i,n} + \boldsymbol{\varepsilon}_{i,n+1}), \\ \kappa_{i,m} &= \frac{1}{2} (\kappa_{i,n} + \kappa_{i,n+1}), \\ \mathbf{u}(0)_m &= \frac{1}{2} (\mathbf{u}(0)_{i,n} + \mathbf{u}(0)_{i,n+1}), \\ \varphi(0)_m &= \frac{1}{2} (\varphi(0)_{i,n} + \varphi(0)_{i,n+1}), \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i,m} &= \frac{1}{\Delta t} (\boldsymbol{\varepsilon}_{i,n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{i,n}), \\ \dot{\kappa}_{i,m} &= \frac{1}{\Delta t} (\kappa_{i,n+1} - \kappa_{i,n}), \\ \dot{\mathbf{u}}(0)_m &= \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{u}(0)_{i,n+1} - \mathbf{u}(0)_{i,n}), \\ \dot{\varphi}(0)_m &= \frac{1}{\Delta t} (\varphi(0)_{i,n+1} - \varphi(0)_{i,n}), \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i,m} &= \frac{2}{\Delta t^2} (\boldsymbol{\varepsilon}_{i,n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{i,n} - \Delta t \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{i,n}), \\ \ddot{\kappa}_{i,m} &= \frac{2}{\Delta t^2} (\kappa_{i,n+1} - \kappa_{i,n} - \Delta t \dot{\kappa}_{i,n}), \\ \ddot{\mathbf{u}}(0)_m &= \frac{2}{\Delta t^2} (\mathbf{u}(0)_{i,n+1} - \mathbf{u}(0)_{i,n} - \Delta t \dot{\mathbf{u}}(0)_n), \\ \ddot{\varphi}(0)_m &= \frac{2}{\Delta t^2} (\varphi(0)_{i,n+1} - \varphi(0)_{i,n} - \Delta t \dot{\varphi}(0)_n). \end{aligned} \quad (3.37)$$

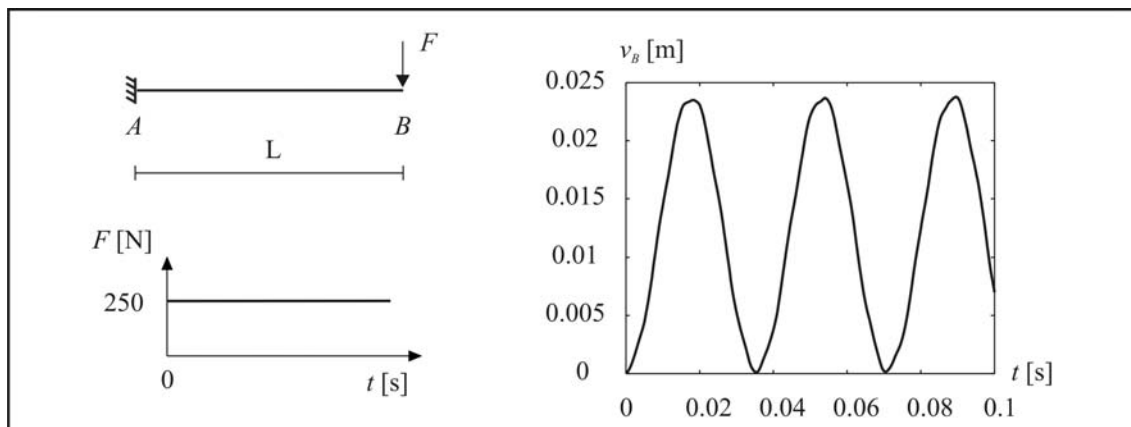
Indeks $(\bullet)_m$ označuje vrednosti pri času t_m . K tem nastavkom moramo dodati še nastavek za popravek

hitrosti:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{i,n+1} &= \frac{2}{\Delta t} (\epsilon_{i,n+1} - \epsilon_{i,n}) - \dot{\epsilon}_{i,n}, \\ \dot{\kappa}_{i,n+1} &= \frac{2}{\Delta t} (\kappa_{i,n+1} - \kappa_{i,n}) - \dot{\kappa}_{i,n}, \\ \dot{\mathbf{u}}(0)_{n+1} &= \frac{2}{\Delta t} (\mathbf{u}(0)_{i,n+1} - \mathbf{u}(0)_{i,n}) - \dot{\mathbf{u}}(0)_n, \\ \dot{\varphi}(0)_{n+1} &= \frac{2}{\Delta t} (\varphi(0)_{i,n+1} - \varphi(0)_{i,n}) - \dot{\varphi}(0)_n.\end{aligned}\tag{3.38}$$

3.8 Numerični primer

Nihanje konzole. V tem računskem primeru na 'preprostem' primeru konzole primerjamo originalno in izboljšano formulacijo z interpolacijo deformacij. Geometrijski podatki konzole so namerno izbrani tako, da bi formulacija, osnovana na pomikih, blokirala (Rong in Lu, 2003).



Slika 3.3: Računski model konzole z obtežbo, levo; povos prostega konca (v_B) v odvisnosti od časa, desno.

Figure 3.3: Cantilever beam model and load, left; time-history response for tip deflection v_B , right.

Konzola (slika 3.3, levo) je na prostem koncu obremenjena s silo 250 N, ki jo hipoma nanesemo na konzolo. Prečni prerez konzole je poln pravokotnik. Po Rongu in Luju (2003) velja, da formulacija z interpolacijo pomikov blokira, če velja $\log_{10}(L/i_y) > 1$, kjer je $i_y = \sqrt{I_y/A}$ vztrajnostni polmer prereza. V skladu s tem pogojem smo izbrali razmerje $\log_{10}(L/i_y) = 2$, dolžino konzole $L = 1$ m in širino prečnega prereza $b = 0.01$ m. Višino prečnega prereza h smo dobili z računom $h = L\sqrt{12}/10^2 \approx 0.03464$ m. Elastični modul materiala je $E = 2.1 \times 10^{11}$ N/m², kar ustreza jeklu. Za račun odziva smo uporabili časovni korak $\Delta t = 0.0005$ s, odziv pa smo računali do časa 0.1 s. Povos prostega konca konzole v odvisnosti od časa je prikazan na sliki 3.3, desno.

Primer smo reševali z osnovno (Galerkinova metoda, konstantna interpolacija deformacij, Newmarkova časovna integracijska shema) in izboljšano metodo (kolokacijska metoda, več stopenj interpolacije deformacij, midpoint časovna integracijska shema) ter rezultate strnili v preglednicah 3.1 in 3.2. Omenimo še, da smo pri osnovni verziji uporabljali Lobattovo integracijo 5. stopnje, v izboljšani formulaciji pa klasična numerična integracija ni potrebna.

V preglednicah je z oznako 'FE_x' označeno število končnih elementov in uporabljena stopnja interpolacije; 2 FE₃ tako pomeni analizo, kjer je bila konstrukcija modelirana z dvema končnima elementoma s kubično interpolacijo deformacij. Z 'DOF' je označeno število prostostnih stopenj, relativno napako pa

Preglednica 3.1: Izboljšana formulacija.

Table 3.1: Numerically improved formulation.

FE	DOF	$t = 0.05$ s		$t = 0.1$ s		Max. $v(L)$ [m]	Rač. čas [s]
		$v(L)$ [m]	Rel. nap.	$v(L)$ [m]	Rel. nap.		
1 FE ₂	15	0.02296	4×10^{-02}	0.00397	4×10^{-01}	0.02405	4.0
1 FE ₃	18	0.02168	2×10^{-02}	0.00790	1×10^{-01}	0.02400	4.7
1 FE ₄	21	0.02212	1×10^{-04}	0.00708	1×10^{-02}	0.02360	5.3
2 FE ₂	30	0.02177	2×10^{-02}	0.00687	2×10^{-02}	0.02404	6.5
2 FE ₃	36	0.02214	8×10^{-04}	0.00697	5×10^{-03}	0.02368	7.7
2 FE ₄	42	0.02216	2×10^{-03}	0.00700	4×10^{-04}	0.02372	9.3
4 FE ₂	60	0.02208	2×10^{-03}	0.00705	7×10^{-03}	0.02382	11.5
4 FE ₃	72	0.02213	4×10^{-04}	0.00700	3×10^{-04}	0.02375	14.3
4 FE ₄	84	0.02212	5×10^{-05}	0.00700	9×10^{-05}	0.02377	17.1
20 FE ₃	360	0.02212		0.00700		0.02377	64.4

Preglednica 3.2: Osnovna verzija formulacije.

Table 3.2: Basic version of the formulation.

FE	DOF	$t = 0.05$ s		$t = 0.1$ s		Max. $v(L)$ [m]	Rač. čas [s]
		$v(L)$ [m]	Rel. nap.	$v(L)$ [m]	Rel. nap.		
1 FE ₀	9	0.00672	7×10^{-01}	0.01688	1×10^0	0.01806	23.6
2 FE ₀	18	0.02208	2×10^{-03}	0.00039	9×10^{-01}	0.02256	41.8
3 FE ₀	27	0.02209	1×10^{-03}	0.00317	5×10^{-01}	0.02338	60.9
4 FE ₀	36	0.02231	9×10^{-03}	0.00506	3×10^{-01}	0.02357	77.0
5 FE ₀	45	0.02177	2×10^{-02}	0.00540	2×10^{-01}	0.02376	98.4
6 FE ₀	54	0.02181	1×10^{-02}	0.00610	1×10^{-01}	0.02385	115.8
8 FE ₀	72	0.02200	5×10^{-03}	0.00684	2×10^{-02}	0.02393	148.7
10 FE ₀	90	0.02205	3×10^{-03}	0.00699	3×10^{-05}	0.02388	176.9
40 FE ₀	360	0.02211		0.00699		0.02379	743.0

smo računali glede na najbolj točno rešitev, ki smo jo v osnovni verziji formulacije dobili z analizo 40 FE₀ in v izboljšani verziji z 20 FE₃.

Na podlagi rezultatov v preglednicah 3.1 in 3.2 lahko ugotovimo: (i) obe formulaciji konvergirata k istim rešitvam, s čimer se potrdi (validira) numerični postopek; (ii) hitrost konvergence rešitve narašča z naraščajočim redom interpolacije; (iii) natančne rešitve dobimo z zelo majhnim številom končnih elementov; (iv) blokiranja ni in (v) izboljšana formulacija je približno 10–krat hitrejša kot osnovna, kar predstavlja občuten napredek v učinkovitosti formulacije. Dodatni računski primeri so prikazani v članku Gamsa, Planinca in Sajeta (2007b), ki je dodan kot priloga B.

3.9 Sklepi

Razvili in implementirali smo metodo končnih elementov za dinamiko ravninskih elastičnih nosilcev z interpolacijo deformacijskih količin. V formulaciji zato inherentno nastopajo konsistentne enačbe v eksplisitni obliki, česar, kot bomo videli v nadaljevanju, pri elementih z interpolacijo pomikov ni. Bistvena

posledica eksplicitnega zadoščanja konstitucijskih enačb je, da elementi ne blokirajo. Dodatno se od deformacijskih elementov pričakuje, da v primeru nelinearnih materialnih modelov bolj konsistentno računajo notranje sile, saj so prek osnovnih spremenljivk – deformacij podane z zveznimi funkcijami in ni pojava ‘nenatančnega’ računa odvodov pomikov in zasukov, ki jih potrebujemo za račun notranjih sil. S tem se izognemo ekstrapolaciji notranjih sil iz t.i. Barlowih točk (Barlow (1976)).

Elementi poleg odpornosti na blokiranje izkazujejo tudi veliko natančnost, saj potrebujemo le malo končnih elementov za zelo natančne rezultate. Nekoliko drugačen je tudi pristop k integraciji v končnih elementih, saj za numerično integracijo v osnovni verziji nimamo analitičnih dokazov o minimalni potrebni stopnji integracije, zato jo določimo s poskušanjem; v izboljšani verziji pa numerična integracija po končnem elementu sploh ni potrebna.

Pokazalo se je, da Newmarkova časovna integracijska shema ni primerna za integracijo pri deformacijskih elementih. Veliko boljša izbira je t.i. midpoint časovna integracijska shema, ker je bolj stabilna. Žal tudi ta shema v kombinaciji z elementi z interpolacijo deformacij ni brezpogojno stabilna. Vse kaže, da bi bilo za brezpogojno stabilnost potrebno *izpeljati* posebej prilagojeno časovno integracijsko shemo; ta trditev je nekoliko izven konteksta tega poglavja, zato jo bomo podrobneje utemljili v naslednjem poglavju. Lahko pa trdimo, da problem brezpogojno stabilnega integratorja za dinamiko deformacijskih elementov še ni rešen.

Ker v osnovni obliki formulacije nastopajo izrazi z vgnezenimi integrali, ki drastično upočasnijo računski postopek in naredijo formulacijo nekonkurenčno, smo razvili numerični postopek, ki se temu problemu izogne. Novi postopek temelji na numerični interpolaciji integrandov vgnezenih funkcij in prenosu integracije iz osnovnih izrazov na interpolacijske funkcije.

Prednosti formulacije z interpolacijo deformacij do določene mere zasenči zapletenost teh elementov in zaenkrat še nerešen problem ustrezne časovne integracije.

4 DINAMIKA LINEARNO ELASTIČNIH LINIJSKIH KONČNIH ELEMENTOV Z INTERPOLACIJO KINEMATIČNIH KOLIČIN

4.1 Uvod

V tem poglavju se ukvarjamo s časovnimi integratorji, pri tem pa se omejimo na končne elemente, ki za osnovne neznanke privzamejo kinematične količine: pomik \mathbf{u} in zasuk φ . Razvili bomo dve varianti novega časovnega integratorja za analizo ravninskih nosilcev in ju primerjali z drugimi, standardnimi, kot sta Newmarkov (1959) ali pa HHT- α (1977) ter energijsko konzervativnimi, kot so integrator Standerja in Steina (1996), integrator Sima, Tarnowa in Doblareja (1995) in integrator Ibrahimbegovića in Mamourija (1999). Pri navajanju že razvitih energijsko konzervativnih integratorjev se bomo v veliki meri naslonili na delo Jelenića in Crisfielda (2002), ki sta uspela večino energijsko konzervativnih integratorjev zapisati na enoten način. Ta zapis smo tu primorani v prilagojeni obliki do določene mere reproducirati, da mu lahko dodamo novo razvita integratorja. Ponovili bomo tudi njun dokaz o ohranitvi gibalne in vrtilne količine, saj se da ta dokaz direktno aplicirati na novo razvita integratorja.

Poleg tega bomo v tem poglavju razvili in predstavili tudi novo shemo za umetno dušenje višjih oblik nihanja. Temeljna novost je adaptivno vklapljanje in izklapljanje dušenja v odvisnosti od prisotnosti visokih frekvenc z računsko nezahtevnim algoritmom. V primerjavi z drugimi tu predstavljena shema dušenja uduši občutno manjši del osnovnih nihajnih oblik.

4.2 Klasičen pristop

Princip virtualnega dela. Osnovne enačbe zapišemo s pomočjo principa virtualnega dela (PVD):

$$\int_0^L [\mathbf{N}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} + M \delta \kappa - (\mathbf{q}^T - \ddot{\mathbf{u}} \mathbf{c}_\rho) \delta \mathbf{u} - (m_Z - J \rho \ddot{\varphi}) \delta \varphi] ds - \mathbf{S} \delta \mathbf{U}^* = 0. \quad (4.1)$$

Kot smo ugotovili pri analizi enačb v poglavju '2.1 Opis problema', imamo opravka s 4 skupinami enačb za 4 skupine neznanke in z matematičnimi izpeljavami moramo priti do sistema n enačb za n neznanke. Odločimo se, da so naše osnovne neznanke funkcije pomik \mathbf{u} in zasuk φ in s kinematičnimi enačbami izrazimo deformacije (glej (2.24)). Ker se omejimo na linearno elastični material, poznamo tudi eksplisitne izraze za konstitucijske spremenljivke, ki so zapisane v enačbi (2.29). Ravnotežne notranje sile določimo iz konstitucijskih količin s pomočjo konsistenčnih enačb (2.30) in s tem so vse količine izražene v odvisnosti od kinematičnih spremenljivk. Preostala pa nam je tudi le ena skupina enačb – ravnotežne

enačbe v obliki principa virtualnega dela. Princip virtualnega dela je sicer skalarna enačba, ki pa igra vlogo šibkih 'ravnotežnih enačb'. Račun je torej bistveno bolj neposreden kot v primeru interpolacije deformacij; strnemo ga lahko tako:

$$\mathbf{u}, \varphi \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}, \varphi), \kappa(\varphi) \rightarrow N(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}, \varphi)), M(\kappa(\varphi)) \rightarrow \text{PVD}. \quad (4.2)$$

Galerkinova metoda. Neznanke \mathbf{u} , φ in utežne funkcije $\delta\mathbf{u}$, $\delta\varphi$ interpoliramo z enakimi nastavki:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \varphi \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_{\text{itp}}} P_i(s) \begin{bmatrix} \mathbf{U}_i \\ \Phi_i \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

$$\begin{bmatrix} \delta\mathbf{u} \\ \delta\varphi \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n_{\text{itp}}} P_j(s) \begin{bmatrix} \delta\mathbf{U}_j \\ \delta\Phi_j \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Interpolacija pomikov (4.3) zajame tudi interpolacijo krajevnega vektorja¹:

$$\mathbf{r}(s, t) = \sum_{i=1}^{n_{\text{itp}}} P_i(s) \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{n_{\text{itp}}} P_i(s) (\mathbf{r}_{0i} + \mathbf{U}_i) = \sum_{i=1}^{n_{\text{itp}}} P_i(s) \begin{bmatrix} X_0 + s_i \cos \varphi_0 + U_i \\ Y_0 + s_i \sin \varphi_0 + V_i \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

V enačbah (4.3) in (4.4) smo vpeljali oznaki \mathbf{U}_i in Φ_i za diskretne pomike ter $\delta\mathbf{U}_i$ in $\delta\Phi_i$ za diskretne (poljubne) uteži v ekvidistantno porazdeljenih interpolacijskih točkah. Utežne funkcije $\delta\varepsilon$ in $\delta\kappa$ dobimo z variiranjem deformacij v enačbi (2.24):

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon &= \boldsymbol{\Lambda}^T \delta\mathbf{u}' + \mathbf{W}^T \boldsymbol{\Lambda}^T \delta\varphi \mathbf{r}', \\ \delta\kappa &= \delta\varphi'. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ko v princip virtualnega dela (4.1) vstavimo variacije deformacij (4.6), dobimo:

$$\int_0^L [\mathbf{N}^T \boldsymbol{\Lambda}^T \delta\mathbf{u}' + \mathbf{N}^T \mathbf{W}^T \boldsymbol{\Lambda}^T \mathbf{r}' \delta\varphi + M \delta\varphi' - (\mathbf{q}^T - \ddot{\mathbf{u}}\mathbf{c}_\rho) \delta\mathbf{u} - (m_Z - J\rho\ddot{\varphi}) \delta\varphi] ds - \mathbf{S} \delta\mathbf{U}^* = 0. \quad (4.7)$$

V dobljeno enačbo (4.7) vstavimo interpolacijske nastavke (4.4), kar da

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_{\text{itp}}} \int_0^L [\mathbf{N}^T \boldsymbol{\Lambda}^T P_j' \delta\mathbf{U}_j + (\mathbf{N}^T \mathbf{W}^T \boldsymbol{\Lambda}^T \mathbf{r}') P_j \delta\Phi_j + M P_j' \delta\Phi_j \\ - (\mathbf{q}^T - \ddot{\mathbf{u}}\mathbf{c}_\rho) P_j \delta\mathbf{U}_j - (m_Z - J\rho\ddot{\varphi}) P_j \delta\Phi_j] ds - \mathbf{S} \delta\mathbf{U}^* = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

V skladu z osnovnim izrekom variacijskega računa morajo biti členi pri variacijah enaki nič in tako dobimo sistem 3 n_{itp} zveznih diferencialnih enačb 2. reda po času:

$$\mathbf{g} \equiv \begin{bmatrix} \int_0^L [\mathbf{N}^T \boldsymbol{\Lambda}^T P_j' - (\mathbf{q}^T - \ddot{\mathbf{u}}\mathbf{c}_\rho) P_j] ds = \mathbf{0}, \quad j = 1, \dots, n_{\text{itp}} \\ \int_0^L [M P_j' + \mathbf{N}^T \mathbf{W}^T \boldsymbol{\Lambda}^T \mathbf{r}' P_j - (m_Z - J\rho\ddot{\varphi}) P_j] ds = 0, \quad j = 1, \dots, n_{\text{itp}} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.9)$$

s pripadajočimi naravnimi in/ali bistvenimi robnimi pogoji, ki so zapisani v enačbah (3.5) in (3.6) in z začetnimi pogoji iz enačb (3.7).

¹V primeru ukrivljenih nosilcev ta trditev drži le, če je interpolacija pomikov sposobna točno opisati začetno obliko ukrivljenega nosilca. Enačba (4.5) velja le za ravne nosilce.

Edini neznani funkciji, ki nastopata v enačbi (4.9), sta pomik in zasuk, ki ju interpoliramo po nastavkih (4.3). Neznane ostanejo še diskretne vrednosti pomikov in zasukov v interpolacijskih točkah kot diskretne neznanke problema. Enačbe so semi-diskretne, saj v njih nastopajo tudi časovni odvodi.

Enačbe (4.9) se da zapisati kot vsoto treh delov, ki pripadajo notranjim silam \mathbf{g}_{not} , vztrajnostnim silam \mathbf{g}_{vzt} in zunanjim silam \mathbf{g}_{zun} :

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_{\text{not}} + \mathbf{g}_{\text{vzt}} + \mathbf{g}_{\text{zun}} = \mathbf{0}. \quad (4.10)$$

Tu so posamezni členi definirani tako:

$$\mathbf{g}_{\text{not}} = \begin{bmatrix} \int_0^L \mathbf{N}^T \boldsymbol{\Lambda}^T P'_j ds, \quad j = 1, \dots, n_{\text{itp}} \\ \int_0^L \left(M P'_j + \mathbf{N}^T \mathbf{W}^T \boldsymbol{\Lambda}^T \mathbf{r}' P_j \right) ds, \quad j = 1, \dots, n_{\text{itp}} \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

$$\mathbf{g}_{\text{vzt}} = \begin{bmatrix} \int_0^L \ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{c}\rho} P_j ds, \quad j = 1, \dots, n_{\text{itp}} \\ \int_0^L J \rho \ddot{\varphi} P_j ds, \quad j = 1, \dots, n_{\text{itp}} \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

$$\mathbf{g}_{\text{zun}} = \begin{bmatrix} \int_0^L \mathbf{q}^T P_j ds, \quad j = 1, \dots, n_{\text{itp}} \\ \int_0^L m_Z P_j ds, \quad j = 1, \dots, n_{\text{itp}} \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Časovna diskretizacija. Klasična pristopa k diskretizaciji časovnih odvodov v enačbi (4.9) sta uporaba diferenčne metode (npr. Graham (2001)) ali metode uteženih residualov (npr. Zienkiewicz, Taylor in Zhu (2005)). Najbolj razširjena metoda oz. časovni integrator je t.i. družina Newmarkovih integratorjev (Newmark (1959)), ki temelji na diskretizacijskih nastavkih:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{n+1} &= \mathbf{u}_n + \dot{\mathbf{u}}_n \Delta t + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta_t \right) \ddot{\mathbf{u}}_n + \beta_t \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \right] \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + \dot{\varphi}_n \Delta t + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta_t \right) \ddot{\varphi}_n + \beta_t \ddot{\varphi}_{n+1} \right], \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{u}}_n + [(1 - \gamma_t) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_n + \gamma_t \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}] \\ \dot{\varphi}_{n+1} &= \dot{\varphi}_n + [(1 - \gamma_t) \Delta t \ddot{\varphi}_n + \gamma_t \ddot{\varphi}_{n+1}]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Z različnimi vrednostmi parametrov β_t in γ_t dobimo različne algoritme oz. člane družine. Nekaj najbolj uporabljenih kombinacij je prikazanih v preglednici 4.1.

Preglednica 4.1: Algoritmi iz Newmarkove družine integratorjev.

Table 4.1: Algorithms of the Newmark family of integrators.

ime	β_t	γ_t	komentar
Trapezno pravilo	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	implicitna, brezpogojno stabilna
Linearni pospeški	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	implicitna, brezpogojno stabilna
Fox-Goodwin	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	implicitna, brezpogojno stabilna
Central difference	0	$\frac{1}{2}$	eksplicitna, pogojno stabilna

Newmarkovo družino integratorjev lahko razširimo na t.i. družino α integratorjev tako, da določene člene v enačbah (4.9) vrednotimo pri različnih časih znotraj intervala od t_n do t_{n+1} . Če vpeljemo oznaki

α_{not} in α_{vzt} za skalarni vrednosti med 0 in 1 in definiramo časa $t_{\alpha_{\text{not}}} = t_n + \alpha_{\text{not}} \Delta t$ ter $t_{\alpha_{\text{vzt}}} = t_n + \alpha_{\text{vzt}} \Delta t$, lahko enačbe (4.9) zapišemo (Chung in Hulbert (1993))

$$\mathbf{g} = \left[\begin{array}{l} \int_0^L \left[(\mathbf{N}^T \boldsymbol{\Lambda}^T)_{\alpha_{\text{not}}} P'_j - (\mathbf{q}_{\alpha_{\text{not}}}^T - \ddot{\mathbf{u}}_{\alpha_{\text{vzt}}} \mathbf{c}_\rho) P_j \right] ds = \mathbf{0}, \quad j = 1, \dots, n_{\text{itp}} \\ \int_0^L M_{\alpha_{\text{not}}} P'_j + (\mathbf{N}^T \mathbf{W}^T \boldsymbol{\Lambda}^T \mathbf{r}')_{\alpha_{\text{not}}} P_j - (m_{Z, \alpha_{\text{not}}} - J \rho \ddot{\varphi}_{\alpha_{\text{vzt}}}) P_j = 0, \quad j = 1, \dots, n_{\text{itp}} \end{array} \right]. \quad (4.16)$$

Z indeksoma $(\bullet)_{\alpha_{\text{not}}} = (\bullet)(t_{\alpha_{\text{not}}})$ in $(\bullet)_{\alpha_{\text{vzt}}} = (\bullet)(t_{\alpha_{\text{vzt}}})$ označujemo vrednosti pri časih $t_{\alpha_{\text{not}}}$ in $t_{\alpha_{\text{vzt}}}$, ki se računajo po aproksimacijskih pravilih:

$$\begin{aligned} (\bullet)_{\alpha_{\text{not}}} &= (1 - \alpha_{\text{not}}) (\bullet)_n + \alpha_{\text{not}} (\bullet)_{n+1} \\ (\bullet)_{\alpha_{\text{vzt}}} &= (1 - \alpha_{\text{vzt}}) (\bullet)_n + \alpha_{\text{vzt}} (\bullet)_{n+1} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Posebna primera posplošene α metode sta integrator avtorjev Hilberja, Hughesa in Taylorja (HHT) (1977), za katerega velja $\alpha_{\text{vzt}} = 1$ in $\alpha_{\text{not}} \in [0, 1]$, ter integrator Wooda, Bossaka in Zienkiewicza, pri katerem velja $\alpha_{\text{not}} = 1$ in $\alpha_{\text{vzt}} \in [0, 1]$. Z vrednostmi $\alpha_{\text{not}} \neq 1$ in/ali $\alpha_{\text{vzt}} \neq 1$ se v formulacijo vpelje dušenje.

Integrator HHT (1977) je precej priljubljena metoda za upoštevanje dušenja v konstrukciji, ima pa dve pomanjkljivosti: (i) dušenje vpliva tudi na osnovne nihajne oblike in ne samo na višje ter (ii) vrednosti numeričnega parametra α_{not} se ne da povezati s fizikalno količino 'kritično dušenje'.

Posplošena α -metoda in oba njena posebna primera so bili razviti za linearne probleme, za katere je tudi dokazana kvadratična konvergenca in stabilnost. Njihova aplikacija na nelinearne probleme pa zahteva nekaj pazljivosti, saj je možnih več interpretacij. Ključno vprašanje je, kako izvednotiti enačbe pri času $t_{\alpha_{\text{not}}}$, saj imamo na voljo tri možnosti (Graham (2001)):

$$\mathbf{g}_{\text{not}, \alpha_{\text{not}}} = (1 - \alpha_{\text{not}}) \mathbf{g}_{\text{not}, n} + \alpha_{\text{not}} \mathbf{g}_{\text{not}, n+1}, \quad (4.18)$$

$$\mathbf{g}_{\text{not}, \alpha_{\text{not}}} = \mathbf{g}_{\text{not}} \left((1 - \alpha_{\text{not}}) \boldsymbol{\varepsilon}_n + \alpha_{\text{not}} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \right), \quad (4.19)$$

$$\mathbf{g}_{\text{not}, \alpha_{\text{not}}} = \mathbf{g}_{\text{not}} \left(\boldsymbol{\varepsilon} \left((1 - \alpha_{\text{not}}) \mathbf{u}_n + \alpha_{\text{not}} \mathbf{u}_{n+1} \right) \right). \quad (4.20)$$

Varianta (4.18) je osnovna interpretacija v smislu α metod, varianta (4.19) je energijska (Energy-Momentum), varianta (4.20) pa simplektična (Symplectic-Momentum).

Sredinska oz. 'midpoint' pravila. Če v vseh treh variantah α -metode za nelinearne probleme privzamemo sredinsko shemo, imamo $\alpha_{\text{not}} = \frac{1}{2}$ in $\alpha_{\text{vzt}} = \frac{1}{2}$. Ko vpeljemo oznako m za količine, ki so izvednotene pri sredinskem času po enačbi (4.17), lahko enačbe (4.18)–(4.20) zapišemo:

$$\mathbf{g}_{\text{not}, m} = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_{\text{not}, n} + \mathbf{g}_{\text{not}, n+1}), \quad (4.21)$$

$$\mathbf{g}_{\text{not}, m} = \mathbf{g}_{\text{not}} (\boldsymbol{\varepsilon}_m), \quad (4.22)$$

$$\mathbf{g}_{\text{not}, m} = \mathbf{g}_{\text{not}} (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_m)) \quad (4.23)$$

in dobimo midpoint predstavnike shem (4.18)–(4.20).

Z energijsko interpretacijo (4.22) lahko \mathbf{g} iz enačbe (4.16) zapišemo tako:

$$\mathbf{g} = \left[\begin{array}{l} \int_0^L \left[\mathbf{N}_m^T \boldsymbol{\Lambda}_m^T P'_j - (\mathbf{q}_m^T - \ddot{\mathbf{u}}_m \mathbf{c}_\rho) P_j \right] ds = \mathbf{0}, \quad j = 1, \dots, n_{itp} \\ \int_0^L \left[M_m P'_j + \mathbf{N}_m^T \mathbf{W}^T \boldsymbol{\Lambda}_m^T \mathbf{r}'_m P_j - (m_{Z,m} - J\rho \ddot{\varphi}_m) P_j \right] ds = 0, \quad j = 1, \dots, n_{itp} \end{array} \right]. \quad (4.24)$$

Z upoštevanjem trapeznega pravila (preglednica 4.1) postanejo nastavki (4.14) in (4.15)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{n+1} &= \mathbf{u}_n + \dot{\mathbf{u}}_n \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}_m, \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + \dot{\varphi}_n \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\varphi}_m, \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_m, \\ \dot{\varphi}_{n+1} &= \dot{\varphi}_n + \Delta t \ddot{\varphi}_m. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Iz enačbe (4.25) izrazimo $\ddot{\mathbf{u}}_m$ in $\ddot{\varphi}_m$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}}_m &= \frac{2}{\Delta t^2} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n - \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n), \\ \ddot{\varphi}_m &= \frac{2}{\Delta t^2} (\varphi_{n+1} - \varphi_n - \Delta t \dot{\varphi}_n) \end{aligned} \quad (4.27)$$

in ju vstavimo v enačbo (4.26)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_{n+1} &= \frac{2 \Delta \mathbf{u}}{\Delta t} - \dot{\mathbf{u}}_n, \\ \dot{\varphi}_{n+1} &= \frac{2 \Delta \varphi}{\Delta t} - \dot{\varphi}_n. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Enačbi (4.27) in (4.28) sta pomembni zaradi primerjave časovnih diskretizacij standardnih in energijskih shem.

Standardna oblika enačb. Linearizirana oblika enačb (4.24) je 'standardna':

$$\mathbf{M} \delta \ddot{\Upsilon} + \mathbf{K} \delta \Upsilon + \mathbf{F} = \mathbf{0}. \quad (4.29)$$

Z \mathbf{M} smo označili masno in s \mathbf{K} togostno matriko, s \mathbf{F} pa residual. Υ predstavlja vektor neznanih količin:

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \Phi \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

4.3 Energijsko konzervativne sheme

Poleg klasičnega pristopa, ki je bil opisan v prejšnjem poglavju, obstaja možnost izpeljave energijsko konzervativnih shem tudi iz popolnoma drugega izhodišča. Ta pristop nudi še nekoliko drugačen pogled na energijsko konzervativne integratorje in daje nove možnosti za primerjavo integratorjev, hkrati pa omogoča, da se zapis večjega števila integratorjev v veliki meri poenoti.

Izhodišče. Izhodišče vseh energijsko konzervativnih shem, ki jih bomo predstavili ali pa razvili v nadaljevanju, je *zahteva* po ohranjanju mehanske energije v poljubnem časovnem koraku n :

$$\Delta \Pi = \Pi_{n+1} - \Pi_n = 0. \quad (4.31)$$

Energijsko konzervativen algoritem bo zadostil enačbi (4.31), če na konstrukciji ne bo obtežbe z zunanjo silo. Od integratorja zahtevamo, da ima tako obliko enačb \mathbf{g}_α , kjer α označuje čas med $t_n + \alpha \Delta t$, da se da iz njih izpostaviti inkremente poljubnih neznanih količin $\Delta \Upsilon$ (v našem primeru pomikov in zasuka)

$$\Delta \Pi = \mathbf{g}_\alpha \Delta \Upsilon. \quad (4.32)$$

Enačba (4.31) lahko predstavlja izhodišče izpeljave mnogih integratorjev, enačba (4.32) pa predstavlja njihov končen cilj. Iz izhodišča do cilja pa vodi več poti, kot bomo videli v kratkem, saj bomo predstavili kar nekaj različnih integratorjev, med drugim dva na novo razvita. Preden se lotimo konkretnih izpeljav, opozorimo, da izrek o ohranitvi energije velja tako za konstrukcijo kot za njen poljuben del: če torej iz konstrukcije izrežemo poljubno ‘podkonstrukcijo’, se mora ohranjati tudi energija podkonstrukcije. Seveda velja tudi obratno, saj če dokažemo ohranjanje energije za poljuben del konstrukcije, bo izrek veljal tudi za celotno konstrukcijo. Zaradi tega v nadaljevanju dokazujemo ohranjanje energije na nivoju interpolacijske točke.

Razliko energij v dveh zaporednih časovnih korakih razbijemo na razliko deformacijskih in kinetičnih energij ter potenciala zunanjih sil:

$$\Delta \Pi = (\Pi_{\text{def},n+1} - \Pi_{\text{def},n}) + (\Pi_{\text{kin},n+1} - \Pi_{\text{kin},n}) + (\Pi_{\text{zun},n+1} - \Pi_{\text{zun},n}). \quad (4.33)$$

Vsakega izmed treh prispevkov se lotimo posebej in iz vsake izmed razlik energij izluščimo prispevek residuala \mathbf{g} v poljubnem, j -tem vozlišču:

$$\mathbf{g}_j = \mathbf{g}_{j,\text{not}} + \mathbf{g}_{j,\text{vzt}} + \mathbf{g}_{j,\text{zun}} = \mathbf{0}. \quad (4.34)$$

Z indeksom $(\bullet)_{\text{not}}$ označujemo prispevek zaradi notranjih, $(\bullet)_{\text{vzt}}$ prispevek zaradi vztrajnostnih in $(\bullet)_{\text{zun}}$ prispevek zaradi zunanjih sil.

4.3.1 Deformacijska energija

Razlika deformacijskih energij v dveh zaporednih časovnih korakih se zapiše kot

$$\Delta \Pi_{\text{def}} = \frac{1}{2} \int_0^L (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^T \mathbf{c}_E \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^T \mathbf{c}_E \boldsymbol{\varepsilon}_n + EJ \kappa_{n+1}^2 - EJ \kappa_n^2) ds. \quad (4.35)$$

Razliko kvadratov deformacij v enačbi (4.35) lahko zapišemo kot produkt povprečja (sredinske, midpoint vrednosti) in inkrementa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^2 - \boldsymbol{\varepsilon}_n^2) &= \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_n}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n) = \boldsymbol{\varepsilon}_m \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \\ \frac{1}{2} (\kappa_{n+1}^2 - \kappa_n^2) &= \frac{\kappa_{n+1} + \kappa_n}{2} (\kappa_{n+1} - \kappa_n) = \kappa_m \Delta \kappa \end{aligned} \quad (4.36)$$

in dobimo

$$\Delta \Pi_{\text{def}} = \int_0^L (\boldsymbol{\varepsilon}_m^T \mathbf{c}_E \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + EJ \kappa_m \Delta \kappa) ds. \quad (4.37)$$

S tem, ko smo sprejeli definicijo (4.36) za sredinsko vrednost, smo hkrati določili ‘pravilo’ oz. način, kako računati deformacije pri sredinskem času t_m – kot aritmetično povprečje:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_m &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_n), \\ \kappa_m &= \frac{1}{2} (\kappa_{n+1} + \kappa_n). \end{aligned} \quad (4.38)$$

V enačbi (4.37) nastopa produkt deformacij pri sredinskem času in togosti prereza, ki ga lahko nadomestimo s konstitucijskimi silami pri tem času, te pa nadomestimo z ravnotežnimi:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_m^T \mathbf{c}_E &= \mathbf{N}_{c,m}^T = \mathbf{N}_m^T, \\ EJ \kappa_m &= M_{c,m} = M_m.\end{aligned}\quad (4.39)$$

Te zveze upoštevamo v enačbi (4.37) in dobimo

$$\Delta \Pi_{\text{def}} = \int_0^L (\mathbf{N}_m^T \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + M_m \Delta \kappa) ds. \quad (4.40)$$

Oblika enačbe (4.40) spominja na iskano obliko, kjer je nek izraz pomnožen z inkrementom. Žal deformacije tokrat niso osnovne neznanke problema. Iskana oblika od nas zahteva inkremente osnovnih neznanek in zato moramo v nadaljevanju inkremente deformacij izraziti z inkrementi pomikov in zasukov. Izkaže se, da je tu več možnosti. Najprej izpeljimo razliko deformacijskih energij za primer, ko upoštevamo kinematične enačbe v osnovni (krepki) obliki! To je oblika, ki smo jo uporabljali do sedaj (enačba (2.24)).

4.3.1.1 Algoritmi s krepkimi kinematičnimi vezmi

Za zapis inkrementov deformacij $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ in $\Delta \kappa$ z inkrementi pomikov in zasuka uporabimo krepke kinematične vezi (2.24). Inkrement upogibne deformacije je preprosto

$$\Delta \kappa = \Delta \varphi'. \quad (4.41)$$

Inkrementa osnih in strižnih deformacij sta

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^T \mathbf{r}'_{n+1} + \mathbf{c}_1 - \boldsymbol{\Lambda}_n^T \mathbf{r}'_n - \mathbf{c}_1 = \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^T \mathbf{r}'_{n+1} - \boldsymbol{\Lambda}_n^T \mathbf{r}'_n. \quad (4.42)$$

To enačbo razčlenimo:

$$\boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^T \mathbf{r}'_{n+1} - \boldsymbol{\Lambda}_n^T \mathbf{r}'_n = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Lambda}_n^T + \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^T) (\mathbf{r}'_{n+1} - \mathbf{r}'_n) + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^T - \boldsymbol{\Lambda}_n^T) (\mathbf{r}'_n + \mathbf{r}'_{n+1}). \quad (4.43)$$

Ker je razlika krajevnih vektorjev ravno $\Delta \mathbf{u}$ (glej enačbo (2.3)), je prvi člen enačbe (4.43) že izražen z inkrementom pomikov:

$$\frac{1}{2} (\boldsymbol{\Lambda}_n^T + \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^T) (\mathbf{r}'_{n+1} - \mathbf{r}'_n) = \boldsymbol{\Lambda}_m^T \Delta \mathbf{u}', \quad (4.44)$$

pri čemer smo hkrati dobili pravilo za račun rotacijske matrike v sredinski točki pri t_m kot povprečje matrik v dveh zaporednih časovnih korakih:

$$\boldsymbol{\Lambda}_m = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Lambda}_n + \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}). \quad (4.45)$$

Da bi lahko tudi drugi člen enačbe (4.43) zapisali z inkrementom pomikov, vpeljemo transformacijo

$$\boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^T - \boldsymbol{\Lambda}_n^T = 2 \tan \frac{\Delta \varphi}{2} \mathbf{W}^T \boldsymbol{\Lambda}_m^T. \quad (4.46)$$

Transformacija (4.46) povezuje razliko rotacijskih matrik z rotacijsko matriko pri sredinskem času. Opozorimo pa še na komutativnost matrik \mathbf{W} in $\boldsymbol{\Lambda}_m$. Desno stran enačbe (4.46) množimo in delimo z $\Delta \varphi$, upoštevamo

$$\frac{1}{2} (\mathbf{r}'_n + \mathbf{r}'_{n+1}) = \mathbf{r}'_m \quad (4.47)$$

in enačbo (4.44) ter iz (4.42) dobimo

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\Lambda}_m^T \Delta \mathbf{u}' + \frac{2}{\Delta \varphi} \tan \frac{\Delta \varphi}{2} \mathbf{W}^T \boldsymbol{\Lambda}_m^T \mathbf{r}'_m \Delta \varphi. \quad (4.48)$$

V enačbi (4.40) upoštevamo enačbi (4.41) in (4.48) ter dobimo razliko deformacijskih energij v iskani obliki:

$$\Delta \Pi_{\text{def}} = \int_0^L \left(\mathbf{N}_m^T \boldsymbol{\Lambda}_m^T \Delta \mathbf{u}' + \mathbf{N}_m^T \frac{2}{\Delta \varphi} \tan \frac{\Delta \varphi}{2} \mathbf{W}^T \boldsymbol{\Lambda}_m^T \mathbf{r}'_m \Delta \varphi + M_m \Delta \varphi' \right) ds. \quad (4.49)$$

Algoritem Standerja in Steina. Z vpeljavo izraza

$$B^* = \frac{2}{\Delta \varphi} \tan \frac{\Delta \varphi}{2} \quad (4.50)$$

lahko enačbo (4.49) zapišemo kot

$$\Delta \Pi_{\text{def}} = \int_0^L \left(\mathbf{N}_m^T \boldsymbol{\Lambda}_m^T \Delta \mathbf{u}' + B^* \mathbf{N}_m^T \mathbf{W}^T \boldsymbol{\Lambda}_m^T \mathbf{r}'_m \Delta \varphi + M_m \Delta \varphi' \right) ds. \quad (4.51)$$

Ko vpeljemo interpolacijo *inkrementov* pomikov in zasuka (enačbe (4.3))

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \varphi \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_{\text{itp}}} P_i(s) \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}_i \\ \Delta \Phi_i \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}' \\ \Delta \varphi' \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_{\text{itp}}} P'_i(s) \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}_i \\ \Delta \Phi_i \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (4.52)$$

dobimo

$$\Delta \Pi_{\text{def}} = \sum_{i=1}^{n_{\text{itp}}} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}_i \\ \Delta \Phi_i \end{bmatrix} \cdot \int_0^L \left[B^* \mathbf{N}_m^T \mathbf{W}^T \boldsymbol{\Lambda}_m^T \mathbf{r}'_m P'_i + M_m P'_i \right] ds, \quad (4.53)$$

kjer (\cdot) označuje skalarno množenje in določimo prispevek notranjih sil k residualu v j -tem vozlišču:

$$\mathbf{g}_{j,\text{not}} = \begin{bmatrix} {}^N \mathbf{g}_{j,\text{not}} \\ {}^M g_{j,\text{not}} \end{bmatrix} = \int_0^L \left[B^* \mathbf{N}_m^T \mathbf{W}^T \boldsymbol{\Lambda}_m^T \mathbf{r}'_m P'_j + M_m P'_j \right] ds. \quad (4.54)$$

Z oznako ${}^N \mathbf{g}_{j,\text{not}}$ smo označili del residuala notranjih sil v j -tem vozlišču zaradi sil, z ${}^M g_{j,\text{not}}$ pa del zaradi momentov. Enačbo (4.54) lahko zapišemo z vektorskim produktom namesto z antisimetrično matriko \mathbf{W} :

$$\mathbf{g}_{j,\text{not}} = \begin{bmatrix} {}^N \mathbf{g}_{j,\text{not}} \\ {}^M g_{j,\text{not}} \end{bmatrix} = \int_0^L \left[-B^* \mathbf{r}'_m \times (\boldsymbol{\Lambda}_m \mathbf{N}_m) P'_j + M_m P'_j \right] ds. \quad (4.55)$$

Oba izraza, enačba (4.54) in enačba (4.55), sta matematično enakovredna.

Algoritem Sima, Tarnowa in Doblareja. Posebnost algoritma Sima, Tarnowa in Doblareja je, da pred interpoliranjem inkrementov pomikov in zasuka v enačbi (4.49) vpelje skaliranje inkrementa zasuka:

$$\Delta \varphi_S = \frac{\tan \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} \Delta \varphi. \quad (4.56)$$

$\Delta \varphi_S$ označuje skaliran inkrement zasuka. Namen skaliranja je želja, da bi algoritem ohranjal vrtilno količino, saj je algoritem Standerja in Steina ne ohranja, kar bo razvidno v nadaljevanju. V načelu bi

lahko za skaliranje uporabili poljuben izraz, toda edino skaliranje po enačbi (4.56) vodi do algoritma, ki ohranja tudi vrtilno količino. Iz enačbe (4.56) sledita še naslednji zvezi med skaliranim in neskaliranim zasukom:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \frac{\frac{\Delta\varphi}{2}}{\tan \frac{\Delta\varphi}{2}} \Delta\varphi_S, \\ \Delta\varphi' &= \frac{1+\cos \frac{\Delta\varphi}{2}}{2} \Delta\varphi'_S.\end{aligned}\quad (4.57)$$

V enačbi (4.49) $\Delta\varphi$ in $\Delta\varphi'$ na desnih straneh drugega in tretjega člena zamenjamo z $\Delta\varphi_S$ in $\Delta\varphi'_S$:

$$\Delta\Pi_{\text{def}} = \int_0^L \left(\mathbf{N}_m^T \mathbf{\Lambda}_m^T \Delta\mathbf{u}' + \mathbf{N}_m^T \frac{2}{\Delta\varphi} \tan \frac{\Delta\varphi}{2} \mathbf{W}^T \mathbf{\Lambda}_m^T \mathbf{r}'_m \frac{\frac{\Delta\varphi}{2}}{\tan \frac{\Delta\varphi}{2}} \Delta\varphi_S + M_m \frac{1+\cos \frac{\Delta\varphi}{2}}{2} \Delta\varphi'_S \right) ds. \quad (4.58)$$

V drugem členu desne strani te enačbe ulomke pokrajšamo, upoštevamo $\frac{1+\cos \frac{\Delta\varphi}{2}}{2} = \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2}$ in z vpeljavo oznake

$$C^* = \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2} \quad (4.59)$$

zapišemo:

$$\Delta\Pi_{\text{def}} = \int_0^L \left(\mathbf{N}_m^T \mathbf{\Lambda}_m^T \Delta\mathbf{u}' + \mathbf{N}_m^T \mathbf{W}^T \mathbf{\Lambda}_m^T \mathbf{r}'_m \Delta\varphi_S + C^* M_m \Delta\varphi'_S \right) ds. \quad (4.60)$$

V naslednjem koraku vpeljemo interpolacijo inkrementov pomikov in *skaliranih* zasukov

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \Delta\mathbf{u} \\ \Delta\varphi_S \end{bmatrix} &= \sum_{i=1}^{n_{\text{itp}}} P_i(s) \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{U}_i \\ \Delta\Phi_{S,i} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{u}' \\ \Delta\varphi'_S \end{bmatrix} &= \sum_{i=1}^{n_{\text{itp}}} P'_i(s) \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{U}_i \\ \Delta\Phi_{S,i} \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (4.61)$$

Z upoštevanjem nastavkov (4.61) dobi enačba (4.60) obliko

$$\Delta\Pi_{\text{def}} = \sum_{i=1}^{n_{\text{itp}}} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{U}_i \\ \Delta\Phi_{S,i} \end{bmatrix} \cdot \int_0^L \left[\mathbf{N}_m^T \mathbf{W}^T \mathbf{\Lambda}_m^T \mathbf{r}'_m P'_i + C^* M_m P'_i \right] ds. \quad (4.62)$$

Iz nje določimo prispevek notranjih sil k residualu v j -tem vozlišču:

$$\mathbf{g}_{j,\text{not}} = \begin{bmatrix} N \mathbf{g}_{j,\text{not}} \\ M g_{j,\text{not}} \end{bmatrix} = \int_0^L \left[\mathbf{N}_m^T \mathbf{W}^T \mathbf{\Lambda}_m^T \mathbf{r}'_m P'_j + C^* M_m P'_j \right] ds. \quad (4.63)$$

Če zopet uporabimo vektorski produkt namesto matrike \mathbf{W} , dobimo

$$\mathbf{g}_{j,\text{not}} = \begin{bmatrix} N \mathbf{g}_{j,\text{not}} \\ M g_{j,\text{not}} \end{bmatrix} = \int_0^L \left[-\mathbf{r}'_m \times (\mathbf{\Lambda}_m \mathbf{N}_m) P'_j + C^* M_m P'_j \right] ds. \quad (4.64)$$

4.3.1.2 Algoritmi s šibkimi kinematičnimi vezmi

Namesto krepke oblike kinematičnih vezi lahko uporabimo tudi šibko obliko, t.j. časovno odvajane kinematične vezi. V analitičnem smislu sta obe obliki enačb enakovredni, v diskretnem pa ne. To pomeni, da so pri algoritmi s šibkimi vezmi krepke oblike vezi kršene. Motivi in posledice kršitve krepkih kinematičnih enačb so detajlno opisane v članku Gamsa, Planinca in Sajeta (2007c), več o njih pa bomo povedali v sklepnih mislih tega poglavja. Kinematične enačbe v šibki obliki so:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}} &= \dot{\mathbf{\Lambda}}^T (\mathbf{u} + \mathbf{r}_0)' + \mathbf{\Lambda}^T \dot{\mathbf{u}}', \\ \dot{\kappa} &= \dot{\varphi}'.\end{aligned}\quad (4.65)$$

Da bi dobili inkrement deformacij, je potrebno enačbe (4.65) integrirati po času od t_n do t_{n+1} ; v splošnem se inkrement poljubne funkcije $(\bullet)(t)$ v časovnem koraku $t_n \rightarrow t_{n+1}$ izraža z vrednostjo njenega odvoda pri vmesnem času:

$$\Delta(\bullet) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} (\dot{\bullet})(t) dt = (\dot{\bullet})_{\alpha(n)} \Delta t. \quad (4.66)$$

Gornji rezultat moramo razumeti tako, da za nek določen $\alpha(n) \in [t_n, t_{n+1}]$ velja, da je prirastek na časovnem intervalu enak odvodu funkcije (nekje) na tem intervalu, pomnožen z velikostjo časovnega intervala. $\alpha(n)$ je neznanka, ki se spreminja s časovnim korakom – je funkcija časovnega koraka n . Te neznanke se znebimo, če predpostavimo, da je $\alpha(n) = t_n + \frac{\Delta t}{2} = t_m$:

$$\Delta(\bullet) \approx (\dot{\bullet})(t_m) \Delta t. \quad (4.67)$$

To pravilo uporabimo pri integraciji enačb (4.65):

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\epsilon} dt &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} [\dot{\Lambda}^T \mathbf{r}' + \Lambda^T \dot{\mathbf{u}}'] dt, \\ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\kappa} dt &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\varphi}' dt \end{aligned} \quad (4.68)$$

in dobimo

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon &\approx [\dot{\Lambda}^T \mathbf{r}' + \Lambda^T \dot{\mathbf{u}}'](t_m) \Delta t, \\ \Delta \kappa &\approx \dot{\varphi}'(t_m) \Delta t. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Odvod rotacijske matrike $\dot{\Lambda}$ zapišemo z matriko \mathbf{W} , preostale funkcijske odvisnosti pri t_m pa pripišemo posameznim funkcijam

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon &\approx [\mathbf{W}^T \Lambda^T(t_m) \mathbf{r}'(t_m) \dot{\varphi}(t_m) + \Lambda^T(t_m) \dot{\mathbf{u}}'(t_m)] \Delta t, \\ \Delta \kappa &\approx \dot{\varphi}'(t_m) \Delta t. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Za reševanje enačb uporabljamo ‘koračni’ algoritem, v katerem poznamo vrednosti pomikov in zasuka ter njihovih časovnih odvodov pri t_n , vrednosti pri t_{n+1} pa računamo. Funkcijskih vrednosti pri času t_m ne poznamo. Aproximiramo jih z znankami pri t_n in neznankami pri t_{n+1} z nastavki:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t_m) &\approx \mathbf{u}_m = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{n+1} + \mathbf{u}_n), \\ \varphi(t_m) &\approx \varphi_m = \frac{1}{2} (\varphi_{n+1} + \varphi_n). \end{aligned} \quad (4.71)$$

Za časovno diskretizacijo členov $\dot{\mathbf{u}}'(t_m)$ in $\dot{\varphi}'(t_m)$ uporabimo časovno diskretizacijske nastavke:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}'(t_m) &= \frac{\Delta \mathbf{u}'}{\Delta t} \Rightarrow \dot{\mathbf{u}}'(t_m) \Delta t = \Delta \mathbf{u}', \\ \dot{\varphi}'(t_m) &= \frac{\Delta \varphi'}{\Delta t} \Rightarrow \dot{\varphi}'(t_m) \Delta t = \Delta \varphi', \\ \dot{\varphi}(t_m) &= \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \Rightarrow \dot{\varphi}(t_m) \Delta t = \Delta \varphi \end{aligned} \quad (4.72)$$

in enačbo (4.70) lahko zapišemo kot

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon &= \mathbf{W}^T \Lambda^T(t_m) \mathbf{r}'_m \Delta \varphi + \Lambda^T(t_m) \Delta \mathbf{u}', \\ \Delta \kappa &= \Delta \varphi'. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Diskretizirati moramo le še rotacijsko matriko, kar lahko storimo na dva različna načina, zato ločimo dve varianti šibkih integratorjev.

Varianta z midpoint rotacijsko matriko. V duhu aproksimacijskega nastavka (4.71) zasuke v rotacijski matriki nadomestimo s povprečnimi:

$$\mathbf{\Lambda}(t_m) \approx \mathbf{\Lambda}(\varphi_m) = \begin{bmatrix} \cos \varphi_m & -\sin \varphi_m \\ \sin \varphi_m & \cos \varphi_m \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

in enačba (4.73) postane

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{W}^T \mathbf{\Lambda}^T(\varphi_m) \mathbf{r}'_m \Delta \varphi + \mathbf{\Lambda}^T(\varphi_m) \Delta \mathbf{u}', \\ \Delta \kappa &= \Delta \varphi'. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Ta enačba narekuje nov način računa deformacij pri t_{n+1} , drugačen kot pri integratorjih s krepkimi kinematičnimi vezmi (enačba (2.24)), saj jih moramo tokrat računati s prištevanjem inkrementov k znanim vrednostim pri času t_n :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} &= \boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \\ \kappa_{n+1} &= \kappa_n + \Delta \kappa. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Ko izraze iz enačbe (4.75) vstavimo v (4.40), dobimo

$$\Delta \Pi_{\text{def}} = \int_0^L (\mathbf{N}_m^T \mathbf{W}^T \mathbf{\Lambda}^T(\varphi_m) \mathbf{r}'_m \Delta \varphi + \mathbf{N}_m^T \mathbf{\Lambda}^T(\varphi_m) \Delta \mathbf{u}' + M_m \Delta \varphi') ds. \quad (4.77)$$

V tej enačbi interpoliramo inkremente pomikov in zasukov po nastavkih (4.61) ter dobimo

$$\Delta \Pi_{\text{def}} = \sum_{i=1}^{n_{\text{itp}}} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}_i \\ \Delta \Phi_i \end{bmatrix} \cdot \int_0^L \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}(\varphi_m) \mathbf{N}_m P'_i \\ \mathbf{N}_m^T \mathbf{W}^T \mathbf{\Lambda}^T(\varphi_m) \mathbf{r}'_m P_i + M_m P'_i \end{bmatrix}. \quad (4.78)$$

Ker velja

$$\mathbf{\Lambda}(\varphi_m) = \frac{1}{\cos \frac{\Delta \varphi}{2}} \mathbf{\Lambda}_m, \quad (4.79)$$

v enačbi (4.78) zaradi konformnosti z ostalimi integratorji nadomestimo rotacijsko matriko $\mathbf{\Lambda}(\varphi_m)$ s tem izrazom. Ko vpeljemo še oznako

$$A^* = \frac{1}{\cos \frac{\Delta \varphi}{2}}, \quad (4.80)$$

lahko enačbo (4.78) zapišemo v obliki

$$\Delta \Pi_{\text{def}} = \sum_{i=1}^{n_{\text{itp}}} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}_i \\ \Delta \Phi_i \end{bmatrix} \cdot \int_0^L \begin{bmatrix} A^* \mathbf{\Lambda}_m \mathbf{N}_m P'_i \\ A^* \mathbf{N}_m^T \mathbf{W}^T \mathbf{\Lambda}_m^T \mathbf{r}'_m P_i + M_m P'_i \end{bmatrix}. \quad (4.81)$$

Iz nje določimo prispevek notranjih sil k residualu v j -tem vozlišču:

$$\mathbf{g}_{j,\text{not}} = \begin{bmatrix} N \mathbf{g}_{j,\text{not}} \\ M g_{j,\text{not}} \end{bmatrix} = \int_0^L \begin{bmatrix} A^* \mathbf{\Lambda}_m \mathbf{N}_m P'_j \\ A^* \mathbf{N}_m^T \mathbf{W}^T \mathbf{\Lambda}_m^T \mathbf{r}'_m P_j + M_m P'_j \end{bmatrix} ds. \quad (4.82)$$

Če uporabimo vektorski produkt namesto matrike \mathbf{W} , dobimo

$$\mathbf{g}_{j,\text{not}} = \begin{bmatrix} N \mathbf{g}_{j,\text{not}} \\ M g_{j,\text{not}} \end{bmatrix} = \int_0^L \begin{bmatrix} A^* \mathbf{\Lambda}_m \mathbf{N}_m P'_j \\ -A^* \mathbf{r}'_m \times (\mathbf{\Lambda}_m \mathbf{N}_m) P_j + M_m P'_j \end{bmatrix} ds. \quad (4.83)$$

Varianta s trapezno rotacijsko matriko. Rotacijsko matriko $\Lambda(t_m)$ lahko diskretiziramo tudi z nastavkom (4.71) oziroma (4.45), kakor da je Λ samostojna neznanaka:

$$\Lambda(t_m) \approx \frac{1}{2} (\Lambda_n + \Lambda_{n+1}) = \Lambda_m. \quad (4.84)$$

V tem primeru enačba (4.73) postane

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon &= \mathbf{W}^T \Lambda_m^T \mathbf{r}'_m \Delta \varphi + \Lambda_m^T \Delta \mathbf{u}', \\ \Delta \kappa &= \Delta \varphi'. \end{aligned} \quad (4.85)$$

To je zopet pravilo, ki narekuje račun deformacij z inkrementi in je prikazano v enačbi (4.76). Ko izraze iz enačbe (4.85) vstavimo v (4.40), dobimo

$$\Delta \Pi_{\text{def}} = \int_0^L (\mathbf{N}_m^T \mathbf{W}^T \Lambda_m^T \mathbf{r}'_m \Delta \varphi + \mathbf{N}_m^T \Lambda_m^T \Delta \mathbf{u}' + M_m \Delta \varphi') ds. \quad (4.86)$$

Po nastavkih (4.61) interpoliramo inkremente pomikov in zasukov ter dobimo

$$\Delta \Pi_{\text{def}} = \sum_{i=1}^{n_{\text{itp}}} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}_i \\ \Delta \Phi_i \end{bmatrix} \cdot \int_0^L \begin{bmatrix} \Lambda_m \mathbf{N}_m P'_i \\ \mathbf{N}_m^T \mathbf{W}^T \Lambda_m^T \mathbf{r}'_m P'_i + M_m P'_i \end{bmatrix}. \quad (4.87)$$

Iz te enačbe določimo prispevek notranjih sil k residualu v j -tem vozlišču:

$$\mathbf{g}_{j,\text{not}} = \begin{bmatrix} N \mathbf{g}_{j,\text{not}} \\ M g_{j,\text{not}} \end{bmatrix} = \int_0^L \begin{bmatrix} \Lambda_m \mathbf{N}_m P'_j \\ \mathbf{N}_m^T \mathbf{W}^T \Lambda_m^T \mathbf{r}'_m P'_j + M_m P'_j \end{bmatrix} ds. \quad (4.88)$$

Če uporabimo vektorski produkt namesto matrike \mathbf{W} , dobimo

$$\mathbf{g}_{j,\text{not}} = \begin{bmatrix} N \mathbf{g}_{j,\text{not}} \\ M g_{j,\text{not}} \end{bmatrix} = \int_0^L \begin{bmatrix} \Lambda_m \mathbf{N}_m P'_j \\ -\mathbf{r}'_m \times (\Lambda_m \mathbf{N}_m) P'_j + M_m P'_j \end{bmatrix} ds. \quad (4.89)$$

4.3.2 Kinetična energija

Razlika kinetičnih energij je

$$\Delta \Pi_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \int_0^L (\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^T \mathbf{c}_\rho \dot{\mathbf{u}}_{n+1} - \dot{\mathbf{u}}_n^T \mathbf{c}_\rho \dot{\mathbf{u}}_n + EJ \dot{\varphi}_{n+1}^2 - EJ \dot{\varphi}_n^2) ds. \quad (4.90)$$

Razlike kvadratov v enačbi (4.90) razvijemo podobno kot v enačbi (4.36):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{u}}_{n+1}^2 - \dot{\mathbf{u}}_n^2) &= \frac{\dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \dot{\mathbf{u}}_n}{2} (\dot{\mathbf{u}}_{n+1} - \dot{\mathbf{u}}_n) = \dot{\mathbf{u}}_m \Delta \dot{\mathbf{u}}, \\ \frac{1}{2} (\dot{\varphi}_{n+1}^2 - \dot{\varphi}_n^2) &= \frac{\dot{\varphi}_{n+1} + \dot{\varphi}_n}{2} (\dot{\varphi}_{n+1} - \dot{\varphi}_n) = \dot{\varphi}_m \Delta \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Ti pravili določata račun translacijske in kotne hitrosti pri sredinskem času:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_m &= \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \dot{\mathbf{u}}_n), \\ \dot{\varphi}_m &= \frac{1}{2} (\dot{\varphi}_{n+1} + \dot{\varphi}_n). \end{aligned} \quad (4.92)$$

Sprememba kinetične energije je sedaj

$$\Delta \Pi_{\text{kin}} = \int_0^L (\dot{\mathbf{u}}_m^T \mathbf{c}_\rho \Delta \dot{\mathbf{u}} + EJ \dot{\varphi}_m \Delta \dot{\varphi}) ds. \quad (4.93)$$

Vsi algoritmi razen algoritma Sima, Tarnowa in Doblareja (1995). Z obliko enačbe (4.93) še nismo zadovoljni, saj v njej nastopajo inkrementi hitrosti in ne inkrementi osnovnih količin, kot narekuje 'ciljna' enačba (4.32). Za hitrosti v midpointu zato vpeljemo časovno diskretizacijo

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}_m &= \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t}, \\ \dot{\varphi}_m &= \frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{\Delta t} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t},\end{aligned}\quad (4.94)$$

za pospeške pa

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{u}}_m &= \frac{\dot{\mathbf{u}}_{n+1} - \dot{\mathbf{u}}_n}{\Delta t} = \frac{\Delta \dot{\mathbf{u}}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta \dot{\mathbf{u}} = \ddot{\mathbf{u}}_m \Delta t, \\ \ddot{\varphi}_m &= \frac{\dot{\varphi}_{n+1} - \dot{\varphi}_n}{\Delta t} = \frac{\Delta \dot{\varphi}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta \dot{\varphi} = \ddot{\varphi}_m \Delta t.\end{aligned}\quad (4.95)$$

Ko nastavke za $\dot{\mathbf{u}}_m$ in $\dot{\varphi}_m$ iz enačbe (4.94) in nastavke za $\Delta \dot{\mathbf{u}}$ in $\Delta \dot{\varphi}$ iz enačbe (4.95) vstavimo v enačbo (4.93), dobimo

$$\Delta \Pi_{\text{kin}} = \int_0^L (\ddot{\mathbf{u}}_m^T \mathbf{c}_\rho \Delta \mathbf{u} + EJ \ddot{\varphi}_m \Delta \varphi) ds. \quad (4.96)$$

Oblika te enačbe ustreza zahtevani, vendar pa smo v postopku izpeljave te enačbe uporabili dve pravili za račun hitrosti v sredinski točki. Najprej smo v enačbi (4.91) računali hitrosti kot povprečje hitrosti, zatem pa smo v enačbi (4.94) to hitrost zapisali kot inkrement količine, deljen z inkrementom časovnega koraka. Dve različni definiciji za isto količino smemo imeti le, če zahtevamo njuno enakost:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \dot{\mathbf{u}}_n}{2} = \frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t} &\Rightarrow \dot{\mathbf{u}}_{n+1} = 2 \frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t} - \dot{\mathbf{u}}_n, \\ \frac{\dot{\varphi}_{n+1} + \dot{\varphi}_n}{2} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} &\Rightarrow \dot{\varphi}_{n+1} = 2 \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} - \dot{\varphi}_n.\end{aligned}\quad (4.97)$$

S tem dobimo t.i. popravek hitrosti oz. angl. 'velocity update', ki igra pomembno vlogo v numeričnem algoritmu. Opozorimo na identičnost izrazov (4.97) in (4.28). Z znanimi izrazi $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}$ in $\dot{\varphi}_{n+1}$ iz enačbe (4.97) lahko iz enačbe (4.95) eksplicitno zapišemo izraze za pospeške pri t_m :

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{u}}_m &= \frac{2}{\Delta t^2} (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n - \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n), \\ \ddot{\varphi}_m &= \frac{2}{\Delta t^2} (\varphi_{n+1} - \varphi_n - \Delta t \dot{\varphi}_n).\end{aligned}\quad (4.98)$$

Tokrat opozorimo na identičnost izrazov (4.98) in (4.27). V nadaljevanju izpeljave v enačbi (4.96) interpoliramo inkremente pomikov in zasukov po enačbah (4.61):

$$\Delta \Pi_{\text{kin}} = \sum_{i=1}^{n_{\text{itp}}} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}_i \\ \Delta \Phi_i \end{bmatrix} \cdot \int_0^L \begin{bmatrix} A\rho \ddot{\mathbf{u}}_m P_i \\ EJ \ddot{\varphi}_m P_i \end{bmatrix} ds. \quad (4.99)$$

Iz te enačbe že lahko določimo prispevek residuala v j -tem vozlišču zaradi vztrajnostnih sil:

$$\mathbf{g}_{j,\text{vzt}} = \begin{bmatrix} N \mathbf{g}_{j,\text{vzt}} \\ M g_{j,\text{vzt}} \end{bmatrix} = \int_0^L \begin{bmatrix} A\rho \ddot{\mathbf{u}}_m P_j \\ EJ \ddot{\varphi}_m P_j \end{bmatrix} ds = \frac{1}{\Delta t} \int_0^L \begin{bmatrix} A\rho (\dot{\mathbf{u}}_{n+1} - \dot{\mathbf{u}}_n) P_j \\ EJ (\dot{\varphi}_{n+1} - \dot{\varphi}_n) P_j \end{bmatrix} ds. \quad (4.100)$$

Algoritem Sima, Tarnowa in Doblareja (1995). Pri tem algoritmu želimo enačbo (4.93) zapisati z inkrementi pomikov in skaliranih zasukov. V ta namen definiramo posebno diskretizacijo kotne hitrosti v sredinski točki:

$$\dot{\varphi}_m = \frac{\varphi_{S,n+1} - \varphi_{S,n}}{\Delta t} = \frac{\Delta \varphi_S}{\Delta t}. \quad (4.101)$$

Nastavki za pomike $\dot{\mathbf{u}}_m$ iz enačbe (4.94) ostanejo enaki, prav tako ostanejo enaki nastavki za pospeške (4.95). Enačba (4.93) z njimi postane

$$\Delta \Pi_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \int_0^L (\ddot{\mathbf{u}}_m^T \mathbf{c}_\rho \Delta \mathbf{u} + EJ \dot{\varphi}_m \Delta \varphi_S) ds. \quad (4.102)$$

Zopet moramo razrešiti problem dvojnega definiranja hitrosti v sredinski točki, ki je sedaj zaradi drugačne oblike ene od definicij nekoliko drugačen. Z upoštevanjem zveze (4.56) dobimo

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\mathbf{u}}_{n+1} + \dot{\mathbf{u}}_n}{2} &= \frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t} \Rightarrow \dot{\mathbf{u}}_{n+1} = 2 \frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t} - \dot{\mathbf{u}}_n, \\ \frac{\dot{\varphi}_{n+1} + \dot{\varphi}_n}{2} &= \frac{\Delta \varphi_S}{\Delta t} \Rightarrow \dot{\varphi}_{n+1} = \frac{4}{\Delta t} \tan \frac{\Delta \varphi}{2} - \dot{\varphi}_n. \end{aligned} \quad (4.103)$$

Novi izraz za $\dot{\varphi}_{n+1}$ upoštevamo pri računu pospeškov v enačbah (4.95) in s tem dobimo ekspliciten izraz za kotne pospeške, ki je tokrat tak:

$$\ddot{\varphi}_m = \frac{4}{\Delta t^2} \tan \frac{\Delta \varphi}{2} - \frac{2}{\Delta t} \dot{\varphi}_n. \quad (4.104)$$

Prispevek residuala je po formi tak kot za druge integratorje, torej enak kot v enačbi (4.100).

4.3.3 Obtežba in potencial zunanjih sil

Ohranjanje energije v odsotnosti obtežbe je dokazano s tem, da je sprememba deformacijske in kinetične energije zapisana kot produkt enačb pri sredinskem času in inkrementa neznanih vzdolžnih pomikov in zasukov:

$$\Delta \Pi = \mathbf{g}_m \Delta \Upsilon. \quad (4.105)$$

Enačbam je zadoščeno v sredinski točki in obtežba, ki deluje na sistem, mora delovati pri istem času, vendar pa na prvi pogled ni jasno, ali naj bo to obtežba v povprečnem ali sredinskem smislu. Če se brez izgube na splošnosti omejimo na točkovno obtežbo, je torej vprašanje, ali moramo obtežbo upoštevati sredinsko, kot $\mathbf{S}(t_m)$, ali povprečno, kot $\mathbf{S}_m = \frac{1}{2} (\mathbf{S}_n + \mathbf{S}_{n+1})$. Odgovora na to vprašanje ne moremo dobiti direktno iz izhodišča izpeljave (4.31). Pravilno izbiro lahko ugotovimo s primerjavo s klasičnimi integratorji, potrdimo pa jo lahko tudi z računskimi primeri. Pravilna možnost je povprečni račun obtežbe, torej $\mathbf{S}_m = (\mathbf{S}_{n+1} + \mathbf{S}_n) / 2$.

Sprememba potenciala zunanjih sil (opravljeno delo zunanjih sil) je

$$-\Delta \Pi_{\text{zun}} = \mathbf{S}_{n+1}^T \mathbf{U}_{n+1}^* - \mathbf{S}_n^T \mathbf{U}_n^* + \int_0^L (\mathbf{q}_{n+1}^T \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{q}_n^T \mathbf{u}_n + m_{Z,n+1} \varphi_{n+1} - m_{Z,n} \varphi_n) ds. \quad (4.106)$$

Ohranjanje energije lahko dokažemo za konzervativno obtežbo. Ugotovitve tega dokaza nam bodo služile pri izpeljavi dokaza o ohranitvi vrtilne količine. Konzervativna obtežba je vsaka obtežba, katere delo na sklenjeni poti je nič. V naši izpeljavi se omejimo na po smeri in velikosti konstantno obtežbo, vemo pa, da momentna obtežba v splošnem ne more biti konzervativna. Ob teh predpostavkah velja:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{n+1} &= \mathbf{S}_n = \mathbf{S}, \\ \mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{q}_n = \mathbf{q}, \\ m_{Z,n+1} &= m_{Z,n} = 0 \end{aligned} \quad (4.107)$$

in

$$-\Delta \Pi_{\text{zun}} = \mathbf{S} \Delta \mathbf{U}^* + \int_0^L \mathbf{q} \Delta \mathbf{u} ds. \quad (4.108)$$

Brez izgube na splošnosti prispevek vzdolžnih obtežb zanemarimo, interpoliramo inkremente pomikov in zasuka po nastavkih (4.3) ter dobimo

$$-\Delta \Pi_{\text{zun}} = \sum_{i=1}^{n_{\text{itp}}} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}_i \\ \Delta \Phi_i \end{bmatrix} \cdot \int_0^L \begin{bmatrix} \mathbf{q}^T P_i \\ 0 \end{bmatrix} ds. \quad (4.109)$$

Iz te enačbe določimo prispevek residuala v j -tem vozlišču:

$$\mathbf{g}_{j,\text{zun}} = \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{j,\text{zun}} \\ g_{j,\text{zun}} \end{bmatrix} = \int_0^L \begin{bmatrix} -\mathbf{q}^T P_i \\ 0 \end{bmatrix} ds. \quad (4.110)$$

4.3.4 Povzetek enačb

Kot lahko opazimo, so prispevki k diskretnim enačbam gibanja zaradi razlik kinetičnih energij in potenciala zunanjih sil enaki pri vseh integratorjih, razlike med njimi obstajajo le v določenih koeficientih v deformacijskih energijah. To sta prva pokazala Jelenić in Crisfield (2002). Skupen zapis ima obliko

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{j,m} = & \int_0^L \left[\begin{array}{c} A^* \mathbf{\Lambda}_m \mathbf{N}_m P_j' \\ B^* \mathbf{N}_m^T \mathbf{W}^T \mathbf{\Lambda}_m^T \mathbf{r}'_m P_j + C^* M_m P_j' \end{array} \right] ds + \\ & + \frac{1}{\Delta t} \int_0^L \left[\begin{array}{c} A\rho (\dot{\mathbf{u}}_{n+1} - \dot{\mathbf{u}}_n) P_j \\ EJ (\dot{\varphi}_{n+1} - \dot{\varphi}_n) P_j \end{array} \right] ds - \int_0^L \left[\begin{array}{c} \mathbf{q}_m^T P_i \\ 0 \end{array} \right] ds \end{aligned} \quad (4.111)$$

oziroma z vektorskim produktom

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{j,m} = & \int_0^L \left[\begin{array}{c} A^* \mathbf{\Lambda}_m \mathbf{N}_m P_j' \\ -B^* \mathbf{r}'_m \times (\mathbf{\Lambda}_m \mathbf{N}_m) P_j + C^* M_m P_j' \end{array} \right] ds + \\ & + \frac{1}{\Delta t} \int_0^L \left[\begin{array}{c} A\rho (\dot{\mathbf{u}}_{n+1} - \dot{\mathbf{u}}_n) P_j \\ EJ (\dot{\varphi}_{n+1} - \dot{\varphi}_n) P_j \end{array} \right] ds - \int_0^L \left[\begin{array}{c} \mathbf{q}_m^T P_i \\ 0 \end{array} \right] ds. \end{aligned} \quad (4.112)$$

Parametri A^* , B^* in C^* za različne integratorje so podani v preglednici 4.2.

Preglednica 4.2: Parametri algoritmov.

Table 4.2: Algorithm parameters.

	Stander in Stein	Simo, Tarnow in Doblare	Šibki $\mathbf{\Lambda}(t_m)$	Šibki $\mathbf{\Lambda}_m$
A^*	1	1	$\frac{1}{\cos \frac{\Delta\varphi}{2}}$	1
B^*	$\frac{2}{\Delta\varphi} \tan \frac{\Delta\varphi}{2}$	1	$\frac{1}{\cos \frac{\Delta\varphi}{2}}$	1
C^*	1	$\cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2}$	1	1

Za potrebe dokaza ohranjanja gibalne in vrtilne količine pri diskretnem sistemu v enačbah (4.111) in (4.112) lahko brez izgube na splošnosti ohranimo oznake $\dot{\mathbf{u}}_{n+1}$ in $\dot{\varphi}_{n+1}$; njihov dejanski pomen pa je

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} &= \sum_{i=1}^{n_{\text{itp}}} P_i(s) \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{U}}_i \\ \dot{\Phi}_i \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} &= \sum_{i=1}^{n_{\text{itp}}} P_i(s) \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{U}}_i \\ \ddot{\Phi}_i \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.113)$$

4.3.5 Ohranjanje gibalne količine

Razlika gibalnih količin v dveh zaporednih korakih je po definiciji (2.11)

$$\mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{p}_n = \int_0^L A\rho (\dot{\mathbf{u}}_{n+1} - \dot{\mathbf{u}}_n) ds. \quad (4.114)$$

Ker velja

$$\sum_{j=1}^{n_{itp}} P_j = 1, \quad (4.115)$$

lahko obe strani enačbe (4.114) pomnožimo s $\sum_{j=1}^{n_{itp}} P_j$ in vsoto zapišemo pred integral:

$$\Delta \mathbf{p} = \sum_{j=1}^{n_{itp}} \int_0^L A \rho (\dot{\mathbf{u}}_{n+1} - \dot{\mathbf{u}}_n) P_j ds. \quad (4.116)$$

Desno stran enačbe nadomestimo z ${}^N \mathbf{g}_{vzt,j}$ v skladu z enačbo (4.100):

$$\Delta \mathbf{p} = \Delta t \sum_{j=1}^{n_{itp}} {}^N \mathbf{g}_{j,vzt}. \quad (4.117)$$

Iz enačbe (4.34) vidimo, da lahko ${}^N \mathbf{g}_{j,vzt}$ nadomestimo z ${}^N \mathbf{g}_{j,zun} - {}^N \mathbf{g}_{j,not}$. Slednja sta podana v enačbi (4.111). Po zamenjavi postane sprememba gibalne količine

$$\Delta \mathbf{p} = \Delta t \sum_{j=1}^{n_{itp}} \int_0^L (-\mathbf{q}_m P_j - A^* \mathbf{\Lambda}_m \mathbf{N}_m P'_j) ds. \quad (4.118)$$

Ko upoštevamo

$$\sum_{j=1}^{n_{itp}} P'_j = 0 \quad (4.119)$$

in (4.115), dobimo

$$\Delta \mathbf{p} = \Delta t \int_0^L -\mathbf{q}_m ds. \quad (4.120)$$

Ohranjanje gibalne količine je torej možno le, kadar na konstrukcijo ne deluje translacijska obtežba ($\mathbf{q}_m = \mathbf{0}$). V tem primeru pa gibalno količino ohranjajo vsi opisani integratorji. Zaradi relativno milih pogojev gibalno količino ohranja tudi večina drugih integratorjev. Ohranjanje gibalne količine je tudi potrební pogoj za ohranjanje vrtilne količine (Graham (2001)). Dokaz je povzet po delu Jelenića in Crisfielda (2002).

4.3.6 Ohranjanje vrtilne količine

V skladu z definicijo (2.13) je sprememba vrtilne količine v dveh poljubnih zaporednih časovnih korakih

$$L_{n+1} - L_n = \int_0^L (\mathbf{r}_{n+1} \times \mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{r}_n \times \mathbf{p}_n + J \rho \dot{\varphi}_{n+1} - J \rho \dot{\varphi}_n) ds. \quad (4.121)$$

Ko razvijemo člen $\mathbf{r}_{n+1} \times \mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{r}_n \times \mathbf{p}_n$, dobimo

$$\begin{aligned} \Delta L = \frac{1}{2} \int_0^L [(\mathbf{r}_{n+1} + \mathbf{r}_n) \times (\mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{p}_n) + (\mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_n) \times (\mathbf{p}_{n+1} + \mathbf{p}_n)] ds - \\ - \int_0^L J \rho (\dot{\varphi}_{n+1} - \dot{\varphi}_n) ds. \end{aligned} \quad (4.122)$$

Člen $(\mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_n) \times (\mathbf{p}_{n+1} + \mathbf{p}_n)$ lahko zapišemo kot $\Delta \mathbf{u} \times A \rho \dot{\mathbf{u}}_m$. Ker sta vektorja $\Delta \mathbf{u}$ in $\dot{\mathbf{u}}_m$ vzporedna, kar vidimo iz zveze $\Delta \mathbf{u} / \Delta t = \dot{\mathbf{u}}_m$, je njun vektorski produkt enak nič in od enačbe (4.122) ostane

$$\Delta L = \int_0^L [\mathbf{r}_m \times A \rho (\dot{\mathbf{u}}_{n+1} - \dot{\mathbf{u}}_n)] ds - \int_0^L J \rho (\dot{\varphi}_{n+1} - \dot{\varphi}_n) ds. \quad (4.123)$$

V tej enačbi interpoliramo krajevni vektor \mathbf{r}_m in diskretne vrednosti krajevnega vektorja postavimo pred integral, izraz $J \rho (\dot{\varphi}_{n+1} - \dot{\varphi}_n)$ pa pomnožimo s $\sum_{j=1}^{n_{itp}} P_j = 1$:

$$\Delta L = \sum_{j=1}^{n_{itp}} \left[\mathbf{r}_{m,j} \times \int_0^L A \rho (\dot{\mathbf{u}}_{n+1} - \dot{\mathbf{u}}_n) P_j ds - \int_0^L J \rho (\dot{\varphi}_{n+1} - \dot{\varphi}_n) P_j ds \right]. \quad (4.124)$$

Podobno kot pri dokazu ohranjanja gibalne količine v enačbi prepoznamo člene ${}^N \mathbf{g}_{j,vzt}$ in ${}^M g_{j,vzt}$:

$$\Delta L = \sum_{j=1}^{n_{itp}} \left[\mathbf{r}_{m,j} \times \int_0^L \Delta t {}^N \mathbf{g}_{j,vzt} ds - \int_0^L \Delta t {}^M g_{j,vzt} ds \right]. \quad (4.125)$$

${}^N \mathbf{g}_{j,vzt}$ nadomestimo z ${}^N \mathbf{g}_{j,zun} - {}^N \mathbf{g}_{j,not}$ in ${}^M g_{j,vzt}$ z ${}^M g_{j,zun} - {}^M g_{j,not}$ ter dobimo

$$\begin{aligned} \Delta L = \sum_{j=1}^{n_{itp}} \left[\mathbf{r}_{m,j} \times \int_0^L \Delta t \left(-\mathbf{q}_m P_j - A^* \mathbf{\Lambda}_m \mathbf{N}_m P_j' \right) ds - \right. \\ \left. - \int_0^L \Delta t \left(B^* \mathbf{r}'_m \times (\mathbf{\Lambda}_m \mathbf{N}_m) P_j + C^* M_m P_j' \right) ds \right]. \end{aligned} \quad (4.126)$$

Pri členu $C^* M_m P_j'$ upoštevamo zvezo (4.119), pri členu $B^* \mathbf{r}'_m \times (\mathbf{\Lambda}_m \mathbf{N}_m) P_j$ pa zvezo (4.115), izpostavimo Δt ter člene preuredimo in dobimo

$$\begin{aligned} \Delta L = \Delta t \sum_{j=1}^{n_{itp}} \left[\mathbf{r}_{m,j} \times \int_0^L -\mathbf{q}_m P_j ds + \right. \\ \left. + \mathbf{r}_{m,j} \times \int_0^L A^* \mathbf{\Lambda}_m \mathbf{N}_m P_j' ds - \int_0^L B^* \mathbf{r}'_m \times (\mathbf{\Lambda}_m \mathbf{N}_m) ds \right]. \end{aligned} \quad (4.127)$$

V zadnjem koraku izpeljave obtežne člene zanemarimo, saj zahtevamo ohranjanje v odsotnosti obtežbe, interpoliramo \mathbf{r}'_m in diskretne vrednosti krajevnega vektorja postavimo pred integral:

$$\Delta L = \Delta t \sum_{j=1}^{n_{itp}} \left[\mathbf{r}_{m,j} \times \int_0^L A^* \mathbf{\Lambda}_m \mathbf{N}_m P_j' ds - \mathbf{r}_{m,j} \times \int_0^L B^* \mathbf{\Lambda}_m \mathbf{N}_m P_j' ds \right]. \quad (4.128)$$

Enačbo preuredimo in dobimo:

$$\Delta L = \Delta t \sum_{j=1}^{n_{itp}} \mathbf{r}_{m,j} \times \int_0^L (A^* - B^*) \mathbf{\Lambda}_m \mathbf{N}_m P_j' ds. \quad (4.129)$$

Potrebni in zadostni pogoj za ohranjanje vrtilne količine je, da na (nepodprti) sistem ne deluje obtežba in da velja

$$A^* = B^*. \quad (4.130)$$

Temu pogoju zadoščajo vsi algoritmi v preglednici 4.2 razen algoritma Standerja in Steina. Dokaz je povzet po delu Jelenića in Crisfielda (2002).

4.4 Algoritmi

Algoritmi posameznih integratorjev zahtevajo upoštevanje določenih specifičnih pravil v računu. V tem poglavju pravila še enkrat predstavimo in poudarimo razlike med integratorji. Za integratorje vpeljemo naslednje oznake: Newmarkov integrator (New), integrator Hilberja, Hughesa in Taylorja (HHT), integrator Standerja in Steina (StaSt), integrator Sima, Tarnowa in Doblareja (STD), integrator s šibkimi kinematičnimi vezmi in povprečno rotacijsko matriko (Wpov), integrator s šibkimi kinematičnimi vezmi in sredinsko rotacijsko matriko (Wmid). Kot zadnjega navedemo integrator Ibrahimbegovića in Mamourija (IbMa), ki ga do sedaj nismo izpostavljali. Integrator IbMa je namreč v skoraj vseh pogledih identičen integratorju STD z drobno, a ključno razliko v numerični implementaciji, ki jo bomo prikazali v naslednjih vrsticah.

1. *Začetek algoritma* $t = 0$:

Newmark, HHT:

Iz znanih začetnih pogojev (3.7) se izračuna $\ddot{\mathbf{U}}_0, \ddot{\Phi}_0$ iz enačbe (4.29).

StaSt, STD, Wpov, Wmid, IbMa:

Znane so vrednosti začetnih pogojev (3.7).

2. *Račun pri času* t_{n+1} :

Znane so vrednosti neznank pri času t_n :

Newmark, HHT:

$$\mathbf{U}_n, \Phi_n, \dot{\mathbf{U}}_n, \dot{\Phi}_n, \ddot{\mathbf{U}}_n, \ddot{\Phi}_n.$$

StaSt, STD, Wpov, Wmid, IbMa:

$$\mathbf{U}_n, \Phi_n, \dot{\mathbf{U}}_n, \dot{\Phi}_n.$$

► *Vstop v Newtonovo iteracijsko zanko.*

a. *Inicializacija:*

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n, \Phi_{n+1} = \Phi_n.$$

b. *Račun hitrosti in pospeškov:*

Newmark, HHT:

$$\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}, \ddot{\Phi}_{n+1} \text{ po enačbah (4.14).}$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1}, \dot{\Phi}_{n+1} \text{ po enačbah (4.15).}$$

StaSt, Wpov, Wmid:

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1}, \dot{\Phi}_{n+1} \text{ po enačbah (4.97).}$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_m, \ddot{\Phi}_m \text{ iz enačb (4.98).}$$

STD, IbMa:

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1} \text{ po enačbah (4.97).}$$

$$\dot{\Phi}_{n+1} \text{ po enačbah (4.103).}$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_m, \ddot{\Phi}_m \text{ po enačbah (4.95).}$$

- Vstop v integracijsko zanko z reducirano integracijo.

c. Interpolacija:

Newmark, HHT, StaSt, Wpov, IbMa:

$$\mathbf{u}_{n+1}, \varphi_{n+1}, \mathbf{u}_n, \varphi_n, \mathbf{u}_m, \Delta \mathbf{u}, \Delta \varphi, \text{ po enačbah (4.3) in (4.52).}$$

Wmid:

$$\mathbf{u}_{n+1}, \varphi_{n+1}, \mathbf{u}_n, \varphi_n, \mathbf{u}_m, \varphi_m, \Delta \mathbf{u}, \Delta \varphi, \text{ po enačbah (4.3) in (4.52).}$$

STD²:

$$\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_m, \Delta \mathbf{u}, \text{ po enačbah (4.3) in (4.52).}$$

$$\Delta \varphi_{S,n+1}, \text{ po enačbi (4.61) – interpolira se skalirane zasuke!}$$

$$\Delta \varphi_{n+1}, \text{ iz enačbe (4.56):}$$

$$\Delta \varphi_{n+1} = 2 \arctan \frac{\Delta \varphi_{S,n+1}}{2} \text{ (v integracijskih točkah).}$$

$$\mathbf{u}_{n+1}, \varphi_{n+1}, \text{ iz inkrementov: } \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta \mathbf{u}, \varphi_{n+1} = \varphi_n + \Delta \varphi.$$

d. Račun deformacij:

Newmark, StaSt, STD, IbMa:

$$\varepsilon_{n+1}, \kappa_{n+1} \text{ po enačbah (2.24).}$$

HHT (račun pri $t_n + \alpha_t \Delta t$):

$$\mathbf{u}(t_n + \alpha_t \Delta t), \varphi(t_n + \alpha_t \Delta t) \text{ po enačbah (4.17).}$$

$$\varepsilon(t_n + \alpha_t \Delta t), \kappa(t_n + \alpha_t \Delta t) \text{ po enačbah (2.24).}$$

Wmid:

$$\varepsilon_{n+1}, \kappa_{n+1} \text{ po enačbah (4.75) in (4.76).}$$

Wpov:

$$\varepsilon_{n+1}, \kappa_{n+1} \text{ po enačbah (4.85) in (4.76).}$$

e. Račun notranjih (konstitucijskih) sil:

Newmark, HHT:

$$\mathbf{N}_{n+1}, M_{n+1} \text{ po enačbah (2.30) in (2.28).}$$

StaSt, STD, Wpov, Wmid, IbMa:

$$\varepsilon_m \text{ in } \kappa_m \text{ po enačbah (4.38).}$$

$$\mathbf{N}_m, M_m \text{ po enačbah (4.39) in (2.30).}$$

f. Zapis 'togostnega' dela enačb \mathbf{g}_{not} :

Togostnim silam pripadajoči del enačb (4.111):

$$\mathbf{g}_{\text{not}} = \int_0^L \left[\begin{array}{c} A^* \mathbf{\Lambda}_m \mathbf{N}_m P'_j \\ B^* \mathbf{N}_m^T \mathbf{W}^T \mathbf{\Lambda}_m^T \mathbf{r}'_m P_j + C^* M_m P'_j \end{array} \right] ds, \quad j = 1, \dots, n_{\text{itp}}.$$

Tangentna matrika (odvod vseh enačb \mathbf{g}_{not} po vseh neznankah \mathbf{U}_{n+1} in Φ_{n+1}):

$$\delta \mathbf{g}_{\text{not}} - \text{določimo s programom AceGen}^3.$$

²Interpolacija in račun zasukov je edina razlika med integratorjema STD in IbMa.

³Program AceGen (Korelc (1997)) je program za avtomatsko odvajanje in generacijo programske kode.

g. Račun količin z vrednostmi pri t_{n+1} :

Deformacijska energija Π_{def} po enačbi (2.16).

- Izstop integracijske zanke z reducirano integracijo.
- Vstop v integracijsko zanko s polno integracijo.

c. Interpolacija:

Newmark, HHT:

$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}, \ddot{\varphi}_{n+1}$ po interpolacijskem nastavku (4.3) na vrednostih $\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}$ in $\ddot{\Phi}_{n+1}$.

StaSt, STD, Wpov, Wmid, IbMa:

$\ddot{\mathbf{u}}_m, \ddot{\varphi}_m$ po interpolacijskem nastavku (4.3) na vrednostih $\ddot{\mathbf{U}}_m$ in $\ddot{\Phi}_m$.

f. Zapis 'vztrajnostnega' dela \mathbf{g}_{vzt} :

Vztrajnostnim silam pripadajoč del enačb (4.111):

$$\mathbf{g}_{\text{vzt}} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^L \begin{bmatrix} A\rho (\dot{\mathbf{u}}_{n+1} - \dot{\mathbf{u}}_n) P_j \\ EJ (\dot{\varphi}_{n+1} - \dot{\varphi}_n) P_j \end{bmatrix} ds.$$

Tangentna matrika (odvod vseh enačb \mathbf{g}_{vzt} po vseh neznankah \mathbf{U}_{n+1} in Φ_{n+1}):

$\delta\mathbf{g}_{\text{vzt}}$ – s programom AceGen.

g. Račun z vrednostmi pri t_{n+1} :

Račun kinetične energije po enačbi (2.19).

Račun gibalne količine po enačbi (2.11).

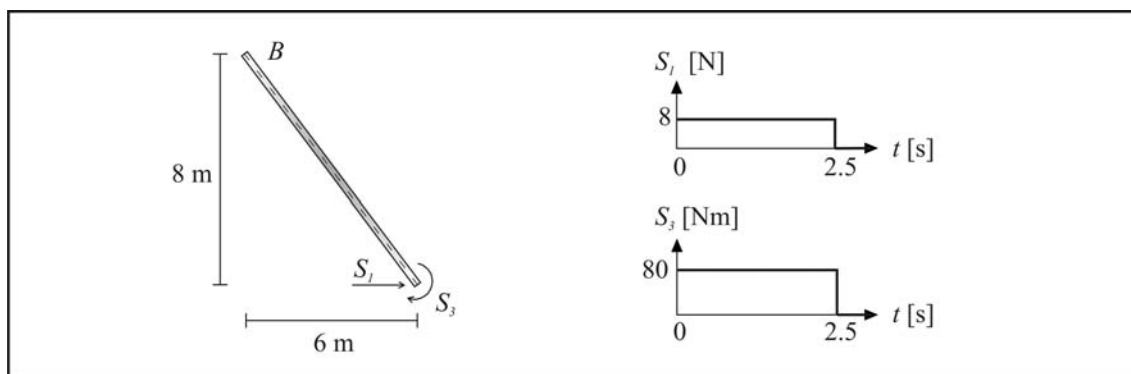
Račun vrtilne količine po enačbi (2.13).

- Izstop iz integracijske zanke s polno integracijo.
- Reši sistem enačb in prištej prirastke $\delta\mathbf{Y}$.
- Ponavljaj dokler $\|\delta\mathbf{Y}\| >$ predpisana natančnost.

Edina razlika med integratorjema STD in IbMa je pri interpolaciji oz. računu zasukov. V algoritmu IbMa se namreč interpolira zasuke oz. inkremente zasukov, medtem ko se v algoritmu STD interpolira skalirane inkremente zasukov. Posledica je, da integrator IbMa ne uspe enako dobro ohranjati mehanske energije kot ostali energijski integratorji.

4.5 Numerični primer

Leteči špaget. Računski primer t.i. letečega špageta, ki sta ga predlagala Simo in Vu-Quoc (1986) in kasneje reševala tudi Hsiao in Jang (1991), je idealen za preverjanje konzervativnih lastnosti integratorjev, saj je sistem nepodprt in bi moral v odsotnosti obtežbe ohranjati vse količine gibanja: mehansko energijo ter gibalno in vrtilno količino. Primer obravnava zelo podajen nosilec, ki se močno upogibno deformira in v tem pogledu spominja na let kuhanega špageta, od koder izvira tudi ime tega primera.



Slika 4.1: Geometrijski podatki o primeru, levo; odvisnost obtežbe od časa, desno.

Figure 4.1: Geometrical data, left; loads vs time, right.

V začetnem stanju nosilec miruje v poševni legi, kot je razvidno s slike 4.1, levo. Na spodnjem robu je obremenjen s točkovno silo in momentom, ki na nosilec delujeta 2.5 sekund, zatem pa prenehata delovati, kot prikazujeta grafa na desni strani slike 4.1.

Materialni podatki so:

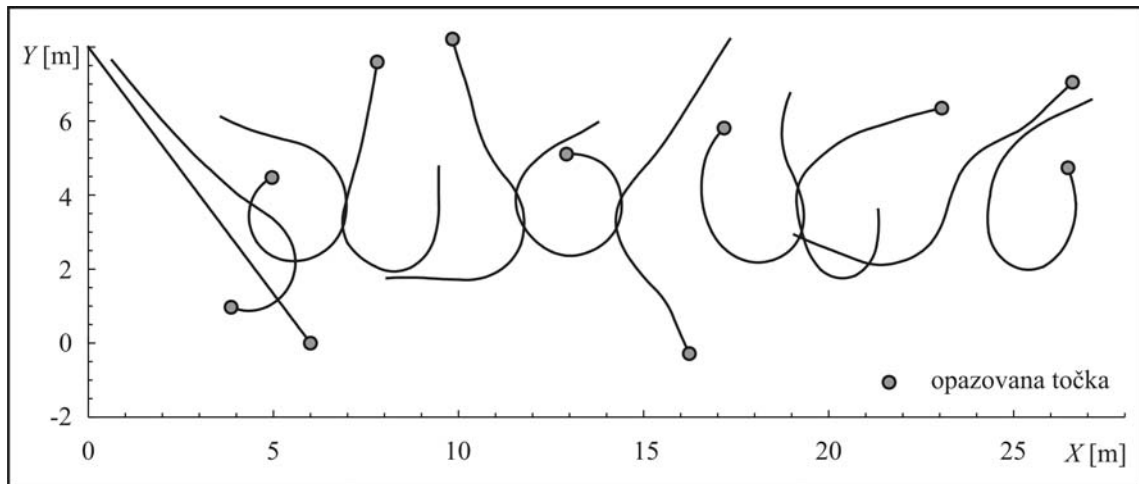
$$EA = GA_S = 10000 \text{ N}, \quad EJ = 100 \text{ Nm}^2, \\ A\rho = 1 \text{ kgm}^{-1}, \quad J\rho = 10 \text{ kgm}.$$

Let špageta, ki je prikazan na sliki 4.2, je izračunan z integratorjem Standerja in Steina, z mrežo 10-ih končnih elementov s kvadratično interpolacijo in s časovnim korakom $\Delta t = 0.01$ s. Zaporedje desetih deformiranih leg je prikazano na vsakih 1.25 s.

Analizo z različnimi integratorji izvršimo do računskega časa 100 s ter opazujemo 'kvaliteto' ohranjanja količin gibanja. Kvaliteto ohranjanja ocenimo z razliko med maksimalno in minimalno vrednostjo količine na intervalu 2.5 do 100 s. Nihanje mehanske energije označimo z $\widehat{\Delta\Pi}$, nihanje komponent gibalne količine v smereh X in Y z $\widehat{\Delta p_X}$ in $\widehat{\Delta p_Y}$, nihanje vrtilne količine pa z $\widehat{\Delta L_Z}$. Newmarkov integrator uporablja trapezno pravilo. Kot kriterij konvergence Newton-Raphsonovega postopka je upoštevana absolutna norma prirastkov 1×10^{-12} .

Da bi tudi z računskim primerom potrdili veljavnost dokazov za različne velikosti časovnih korakov, smo vsako analizo opravili z dvema različnima velikostima časovnih korakov. Večji od uporabljenih časovnih korakov je dolg 0.1 s, kar pomeni, da za analizo potrebujemo 1000 časovnih korakov; manjši časovni korak je 0.01 s in z njim potrebujemo 10000 časovnih korakov. Neodvisnost od stopnje interpolacije po kraju preverimo z uporabo dveh različnih stopenj integracije: z linearno interpolacijo, ki jo označimo z 'I1' in z interpolacijo četrte stopnje, ki jo označimo z 'I4'. Rezultati so zbrani v preglednici 4.3.

Ob analizi rezultatov v preglednici 4.3 ugotovimo, da mehansko energijo z natančnostjo, ki je primerljiva ostanku (residualu), ohranjajo vsi integratorji razen Newmarkovega s trapeznim pravilom (da Newmarkova shema s trapeznim pravilom ne ohranja mehanske energije, sta pokazala že Crisfield in Shi (1996)) in integrator Ibrahimbegovića in Mamourija. Slabo ohranjanje energije integratorja IbMa je posledica direktne interpolacije zasukov v kombinaciji z enačbami, ki pripadajo interpolaciji skaliranih zasukov. Integratorji, ki energijo ohranjajo, imajo približno enako kvaliteto ohranjanja energije ne glede na velikost časovnega koraka in stopnjo interpolacije. Newmarkov časovni integrator s trapeznim pravilom je energijo praviloma ohranjal vsaj za dva reda velikosti bolje, če smo uporabili (za red velikosti) manjši časovni korak.



Slika 4.2: Let špageta.

Figure 4.2: Free flight of spaghetti.

Preglednica 4.3: Špaget: rezultati računa.

Table 4.3: Spaghetti: results.

Alg.	Δt [s]	Int.	$\widehat{\Delta\Pi}$ [J]	$\widehat{\Delta p_X}$ [kg m/s]	$\widehat{\Delta p_Y}$ [kg m/s]	$\widehat{\Delta L_Z}$ [N m s]
StaSt	0.1	I1	1.2×10^{-7}	1.2×10^{-11}	2.9×10^{-13}	4.1×10^{-1}
		I4	2.5×10^{-7}	6.9×10^{-12}	3.8×10^{-13}	3.6×10^{-1}
	0.01	I1	4.1×10^{-6}	4.7×10^{-10}	1.1×10^{-11}	4.0×10^{-3}
		I4	7.5×10^{-7}	2.1×10^{-10}	7.5×10^{-12}	5.5×10^{-3}
STD	0.1	I1	1.3×10^{-7}	2.2×10^{-11}	3.9×10^{-13}	3.1×10^{-8}
		I4	1.4×10^{-7}	5.8×10^{-12}	3.2×10^{-13}	3.3×10^{-8}
	0.01	I1	7.8×10^{-8}	9.1×10^{-10}	2.1×10^{-11}	4.5×10^{-8}
		I4	3.8×10^{-9}	4.7×10^{-10}	7.5×10^{-12}	3.3×10^{-9}
Wpov	0.1	I1	1.2×10^{-7}	1.4×10^{-11}	5.7×10^{-13}	2.6×10^{-8}
		I4	2.2×10^{-7}	1.1×10^{-11}	2.5×10^{-13}	4.5×10^{-8}
	0.01	I1	4.0×10^{-6}	4.1×10^{-10}	1.3×10^{-11}	1.1×10^{-6}
		I4	7.5×10^{-7}	1.8×10^{-10}	9.2×10^{-12}	2.0×10^{-7}
Wmid	0.1	I1	1.2×10^{-7}	1.2×10^{-11}	6.6×10^{-13}	2.7×10^{-8}
		I4	2.1×10^{-7}	6.2×10^{-12}	2.8×10^{-13}	4.4×10^{-8}
	0.01	I1	4.1×10^{-6}	3.5×10^{-10}	7.2×10^{-12}	1.1×10^{-6}
		I4	7.5×10^{-7}	3.1×10^{-10}	9.5×10^{-12}	2.0×10^{-7}
IbMa	0.1	I1	1.4×10^0	2.0×10^{-11}	3.0×10^{-13}	2.9×10^{-8}
		I4	1.3×10^{-1}	1.2×10^{-11}	2.7×10^{-13}	3.3×10^{-8}
	0.01	I1	1.0×10^{-2}	1.2×10^{-9}	1.4×10^{-11}	4.8×10^{-8}
		I4	2.6×10^{-2}	2.9×10^{-10}	8.4×10^{-12}	2.5×10^{-9}
New	0.1	I1	8.5×10^0	2.5×10^{-11}	9.4×10^{-13}	1.7×10^0
		I4	1.1×10^1	2.0×10^{-11}	3.7×10^{-13}	2.2×10^0
	0.01	I1	6.8×10^{-2}	1.0×10^{-9}	2.6×10^{-11}	1.4×10^{-2}
		I4	1.8×10^{-1}	8.5×10^{-10}	1.3×10^{-11}	2.2×10^{-2}

Gibalno količino po pričakovanju ohranjajo vsi integratorji, ne glede na velikost časovnega koraka in stopnjo interpolacije. Vrtilno količino, zopet ne glede na velikost časovnega koraka in stopnje interpolacije, ohranjajo vsi integratorji razen integratorja Standerja in Steina, kar smo pokazali že v teoretičnem delu, in Newmarkovega integratorja s trapeznim pravilom (za slednjega so to pokazali že Simo, Tarnow in Wong (1992)).

4.6 Sklepi

Pokazali smo, da lahko integratorje izpeljemo iz dveh vsebinsko različnih izhodišč. Klasični pristop zapiše ravnotežne enačbe oz. princip virtualnega dela, v njih upošteva kinematične in konstitucijske enačbe ter z diskretizacijo po kraju in času izpelje metodo. Vse enačbe torej držijo v svoji osnovni obliki, zdi pa se, da na tak način ne moremo doseči ohranjanja vseh količin gibanja, kar je posledica oblike enačb samih.

Po drugi strani pa 'energijski' pristop v osnovi izhaja iz zahteve po ohranitvi mehanske energije. Osnovna oz. izhodiščna enačba je torej bistveno drugačna. V nadaljevanju moramo z upoštevanjem ostalih enačb problema izhodiščno enačbo predelati v tako obliko, da iz enačb oz. residuala izpostavimo inkremente neznank problema. Postopkov za doseg tega cilja je več. Ob izpeljavi v vsakem postopku vpeljemo določene aproksimacije, s katerimi si pomagamo do končnega cilja. Ne glede na izbrano pot so končne enačbe de facto *izpeljane* iz izhodiščne enačbe.

Kot smo opazili pri izpeljavi energijskih integratorjev, gre pri šibkih algoritmi in pri algoritmu Standerja in Steina za enako časovno diskretizacijo kot pri Newmarku s trapeznim pravilom. Gre torej za konstantno interpolacijo pospeškov po času, linearno interpolacijo hitrosti po času in kvadratično interpolacijo pomikov po času. Interpolacija zasukov po času v primeru integratorja Sima, Tarnowa in Doblareja je nekoliko drugačna in ni primerljiva z interpolacijo po Newmarkovi shemi.

Izredno zanimiva je ugotovitev, da je izpeljana oblika ravnotežnih enačb, zapisana v enačbi (4.111) in v pripadajoči preglednici 4.2, v skoraj vseh primerih – razen v primeru 'šibkega integratorja s povprečno rotacijsko matriko' – enaka osnovni obliki ravnotežnih enačb (4.24) le v limiti $\Delta\varphi \rightarrow 0$, ko členi A^* , B^* in C^* limitirajo k 1. Za $\Delta\varphi \neq 0$ se klasično ravnotežje razlikuje od izpeljane oblike ravnotežja, ki ga zato imenujemo 'energijsko ravnotežje'. Če klasično ravnotežje ustreza splošni predstavi ravnotežja, kjer je vsota vseh sil in vsota vseh momentov enaka nič, se lahko upravičeno vprašamo, kakšno je 'energijsko' ravnotežje.

Energijsko ravnotežje je tako ravnotežje, ki zagotavlja ohranjanje mehanske energije in s tem potrební pogoj za stabilnost časovnega reševanja. Poleg tega v limiti $\Delta\varphi \rightarrow 0$ zagotavlja veljavnost klasičnega ravnotežja, za končno velik $\Delta\varphi$ pa ne. Zato vsota vseh sil in vsota vseh momentov v splošnem ne bosta enaka nič, kar je v gradbeništvu malodane krivoverstvo, toda taka je cena stabilnosti reševanja pri omenjenih integratorjih.

Ohranjanje mehanske energije smo dokazali za vsako velikost časovnega koraka. To je zelo pomembno, saj nam energijsko ravnotežje zagotavlja ohranjanje mehanske energije popolnoma *neodvisno* od velikosti časovnega koraka. To je v nasprotju s klasičnimi integratorji, kjer ponekod obstaja 'ljudsko' prepričanje, da manjši časovni korak izboljša stabilnost in ohranjanje mehanske energije. V našem računskem primeru se je pokazalo, da se ohranjanje mehanske energije z manjšanjem časovnega koraka izboljšuje, toda ta računski primer je netog. Za toge sisteme je znano (Stander in Stein (1996)), da manjšanje časovnega koraka lahko pri nekonzervativnih integratorjih pripelje do še bolj zgodnjega pojava časovne nestabilnosti. Ohranjanje energije smo dokazali neodvisno od stopnje in vrste interpolacije

po času, kar smo preverili tudi na računskem primeru.

V tem poglavju smo teoretično in računsko pokazali tudi, da vsi obravnavani integratorji ohranjajo gibalno količino. Izpeljali smo tudi pogoj za ohranjanje vrtilne količine in računski primer je izpeljani pogoj potrdil. Velikost časovnega koraka je brezpredmetna tudi pri ohranjanju gibalne in vrtilne količine.

Pokazali smo tudi, da lahko izpeljane algoritme ločimo na dve skupini glede na obliko kinematičnih enačb: na algoritme s šibkimi kinematičnimi vezmi in algoritme s krepkimi kinematičnimi vezmi. Če v izpeljavi uporabimo krepke kinematične vezi, nimamo možnosti, da bi se energijsko in klasično ravnotežje ujemala. Nasprotno pa, če uporabimo šibke kinematične vezi in rotacijsko matriko diskretiziramo tako, da pri sredinskem času vzamemo njeno povprečno vrednost, se bosta obliki energijskega in klasičnega ravnotežja ujemali.

Ne glede na to, kako obrnemo problem, se moramo za ohranjanje energije nečemu odpovedati. V primeru integratorjev s krepkimi kinematičnimi vezmi se odpovemo klasični obliki ravnotežja, ki zagotavlja ničelnost rezultant. Zadoščeno pa je energijskemu ravnotežju, ki pa je le malo drugačno od klasičnega. V primeru algoritmov s šibkimi kinematičnimi vezmi se odpovemo krepki obliki kinematičnih enačb. V analitičnem smislu sta krepka in šibka oblika kinematičnih enačb enakovredni, vendar z diskretizacijo enakost izničimo. Zato krepke Reissnerjeve kinematične enačbe niso izpolnjene. Za ohranjanje mehanske energije smo se torej odpovedali točnim krepkim kinematičnim enačbam, izpeljano energijsko ravnotežje pa je enako klasičnemu, kar je prednost.

Integratorji z ohranjanjem količin nedvomno izboljšajo stabilnost v računskih postopkih, vendar zaradi oblik enačb problema od nas zahtevajo, da se nečemu odpovemo: bodisi ravnotežju v klasičnem smislu ali pa kinematičnim enačbam v krepki obliki.

4.7 Dušenje

Uvod. Odziv konstrukcije na splošno obtežbo je sestavljen iz neskončnega števila njenih nihajnih oblik. Te imajo v odzivu različne stopnje participacije, ki praviloma z naraščajočimi frekvencami upadajo, z inženirskega stališča pa hitro postanejo zanemarljivo majhne, saj za zadovoljivo natančnost opisa odziva večinoma zadostuje že nekaj prvih lastnih oblik nihanja.

Diskreten matematični model konstrukcije ima končno število prostostnih stopenj in enako število nihajnih oblik. Vsaki nihajni obliki pripadajo svoje frekvence in nihajni časi. Za vsako nihajno obliko, ki jo želimo 'zadovoljivo' upoštevati v odzivu, moramo pri numerični časovni integraciji predvideti približno deset časovnih korakov za en nihajni čas, da obliko zadovoljivo natančno zajamemo v odzivu (Bathe (1996)). Nihajni časi relativno hitro padajo, tako da smo pri integraciji vedno v položaju, da celo množico nihajnih oblik računamo s prevelikim časovnim korakom. Zaradi prevelikega časovnega koraka take nihajne oblike povzročajo numerične motnje, ki se kažejo kot šum, ki lahko postane moteč. Dodatno je mreža končnih elementov v krajevnem smislu praviloma pregroba, da bi zadovoljivo modelirala deformiranje v višjih nihajnih oblikah in to je dodaten vir numeričnih motenj v analizi. Te vire napak in motenj v problemu omilimo oz. odstranimo z umetnim, numerično povzročenim dušenjem.

Osnovni namen takega dušenja je izločiti višje nihajne oblike iz odziva. Ključen problem je, kako doseči, da bo umetno dušenje vplivalo samo na nihajne oblike z visokimi frekvencami. V nadaljevanju besedila predstavimo enega od možnih pristopov, ki temelji na ideji, da dušenje deluje le, kadar in kjer je potrebno, sicer pa ne, ter s tem minimizira vpliv numeričnega dušenja na osnovne nihajne oblike.

Sheme z numeričnim dušenjem. Poudariti moramo, da se tu ukvarjamo z 'numeričnim' dušenjem, ki

z realnim dušenjem materiala nima povezave. Dušimo nenatančno izračunane višje nihajne oblike, ki so posledica napak računske metode. Metod z numeričnim dušenjem je moč v literaturi zaslediti kar nekaj. V linearni dinamiki sta dušenje in stabilnost metode temeljito raziskana, kot poroča Fung (2003) v svojem preglednem članku, težišče raziskav pa se je premaknilo na izboljšanje natančnosti (reda) integratorjev. V nelinearni dinamiki pa razvoj še vedno poteka in v uporabi je več vrst integratorjev z numeričnim dušenjem. Nekatere, kot so Hilberta, Hughesa in Taylorja (1977) ali pa Chung – Hulbertova (1993) posplošena α -metoda, smo že omenili, v novejši literaturi pa se pojavljajo še druge, npr. metode Ibrahimbegovića in Mamourija (2002), Armera in Petőcza (1999) in Armera in Romera (2003). Sheme, ki temeljijo na posplošeni α -metodi oz. ki so bile razvite prvenstveno za linearne sisteme, ne zagotavljajo disipacije energije, kar so nazorno pokazali Crisfield, Galvanetto in Jelenić (1997) in Erlicher, Bonaventura in Bursi (2002).

Koncept in enačbe. Dušenje apliciramo le na deformacije na podoben način kot Armero in Petőcz (1999), Armero in Romero (2003) in Sansour, Wriggers in Sansour (2003):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_m^* &= \boldsymbol{\varepsilon}_m + \alpha_{\text{dam}} d(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_m), \\ \kappa_m^* &= \kappa_m + \alpha_{\text{dam}} d(\dot{\kappa}_m),\end{aligned}\quad (4.131)$$

kjer smo z $\boldsymbol{\varepsilon}_m^*$ in κ_m^* označili deformacije z dušenjem, z α_{dam} faktor za skaliranje dušenja in z d zaenkrat nedefinirano funkcijo, ki ohranja predznak. Ko $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_m$ in $\dot{\kappa}_m$ zamenjamo z izrazi (glej enačbo (4.94))

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_m &= \frac{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}}{\Delta t}, \\ \dot{\kappa}_m &= \frac{\Delta \kappa}{\Delta t}\end{aligned}\quad (4.132)$$

in Δt nesemo v funkcijo d , ki zato postane funkcija \tilde{d} , dobimo:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_m^* &= \boldsymbol{\varepsilon}_m + \alpha_{\text{dam}} \tilde{d}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}), \\ \kappa_m^* &= \kappa_m + \alpha_{\text{dam}} \tilde{d}(\Delta \kappa).\end{aligned}\quad (4.133)$$

Razlika energije $\Delta \Pi$ v časovnem koraku je (enačbe (4.33), (4.37) in (4.102))

$$\Delta \Pi = \int_0^L (\boldsymbol{\varepsilon}_m^T \mathbf{c}_E \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + EJ \kappa_m \Delta \kappa + \ddot{\mathbf{u}}_m^T \mathbf{c}_\rho \Delta \mathbf{u} + EJ \ddot{\varphi}_m \Delta \varphi_S) ds. \quad (4.134)$$

V tej enačbi deformacije $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ in κ_m nadomestimo z $\boldsymbol{\varepsilon}_m^*$ in κ_m^* iz enačbe (4.133) ter dobimo

$$\Delta \Pi = \int_0^L \left((\mathbf{c}_E \boldsymbol{\varepsilon}_m^*)^T \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + EJ \kappa_m^* \Delta \kappa + \ddot{\mathbf{u}}_m^T \mathbf{c}_\rho \Delta \mathbf{u} + EJ \ddot{\varphi}_m \Delta \varphi \right) ds. \quad (4.135)$$

Deformacije razvijemo in dobimo

$$\begin{aligned}\Delta \Pi^* &= \int_0^L \left[(\mathbf{c}_E \boldsymbol{\varepsilon}_m)^T \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + EJ \kappa_m \Delta \kappa + \ddot{\mathbf{u}}_m^T \mathbf{c}_\rho \Delta \mathbf{u} + EJ \ddot{\varphi}_m \Delta \varphi \right] ds + \\ &+ \int_0^L \left[\alpha_{\text{dam}} (\mathbf{c}_E \tilde{d}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}))^T \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \alpha_{\text{dam}} (\mathbf{c}_E \tilde{d}(\Delta \kappa))^T \Delta \kappa \right] ds.\end{aligned}\quad (4.136)$$

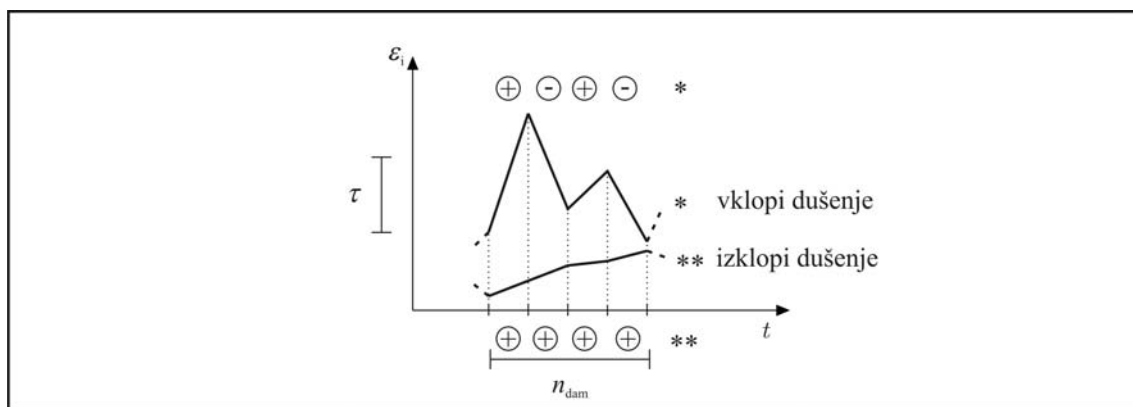
Prva vrstica te enačbe je enaka razliki mehanskih energij $\Delta \Pi$, kakršno smo imeli že doslej, drugo vrstico pa razvijemo tako, da združimo $(\mathbf{c}_E \tilde{d}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_m))^T \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ v funkcijo $d^*(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^2)$ in $(\mathbf{c}_E \tilde{d}(\Delta \kappa))^T \Delta \kappa$ v $d^*(\Delta \kappa^2)$:

$$\Delta \Pi^* = \Delta \Pi + \int_0^L [\alpha_{\text{dam}} d^*(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^2) + \alpha_{\text{dam}} d^*(\Delta \kappa^2)] ds. \quad (4.137)$$

Prispevek integralskega člena v tej enačbi disipira energijo za vsak $\alpha_{\text{dam}} > 0$, če je le d^* taka funkcija, ki ohranja predznak argumenta.

Algoritem. Kot smo že omenili, želimo dušenje aplicirati le tam, kjer je to potrebno in še to le takrat, ko je to pomembno. Algoritem temelji na opazovanju dogajanja v integracijskih točkah in vklapljanju ter izklapljanju dušenja v teh točkah. Integracijskih točk v konstrukciji pa je lahko relativno veliko, zato mora biti algoritem za zaznavo potrebe po dušenju karseda preprost. Predlagani algoritem temelji na opazovanju velikosti in predznaka sprememb (inkrementov) deformacij v zadnjih n_{his} korakih.

Algoritem se začne brez dušenja. Ko oziroma če zaporedje predznakov opazovanih inkrementov deformacij v neki točki tvori popolno žagasto zaporedje pozitivnih (+1) in negativnih (-1) vrednosti, se dušenje v tej točki vklopi. Dodatno zahtevamo, da mora biti za vklop dušenja nihanje zadosti veliko (večje od predpisanega praga τ), kar testiramo tako, da pogledamo največjo absolutno vrednost opazovanih inkrementov deformacij. V točkah, kjer je prisotno dušenje, opazujemo, ali je nihanje zadosti majhno, da bi dušenje lahko izklopili. Kriterij za izklop dušenja je enakost predznakov inkrementov deformacij v zadnjih n_{his} korakih. Za izklop zadostuje tudi, da so največje vrednosti inkrementov deformacij manjše od predpisanega praga τ . Po izklopu dušenja se v vsakem koraku zopet preveri, ali je morda potrebno dušenje ponovno vklopiti. Značilen primer, ko se dušenje vklopi in izklopi, je shematično prikazan na sliki 4.3.



Slika 4.3: Shematski prikaz primerov ob vklopu in izklopu dušenja.

Figure 4.3: Schematic representations of cases when damping is engaged and disengaged.

Prag vrednosti τ , ki je pomemben pri vklopu in izklopu dušenja, je tesno povezan z vrednostmi notranjih sil, saj je ključen za odločitev o tem, kaj predstavlja šum in kaj ne. Odločitev o tem, kako velike sile nam predstavljajo šum, mora sprejeti uporabnik sam pred analizo. Na podlagi izbrane velikosti sile, ki predstavlja šum, se dejansko vrednost praga dobi s kvocientom te vrednosti in pripadajoče togosti pre-reza. Število opazovanih korakov n_{his} , ki je teoretično lahko različno pri vklopu in izklopu, je neke vrste parameter občutljivosti; manjši ko je, hitreje se bo algoritem odločil, da gre za primer, ko je potrebno dušenje vklopiti ali izklopiti. Na sliki 4.3 je prikazan primer, ko je vrednost $n_{\text{his}} = 4$ enaka za vklop in izklop. Zgornja meja teoretično ni omejena, spodnja pa je dva. Praktični računi so pokazali, da so smiselne vrednosti od 4 do 10.

Do sedaj smo od oblike funkcije dušenja zahtevali le, da ohranja predznak. Izbira je torej še povsem odprta. Praktično imamo na voljo le tri konceptualno različne izbire: (i) polinom lihe stopnje; (ii) linearno funkcijo in (iii) navzgor omejene funkcije, kakršna je funkcija arctan. Načelno se zdi najbolj primerna liha polinomska funkcija, saj bi količina dušenja z rastjo hitrosti naraščala s potenco.

Računski primeri so pokazali, da so funkcije takega tipa preveč agresivne in/ali preveč udušijo odziv, ali pa ob vklopu dušenja povzročijo tak numerični šok za metodo, da nastopijo težave s konvergenco Newton-Raphsonovega postopka. Linearna funkcija se zdi primerna, ker je preprosta. Kljub temu se je na praktičnih primerih pokazalo, da je tretja vrsta funkcije dušenja bolj primerna. Navzgor omejena funkcija dušenja, kakršna je funkcija arctan, namreč omeji količino dušenja v posameznem koraku analize in s tem omogoča bolj gladek prehod med fazami z dušenjem in brez in s tem v največji možni meri ohranja stabilnost Newton-Raphsonovega postopka reševanja enačb. Funkcijo še bolj zgladimo, če vpeljemo dodaten parameter β_{dam} :

$$d(\dot{\epsilon}_m) = \arctan\left(\frac{\dot{\epsilon}_m}{\beta_{\text{dam}}}\right). \quad (4.138)$$

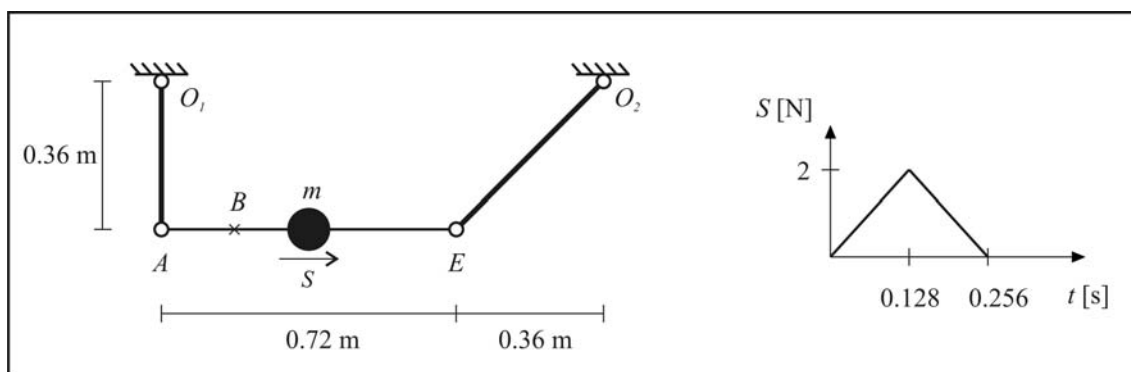
4.8 Numerični primer

Bauchaujevo nihalo. Računski primer je poimenovan po njegovem prvem avtorju in je bil predstavljen v članku Bauchauja, Damilana in Theron (1995). Kasneje so ga preračunavali tudi drugi avtorji: Bauchau in Theron (1996), Ibrahimbegović in Mamouri (1999), Ibrahimbegović in sodel. (2000) in Ibrahimbegović in Mamouri (2002). Posebnost primera je, da je pripadajoči sistem vodilnih enačb izredno tog.

Nihalo je sestavljeno iz podajnega vodoravnega nosilca, ki je členkasto vpet v dve togi palici v točkah A in E . Sredi podajnega nosilca se nahaja točkovna masa $m = 0.5$ kg. Točka B je opazovališče. Leva palica je navpična, desna pa pod kotom $\pi/4$ od vodoravnice v protiurnem smislu, kot je prikazano na sliki 4.4, levo.

Togi palici sta brez mase ($\rho = 0$ kg/m³), njuno togost pa modeliramo z veliko vrednostjo elastičnega modula, ki jo po avtorjevih (Bauchau) navodilih dobimo tako, da osnovni elastični modul pomnožimo s faktorjem 10. Strižne napetosti v računu zanemarimo tako, da privzamemo veliko vrednost strižnega modula ($G = 100 E$).

V začetnem stanju sistem miruje, zatem pa nanj prične delovati točkovna sila S , ki ima prijemališče na mestu mase. Sila S linearno narašča od vrednosti 0 v začetnem stanju do maksimalne vrednosti 2 N pri času 0.128 s. Zatem linearno pada do časa 0.256 s, ko preneha delovati. Od tega trenutka dalje je sistem prepuščen prostemu nihanju. Velikost sile S v odvisnosti od časa je prikazana na sliki 4.4, desno.



Slika 4.4: Geometrija in obtežba Bauchaujevega nihala.

Figure 4.4: Geometry and loading of the Bauchau swinging pendulum.

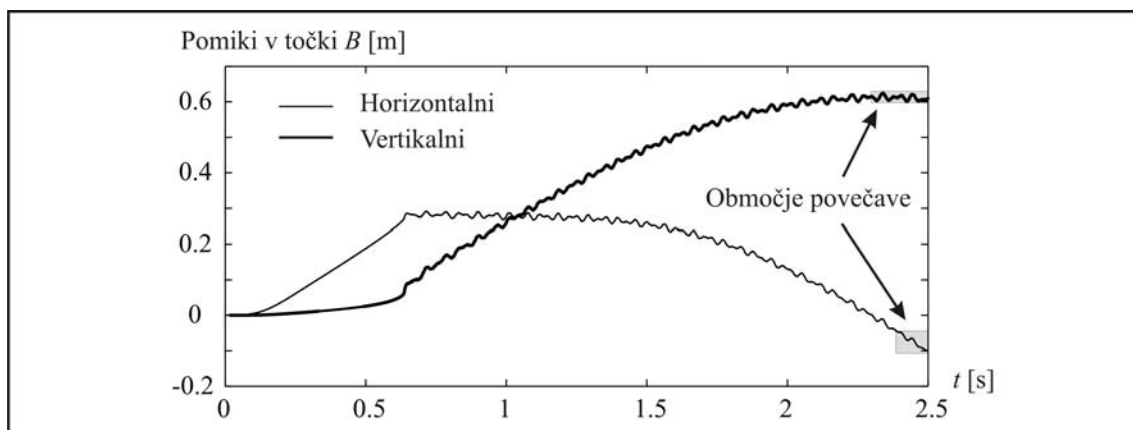
V analizi uporabimo enako velikost časovnega koraka, kot ga priporoča literatura ($\Delta t = 0.0005$ s). Po-

dajni nosilec modeliramo z osmimi elastičnimi končnimi elementi, vsako togo palico pa s po štirimi končnimi elementi s kvadratično interpolacijo pomikov in zasuka. Računamo s šibkim časovnim integratorjem s sredinsko rotacijsko matriko W_{mid} . Materialni in geometrijski podatki primera so:

$$E = 73 \times 10^9 \text{ N/m}^2, \quad L = 0.72 \text{ m}, \quad A = 0.005 \times 0.001 \text{ m}^2,$$

$$J = \frac{1}{12} \times 0.005 \times 0.001^3 \text{ m}^4, \quad \rho = 2700 \text{ kg/m}^3, \quad m_{nosilca} = 0.00972 \text{ kg}.$$

Na začetku obe palici nihata v nasprotni smeri urinega kazalca, zatem pa pri času $t \approx 0.64 \text{ s}$ pride do nenadne spremembe smeri nihanja in desna palica začne nihati v smeri urinega kazalca. Hkrati pride do hipne spremembe horizontalne komponente hitrosti gibanja mase m . Ker predstavlja točkovna masa bistveni del mase sistema, saj je približno 50–krat večja od mase nosilca, dogodek na sistem deluje kot nekakšen trk. V konstrukciji to povzroči nenadno in izrazito spremembo v osnem nihanju nosilca. Kljub temu pa sistem nadaljuje pretežno nihajoče gibanje okoli točk O_1 in O_2 .



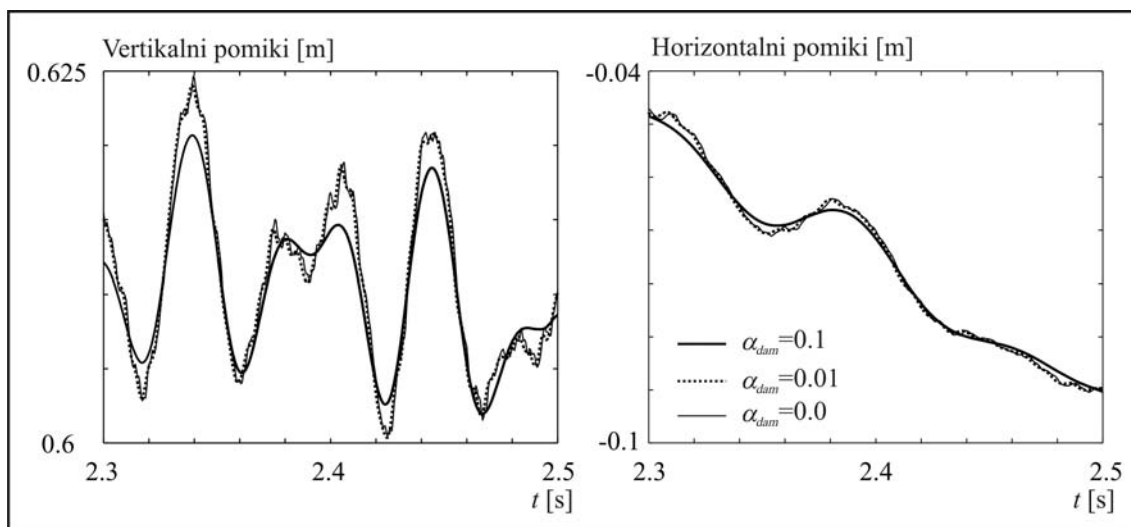
Slika 4.5: Bauchaujevo nihalo: vodoravni in navpični pomik v točki B .

Figure 4.5: Bauchau swinging pendulum: horizontal and vertical displacements at point B .

Primer analiziramo s tremi različnimi vrednostmi parametra α_{dam} : (i) brez dušenja ($\alpha_{dam} = 0$), (ii) z majhno stopnjo dušenja ($\alpha_{dam} = 0.01$, $\beta_{dam} = 100$, $n_{his} = 5$) in (iii) s srednjo stopnjo dušenja ($\alpha_{dam} = 0.1$, $\beta_{dam} = 100$, $n_{his} = 5$). Mejna vrednost šuma znaša 0.01 N za osne in strižne sile ter 0.00001 Nm za upogibne momente. Na sliki 4.5 so prikazani vodoravni in navpični pomiki v točki B . Razlike med analizami z različnimi stopnjami dušenja na tej sliki niso vidne, zato je na sliki 4.6 prikazana povečava. Na povečavi lahko vidimo, da rešitev z majhno stopnjo dušenja le malenkostno zgladi nedušeno rešitev. Rešitev s srednjim dušenjem predstavlja bistveno bolj gladek odziv. Odziv glavnih nihajnih oblik je navidez ohranjen, tako s stališča amplitud kot tudi nihajnih časov.

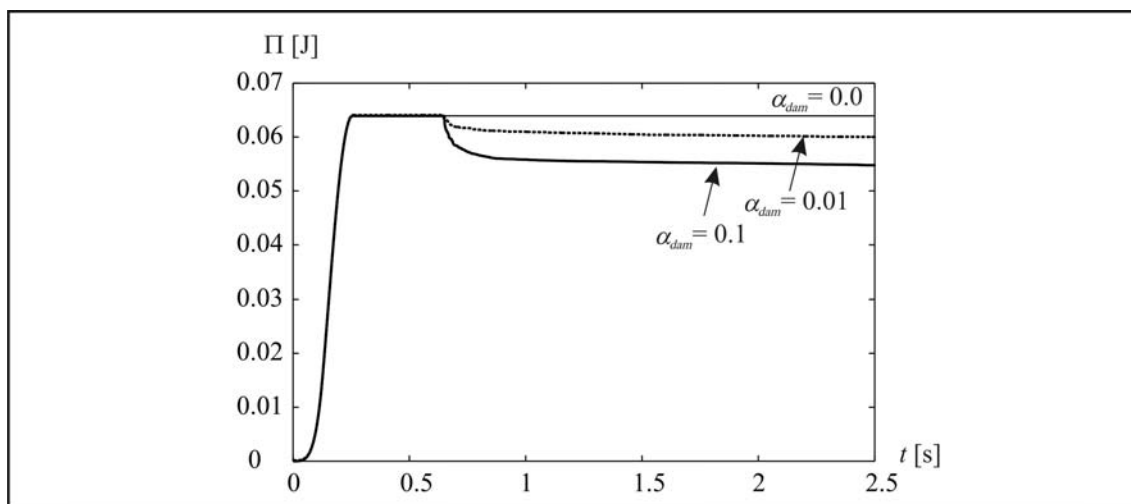
Primerjava količine disipirane energije je prikazana na sliki 4.7. Očitno je, da se disipira le majhen delež celotne energije. Hkrati pa je razviden trend disipacije, ki se po začetnem skoku zvezno umiri in praktično preneha delovati.

Informacijo o tem, kdaj in kje je dušenje delovalo, nam daje slika 4.8, kjer so področja z dušenjem potemnjena. Na abscisno os je projicirana celotna konstrukcija, na ordinato pa čas. Opazimo lahko, da se večina dušenja aktivira v podajnem nosilcu. V togih palicah nastopajo le osne deformacije, na katerih se tudi aktivira dušenje. Zanimivo je, da večina dušenja nasploh odpade na osne deformacije in da dušenja upogibnih deformacij skorajda ni. Nekoliko presenetljivo pa je dejstvo, da, čeprav se količina dušenja zmanjšuje, še zdaleč ne pride do tega, da bi dušenje popolnoma prenehalo delovati. Prav tako ne



Slika 4.6: Bauchaujevo nihalo: povečava vodoravnih in navpičnih pomikov v točki B s slike 4.5.

Figure 4.6: Bauchau swinging pendulum: magnification of the horizontal and vertical displacements at point B from Fig. 4.5.

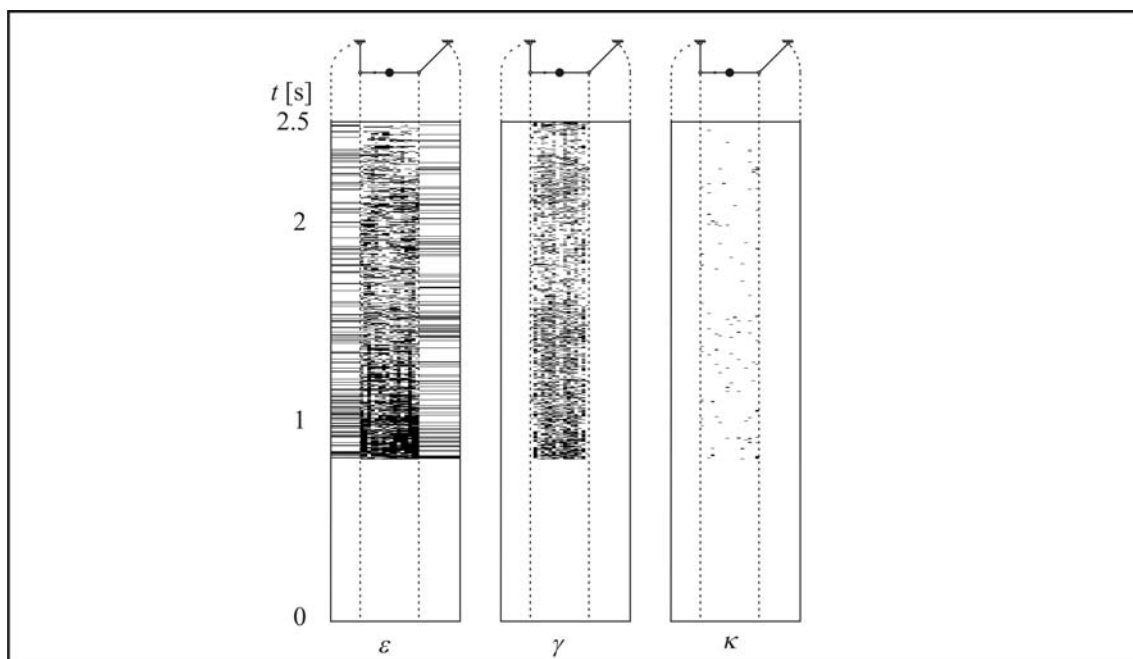


Slika 4.7: Bauchaujevo nihalo: disipacija energije z različnimi stopnjami dušenja.

Figure 4.7: Bauchau swinging pendulum: energy dissipation with different levels of damping.

kaže, da bi se dušenje kdaj v celoti izklopilo. Na podlagi disipacije energije (slika 4.7), ki se zelo hitro umiri, lahko sklepamo, da se dušenje ves čas vklaplja, vendar pa se njegova intenziteta zelo zmanjšuje. Bistveno bolj kot informacija o tem, kdaj in kje se je vklopilo dušenje, je pomemben vpliv dušenja na pomike in notranje sile. Slednje so prikazane na sliki 4.9.

Notranje sile so prikazane v prvi Gaussovi integracijski točki levo od točke opazovališča B . Nihanje v izredno visokih frekvencah, ki je razvidno iz slik notranjih sil, je očitno posledica prisotnosti nihajnih oblik z nihajnimi časi, ki so bistveno manjši od računskega časovnega koraka, zato je v vsakem primeru smiselno prispevke teh oblik udušiti. Opozoriti pa moramo, da so to nihanja deformacij in ne osnovnih neznank (pomikov in zasuka) in da je gladkost deformacij garancija za gladek potek pomikov, obratno pa ni nujno res. Tiste notranje sile, ki jih dobimo z analizo brez dušenja, izkazujejo izredno velike



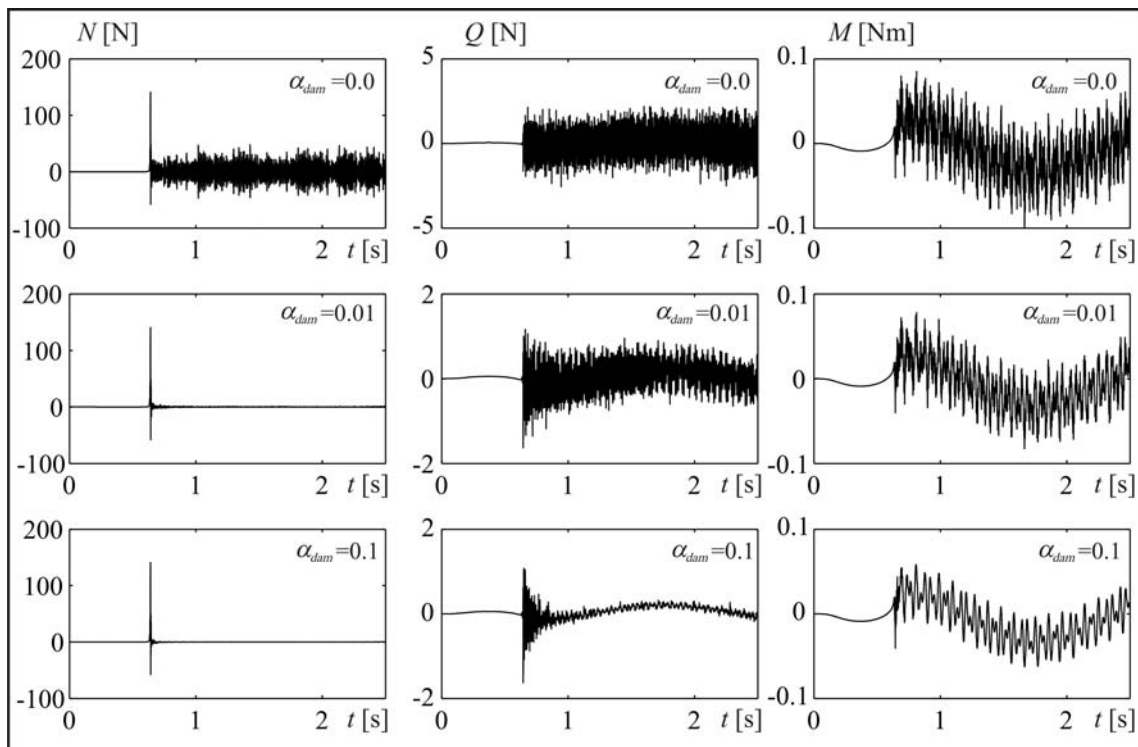
Slika 4.8: Bauchaujevo nihalo: temna območja so dušena.

Figure 4.8: Bauchau swinging pendulum: dark areas mark presence of damping.

amplitude nihanj osne sile, in te se zdijo v tej analizi najbolj problematične. Nizka stopnja dušenja skoraj popolnoma odpravi težave z oscilacijo osne sile, blagodejen učinek pa se pozna tudi na prečnih silah in upogibnih momentih. Z višanjem stopnje dušenja se vpliv višjih nihajnih oblik zmanjšuje, kar je pričakovano.

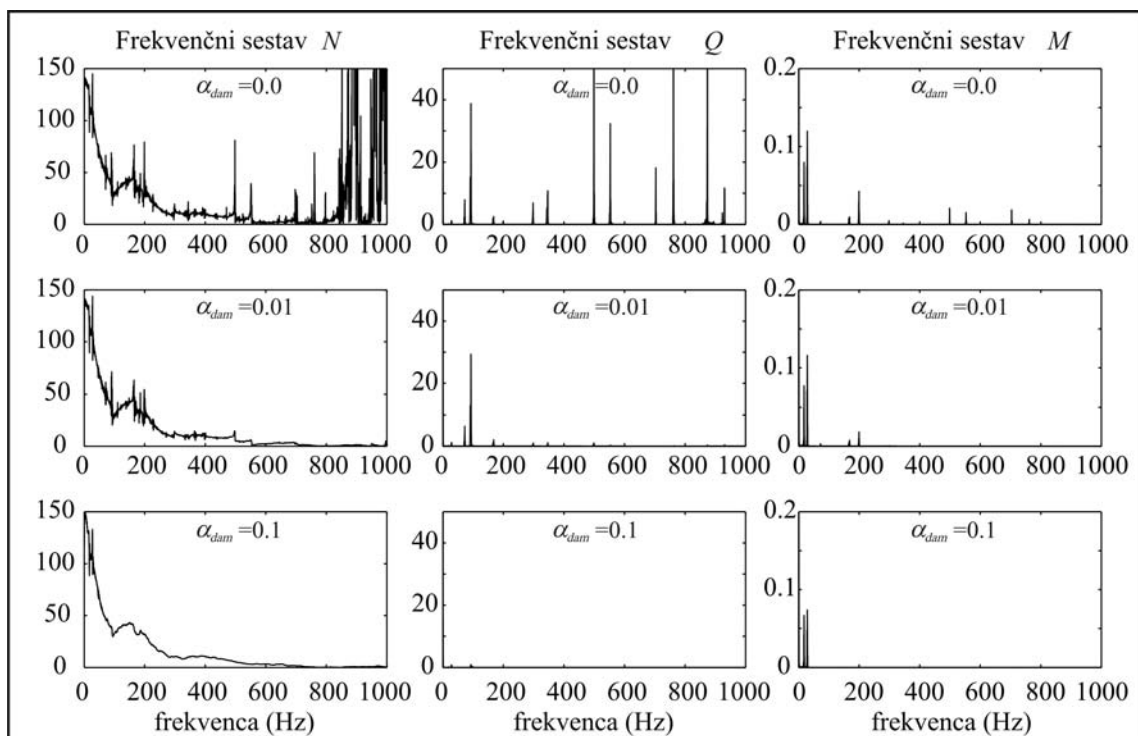
Na koncu prikazujemo vpliv dušenja na frekvenčni spekter notranjih sil, ki ga dobimo z Matlabovo funkcijo FFT ('Fast Fourier Transform'). Analiza je prikazana na sliki 4.10 in prikazuje veliko prisotnost visokih frekvenc v nedušenem odzivu in drastično izboljšanje z dušenjem. Ključno pri tej analizi pa je, da dušenje ne prizadene nizkih frekvenc. Izjema je vpliv močnejšega dušenja na strižne deformacije, ki so v tem primeru relativno nepomembne.

Analiza frekvenčnega spektra pomikov in zasuka pokaže, da dušenje (v tem primeru) ne vpliva na frekvenčni sestav odziva pomikov in zasuka.



Slika 4.9: Bauchaujevo nihalo: notranje sile.

Figure 4.9: Bauchau swinging pendulum: internal forces.



Slika 4.10: Bauchaujevo nihalo: frekvenčni sestav odziva notranjih sil.

Figure 4.10: Bauchau swinging pendulum: frequency content of internal forces.

4.9 Sklepi

Formulacijo geometrijskih nosilcev, vpeljano v razdelkih 4.1–4.6, smo razširili z algoritmom za dodajanje umetnega dušenja na deformacijah. Za dušenje smo uporabili trigonometrično funkcijo \arctan , ki omogoča večjo robustnost v primeru nenadnih skokov hitrosti.

Dušenje smo nadgradili s pametnim algoritmom, ki sam določa kraj in trajanje dušenja s tem, da ga po potrebi vklaplja in izklaplja na nivoju integracijske točke. Algoritem je računsko zelo nezahteven, saj mora za odločitev poznati le nekaj preteklih predznakov inkrementov deformacij in največjo vrednost inkrementov deformacij v opazovanem obdobju. Zaznavanje prekomernega nihanja v visokih frekvencah poteka na nivoju deformacij, kar se je izkazalo kot bolj primerno od opazovanja nihanja pomikov in zasukov.

Ključni test algoritma je količina udušenih osnovnih in višjih nihajnih oblik. Na računskem primeru se je pokazalo, da je algoritem sposoben udušiti višje nihajne oblike, ne da bi pomembneje vplival na osnovne oblike. Pomanjkljivost algoritma je, da faktorja dušenja α_{dam} ne moremo povezati s fizikalnim parametrom kritičnega dušenja, kar je sicer splošna pomanjkljivost shem z numeričnim dušenjem. Optimalno vrednost parametra je potrebno poiskati s poskušanjem za vsak primer posebej.

Ker algoritem ne temelji na teoretičnem dokazu, temveč bolj na izkušnjah in opazovanjih, ga imenujemo 'hevrističen'. Koncept in algoritem pa je možno aplicirati na poljubno formulacijo.

V računskih primerih smo prikazali le en primer, več jih je moč najti v priloženem (priloga D) članku Gamsa, Planinca in Sajeta (2007d).

5 OPTIMIZACIJA V DINAMIKI LINEARNO ELASTIČNIH LINIJSKIH NOSILCEV

5.1 Uvod

Optimizacijo dinamičnih sistemov lahko opišemo kot iskanje take kombinacije geometrijskih, materialnih in obtežnih podatkov, da je določena lastnost sistema v nekem specifičnem času minimalna ali maksimalna. Iskanje je lahko podvrženo različnim omejitvam. Če znamo rešiti tak problem, lahko stvari naredimo ceneje, hitreje, z manj materiala in z manjšo porabo energije. V gradbeništvu lahko na primer naredimo lažje ali bolj oblikovane nosilne konstrukcije, ki so bolj odporne na dinamične obremenitve, kot sta veter in potres.

Ovira širši uporabi optimizacije je njena težavnost, saj so računi relativno zapleteni – po eni strani zaradi zapletene matematične formulacije problema, po drugi pa zaradi numerične zahtevnosti. Nemalokrat se namreč zgodi, da optimizacijski algoritem ne najde sprejemljive rešitve.

Za reševanje optimizacijskih problemov obstaja nekaj konceptualno različnih pristopov. Značilen primer so genetski oz. evolucijski algoritmi, ki iz začetne populacije s postopki, ki oponašajo naravno evolucijo (dedovanje, mutacije, ipd.), določijo optimalne primerke. Vendar pa se tovrstni algoritmi v gradbeništvu niso izkazali oz. uveljavili, ker so bistveno počasnejši od njihovih tekmecev – gradientnih algoritmov. Gradientni algoritmi temeljijo na znanih odvodih po projektnih spremenljivkah, s katerimi se v smislu inkrementne gradientne metode približujemo optimalni konstrukciji. V tem delu se ukvarjamo le z gradientnimi algoritmi.

V postopku optimizacije se oblika in lastnosti konstrukcije spreminjajo na nepredvidljiv način. Zato je možno, da se bo tekom tega postopka količina uporabljenega materiala zmanjšala do te mere, da bo konstrukcija postala bolj podajna. Podajna konstrukcija pa lahko v analizi 'uide' iz območja veljavnosti linearne teorije. Zato je potrebno upoštevati kinematično nelinearne zveze, kot so na primer Reissnerjeve enačbe, ki imajo bistveno večje območje veljavnosti, saj velikosti deformacij in pomikov niso omejene. Dodatno se lahko zgodi, da postane sistem enačb konstrukcije v tem postopku 'tog'. Kot vemo že iz prejšnjih poglavij, je numerično reševanje togih sistemov problematično, zato je potrebno v analizi uporabljati stabilne integracijske sheme, kakršne so na primer energijske integracijske sheme.

Optimizacija je samostojno raziskovalno področje. V tem poglavju ne izboljšujemo optimizacijskega postopka, temveč je prispevek le aplikacija optimizacije na novo razviti šibki integracijski shemi s povprečno rotacijsko matriko s poudarkom na obravnavanju posebnosti formulacije pri občutljivostni analizi.

5.2 Optimizacijski problem

Matematična formulacija. V matematični zapis enačb problema vpeljemo t.i. *projektne* spremenljivke \mathbf{b} , s katerimi opišemo vse spremenljive lastnosti konstrukcije. Cilj je določiti take vrednosti teh spremenljivk, da bo zadoščeno optimizacijskemu problemu. Slednji v matematičnem zapisu vsebuje enačbe, neenačbe in zahtevo po minimumu ali maksimumu neke funkcije (tako definirani problemi spadajo v področje nelinearnega matematičnega programiranja):

$$\min f_0, \quad (5.1)$$

$$f_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, n_{\text{pog}}, \quad (5.2)$$

$$\mathbf{g}_m = \mathbf{0}. \quad (5.3)$$

Tu smo s f_0 označili skalarno namensko funkcijo, s f_i omejitvene pogoje in z n_{pog} število omejitvenih pogojev. Namenska funkcija f_0 in omejitveni pogoji f_i so lahko definirani pri poljubnih časih. Enačba (5.3) predstavlja vodilne enačbe mehanskega problema.

Rešitev iščemo na intervalu

$$\mathbf{b}^L \leq \mathbf{b} \leq \mathbf{b}^U, \quad (5.4)$$

kjer z \mathbf{b}^L in \mathbf{b}^U označujemo spodnjo in zgornjo mejo projektnih spremenljivk.

Analiza odziva konstrukcije je reševanje mehanskega problema, določenega z enačbami (5.3) oziroma (4.111) in s pripadajočimi robnimi in začetnimi pogoji (3.5), (3.6) in (3.7). Rešitev so diskretne spremenljivke Υ na časovnem intervalu $t \in [0, t_{\text{end}}]$, kjer je t_{end} čas, do katerega poteka analiza. Kot smo že omenili v prejšnjih poglavjih, je $\Upsilon = [\mathbf{U}, \Phi]^T$ vektor vseh diskretnih neznank. Ker so lastnosti konstrukcije sedaj odvisne od projektnih spremenljivk \mathbf{b} , je tudi odziv $\Upsilon = \Upsilon(t, \mathbf{b})$ funkcija projektnih spremenljivk.

Ker so namenska funkcija in omejitveni pogoji odvedljivi po projektnih spremenljivkah, lahko optimizacijski problem (5.1)–(5.2) rešujemo s konveksnimi gradientnimi metodami matematičnega programiranja. V tem delu uporabimo reševanje s postopkom, ki so ga razvili Kegl, Butinar in Kegl (2002) in Kegl in Brank (2006).

Namenska funkcija. Izbira namenske funkcije je odvisna od tega, kaj želimo minimizirati. V gradbeništvu se pogosto odločimo, da je to volumen materiala, lahko pa minimiziramo tudi druge količine. Na primer, lahko zahtevamo, da sistem pri predpisanem času obmiruje ali pa minimiziramo deformacijsko energijo, kar sili konstrukcijo v drugačne mehanizme prenašanja obremenitev, npr. z osnimi silami namesto z upogibnimi momenti. Možno je tudi minimiziranje posameznih komponent neznank (pomika ali zasuka).

Problem namenske funkcije je, da je skalarna in da jo lahko zapišemo le pri enem specifičnem času – minimiziramo lahko le eno funkcijo. Pogosto pa želimo minimizirati več količin hkrati, ali pa eno količino pri različnih časih. Za take primere lahko sestavimo namensko funkcijo na več načinov, od katerih je najbolj preprost ta, da količine, ki jih želimo minimizirati, seštejemo ali množimo in če so te količine podobnega velikostnega reda, pristop zadovoljivo deluje. Bolj robusten pa je pristop, ki za namensko funkcijo vpelje novo projektno spremenljivko b_{new} in jo preko omejitvenih pogojev poveže s količinami, ki jih želimo minimizirati. Če želimo npr. minimizirati funkciji $f_{0,1}$ in $f_{0,2}$, lahko ta pristop matematično zapišemo tako:

$$\begin{aligned} f_{0,1} &< b_{\text{new}} \\ f_{0,2} &< b_{\text{new}} \\ f_0 &= b_{\text{new}} \end{aligned} \quad (5.5)$$

V splošnem lahko tako minimiziramo poljubno število funkcij.

5.3 Projektne spremenljivke

Za opis parametrov uporabljamo tri vrste projektne spremenljivke, ki jih lahko klasificiramo kot: klasične, posredne in projektne spremenljivke vzbujanja. Shematsko je uporaba teh spremenljivk prikazana na sliki 5.1.

Klasične projektne spremenljivke. K njim štejemo vse projektne spremenljivke, s katerimi neposredno opisujemo posamezne parametre v metodi končnih elementov. Tipičen primer takih spremenljivk so dimenzije prečnega prereza (*sizing optimization*), uporablja pa se jih tudi pri optimizaciji oblike (*shape optimization*). Pri optimizaciji oblike se take projektne spremenljivke priredi koordinatam posameznega vozlišča. Tak pristop se zdi najbolj naraven, saj zaradi neposrednosti ni potrebno vpeljevati dodatnih spremenljivk in se ga poslužuje veliko avtorjev (Pedersen in Nielsen (2003), Stocki in sodelavci (2001), Wang, Zhang in Jiang (2002a, b, 2004)), vendar pa ni najbolj primeren, saj pogosto vrne ne gladke oblike (Harl in Kegl (2005)).

Posredne projektne spremenljivke oblike. S tem terminom označujemo vse projektne spremenljivke, s katerimi preko projektne teles (*design bodies*) opišemo obliko konstrukcije. Razlika v primerjavi s klasičnimi spremenljivkami oblike je v tem, da projektne spremenljivke tokrat niso vezane neposredno na podatke v metodi končnih elementov, temveč na projektne telesa. Ta predstavljajo del ali pa celotno konstrukcijo, na katero je vezana mreža končnih elementov. Bistvena prednost tehnike s projektnimi telesi in projektnimi spremenljivkami oblike je, da obliko konstrukcije opišemo z relativno majhnim naborom spremenljivk in da so rezultati boljši, saj prevzamejo ugodne lastnosti projektne elementov.

V tem delu za opis projektne teles uporabimo Bézierjeva projektne telesa, ki se po poročanju raziskovalcev dobro obnesejo (Harl in Kegl (2005), Kegl (2000, 2005), Kegl in Brank (2006)). Omogočajo namreč izreden nabor oblik, dajejo gladke oblike in so sposobna popolno opisati osnovne geometrijske oblike (Kegl in Brank (2006)).

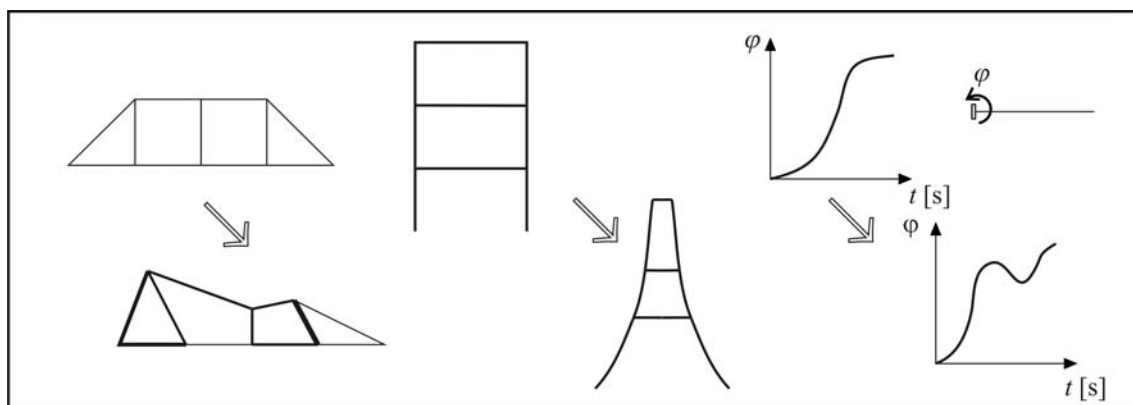
Projektne spremenljivke vzbujanja. Za opis dinamične obtežbe v odvisnosti od časa uporabimo projektne spremenljivke vzbujanja. Ker se s takimi projektnimi spremenljivkami lahko opiše bistvene robne pogoje, ki v enačbe ne vnašajo novih neznank, je pristop nekoliko poseben. Podrobneje je razložen v prilogi E.

Optimizacija obtežbe je zelo pomembna pri problemih krmiljenja – npr. za določitev funkcij zasukov podajnih robotskih rok in manipulatorjev. Tipičen primer uporabe je tudi minimiziranje časa določene aktivnosti.

5.4 Občutljivostna analiza

Občutljivostna analiza (*sensitivity analysis*) je tisti del optimizacijskega postopka, kjer se računa odvode po projektnih spremenljivkah. Ta del je praviloma zelo zahteven in mora upoštevati posebnosti formulacij. V tem poglavju se omejimo na šibki algoritem s povprečno rotacijsko matriko, ki ima v smislu numeričnega računa pomembne posebnosti, ki jih moramo upoštevati pri računu odvodov po projektnih spremenljivkah.

Občutljivostna analiza je račun odvodov namenske funkcije in omejitvenih pogojev po projektnih spre-



Slika 5.1: Tipična uporaba projektnih spremenljivk: klasične, levo; oblike, sredina; vzbujanja, desno.
Figure 5.1: Typical applications of design variables: classical, left; shape, center; actuation, right.

menljivkah:

$$\begin{aligned} \frac{df_0}{d\mathbf{b}} &= \frac{\partial f_0}{\partial \Upsilon_{n+1}} \frac{\partial \Upsilon_{n+1}}{\partial \mathbf{b}} + \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{b}}, \\ \frac{df_i}{d\mathbf{b}} &= \frac{\partial f_i}{\partial \Upsilon_{n+1}} \frac{\partial \Upsilon_{n+1}}{\partial \mathbf{b}} + \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{b}}, \quad i = 1, \dots, n_{\text{pog}}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Za uspešen račun odvodov namenske funkcije in omejitvenih pogojev po projektnih spremenljivkah moramo poznati odvode neznank po projektnih spremenljivkah $\frac{\partial \Upsilon_{n+1}}{\partial \mathbf{b}}$. Dobimo jih z odvajanjem vodilnih enačb problema:

$$\frac{d\mathbf{g}_m}{d\mathbf{b}} = \frac{\partial \mathbf{g}_m}{\partial \Upsilon_{n+1}} \frac{\partial \Upsilon_{n+1}}{\partial \mathbf{b}} + \left(\frac{\partial \mathbf{g}_m}{\partial \Upsilon_n} \frac{\partial \Upsilon_n}{\partial \mathbf{b}} + \frac{\partial \mathbf{g}_m}{\partial \dot{\Upsilon}_n} \frac{\partial \dot{\Upsilon}_n}{\partial \mathbf{b}} + \frac{\partial \mathbf{g}_m}{\partial \mathbf{b}} \right) = \mathbf{0} \quad (5.7)$$

V tej enačbi je $\frac{\partial \mathbf{g}_m}{\partial \Upsilon_{n+1}}$ tangentna matrika konstrukcije, ki jo poznamo iz analize odziva, odvodi $\frac{\partial \Upsilon_n}{\partial \mathbf{b}}$ in $\frac{\partial \dot{\Upsilon}_n}{\partial \mathbf{b}}$ pa so znani iz prejšnjega časovnega koraka. Vrednosti odvodov $\frac{\partial \mathbf{g}_m}{\partial \mathbf{b}}$ niso znane in jih računamo. Enačbo (5.7) rešimo za neznanke $\frac{\partial \Upsilon_{n+1}}{\partial \mathbf{b}}$ in z njimi opravimo občutljivostno analizo (5.6).

Dobljene vrednosti $\frac{\partial \Upsilon_{n+1}}{\partial \mathbf{b}}$ uporabimo za izračun odvodov popravkov hitrosti, ki jih dobimo z odvajanjem enačbe (4.97) po projektnih spremenljivkah:

$$\frac{\partial \dot{\Upsilon}_{n+1}}{\partial \mathbf{b}} = \frac{2}{\Delta t} \left(\frac{\partial \Upsilon_{n+1}}{\partial \mathbf{b}} - \frac{\partial \Upsilon_n}{\partial \mathbf{b}} \right) - \frac{\partial \dot{\Upsilon}_n}{\partial \mathbf{b}}, \quad (5.8)$$

podobno pa moramo storiti tudi za inkremente deformacij, ki so zapisani v enačbi (4.76):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{n+1}}{\partial \mathbf{b}} &= \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial \mathbf{b}} + \frac{\partial (\Delta \varepsilon)}{\partial \Upsilon_{n+1}} \frac{\partial \Upsilon_{n+1}}{\partial \mathbf{b}} + \frac{\partial (\Delta \varepsilon)}{\partial \Upsilon_n} \frac{\partial \Upsilon_n}{\partial \mathbf{b}} + \frac{\partial (\Delta \varepsilon)}{\partial \mathbf{b}}, \\ \frac{\partial \kappa_{n+1}}{\partial \mathbf{b}} &= \frac{\partial \kappa_n}{\partial \mathbf{b}} + \frac{\partial (\Delta \kappa)}{\partial \Upsilon_{n+1}} \frac{\partial \Upsilon_{n+1}}{\partial \mathbf{b}} + \frac{\partial (\Delta \kappa)}{\partial \Upsilon_n} \frac{\partial \Upsilon_n}{\partial \mathbf{b}} + \frac{\partial (\Delta \kappa)}{\partial \mathbf{b}}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

V tej enačbi poznamo $\frac{\partial \varepsilon_n}{\partial \mathbf{b}}$ in $\frac{\partial \kappa_n}{\partial \mathbf{b}}$ iz prejšnjega časovnega koraka, ostale izraze pa moramo računati. Vse odvode dobimo s programom za simbolno odvajanje in avtomatsko generacijo programske kode AceGen (Korelc (1997)). Ker je potrebno izračunati odvode za namenske funkcije in omejitvene pogoje, je odvajanja veliko in je povrh vsega zelo zapleteno. Uporaba programa za avtomatsko odvajanje je zato ključna.

5.5 Optimizacijski algoritem

Algoritem. Optimizacijski algoritem poteka v grobem tako:

1. Začetek algoritma:

Znana je začetna konstrukcija: $\mathbf{b} = \mathbf{b}_{\text{ini}}$.

2. Vstop v optimizacijsko zanko:

Izračuna se odziv konstrukcije $\Upsilon(t)$ – reši se enačbe (4.111).

Izračuna se vrednosti namenske funkcije f_0 in omejitvenih pogojev $f_i, i = 1 \dots n_{\text{pog}}$.

Izvede se občutljivostna analiza (5.6)¹.

Z optimizacijskim podprogramom² se izračuna popravke projektnih spremenljivk $\Delta\mathbf{b}$.

- Če $\|\Delta\mathbf{b}\| <$ predpisana vrednost, izhod iz optimizacijske zanke.

5.6 Numerični primer

Optimizacija jeklenega okvira. Analiziramo sedem etažni tri ladijski jekleni okvir. V začetnem stanju pred optimizacijo je višina spodnje etaže 6 m, višina zgornjih etaž pa 3 m. Širina zunanjih ladij je 5 m, notranje pa 6 m. V notranjih stičiščih stebrov in prečk so točkovne mase $M_1 = 20$ t, v zunanjih pa $M_2 = 5$ t. Geometrija konstrukcije je prikazana na levi polovici slike 5.2. Prečni prerez stebrov in prečk je votli pravokotni prerez dimenzij širina/višina/debelina pločevine = 0.4/0.4/0.006 m. Obtežba na konstrukcijo je pomik podpor, s katerim simuliramo idealiziran potresni sunek. Tla se premaknejo za 0.5 m v desno v pol sekunde ($t_1 = 0.5$ s) in se po eni sekundi ($t_2 = 1$ s) vrnejo v začetni položaj. Funkcija pomika podpor je podana z enačbo

$$u_{\text{tal}} = \begin{cases} \frac{1}{4} \left(1 - \cos \left(\frac{\pi t}{t_1} \right) \right); & 0 \leq t \leq t_1 \\ 0; & t > t_2 \end{cases} \quad (5.10)$$

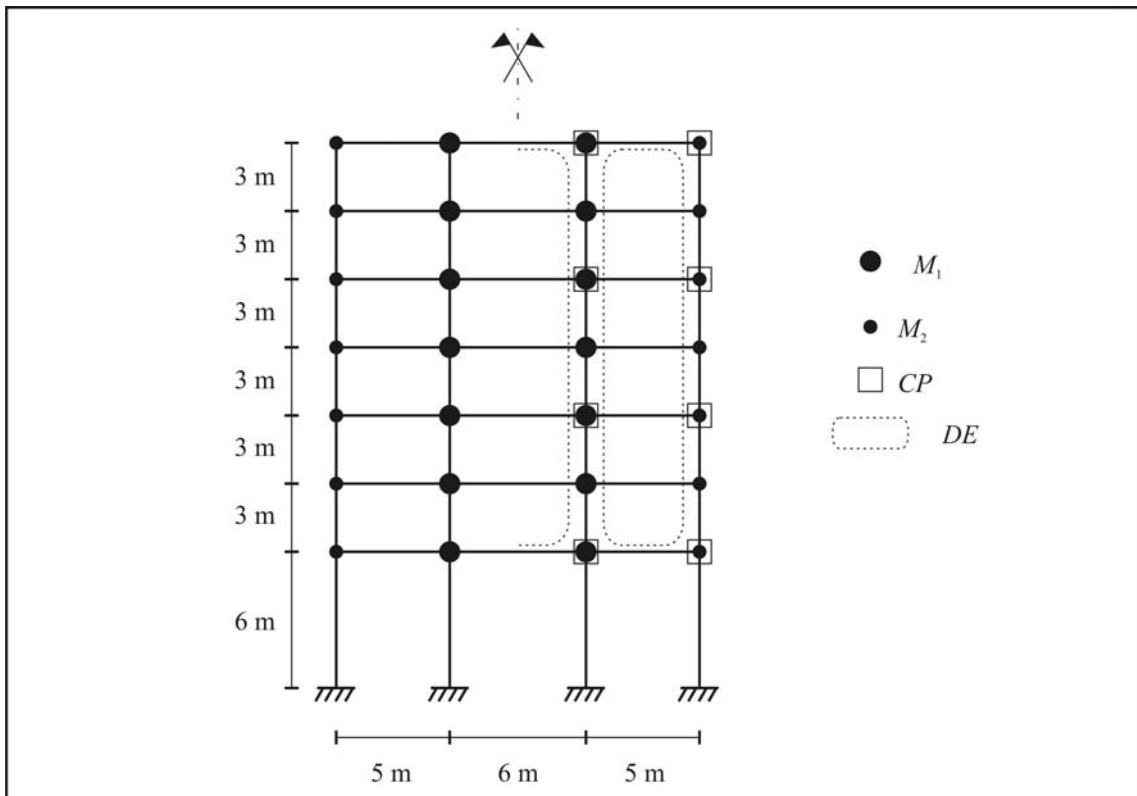
in grafično prikazana na sliki 5.3.

V računskem modelu smo za vsak steber in vsako prečko uporabili po en končni element s kvadratično interpolacijo in šibki časovni integrator s povprečno rotacijsko matriko. Časovni korak $\Delta t = 0.02$ s je konstanten. Projektne spremenljivke so uporabljene za opis projektnih elementov, s katerimi modeliramo po višini sprejemljivo širino okvirja. Projektni elementi so označeni s črtkano črto na levi strani slike 5.2. Vsak projektni element je definiran z osmimi kontrolnimi točkami (CP).

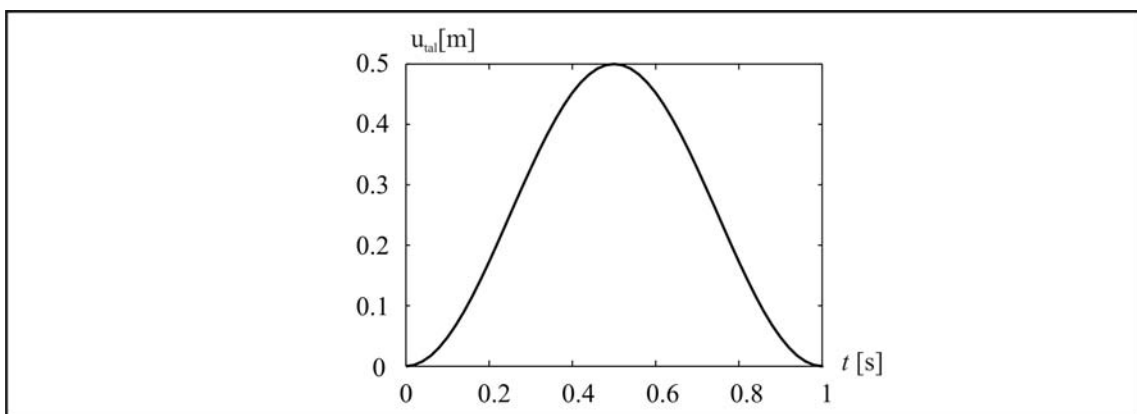
Dovoljene vrednosti projektnih spremenljivk so take, da je lahko skupna širina okvirja od 12 do 24 m, višina spodnje etaže je med 3 in 6 m. Širina notranje ladje je lahko od 4 do 10 m. Z namensko funkcijo minimiziramo nihanje konstrukcije po prenehanju delovanja sunka. S spreminjanjem geometrije konstrukcije želimo doseči, da bi okvir po zaključku sunka obmiroval, če je to mogoče. Najbolj primerna funkcija za zagotavljanje mirovanja je mehanska energija, saj ničelna mehanska energija zagotavlja absolutno mirovanje sistema.

¹Račun odziva konstrukcije, vrednotenje namenske funkcije in omejitvenih pogojev ter občutljivostna analiza smo vgradili v program EMS (Kegl in sodelavci).

²Uporabljen je bil optimizacijski program 'iGO'. Avtor programa je M. Kegl. Algoritem programa je opisan v članku Kegl, Butinar in Kegl (2002).



Slika 5.2: Računski model okvirja. *CP* je oznaka za kontrolno točko, *DE* pa za projektno telo.
Figure 5.2: The model of the frame. *CP* are control points and *DE* design elements.

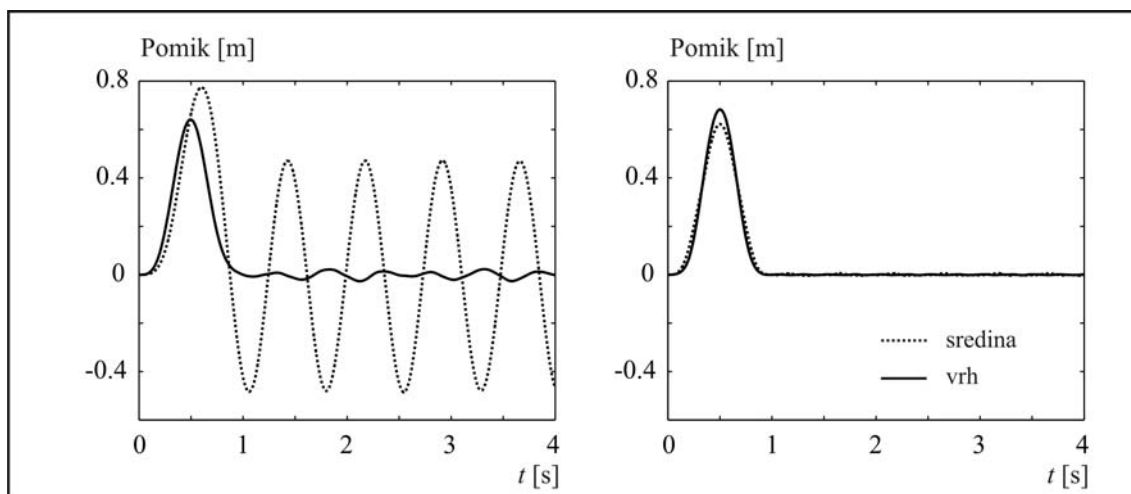


Slika 5.3: Pomik podpor v odvisnosti od časa.
Figure 5.3: Movement of supports vs time.

Izkaže se, da tako zastavljenega optimizacijskega problema ne moremo uspešno rešiti v eni potezi. Postopek zato razbijemo na dve fazi: v prvi fazi minimiziramo vodoravne pomike na sredini vrhnje etaže pri časih 1 s in 1.2 s. Ko najdemo optimum tako zastavljenega problema, dodatno minimiziramo še pomike pri času 1.4 s. Za minimiziranje količin pri več časih uporabimo pristop, ki je opisan v enačbi (5.5). Odziv konstrukcije po tej fazi optimizacije je prikazan na grafu na levi polovici slike 5.4. Kot je tam razvidno, so pomiki na sredini višine konstrukcije še vedno občutni, medtem ko se konstrukcija pri vrhu po sunku skoraj popolnoma umiri.

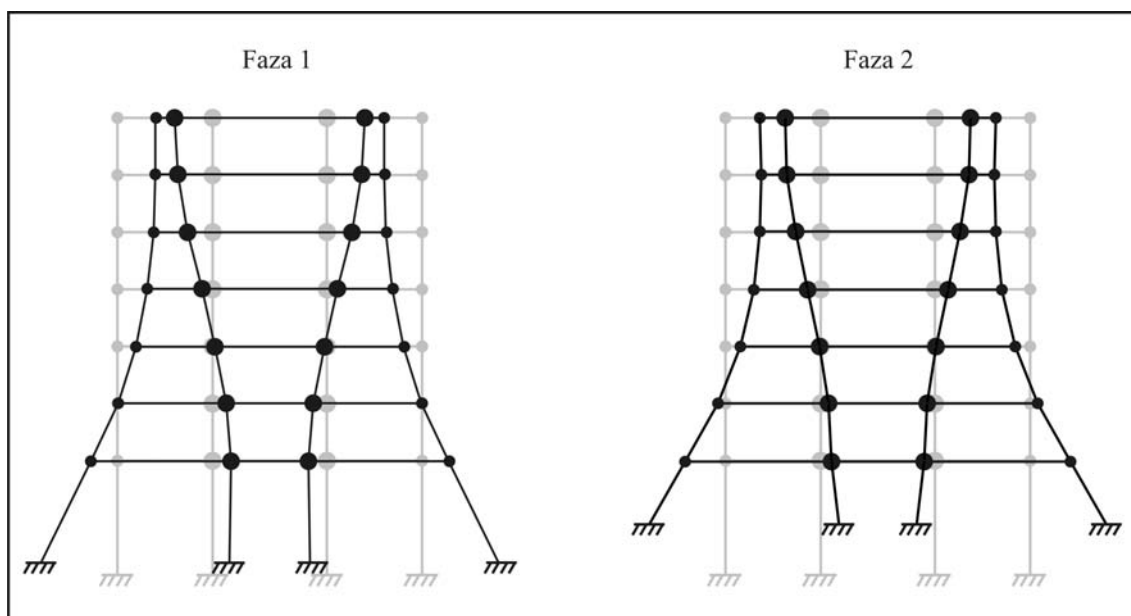
V drugi fazi smo za izhodišče vzeli optimirano obliko konstrukcije iz prve faze in kot namensko funkcijo določili mehansko energijo. Postopek je v tem primeru uspešno skonvergirala in konstrukcija po sunku skoraj popolnoma miruje, kot kaže graf na desni strani slike 5.4. Oblika konstrukcije po prvi fazi računa in končna, optimalna oblika konstrukcije sta prikazani na sliki 5.5.

Več primerov z zanimivimi izbori namenskih funkcij in obtežb je prikazanih v prilogi E.



Slika 5.4: Pomiki na sredini višine konstrukcije s črtkano črto in na vrhu konstrukcije s polno črto po prvi fazi optimizacije, levo in po končani optimizaciji, desno.

Figure 5.4: Displacements at mid-height and at the top of the structure are plotted with dashed and full line, respectively. The results of the first phase are on the left hand side and the final results on the right hand side of the figure.



Slika 5.5: Oblika konstrukcije po prvi fazi optimizacije, levo in po končani optimizaciji, desno.

Figure 5.5: The shape of the structure after the first phase of optimization is on the left hand side and the final shape on the right hand side of the figure.

5.7 Sklepi

V tem poglavju smo predstavili postopek optimiranja dinamičnih sistemov. Osredotočili smo se na opis občutljivostne analize in njeno aplikacijo na novo razviti časovni integrator za ravninske nosilce – šibki integrator s povprečno vrednostjo rotacijske matrike. Z vpeljavo treh vrst projektnih spremenljivk: klasičnih, posrednih oblikovnih in spremenljivk vzbujanja smo sposobni modelirati izredno velik nabor inženirskih problemov. V računskem primeru smo demonstrirali le uporabo posrednih projektnih spremenljivk oblike, v prilogi E pa lahko najdemo še zanimive primere optimizacije robotskih manipulatorjev. Bézierjeva telesa so se izkazala kot primerna za opis oblike v optimizaciji dinamičnih problemov.

Pri optimizacijskih problemih pogosto želimo optimirati več kot eno količino. Splošnega pristopa k optimizaciji večih funkcij ni, pristop z uvedbo nove projektne spremenljivke, ki smo ga prikazali, pa je bil uspešen. Dodaten problem v dinamiki je, kako upoštevati časovno odvisne pogoje, še posebej, če so podani na časovnem intervalu. Literatura in naši primeri so pokazali, da lahko take pogoje nadomestimo z manjšim številom pogojev pri specifičnih (diskretnih) časih.

Pokazalo se je, da v konkretnem računskem primeru optimizacije nismo bili sposobni uspešno opraviti v enem koraku in je bilo potrebno postopek razbiti na dva koraka. Optimizator tipično ne more konvergirati v optimum, kadar so neugodno izbrane začetne projektne spremenljivke, saj se optimizacija ujame v nesprejemljive lokalne minimume, v katerih so lahko celo kršeni omejitveni pogoji. Vendar se je pokazalo, da ko se rešitev zadosti približa optimumu, postopek zelo hitro, v nekaj iteracijah skonvergira.

Da bi našli ugodna izhodišča za uspešno optimizacijo, je potrebno nekoliko izvirnosti v strategiji reševanja in pripravljenost poskušati. Izkušnje tako ostajajo pomemben del uspešne optimizacije.

Nazadnje moramo poudariti koristnost programa za simbolično računanje odvodov in avtomatsko generacijo kode AceGen, s katerim smo lahko pripravili podatke za občutljivostno analizo nekajkrat hitreje, kot če bi to opravili 'peš'.

6 DINAMIKA ARMIRANOBETONSKIH LINIJSKIH KONSTRUKCIJ

6.1 Uvod

Z upoštevanjem realnih lastnosti materialov v dinamični analizi lahko izboljšamo natančnost opisa obnašanja gradbenih konstrukcij. Delo, ki ga predstavljamo v pričujočem poglavju, je prispevek na tem področju, saj poleg točnih geometrijskih zvez upošteva tudi realne lastnosti armiranega betona. Klasične analize armiranobetonskih konstrukcij upoštevajo bodisi linearne kinematične zveze, $P - \Delta$ metodo ali različne poenostavljene verzije teorij drugega reda.

V tem poglavju ugotavljamo, če analize s točnimi geometrijskimi zvezami bolj realno opišejo obnašanje armiranobetonskih konstrukcij pod vplivom dinamične obtežbe in kako pomembna je izbira časovne integracije.

Pri velikih obremenitvah se v konstrukciji oblikujejo območja, kjer se poškodbe 'skoncentrirajo' in jih imenujemo plastični členki. Taka območja se praviloma pojavijo na mestih vpetja stebrov in prečk. S pojavom plastičnega členka v elementu se točke v okolici členka razbremenijo, deformacije in poškodbe pa se bolj in bolj skoncentrirajo v plastičnem členku.

S stališča implementacije materialnega modela v formulacijo ni večjih sprememb v algoritmu računa, kakor je bil prikazan v poglavju '4.4 Numerični algoritem'. Razlika je le v tem, da se tokrat konstitucijski sili N_c in M_c računata z numerično integracijo po prerezu. Ta dodatni postopek je podrobneje opisan v nadaljevanju.

6.2 Materialni modeli

Računski modeli za material so, tako kot vsi računski modeli, idealizacija realnega materialnega stanja. Dobljeni so na podlagi standardiziranih tlačnih in nateznih preizkusov in podajajo enoosno odvisnost med napetostmi in deformacijami. V analizi jih definiramo za vsako posamezno *materialno vlakno*, iz katerih sestavimo prečni prerez.

Računski materialni modeli, ki jih uporabljamo v tem delu, so po svoji matematični obliki eksplicitni. To pomeni, da lahko pri znani deformaciji in zgodovini dogajanja eksplicitno izrazimo oz. izračunamo napetost v vlaknu. Kljub eksplicitni obliki pa so za uporabo relativno zapleteni, ker upoštevajo zgodovino napetostnega stanja.

6.2.1 Jeklo

Za matematično modeliranje jekla uporabimo materialni model, ki sta ga razvila Menegotto in Pinto (1973), njegova značilnost pa je, da z ukrivljenim preходом iz elastičnega v plastično območje zmoro dobro modelirati Bauschingerjev efekt. Računski model v osnovi upošteva samo kinematično utrjevanje, dodatno pa je vanj vgrajena tudi možnost upoštevanja izotropnega utrjevanja po Filippou, Popovu in Berteru (1983). V literaturi je ta model zelo cenjen, ker lahko z njim zelo natančno ujamemo eksperimentalne rezultate cikličnega obremenjevanja armaturnih palic.

Parametri modela. So zbrani v preglednici 6.1.

Preglednica 6.1: Parametri materialnega modela za jeklo.

Table 6.1: Parameters of the steel material model.

Parameter	Ime	Priporočena vrednost
E_0	Začetni elastični modul	Ponavadi na voljo
h	Količnik utrjevanja	Ponavadi na voljo
f_y	Meja plastičnosti	Ponavadi na voljo
R_0	Začetna ukrivljenost prehoda	10 do 20
cR_1	Vpliv na ukrivljenost	0.925
cR_2		0.15
a_1, a_2	Vpliv na izotropno utrjevanje v tlaku	$a_1 = 0$ in $a_2 = 1$ ni izotropnega utrjevanja v tlaku
a_3, a_4	Vpliv na izotropno utrjevanje v nategu	$a_3 = 0$ in $a_4 = 1$ ni izotropnega utrjevanja v nategu

Enačbe materialnega modela. Napetost v materialnem vlaknu je podana v eksplicitni odvisnosti od njegove deformacije in zgodovine obremenjevanja. Postopek upoštevanja zgodovine obremenjevanja razdeli opazovanje dogajanja v materialnem vlaknu na faze. Vsaka faza predstavlja režim monotonega spreminjanja deformacije. Prehod med fazami se sproži s spremembo predznaka prirastka deformacije $\Delta\varepsilon$.

Napetost v vlaknu pri dani deformaciji je določena z enačbo:

$$\sigma^* = h \varepsilon^* + \frac{(1-h) \varepsilon^*}{\left(1 + (\varepsilon^*)^R\right)^{\frac{1}{R}}}, \quad (6.1)$$

kjer sta ε^* in σ^* definirana z zvezama

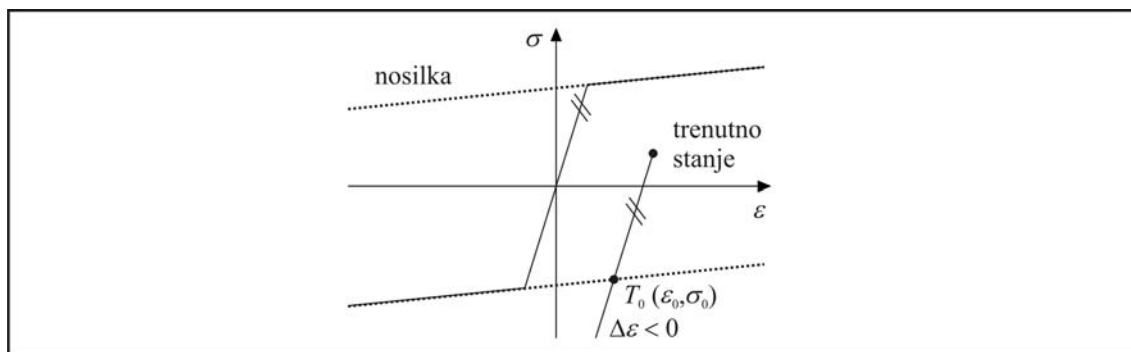
$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon - \varepsilon_r}{\varepsilon_0 - \varepsilon_r} \quad (6.2)$$

in

$$\sigma^* = \frac{\sigma - \sigma_r}{\sigma_0 - \sigma_r}. \quad (6.3)$$

Točki $T_0 (\varepsilon_0, \sigma_0)$ in $T_R (\varepsilon_r, \sigma_r)$ sta določeni v koordinatnem sistemu $\varepsilon - \sigma$ in se izračunata za vsako fazo obremenjevanja materiala, znotraj posamezne faze pa sta konstantni. Točka T_0 s koordinatami $(\varepsilon_0, \sigma_0)$ predstavlja sečišče poltraka in premice. Poltrak dobimo tako, da iz točke trenutnega materialnega stanja (ε, σ) narišemo poltrak z naklonom začetnega elastičnega modula E_0 v smeri predznaka inkrementa deformacije. Da dobimo premico, si predstavljamo bilinearni materialni zakon z elastičnim delom in utrjevanjem. Iskana premica je premica nosilka utrjevanja. Taki premici sta dve: ena za tlačne napetosti

in druga za natezne, poltrak pa seka le eno od njiju. Določitev te točke je shematsko prikazana na sliki 6.1.



Slika 6.1: Shematski prikaz določitve točke T_0 .

Figure 6.1: Schematical representation of locating point T_0 .

Točka $T_R(\varepsilon_r, \sigma_r)$ predstavlja zadnjo točko prejšnje faze, zato jo imenujemo tudi točka obrata. Parameter R v enačbi (6.1) vpliva na ukrivljenost prehoda iz elastičnega v plastično območje. Računa se po enačbi

$$R = R_0 - \frac{cR_1 \xi}{cR_2 + \xi}, \quad (6.4)$$

pri čemer je ξ definiran kot

$$\xi = \left| \frac{\varepsilon_{pl,max} - \varepsilon_0}{\varepsilon_y} \right|. \quad (6.5)$$

V tej enačbi je ε_y konstantna deformacija na meji plastičnosti:

$$\varepsilon_y = \frac{f_y}{E_0}. \quad (6.6)$$

V enačbi (6.5) je $\varepsilon_{pl,max}$ največja (do tedaj) dosežena plastična deformacija, ki predstavlja v fazah s pozitivnimi inkrementi deformacije največjo (do tedaj) doseženo plastično deformacijo v nategu (ε_{max}), in v fazah z negativnimi inkrementi deformacije največjo (do tedaj) doseženo plastično deformacijo v tlaku (ε_{min}). Ti dve vrednosti shranjujemo za vsako vlakno. Začetna vrednost maksimalne plastične deformacije za neobremenjeno vlakno je

$$\varepsilon_{pl,max}(\text{začetni}) = \begin{cases} \varepsilon_y, & \text{če } \Delta\varepsilon > 0 \\ -\varepsilon_y, & \text{če } \Delta\varepsilon < 0 \end{cases}, \quad (6.7)$$

v nadaljevanju pa se določa glede na doseženo maksimalno plastično deformacijo:

$$\varepsilon_{pl,max} = \begin{cases} \max(\varepsilon_y, \varepsilon_{max}), & \text{če } \Delta\varepsilon > 0 \\ \min(-\varepsilon_y, \varepsilon_{min}), & \text{če } \Delta\varepsilon < 0 \end{cases}. \quad (6.8)$$

Izotropno utrjevanje v tlaku upoštevamo tako (Filippou, Popov in Bertero (1983)), da presečišče poltraka in premice izračunamo po spremenjeni formuli:

$$\varepsilon_0 = \frac{-f_y \alpha_t + h E_0 \varepsilon_y \alpha_t - \sigma_r + E_0 \varepsilon_r}{E_0 - E_1}, \quad (6.9)$$

$$\sigma_0 = -f_y \alpha_t + h E_0 (\varepsilon_0 + \varepsilon_y \alpha_t), \quad (6.10)$$

kjer je α_t stopnja utrjevanja v tlaku, ki jo računamo po enačbi

$$\alpha_t = 1 + \alpha_1 \left(\frac{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}}{2 \alpha_2 \varepsilon_y} \right)^{0.8}. \quad (6.11)$$

Analogno upoštevamo izotropno utrjevanje v nategu:

$$\varepsilon_0 = \frac{-f_y \alpha_n - h E_0 \varepsilon_y \alpha_n - \sigma_r + E_0 \varepsilon_r}{E_0 - E_1}, \quad (6.12)$$

$$\sigma_0 = f_y \alpha_n + h E_0 (\varepsilon_0 - \varepsilon_y \alpha_n), \quad (6.13)$$

z analogno oznako α_n za stopnjo utrjevanja v nategu:

$$\alpha_n = 1 + \alpha_3 \left(\frac{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}}{2 \alpha_4 \varepsilon_y} \right)^{0.8}. \quad (6.14)$$

Trenutni elastični modul E_t se računa po enačbi

$$E_t = \left(h + \frac{1 - b}{\left(1 + |\varepsilon^*|^R\right) \left(1 + |\varepsilon^*|^R\right)^{\frac{1}{R}}} \right) \frac{\sigma_0 - \sigma_r}{\varepsilon_0 - \varepsilon_r}. \quad (6.15)$$

Obnašanje modela. Materialno vlakno obremenimo z deformacijo z naraščajočim žagastim vzorcem, ki je prikazan na levi strani slike 6.2. Pripadajoča napetost v jeklenem vlaknu z lastnostmi

$$\begin{aligned} E_0 &= 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2, \quad h = 0.001, \quad f_y = 46.85 \times 10^7 \text{ N/m}^2, \\ R_0 &= 15, \quad cR_1 = 0.925, \quad cR_2 = 0.15, \\ a_1 &= 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 1, \end{aligned} \quad (6.16)$$

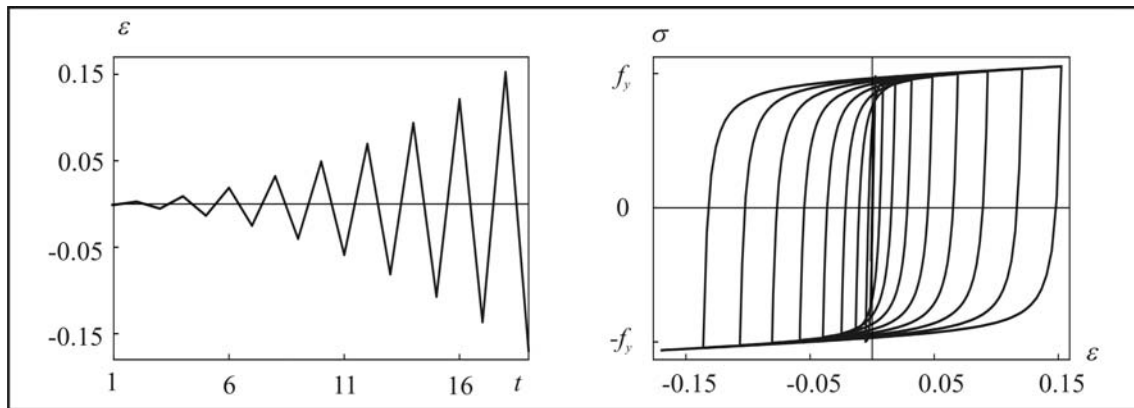
je prikazana na desni strani slike 6.2.

6.2.2 Beton

Uporabljen je materialni model za beton, ki upošteva tlačno in natezno cono ter različna mehanizma poškodovanosti materiala v tlaku in nategu. Ovojnica za tlačni del je povzeta po delu Popovicsa (1973) in je identična ovojnici Manderja, Priestleya in Parka (1988), če se privzame $E_c = 57000\sqrt{|f_c|}$. V nateznem delu je ovojnica definirana tako, da linearno elastičnemu delu sledi eksponentno padanje odpornosti.

Razbremenjevanje in ponovno obremenjevanje v tlaku je povzeto po Karsanu in Jirsi (1963), pri razbremenjevanju in obremenjevanju v nategu pa privzemamo sekantno togost.

Parametri modela. So zbrani v preglednici 6.2.



Slika 6.2: Zgodovina deformacije v odvisnosti od 'časa', levo. Pripadajoča napetost, desno.
Figure 6.2: Strain history in the fibre, left. Related stress, right.

Preglednica 6.2: Parametri materialnega modela za beton.

Table 6.2: Parameters of the concrete material model.

Parameter	Ime	Priporočena vrednost
E_{c0}	Začetni elastični modul	Ponavadi na voljo
f_c	Tlačna trdnost (28 dni)	Ponavadi na voljo*
ε_{c0}	Deformacija pri max. tl. trdnosti	Ponavadi na voljo*
ε_{cU}	Deformacija pri porušni tl. trd.	Ponavadi na voljo*
f_{ct}	Največja natezna trdnost	Desetina največje tlačne vred.
ε_{tU}	Deformacija pri porušni natezni trd.	Desetina največje tlačne def.
β	Za račun ovojnice v nategu	$\beta = 0.1$

* Podaja se kot negativna vrednost.

Enačbe materialnega modela. Materialni model betona je določen z ovojnicama mejne napetosti v tlaku in nategu ter s pravili za razbremenjevanje in ponovno obremenjevanje v vlaknih. Ovojnica napetosti predstavlja največjo nosilnost nepoškodovanega vlakna. Pravila v nadaljevanju predstavimo ločeno za tlak in nateg, saj predstavljajo ogrodje, ki ga moramo poznati, da lahko določimo napetost v poljubnem vlaknu. Zgodovina dogajanja v vlaknu je zajeta v deformacijah ε_{\min} , ε_{\max} in ε_{end} , katerih pomen bomo opisali v nadaljevanju, v vrednostih napetosti ob koncu prejšnjega koraka σ_{pre} in v razbremenitvenih tangentialnih moduli v tlačni ($E_{cc,\text{raz}}$) in natezni coni ($E_{ct,\text{raz}}$).

A) Ovojnica napetosti v tlaku. Sekantni modul E_{sec} določimo po enačbi

$$E_{\text{sec}} = \frac{f_c}{\varepsilon_{c0}}. \quad (6.17)$$

Glede na vrednost sekantnega modula je definirana pomožna spremenljivka r :

$$r = \begin{cases} 400, & E_{\text{sec}} > E_0 \\ \frac{E_{c0}}{E_{c0} - E_{\text{sec}}}, & E_{\text{sec}} \leq E_0 \end{cases}. \quad (6.18)$$

Po vpeljavi spremenljivke η

$$\eta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \quad (6.19)$$

lahko zapišemo enačbo za napetost

$$\sigma = f_c \eta \frac{r}{(r-1 + \eta^r)} \quad (6.20)$$

in tangenti modul

$$E_{ct} = f_c r \frac{(r-1)(1 - \eta^r)}{\varepsilon_{c0} (r-1 + \eta^r)^2}. \quad (6.21)$$

B) Ovojnica napetosti v nategu. Po računu deformacije na meji plastičnosti v nategu,

$$\varepsilon_{t0} = \frac{f_{ct}}{E_0}, \quad (6.22)$$

izračunamo napetost in tangenti modul po enačbah:

$$\sigma = \begin{cases} \varepsilon E_0, & \varepsilon_{t0} \leq \varepsilon < 0 \\ f_{ct} \beta^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_{t0}}{\varepsilon_{tU} - \varepsilon_{t0}}}, & \varepsilon_{tU} \leq \varepsilon < \varepsilon_{t0} \\ 0, & \varepsilon < \varepsilon_{tU} \end{cases} \quad (6.23)$$

$$E_{ct} = \begin{cases} E_0, & \varepsilon_{t0} \leq \varepsilon < 0 \\ f_{ct} \beta^{\frac{\varepsilon - \varepsilon_{t0}}{\varepsilon_{tU} - \varepsilon_{t0}}} \log \beta \frac{1}{\varepsilon_{tU} - \varepsilon_{t0}}, & \varepsilon_{tU} \leq \varepsilon < \varepsilon_{t0} \\ 0, & \varepsilon < \varepsilon_{tU} \end{cases} \quad (6.24)$$

C) Razbremenjevanje v tlačni coni po Karsanu in Jirsi (1963). Račun začnemo z vpeljavo pomožne spremenljivke ζ

$$\zeta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c0}} \quad (6.25)$$

in razmerja r_{KJ}

$$r_{KJ} = \begin{cases} 0.707 (\zeta - 1) + 0.834, & \zeta \geq 2 \\ 0.145 \zeta^2 + 0.13 \zeta, & \zeta < 2 \end{cases} \quad (6.26)$$

Z razmerjem r_{KJ} lahko določimo sečišče razbremenitve in abscise, ki je v koordinatnem sistemu $\varepsilon - \sigma$ določeno s koordinatami $(\varepsilon_{end}, 0)$:

$$\varepsilon_{end} = r_{KJ} \varepsilon_{c0}. \quad (6.27)$$

Z znanim sečiščem lahko izračunamo naklon razbremenitvene daljice:

$$E_{cc,raz} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\varepsilon_{min} - \varepsilon_{end}}, & (\varepsilon_{min} - \varepsilon_{end}) < \frac{\sigma}{E_{c0}} \\ E_{c0}, & (\varepsilon_{min} - \varepsilon_{end}) \geq \frac{\sigma}{E_{c0}} (*) \end{cases} \quad (6.28)$$

Če je v enačbi (6.28) merodajen drugi pogoj (*), je potrebno deformacijo ε_{end} računati po pravilu:

$$\varepsilon_{end} = \varepsilon_{min} - \frac{\sigma}{E_{c0}}. \quad (6.29)$$

ε_{min} predstavlja najmanjšo doseženo deformacijo, in si jo moramo, tako kot deformaciji ε_{end} in ε_{max} , za vsako vlakno shranjevati. Vlakno, ki ima določeno stopnjo poškodovanosti v tlaku ($\varepsilon_{end} \neq 0$), pri ponovnem obremenjevanju do deformacije ε_{end} ne nudi odpora. Šele ko je ta deformacija presežena, vlakno nudi odpornost, ki je proporcionalna tangenti modulu $E_{cc,raz}$.

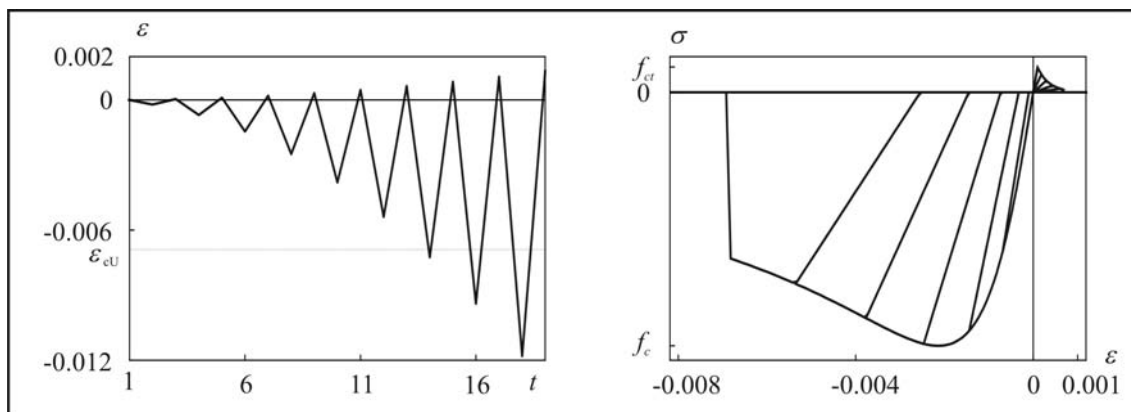
D) Pravila za razbremenjevanje v natezni coni. Razbremenjevanje iz katerekoli točke v natezni coni je predvideno skozi koordinatno izhodišče:

$$E_{ct,raz} = \frac{\sigma}{\varepsilon}. \quad (6.30)$$

Obnašanje modela. Materialno vlakno obremenimo z deformacijo z naraščajočim žagastim vzorcem, ki je prikazan na levi strani slike 6.3. Pripadajoča napetost v betonskem vlaknu z materialnimi karakteristikami

$$\begin{aligned} E_{c0} &= 3.2 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, & f_c &= -3 \times 10^7 \text{ N/m}^2, & f_{ct} &= 3 \times 10^6 \text{ N/m}^2, \\ \varepsilon_{c0} &= -0.00214, & \varepsilon_{cU} &= -0.0069, & \varepsilon_{tU} &= 0.0007, \\ & & \beta &= 0.1 \end{aligned} \quad (6.31)$$

je prikazana na desni strani slike 6.3.



Slika 6.3: Zgodovina deformacije v odvisnosti od ‘časa’, levo. Pripadajoča napetost, desno.

Figure 6.3: Strain history in the fibre, left. Corresponding stress, right.

6.3 Integracija po prerezu

Pri postopku numerične integracije upoštevamo koncept, da je prečni prerez sestavljen iz vlaken. Vlakna so, kot smo omenili v uvodnem poglavju, enodimenzionalne materialne niti, ki potekajo po celotni dolžini elementa. Zaradi zvezne porazdeljenosti mase po nosilcu je v prerezu neskončno materialnih vlaken. Predpostavka je, da napetostno stanje v posameznem vlaknu nima neposrednega vpliva na sosednja vlakna. Zato lahko v vlaknu uporabimo enoosni materialni model.

Zaradi natančnejše numerične integracije prerez nosilca razdelimo na podprereze, na vsakem podprerezu pa uporabimo ustrezno numerično metodo integracije. Uporabljamo Gaussovo ali Lobattovo integracijo. Takšna integracija zahteva podatke o deformaciji, napetosti in materialnem modelu v izbranem vlaknu. Te dobimo, brž ko so znani pomiki nosilca, vrsta materiala in njegov konstitucijski zakon. Pri ravninski analizi okvirjev imajo podpodročja obliko vzporednih lamel (slojev), v katerih se mehanske količine spreminjajo samo v prečni smeri na lamele, to je, le v odvisnosti od lokalne koordinate z in zato integracija po prerezu poteka dejansko samo po koordinati z – po višini prereza.

V splošnem so poteki napetosti in materialnih modelov po prerezu pri času t_n zvezne ali celo nezvezne funkcije. Z delitvijo prereza na lamele in vpeljavo numerične integracije funkcijo zamenjamo z množico diskretnih vrednosti v pripadajočih diskretnih točkah. Izbira točk je pomembna s stališča natančnosti numerične integracije. O vplivu izbire na natančnost smo govorili že v poglavju 3.7 in vse ugotovitve veljajo tudi v primeru integracije po prerezu. Lobattovi integraciji dajemo prednost pred Gaussovo, ker zajame tudi skrajne robove vlaken in z večanjem stopnje integracije izboljšujemo natančnost integrala. V analizi moramo upoštevati še dve posebnosti, ki vplivata na način delitve prereza na lamele. Prva

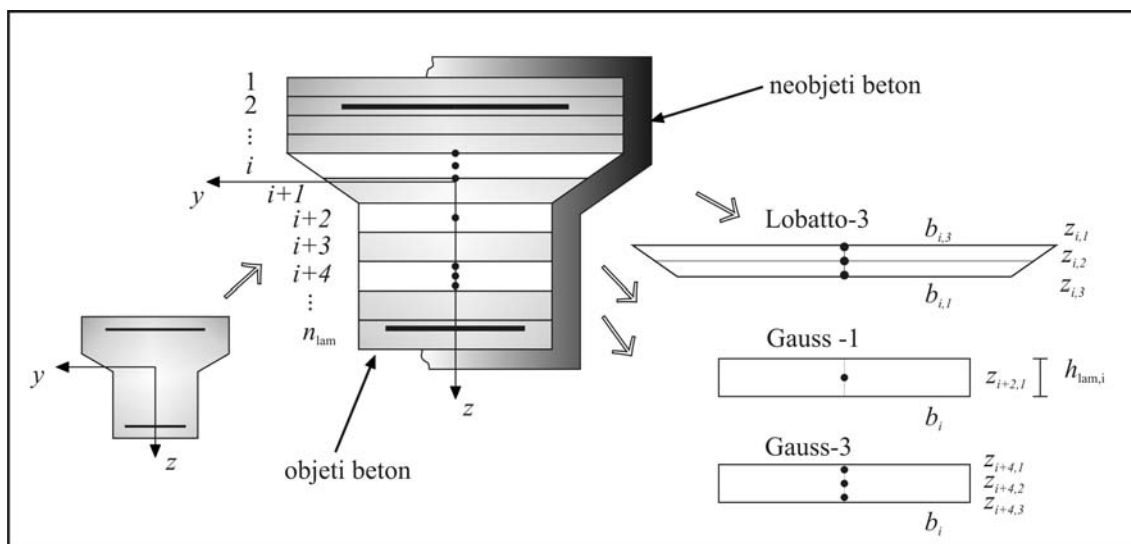
zadeva obliko prečnega prereza. Ta je pogosto nepravokotna; tak je T-prerez. V teh primerih moramo prerez razdeliti na podpodročja z zveznim robom. T-prerez moramo deliti na območji pasnice in stojine. Druga posebnost je oblika funkcij, ki jih integriramo. Te so lahko take, da so na nekem območju prereza enake nič, na preostalem delu pa imajo od nič različne vrednosti. Meja med ničelnimi in neničelnimi vrednostmi pa je v vsakem časovnem koraku drugače.

Zato je optimalno, da prerez razdelimo na več lamel, po katerih integriramo s poljubno stopnjo integracije. Z delitvijo na več lamel povečamo možnost, da bo meja lamele blizu meje med ničelnimi in neničelnimi vrednostmi, z uporabo integracije višje stopnje pa hkrati občutno izboljšamo natančnost integracije. Nekaj primerov različnih integracij je prikazanih na desni strani slike 6.4.

Pri integraciji moramo upoštevati še lastnost betona, da ima s stremeni objekti del povečano tlačno trdnost f_c in bistveno povečani deformaciji ε_{c0} in ε_{cU} . Karakteristike objetega betona izračunamo po Manderjevem modelu (Mander, Priestley in Park (1988)). Objekti in neobjeti del betona ločeno razdelimo na lamele (glej sliko 6.4).

Objeti del betona 'razrežemo' na n_{lam} lamel, kot je prikazano na osrednjem delu slike 6.4. Na podoben način 'razrežemo' tudi neobjeti del betona (zaščitno plast) in dobimo še dodatno n_{lam} lamel neobjetega betona. Ko predpostavimo še vrsto in stopnjo integracije po lamelah, lahko prispevke posameznih lamel seštejemo in dobimo konstitucijsko osno silo N_C in konstitucijski moment M_C . Nekaj možnih izbir integracije je prikazanih na desni strani slike 6.4. Število lamel oz. integracijskih točk po lamelah ima zelo pomemben vpliv na hitrost računa.

V literaturi je ponavadi integracija po lamelah implementirana tako, da se za posamezno lamelo predpostavi, da imajo v njej vsa vlakna enako, konstantno napetost (npr. Taucer, Spacone in Filippou (1991)). Ta predpostavka je enakovredna enotočkovni Gaussovi integraciji (slika 6.4) in zahteva sorazmerno večje število lamel po prerezu za enako natančnost kot večtočkovna integracija.



Slika 6.4: Prerez, skrajno levo. Razdelitev prereza na lamele in njihovo oštevilčenje, sredina. Ilustracija treh možnih integracij po prerezu, desno.

Figure 6.4: Cross-section, left. Division and enumeration of the cross-section into layers, middle. Illustrations of some of the possible integration schemes, right.

Koordinate $z_{i,j}$ integracijskih točk so določene glede na izhodišče koordinatnega sistema $y - z$, ki je

postavljeno v težišče prereza. Indeks i označuje lamelo, indeks j pa integracijsko točko. Višina lamele objetega betona je $h_{lam,i}$, njena širina je $b_{i,j}$; za lamelo neobjetega betona veljajo oznake ${}^n h_{lam,i}$ in ${}^n b_i$. V implementaciji postopka je predpostavljeno, da se lahko širine lamel objetega betona po višini spreminjajo konstantno ali linearno, širine lamel neobjetega betona pa so konstantne.

Prvi korak analize je določitev lastnosti prečnega prereza, ki jih lahko priročno določimo po enačbah (formulah), zbranih npr. v diplomski Markovičeve (2006). Te formule za račun težišča, ploščine in vztrajnostnih momentov uporabljajo koordinate oglišč poligona, s katerim opišemo zunanjo konturo prereza.

Vzdolžne deformacije ϵ v integracijskih točkah izračunamo po enačbi

$$\epsilon_{i,j} = \epsilon + \kappa z_{i,j} \quad (6.32)$$

za vse lamele $i = 1, \dots, n_{lam}$ in vse integracijske točke po lamelah $j = 1, \dots, n_{itg,lam}$ objetega betona. Analogno velja za neobjeti beton:

$${}^n \epsilon_{i,j} = \epsilon + \kappa {}^n z_{i,j}. \quad (6.33)$$

Z znanimi vzdolžnimi deformacijami lahko s pomočjo enačb (6.17)–(6.30) izračunamo pripadajoče napetosti $\sigma_c(\epsilon_{i,j})$.

Armaturne palice obravnavamo točkovno. Posamezne palice označimo z indeksom $k = 1, \dots, n_{pal}$ in njihove ploščine z $A_{pal,k}$. Vzdolžno deformacijo v njih računamo analogno kot v betonskih vlaknih, iz nje pa z enačbami (6.1)–(6.15) določimo napetost $\sigma_s(\epsilon_k)$.

Z izbranim načinom numerične integracije po lameli, z znanimi koordinatami integracijskih točk z_i , z napetostmi v betonskih vlaknih $\sigma_c(\epsilon_{i,j})$ in v armaturnih palicah $\sigma_s(\epsilon_k)$ lahko integracijo po prerezu zapišemo s formulami:

$$\begin{aligned} N_c = & \sum_{i=1}^{n_{lam}} \frac{h_{lam,i}}{2} \sum_{j=1}^{n_{itg}} b_{i,j} w_{g,j} \sigma_c(\epsilon_{i,j}) + \\ & + \sum_{i=1}^{n_{lam}} \frac{{}^n h_{lam,i}}{2} \sum_{j=1}^{n_{itg}} {}^n b_i w_{g,j} \sigma_c({}^n \epsilon_{i,j}) + \sum_{k=1}^{n_{pal}} A_{pal,k} \sigma_s(\epsilon_k), \end{aligned} \quad (6.34)$$

$$\begin{aligned} M_c = & \sum_{i=1}^{n_{lam}} \frac{h_{lam,i}}{2} \sum_{j=1}^{n_{itg}} b_{i,j} w_{g,j} \sigma_c(\epsilon_{i,j}) y_{i,j} + \\ & + \sum_{i=1}^{n_{lam}} \frac{{}^n h_{lam,i}}{2} \sum_{j=1}^{n_{itg}} {}^n b_i w_{g,j} \sigma_c({}^n \epsilon_{i,j}) {}^n y_{i,j} + \sum_{k=1}^{n_{pal}} A_{pal,k} \sigma_s(\epsilon_k) y_{i,j}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

V teh enačbah so $w_{g,j}$ integracijske uteži. Za račun strižne sile predpostavimo linearen zakon, kot smo poudarili že v uvodnih poglavjih, in strižno silo Q_c računamo po enačbi (2.28)₂.

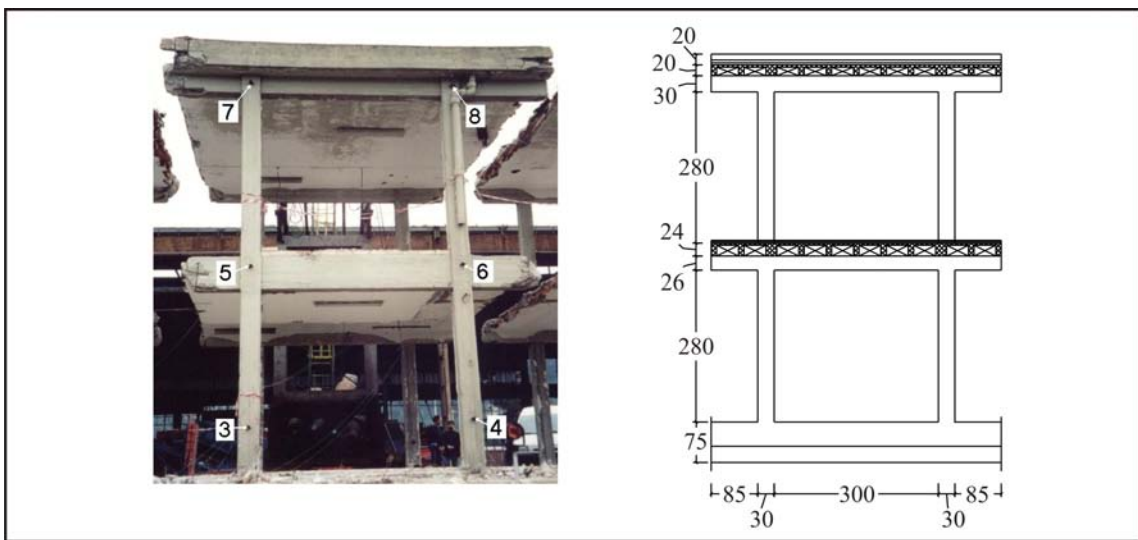
6.4 Numerična primera

6.4.1 Pushover analiza (Prohitech)

Geometrijski in materialni podatki. Obravnavamo dvoetažno enoladijsko armiranobetonsko konstrukcijo, ki je prikazana na slikah 6.5, 6.6 in 6.7. Konstrukcija je bila eksperimentalno preizkušana v okviru projekta Prohitech (2004). Na sliki 6.5 je prikazana celotna konstrukcija, s katere so odstranili vse nenosilne elemente in jo zatem fizično razrezali na dele, ki so jih testirali. Obravnavani del konstrukcije je označen z modrim okvirjem. Fotografija obravnavanega dela konstrukcije v vzdolžni smeri in njen



Slika 6.5: Fotografija celotne konstrukcija z označenim analiziranim delom.
Figure 6.5: Photography of the entire structure. The analysed section is framed.



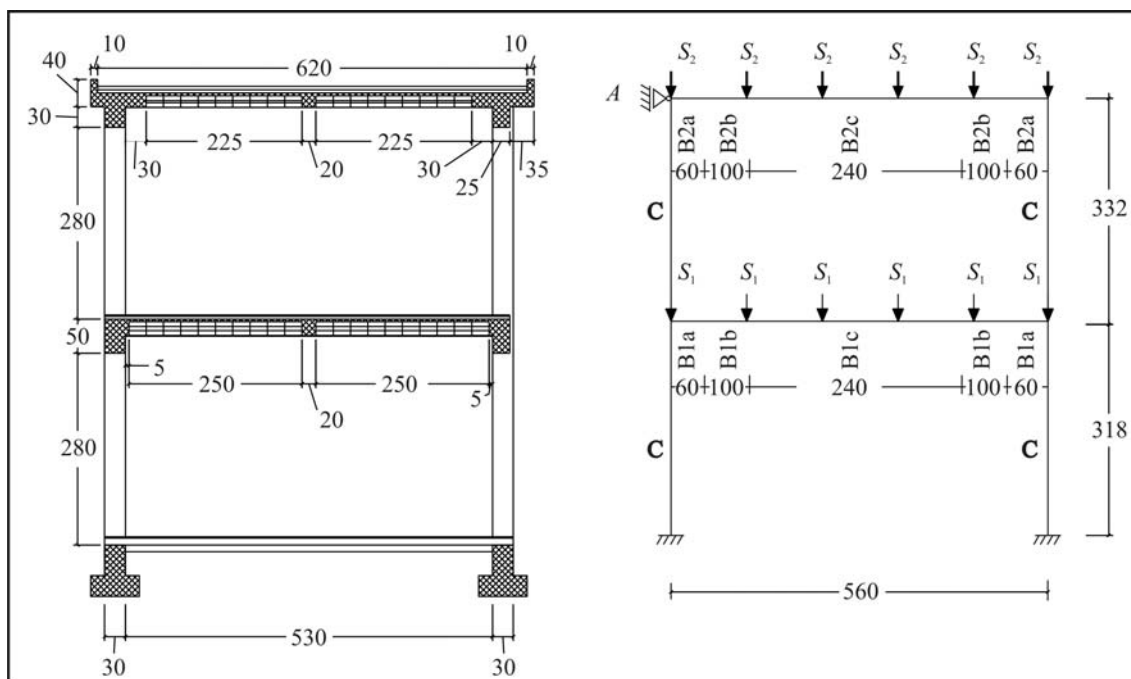
Slika 6.6: Fotografija (levo) in načrt (desno) obravnavanega dela konstrukcije v vzdolžni smeri.
Figure 6.6: Photography (left) and plan (right) of the analysed section of the structure in longitudinal direction.

načrt sta prikazana na sliki 6.6. Načrt konstrukcije v prečni smeri in računski model sta prikazana na sliki 6.7. Dodatne slike konstrukcije so prikazane v članku Della Corte, Barecchia in Mazzolanija (2006) ter v poročilu projekta Prohitech (2004).

Prostorsko konstrukcijo modeliramo z ravninskim računskim modelom, ker je obremenjena le v prečni smeri s točkovno silo v drugi etaži. Računski model je tako ravninski okvir (slika 6.7, desno), pravo odpornost preizkušane konstrukcije pa dobimo z množenjem računske odpornosti z 2.

Armaturni načrti konstrukcije so prikazani na sliki 6.8. Stebri, ki jih v računskem modelu označujemo s črko C, so kvadrati s stranico 30 cm in z vzdolžno armaturo 4 Φ 12 v vogalih prereza (slika 6.9). Strižno so armirani s stremeni Φ 8/20 cm. Zaščitni sloj betona je 1.5 cm. Objetje betona v stebrih upoštevamo po Manderjevem modelu (Mander, Priestley in Park (1988)).

Vzdolžna armatura v prečkah se po dolžini prečke trikrat spremeni, zato imamo na območju prečk tri različne tipe prečnih prerezov (slike 6.7, 6.8 in 6.9). Sodelujočo širino nosilca določimo kot dvakratnik razdalje od osi glavnega nosilca do prostega roba (kot predlagata Rozman in Fajfar (2006)); prikazana je na sliki 6.8. Računski prečni prerezi nosilca v prvi etaži so tako T-prerezi, ki so spodaj široki 60 cm in



Slika 6.7: Načrt konstrukcije v prečni smeri, levo. Računski model, desno.

Figure 6.7: Schematics of the structure in transversal direction, left. Mathematical model of the structure, right.

zgoraj 2.2 m. Skupna višina nosilca je 24 cm, od tega je višina pasnice 4 cm (slika 6.9). V drugi etaži so prerezi enaki, le da je tam višina stojine le 16 cm. Zaščitna plast betona za prečke je 1.5 cm; strižno armiranje prečk je izvedeno s krivljenjem vzdolžne armature.

Materialne karakteristike betona so:

$$\begin{aligned} f_c &= -20.5 \text{ MPa}, & E_{c0} &= 16830 \text{ MPa}, & \varepsilon_{c0} &= -0.0018, & \varepsilon_{cU} &= -0.0035, \\ f_{ct} &= 2.0 \text{ MPa}, & \varepsilon_{tU} &= 0.00015, & \nu_c &= 0.2, & \beta &= 0.1, \end{aligned} \quad (6.36)$$

objeti beton pa ima večjo tlačno trdnost, tlačno deformacijo in porušno tlačno deformacijo:

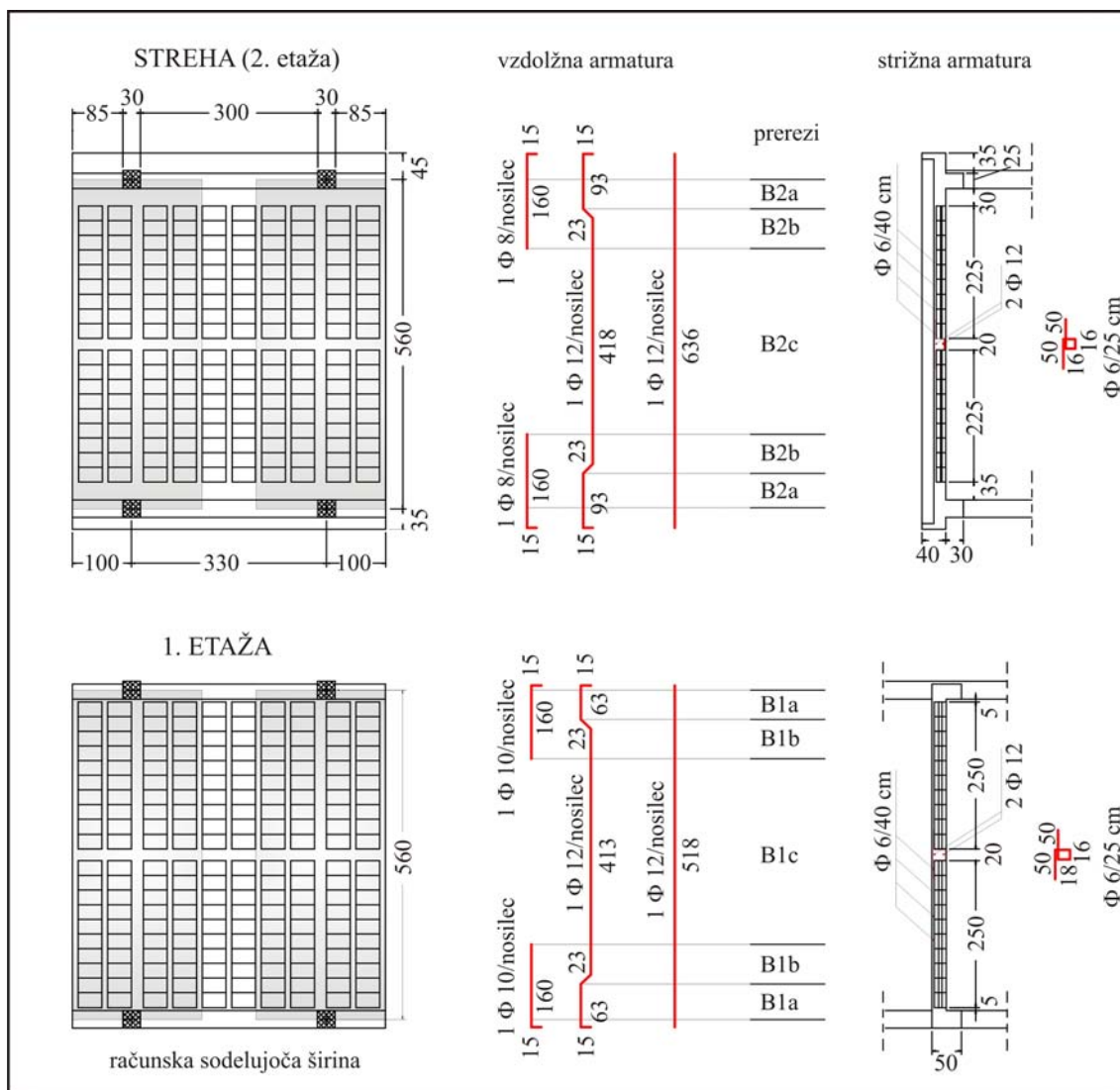
$$\text{objeti } f_c = -21.5 \text{ MPa}, \quad \text{objeti } \varepsilon_{c0} = -0.0023, \quad \text{objeti } \varepsilon_{cU} = -0.0103. \quad (6.37)$$

Materialne karakteristike jekla za armaturo so:

$$\begin{aligned} f_y &= 442.7 \text{ MPa}, & E_0 &= 200 \text{ GPa}, & \nu_s &= 0.3, & h &= 0.01, \\ R_0 &= 15, & cR_1 &= 0.925, & cR_2 &= 0.15, \\ a_1 &= 0, & a_2 &= 1, & a_3 &= 0, & a_4 &= 1. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Navedeni materialni podatki so bili izmerjeni in so povzeti po poročilu Prohitech (2004), in članku Della Corte, Barecchia in Mazzolanija (2006). Izjema so lastnosti objetega betona, ki jih izračunamo po Manderjevem modelu, in podatek za stopnjo utrjevanja jekla, ki ga ocenimo na podlagi trdnosti na meji tečenja in meji porušitve. Natezna trdnost betona je ocenjena na podlagi tlačne trdnosti. Za jeklo je predpostavljeno kinematično utrjevanje.

Podatki o numerični analizi. Računski model (slika 6.7, desno) modelira lastno težo s šestimi enakomerno porazdeljenimi točkovnimi silami po prečkah. Velikosti točkovnih sil sta $S_1 = 13 \text{ kN}$ v prvi

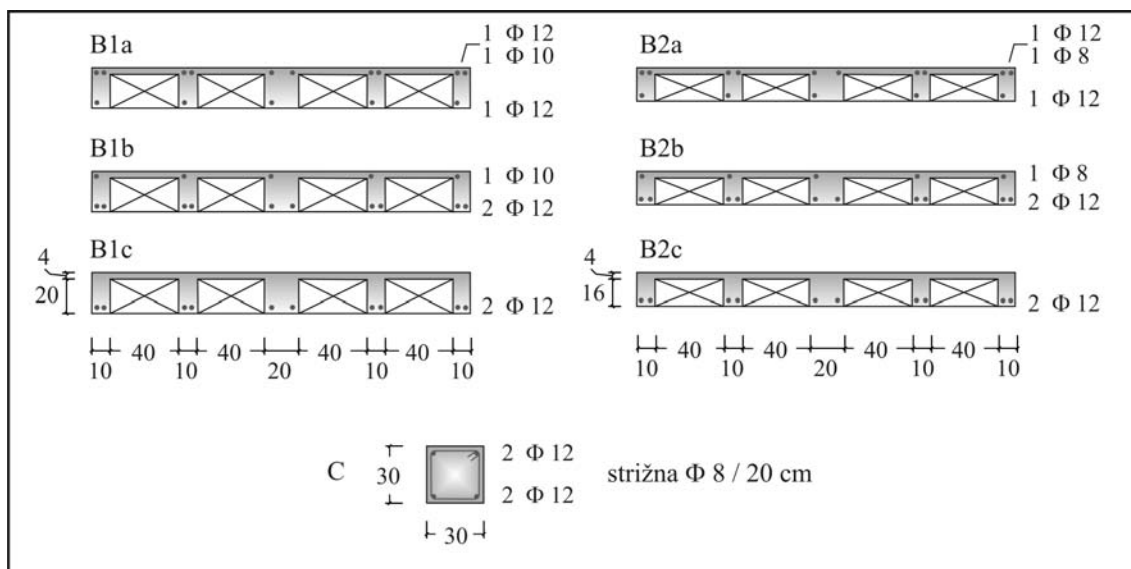


Slika 6.8: Armaturni načrt konstrukcije z označenimi območji prečnih prerezov in sodelujočimi širinami.
 Figure 6.8: Plan of reinforcement with marked cross-sections and effective widths.

etaži in $S_2 = 12.5$ kN v drugi etaži. Konstrukcija je dodatno obremenjena s predpisanim vodoravnim pomikom na mestu podpore A, t.j. v levem zgornjem vogalu. Predpisani pomik na konstrukcijo nanašamo v ponavljajočih se fazah, v katerih konstrukcijo obremenimo do ciljnega pomika in zatem razbremenimo po predpisanem ciklu (Della Corte, Bارعchia in Mazzolani (2006)). Pomik postopoma povečujemo: v prvi fazi znaša 1.3 cm, v drugi 3 cm, v tretji 4.7 cm in v zadnji 12.2 cm.

V numerični analizi uporabimo element za statično analizo konstrukcij z interpolacijo četrtega reda po elementu, z Reissnerjevo kinematiko in z materialnim modelom za armirani beton. Tak element ima oznako '2DBStaRCReisI4'; pomen kratic v oznaki je podrobno razložen v poglavju o knjižnici končnih elementov. Integracija po dolžini končnega elementa je reducirana Lobattova.

Stebri vsake etaže so modelirani s 5 končnimi elementi in prečke z osmimi. Beton v stebrih je ločen na objeti in neobjeti del. Objeti beton je razdeljen na 20 lamel. Neobjeti del betona je razdeljen na 60 lamel (tri krat po dvajset lamel na območjih z različnimi širinami). Prečki sta razdeljeni na stojino in pasnico



Slika 6.9: Prečni prerezi.
Figure 6.9: Cross-sections.

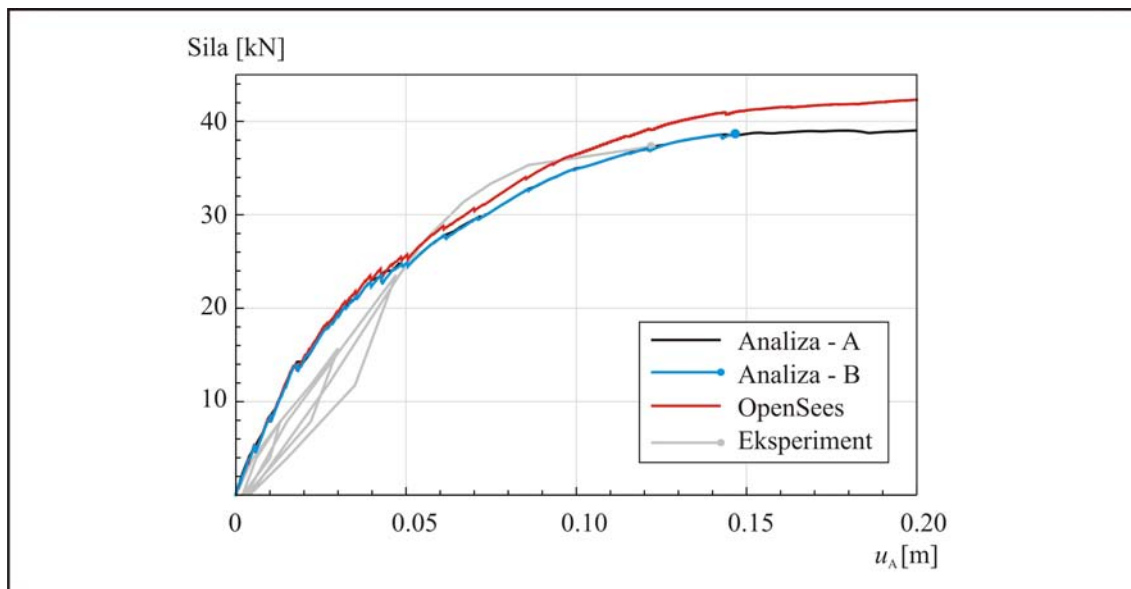
in vsaka od njiju je razdeljena na 20 lamel.

Z namenom verifikacije računskega postopka opravimo podobno analizo tudi s programom Opensees (2006). Opensees je odprtokodni program za statično in dinamično analizo konstrukcij, ki je bil razvit na Berkeleyju na Kalifornijski univerzi v Združenih državah Amerike. Ker je program nekoliko drugače zastavljen, ni moč opraviti identične analize, temveč le zelo podobno. V analizi s programom Opensees uporabimo enake materialne in geometrijske podatke, drugačni pa so končni elementi in računski postopek. V Openseesu smo uporabili elemente tipa 'nonlinearBeamColumn', ki temeljijo na interpolaciji notranjih sil in uporabljajo P- Δ postopek za upoštevanje vplivov geometrijske nelinearnosti (v naši analizi je uporabljena točna kinematika). Tudi v Openseesu so upoštewane štiri Lobattove integracijske točke po dolžini elementa. Število uporabljenih končnih elementov je enako v obeh analizah. Postopek nalaganja lastne teže na konstrukcijo je v Openseesu drugačen, saj konstrukcijo najprej statično obremenimo, shranimo stanje v konstrukciji in pred cikličnim obremenjevanjem vertikalne sile S_1 in S_2 odstranimo iz konstrukcije; v naši analizi statične sile ostanejo ves čas na konstrukciji. Analizi sta torej podobni, nista pa identični.

Rezultati. Najprej naredimo monotono pushover analizo, v kateri se osredotočimo na primerjavo med rezultati našega računskega postopka in Openseesa. Dodatno lahko na ta način ocenimo nosilnost konstrukcije v prečni smeri. Rezultati analiz so prikazani na sliki 6.10. Analiza A v računskem postopku upošteva velik prirastek vodoravnega pomika in je sposobna izračunati pomik konstrukcije do ciljnega pomika 20 cm. Opazimo lahko, da pri pomiku približno 15 cm konstrukcija doseže maksimalno nosilnost. Analiza B je narejena z bolj finim prirastkom pomika in odpove pri približno 15 cm pomiku. Analiza s programom Opensees, ki je označena z rdečo črto, nakazuje naraščanje nosilnosti v celotnem območju analize. Rezultati vseh analiz so primerjani z eksperimentalnimi rezultati (ki pa so bili dobljeni s cikličnim obremenjevanjem).

V začetnem delu se naša računska analiza in rezultati Openseesa skoraj popolnoma ujemajo in s tem verifirajo naš računski postopek. V primerjavi z eksperimentom izkazujejo preveliko togost, kar je najverjetneje posledica predhodne razpokanosti osnovne konstrukcije in precenjene natezne nosilnosti betona.

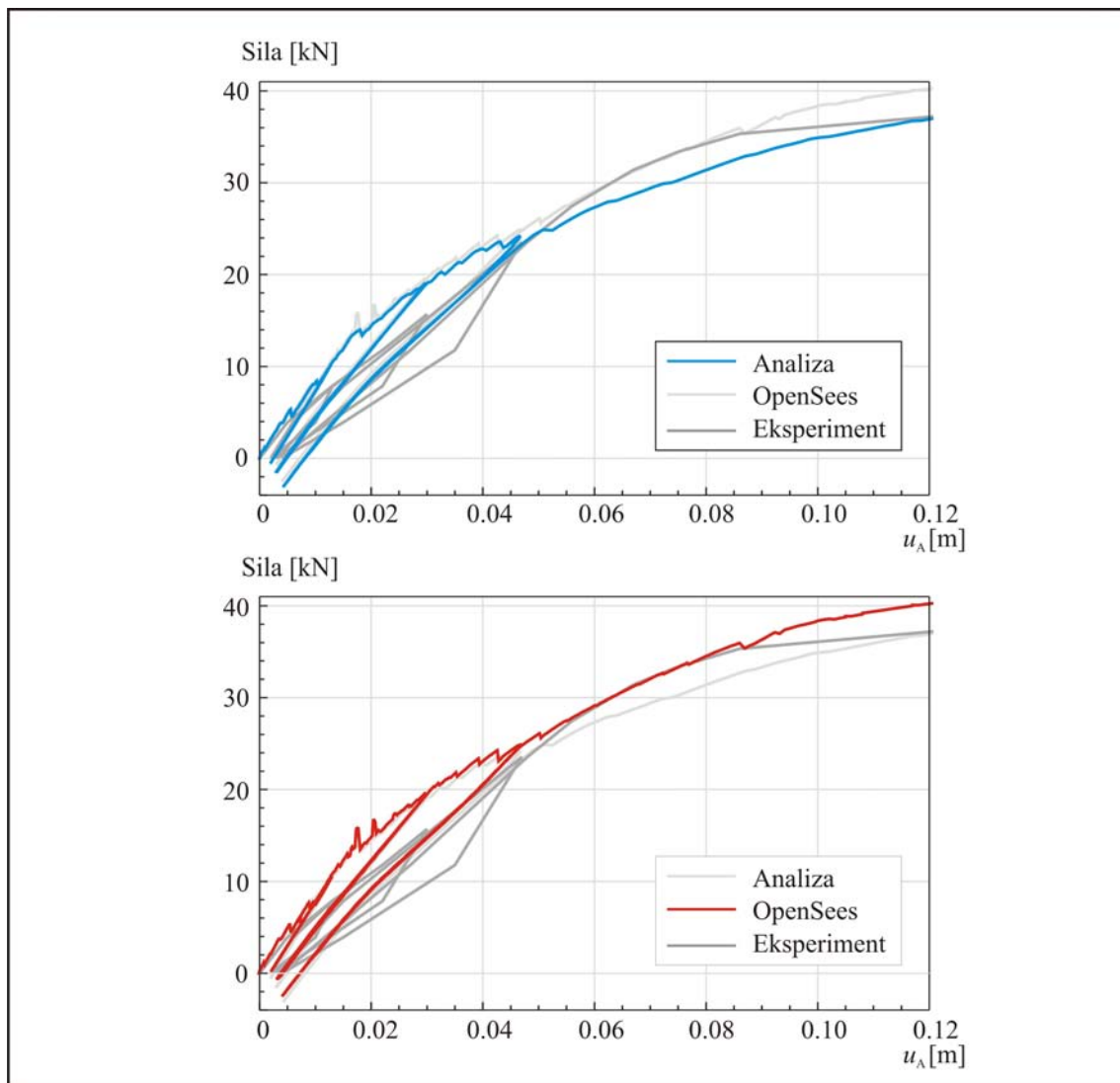
Ko se približujemo mejni nosilnosti konstrukcije, se začnejo rezultati računskih postopkov postopno razlikovati. Kot je razvidno s slike 6.10, naš računski postopek nakazuje porušitev konstrukcije pri obtežbi in pomiku, ki sta relativno blizu dejanskim (izmerjenim) vrednostim.



Slika 6.10: Rezultat monotone pushover analize.

Figure 6.10: The results of the monotone pushover analysis.

Zatem opravimo še ciklično pushover analizo, z režimom obremenjevanja, kot je bil opisan v prejšnjih razdelkih. Rezultati analize so prikazani na sliki 6.11. Na zgornjem delu te slike je poudarjena rešitev s predlaganim računskim postopkom. Rezultati izkazujejo preveliko togost v začetnem delu, nekoliko podcenjeno nosilnost v območju od 5 do 10 cm in dobro ujemanje ob koncu analize. Rezultati analize s programom Opensees so poudarjeni na spodnjem delu slike 6.11. Približno do pomika 5 cm se skoraj popolnoma ujemajo s predlaganim računskim postopkom in zaradi precenjene nosilnosti betona v nategu precenijo togost konstrukcije glede na eksperimentalne podatke. V območju od 5 do 10 cm se praktično ujamejo z eksperimentalnimi rezultati, v zadnji fazi obremenjevanja pa precenijo nosilnost konstrukcije.

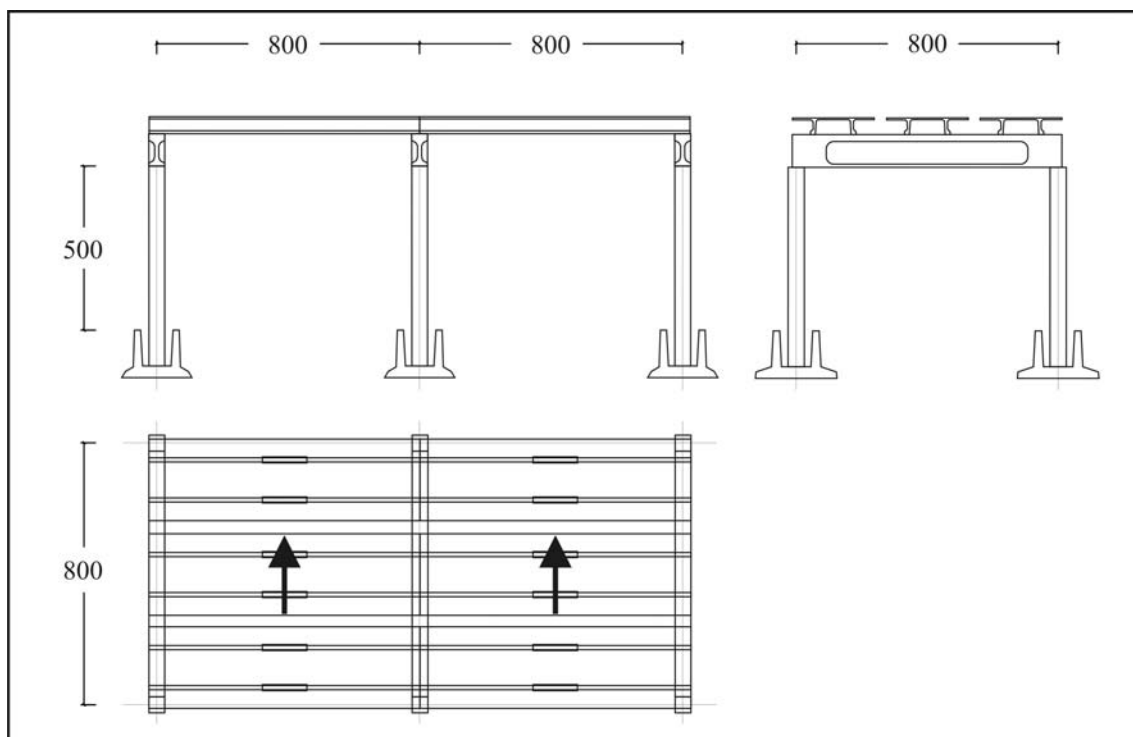


Slika 6.11: Rezultat ciklične pushover analize.
Figure 6.11: The results of the cyclic pushover analysis.

6.4.2 Dinamična analiza montažne hale

Geometrijski in materialni podatki. Obravnavamo konstrukcijo, ki je bila v naravni velikosti psevdodinamično eksperimentalno testirana v laboratoriju ELSA (European Laboratory for Structural Assessment) v Ispri (Tonolio (2007)). Konstrukcija je montažni industrijski objekt, sestavljen iz šestih vitkih stebrov in strešne konstrukcije, ki jih povezuje (slika 6.12). V sklopu testov so bile narejene in preizkušane tri konstrukcije. Tukaj se bomo osredotočili le na tisto, ki je v poročilu označena z oznako 'prototip 3'.

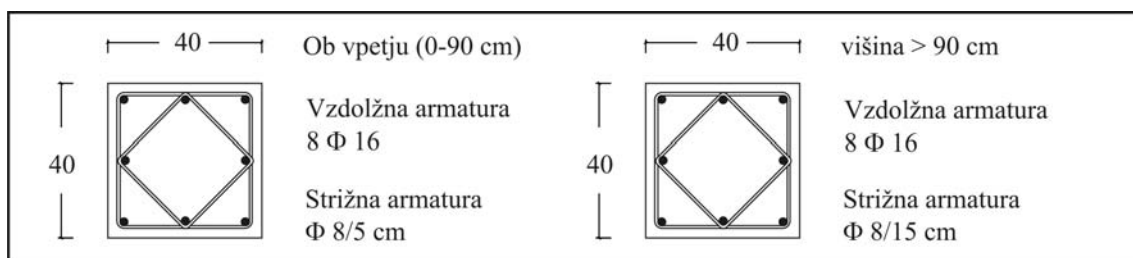
Stebri so visoki 5 m in so toga vpeti v tla, na njih pa je členkasto pričvrščena strešna konstrukcija. Strešna konstrukcija je sestavljena iz prednapetih betonskih I – nosilcev vzporedno s smerjo delovanja obtežbe, na katere so pod pravim kotom položene strešne betonske II – plošče. Med stebri in nosilci so neoprenska ležišča ter jekleni trni. Ta stik je v računskem modelu upoštevan kot momentni členek. Stik med II – ploščami in nosilci je zagotovljen z vijaki in jeklenimi kotniki. Masa strešne konstrukcije



Slika 6.12: Geometrija obravnavane konstrukcije; s puščicami sta označeni mesti nanosa obtežbe.
 Figure 6.12: The geometry of the structure; arrows depict locations and directions of the loads.

(nosilci in plošče) je ocenjena na 57.9 t.

Konstrukcija je bila projektirana po standardu EC 8 na projektni pospešek zemeljskih tal 0.35 g in s predpostavljeno visoko duktilnostjo ($q = 4.5$). V vzdolžni smeri zadošča minimalna dovoljena količina armature (1%). Prečni prezek stebra je kvadrat s stranico 40 cm. Vzdolžno je armiran z 8 $\Phi 16$ in strižno s štiristrižnimi stremeni $\Phi 8/5$ cm ob vpetju (do višine 90 cm) in z enakimi stremeni $\Phi 8/15$ cm nad to višino. Prečni prezek stebra je prikazan na sliki 6.13. Zaščitna plast betona je 2.4 cm, statična višina pa 36 cm.



Slika 6.13: Prečni prezek stebra z vzdolžno in strižno armaturo.
 Figure 6.13: Cross-section of the beam with longitudinal and shear reinforcement.

Materialni parametri za beton so:

$$\begin{aligned}
 f_c &= -55 \text{ MPa}, & E_{c0} &= 37000 \text{ MPa}, & \varepsilon_{c0} &= -0.0018, & \varepsilon_{cU} &= -0.0035, \\
 f_{ct} &= 0 \text{ MPa}, & \varepsilon_{tU} &= 0.00015, & \nu_c &= 0.2, & \beta &= 0.1,
 \end{aligned}
 \tag{6.39}$$

Vrednost elastičnega modula je določena po formuli $E_c = 57000\sqrt{|f_c|}$. Natezne trdnosti betona v

računih nismo upoštevali, saj se je pokazalo, da upoštevanje natezne trdnosti vrne bistveno pretog odziv konstrukcije ob začetku obremenjevanja. To dodatno utemeljujemo z dejstvom, da je bila konstrukcija do določene mere obremenjena pred samimi testi z namenom umeritve merilnih naprav in potisnih batov, kar je lahko povzročilo razpokanje betona. Karakteristike objetega betona so določene po Manderjevem modelu objetega betona:

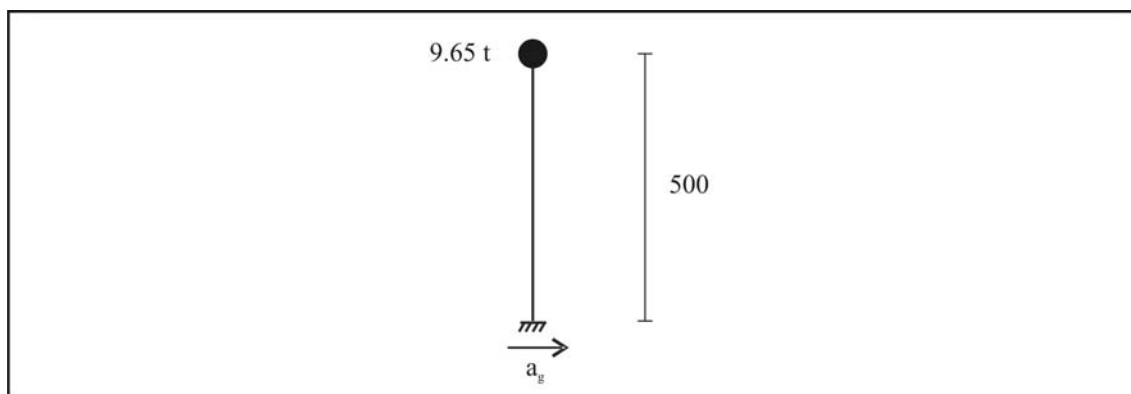
$$\text{objeti } f_c = -70.5 \text{ MPa}, \quad \text{objeti } \varepsilon_{c0} = -0.006, \quad \text{objeti } \varepsilon_{cU} = -0.019. \quad (6.40)$$

Materialne karakteristike armature so:

$$\begin{aligned} f_y &= 55.5 \text{ MPa}, & E_0 &= 200 \text{ GPa}, & \nu_s &= 0.3, & h &= 0.01, \\ R_0 &= 15, & cR_1 &= 0.925, & cR_2 &= 0.15, \\ a_1 &= 0, & a_2 &= 1, & a_3 &= 0, & a_4 &= 1. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Karakteristike so bile določene na podlagi specifične kvalitete vgrajenih materialov (beton C40/50 in jeklo B500H). Izmerjene vrednosti žal niso bile na voljo.

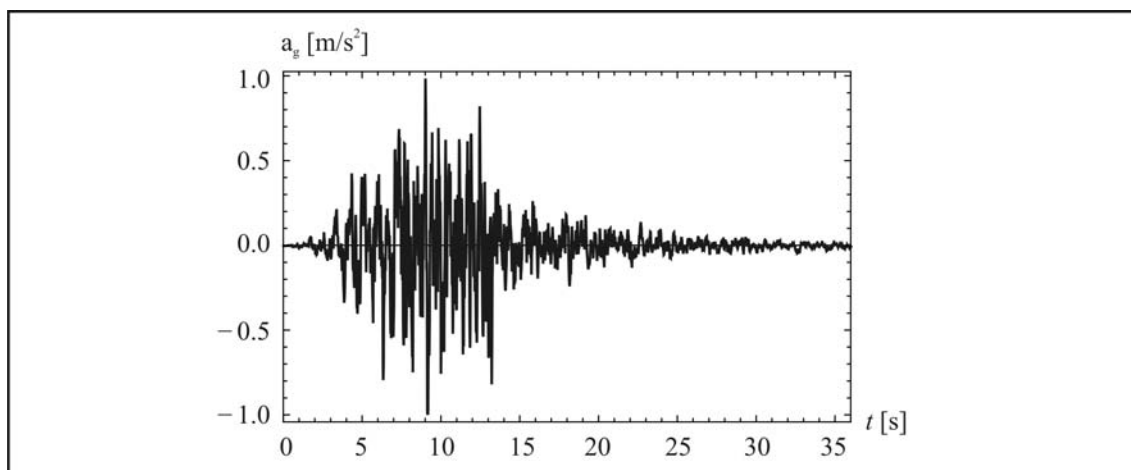
Računski model in obremenitve. Ker je eksperiment pokazal, da se strešna konstrukcija obnaša kot toga diafragma in ker je konstrukcija obremenjena le v eni smeri, lahko uporabimo ravninski računski model. Konstrukcijo modeliramo z enim, 5 m visokim, togo vpetim stebrom, na vrhu katerega se nahaja šestina mase strešne konstrukcije (slika 6.14). V računu uporabimo 5 elementov s kvadratično interpolacijo pomikov vzdolž elementa in reducirano Lobattovo integracijo za togostne člene in polno za vztrajnostne. Pri integraciji po prerezu uporabimo tri lamele s 5 točkovno integracijo. V računu upoštevamo, da je edina masa točkovna masa na vrhu stebra. Namen primera je opazovati vpliv različnih časovnih integracijskih shem, zato primer rešimo s šestimi integracijskimi shemami.



Slika 6.14: Računski model konstrukcije.
Figure 6.14: Numerical model of the structure.

V analizi je upoštevano 3% dušenje na prvi in drugi nihajni obliki; matrika dušenja je sestavljena kot linearna kombinacija masne in togostne matrike. Literatura (npr. Paz in Leigh (2004)) priporoča, da se za armiranobetonske konstrukcije tovrstno dušenje upošteva s 3 do 5% deležem kritičnega dušenja. Ker gre za psevdo–dinamični eksperiment, smo se odločili za spodnjo mejo s tega intervala.

Konstrukcija je bila psevdo–dinamično obremenjena z akcelerogramom potresa v Črni gori, ki je bil umetno prilagojen na projektne pospeške 0.05 g, 0.14 g, 0.35 g in 0.525 g. Prva analiza (0.05 g) je služila le za preverjanje elastičnih lastnosti konstrukcije in je v računu ne upoštevamo. Ostale tri dinamične obtežne primere preračunamo z numeričnim postopkom. Pri eksperimentu je bila konstrukcija



Slika 6.15: Normaliziran akceleroگرام.
Figure 6.15: Normalized accelerogram.

po dinamičnih preizkusih obremenjena še s kontroliranim pomikom do porušitve, vendar te faze v tem primeru ne obravnavamo. Akceleroگرام je prikazan na sliki 6.15.

Rezultati numeričnih analiz. Rezultati analiz problema z različnimi integratorji so praktično identični. Na grafu se razlik med rezultati ne da ločiti s prostim očesom niti v primeru, ko so v analizi uporabljeni zelo veliki časovni koraki, zato v nadaljevanju prikazujemo le rezultate, ki so dobljeni z Newmarkovim integratorjem s trapeznim pravilom. V analizi je uporabljen konstanten časovni korak $\Delta t = 0.02$ s.

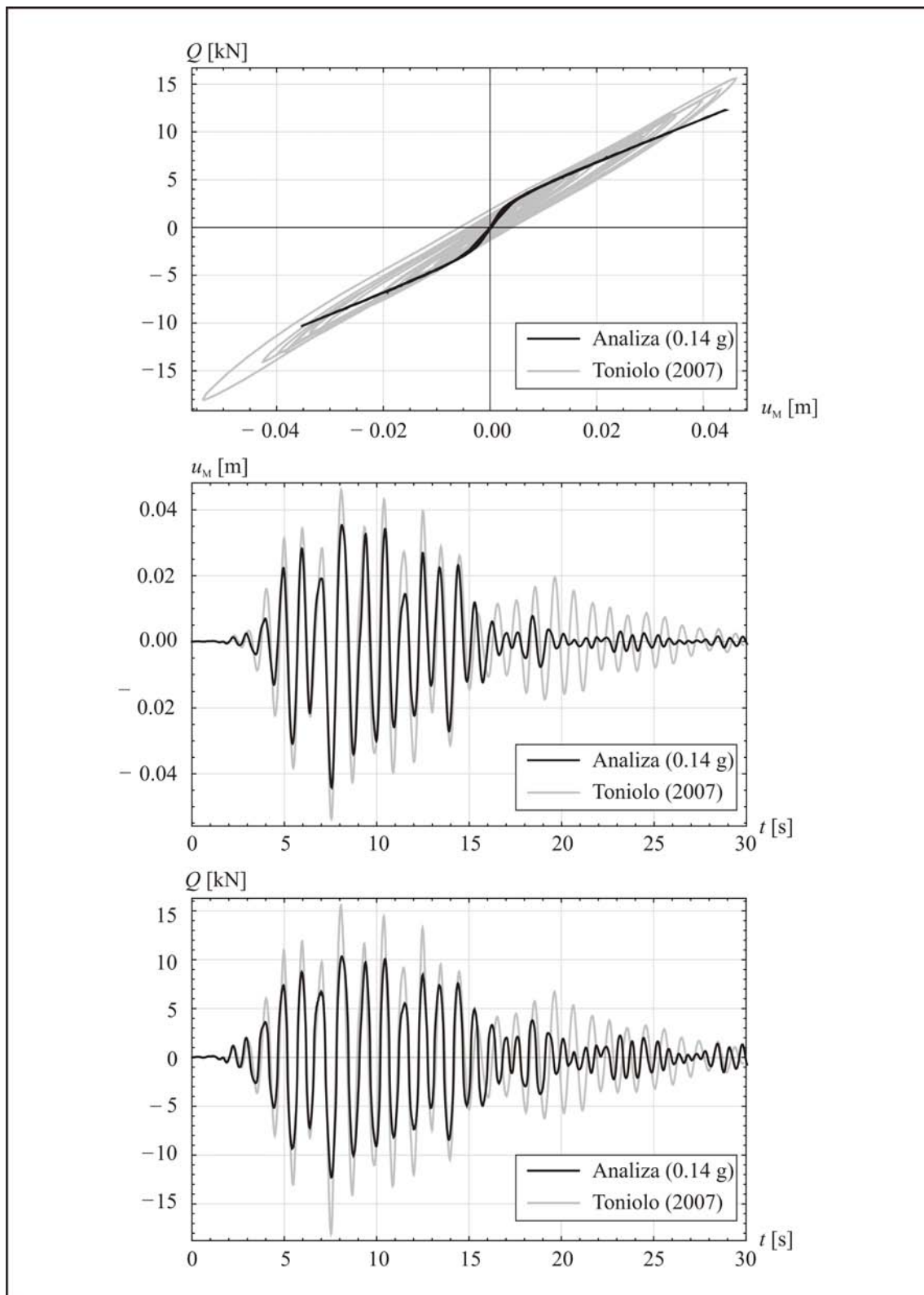
V sklopu primerjav z eksperimentalnimi rezultati primerjamo vodoravni pomik na vrhu konstrukcije u_M in strižno silo ob vpetju Q . Rezultati so prikazani na slikah 6.16, 6.17 in 6.18 za obremenitve, skalirane na 0.14 g, 0.35 g in 0.525 g.

Iz prvega grafa na sliki 6.16, ki prikazuje zvezo med Q in u_M , lahko razberemo, da je začetna togost konstrukcije precenjena kljub temu, da natezne trdnosti betona nismo upoštevali, zatem pa izkazuje celo nekoliko prenizko togost. Neujemanje z eksperimentom je najverjetneje posledica pojavov, ki v našem računskem modelu niso upoštevani. Dodatno lahko opazimo, da je računska histereza 'preozka'. Histereza dobi 'širino' zaradi plastifikacije materiala, ki se v naši analizi ni pojavila. To je posledica dejstva, da smo v računu uporabili materialne karakteristike osnovane na projektni kakovosti vgrajenih materialov in ne na dejanskih izmerjenih karakteristikah. Na srednjem grafu je prikazan vodoravni pomik na vrhu konstrukcije v odvisnosti od časa. Opazimo lahko, da so pomiki konstrukcije nekoliko podcenjeni, predvsem v drugi polovici analize; računski nihajni časi analize se skoraj popolnoma ujamejo z eksperimentalnimi. Strižna sila je, tako kot pomiki, nekoliko podcenjena.

Na sliki 6.17 je prikazan odziv konstrukcije na obremenitev, ki je skalirana na pospešek zemeljskih tal 0.35 g. Histereza je zopet preozka, sicer pa ne prekorači eksperimentalne ovojnice in kaže primerljivo togost. Pomiki in strižne sile se zelo dobro ujamejo z eksperimentalnimi, so le za malenkost podcenjeni.

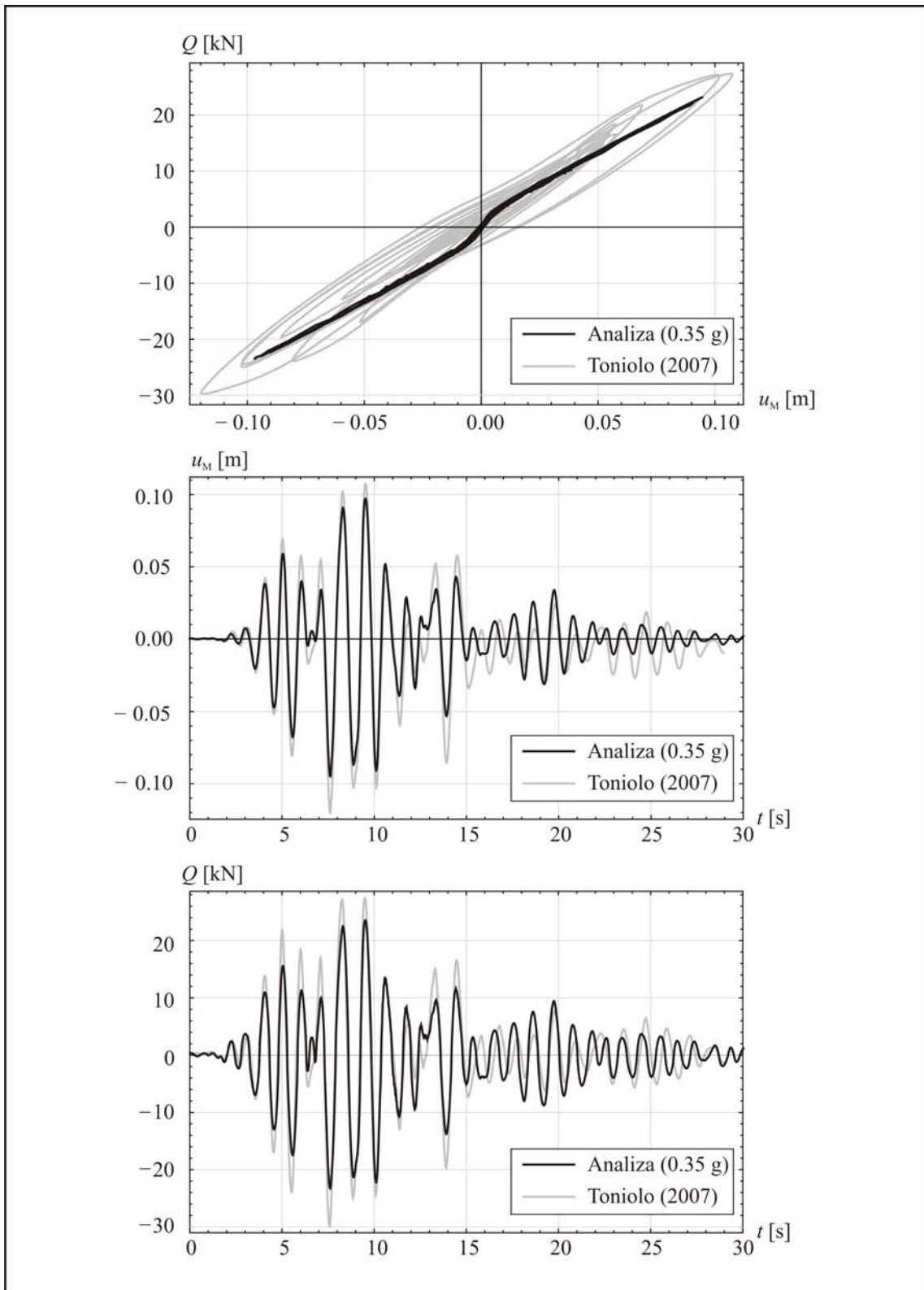
Primerjeva zadnje faza dinamičnega preizkušanja in numerične analize je prikazana na sliki 6.18. Tokrat se dobro ujamejo vse merjene količine, vključno s histerezo (zgornji graf), ki je do sedaj izkazovala največja razhajanja med numeričnimi in eksperimentalnimi rezultati.

Primer je bil v osnovi mišljen kot primerjava časovnih integratorjev med seboj na primeru armiranobetonske konstrukcije. Izkazalo se je, da so vsi integratorji problem rešili enako kvalitetno celo v primerih analiz z velikimi časovnimi koraki, kjer bi se morale najprej pokazati razlike. Primer pa nam služi



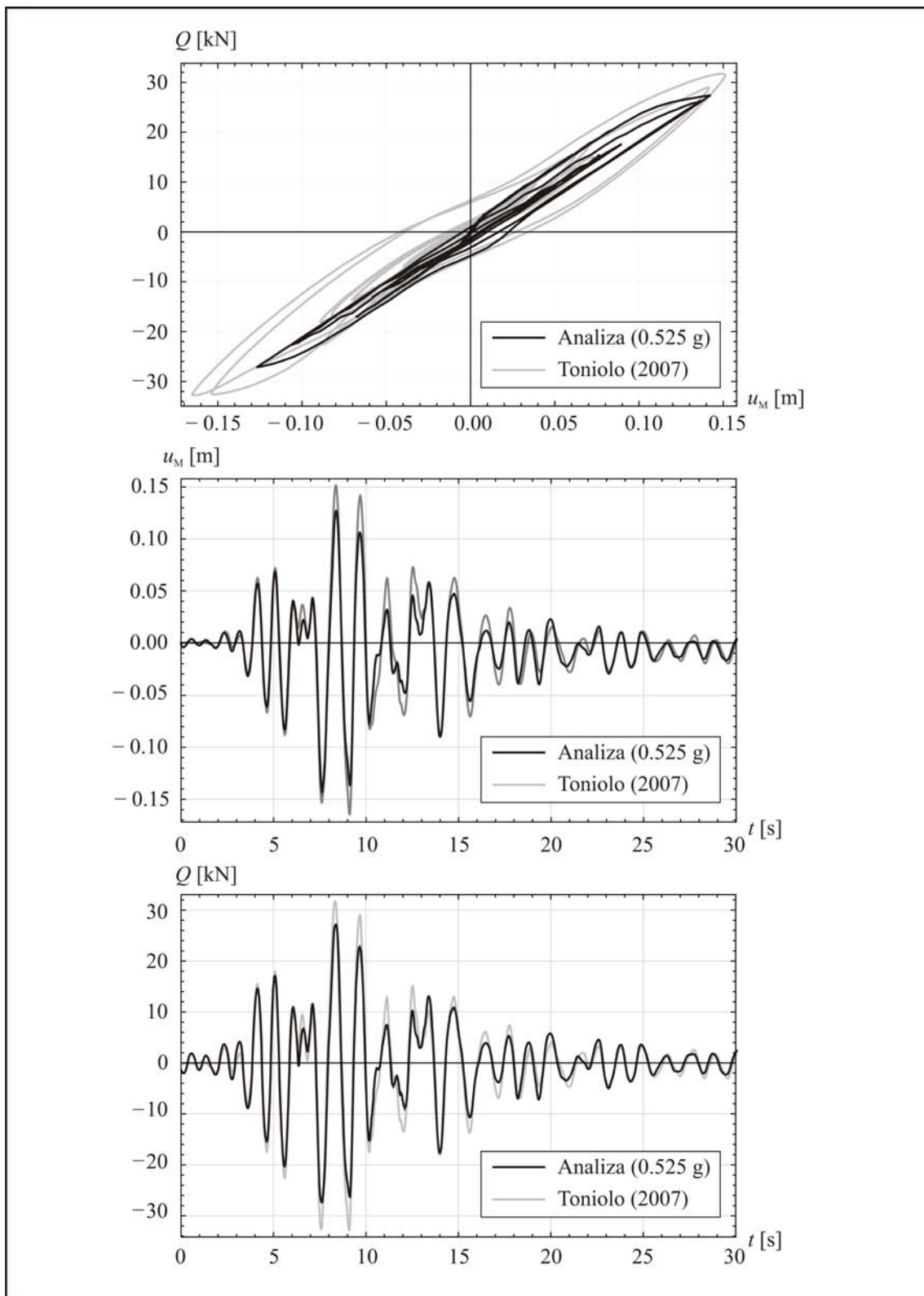
Slika 6.16: Odziv na obremenitev skalirano z 0.14 g.

Figure 6.16: Response to loads scaled to 0.14 g.



Slika 6.17: Odziv na obremenitev skalirano z 0.35 g.

Figure 6.17: Response to loads scaled to 0.35 g.



Slika 6.18: Odziv na obremenitev skalirano z 0.525 g.

Figure 6.18: Response to loads scaled to 0.525 g.

tudi kot dodatna validacija računskega postopka, saj se je pokazalo, da je ujemanje med računskimi in eksperimentalnimi rezultati primerno.

6.5 Sklepi

V tem poglavju smo izpeljali in aplicirali računski postopek za geometrijsko točno analizo ravninskih armiranobetonskih konstrukcij. Namen poglavja je bil raziskati vpliv različnih časovno integracijskih shem na odziv takih konstrukcij. Na računskih primerih realnih konstrukcij, ki so bili podprti z eksperimentalnimi rezultati, se je pokazalo, da je vpliv časovnega integratorja pri analizi zanemarljiv. Delo predstavlja novost, saj v literaturi ni moč zaslediti tako osnovane formulacije za geometrijsko točno analizo armiranobetonskih konstrukcij.

V sklopu numeričnih primerov smo računski postopek verificirali s primerjavo rezultatov z računalniškim programom Opensees in validirali na eksperimentalnih rezultatih ciklične pushover analize in psevdodinamične analize.

7 KNJIŽNICA KONČNIH ELEMENTOV

7.1 Uvod

V sklopu dela z elementi z interpolacijo kinematičnih količin z različnimi materialnimi modeli je bila razvita obsežna knjižnica končnih elementov, ki so v tem poglavju naštetih in na kratko opisani. Vsi elementi so dostopni na internetnem naslovu www.km.fgg.uni-lj.si/Matija/index.htm. Tam so na voljo rutine elementov (.dll) in izvirne kode elementov v programskem okolju AceGen.

7.1.1 Kinematične teorije

V končnih elementih za statično analizo nastopajo tri kinematične teorije: linearna, teorija drugega reda in točna teorija. Enačbe točne teorije poznamo, enačbe linearne teorije in teorije drugega reda pa dobimo, če točno teorijo razvijemo v Taylorjevo vrsto okoli začetne (nedeformirane) lege. Reissnerjeve enačbe (2.25) so funkcije pomikov in jih ne moremo direktno razviti v Taylorjevo vrsto, zato si pomagamo s smernim odvodom (smerni odvod je posplošitev odvoda, ki predstavlja spremembo poljubne količine pri majhni spremembi parametra, od katerega je količina odvisna. Osnovna količina je popolnoma poljubna – lahko je funkcija, funkcional, matrika, itd.). Smerni odvod $\delta f(\mathbf{a})^1$ splošne funkcije $f(\mathbf{a})$ je definiran kot

$$\delta f(\mathbf{a})[\mathbf{h}] = \left. \frac{d}{d\zeta} f(\mathbf{a} + \zeta \mathbf{h}), \right|_{\zeta=0} \quad (7.1)$$

kjer je $\zeta \mathbf{h}$ sprememba argumenta \mathbf{a} , ζ pa skalar, s katerim je skaliran \mathbf{h} . $\delta f(\mathbf{a})[\mathbf{h}]$ označuje smerni odvod funkcije $f(\mathbf{a})$ v smeri \mathbf{h} . Oznako $[\mathbf{h}]$ v nadaljevanju besedila opustimo. Funkcijo f razvijemo v Taylorjevo vrsto po skalarnem parametru ζ okrog $\zeta = 0$ in dobimo

$$f(\mathbf{a} + \zeta \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{n=1}^{n_{\text{členov}}} \frac{1}{n!} \delta^n f(\mathbf{a} + \zeta \mathbf{h}) \zeta^n. \quad (7.2)$$

Preden Reissnerjeve kinematične enačbe razvijemo v Taylorjevo vrsto na opisani način, pripravimo prve in druge variacije deformacij (tokrat v komponentni obliki):

$$\begin{aligned} \varepsilon &= (u + X)' \cos \varphi + (v + Y)' \sin \varphi - 1, \\ \delta \varepsilon &= \delta u' \cos \varphi - (u + X)' \sin \varphi \delta \varphi + \delta v' \sin \varphi + (v + Y)' \cos \varphi \delta \varphi, \\ \delta^2 \varepsilon &= -2 \delta u' \sin \varphi \delta \varphi - (u + X)' \cos \varphi \delta \varphi^2 + 2 \delta v' \cos \varphi \delta \varphi - (v + Y)' \sin \varphi \delta \varphi^2, \end{aligned} \quad (7.3)$$

¹Smerni odvod in variacija sta označena z istim simbolom (δ). Gre namreč za isti količini.

$$\begin{aligned}\gamma &= -(u + X)' \sin \varphi + (v + Y)' \cos \varphi, \\ \delta\gamma &= -\delta u' \sin \varphi - (u + X)' \cos \varphi \delta\varphi + \delta v' \cos \varphi - (v + Y)' \sin \varphi \delta\varphi, \\ \delta^2\gamma &= -2 \delta u' \cos \varphi \delta\varphi + (u + X)' \sin \varphi \delta\varphi^2 - 2 \delta v' \sin \varphi \delta\varphi - (v + Y)' \cos \varphi \delta\varphi^2,\end{aligned}\tag{7.4}$$

$$\begin{aligned}\kappa &= \varphi', \\ \delta\kappa &= \delta\varphi', \\ \delta^2\kappa &= 0.\end{aligned}\tag{7.5}$$

Začetna lega se nanaša na točko $\varsigma = 0$ v nedeformiranem stanju in v njej velja

$$\begin{aligned}u(\varsigma = 0) &= u'(\varsigma = 0) = 0, \\ v(\varsigma = 0) &= v'(\varsigma = 0) = 0, \\ \varphi(\varsigma = 0) &= \varphi_0, \\ \varphi'(\varsigma = 0) &= 0, \\ \varepsilon(\varsigma = 0) &= \gamma(\varsigma = 0) = \kappa(\varsigma = 0) = 0.\end{aligned}\tag{7.6}$$

Linearna teorija. Deformacije linearne oz. linearizirane kinematične teorije zapišemo tako, da deformacije ε , γ in κ zapišemo v Taylorjevo vrsto (7.2) in upoštevamo le prvi člen ($n_{\text{elenov}} = 1$) vrste

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{LinK}} &= \varepsilon(\varsigma = 0) + \delta\varepsilon, \\ \gamma_{\text{LinK}} &= \gamma(\varsigma = 0) + \delta\gamma, \\ \kappa_{\text{LinK}} &= \kappa(\varsigma = 0) + \delta\kappa.\end{aligned}\tag{7.7}$$

Ob upoštevanju enačb (7.3)–(7.6) in ob védenju, da so variacije pomikov v enačbah (7.3)–(7.6) zdaj kar celotni pomiki linearizirane teorije, dobimo

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{LinK}} &= u \cos \varphi_0 - \varphi X' \sin \varphi_0 + v' \sin \varphi_0 + \varphi Y' \cos \varphi_0, \\ \gamma_{\text{LinK}} &= -u \sin \varphi_0 - \varphi X' \cos \varphi_0 + v' \cos \varphi_0 - \varphi Y' \sin \varphi_0, \\ \kappa_{\text{LinK}} &= \varphi'.\end{aligned}\tag{7.8}$$

Z oznako ‘LinK’ smo označili linearno kinematiko oziroma linearno kinematično teorijo.

Teorija drugega reda. Pri razvoju teorije drugega reda postopamo podobno kot zgoraj, le da tokrat upoštevamo prva dva člena Taylorjeve vrste:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{2\text{orK}} &= \varepsilon(0) + \delta\varepsilon + \frac{1}{2}\delta^2\varepsilon, \\ \gamma_{2\text{orK}} &= \gamma(0) + \delta\gamma + \frac{1}{2}\delta^2\gamma, \\ \kappa_{2\text{orK}} &= \kappa(0) + \delta\kappa + \frac{1}{2}\delta^2\kappa.\end{aligned}\tag{7.9}$$

Ob upoštevanju enačb (7.3)–(7.6) in ker so variacije pomikov v enačbah (7.3)–(7.6) kar celotni pomiki teorije drugega reda, dobimo

$$\begin{aligned}\varepsilon_{2\text{orK}} &= \varepsilon_{\text{LinK}} + \frac{1}{2} \left(-2 \varphi u' \sin \varphi_0 - \varphi^2 (u + X)' \cos \varphi_0 + 2 \varphi v' \cos \varphi_0 - \varphi^2 (v + Y)' \sin \varphi_0 \right), \\ \gamma_{2\text{orK}} &= \gamma_{\text{LinK}} + \frac{1}{2} \left(-2 \varphi u' \cos \varphi_0 + \varphi^2 (u + X)' \sin \varphi_0 - 2 \varphi v' \sin \varphi_0 - \varphi^2 (v + Y)' \cos \varphi_0 \right), \\ \kappa_{2\text{orK}} &= \kappa_{\text{LinK}}.\end{aligned}\tag{7.10}$$

Z oznako ‘2orK’ smo označili kinematično teorijo drugega reda.

Točna teorija. Enačbe točne teorije (2.25) poznamo in jih označujemo z oznako ‘Reis’.

7.1.2 Stopnje interpolacije in integracije

Vsi elementi so razviti za štiri interpolacijske stopnje. Najnižja stopnja interpolacije je linearna, kjer imamo le dve interpolacijski funkciji in dve vozlišči na elementu. Najvišja stopnja interpolacije je četrtega reda in ima pet vozlišč oz. interpolacijskih točk. Interpolacijske točke so vedno enakomerno razporejene po dolžini elementa. V programskem okolju AceGen/AceFEM so vsi elementi – topološko gledano – daljice, ki jih podajamo le z začetnim in končnim vozliščem. Ostala vozlišča so obravnavana kot notranja. Oznake interpolacijskih stopenj so: 'I1' - linearna, 'I2' - kvadratična, 'I3' - kubična in 'I4' - interpolacija četrtega reda.

Integracija po dolžini končnega elementa ni poljubna, temveč je vnaprej določeno, da je stopnja integracije reducirana za togostni del enačb in polna za vztrajnostni del. Izbiramo lahko med Lobattovo in Gaussovo integracijo, vendar pa moramo odločitev eksplicitno navesti v programskem okolju AceFEM. Elementi z linearno interpolacijo ne morejo imeti Lobattove integracije prve stopnje, saj ta ne obstaja.

7.1.3 Materialni modeli

V elementih lahko upoštevamo tri vrste materialnih modelov – elastičnega, jeklenega in betonskega. Vsi modeli so že bili podrobno opisani. Za njih vpeljemo oznake: 'El' - za elastičnega, 'St' - za jeklenega in 'RC' - za betonskega.

7.1.4 Časovni integratorji

Implementiranih je sedem časovnih integratorjev: Newmark (1959) – New; Hilber, Hughes in Taylor (1977) – HHT; Simo, Tarnow in Doblare (1995) – STD; Ibrahimbegović in Mamouri (1999) – IbMa; Stander in Stein (1996) – StaSt; šibki s povprečno rotacijsko matriko – Wpov in šibki z midpoint rotacijsko matriko – Wmid. Časovni integratorji so razviti le za točno kinematično teorijo z izjemo Newmarkovega in HHT, ki sta narejena tudi za linearno kinematično teorijo.

7.1.5 Vrsta analize in oznake elementov

Analiza je lahko dinamična (oznaka 'Dyn') ali statična (oznaka 'Sta'). V primeru statične analize so oznake elementov sestavljene iz oznak: 2DB + Sta + oznaka materialnega modela + oznaka kinematične teorije + oznaka stopnje interpolacije. Oznaka '2DB' pove, da gre za dvo-dimenzionalne nosilce (2 dimensional beams), tipična oznaka končnega elementa pa je recimo '2DBStaRCLinKI4', ki označuje element za statično analizo armiranobetonskih konstrukcij z linearno kinematično teorijo in četrto stopnjo interpolacije neznanih količin po elementu.

7.1.6 Uporabne funkcije

Za vse elemente so razvite priročne funkcije, ki omogočajo bolj podrobne analize in več možnosti modeliranja. Detajli uporabe funkcij so prikazani v demonstracijskih datotekah na spletu. Vgrajene so funkcije za

- Dodajanje členkov:

Možno je dodati translacijske členke v globalnih smereh X in Y in momentne členke.

- Dodajanje točkovnih mas:
V statični analizi te možnosti ni, saj tam maso modeliramo s točkovno silo.
- Upoštevanje gravitacijskega pospeška:
Določimo lahko poljubno vrednost gravitacijskega pospeška.
- Obremenjevanje z linijskimi obtežbami:
Podamo lahko konstantne ali linearno spreminjajoče se linijske obtežbe po dolžini posameznih elementov. Obtežba se integrira v reducirani zanki integracije, zato je potrebno biti pozoren, da se ne uporablja elementov s konstantno interpolacijo ('11') in linearno spreminjajoče se linijske obtežbe. S podajanjem linijske obtežbe lahko modeliramo pospeške temeljnih tal.
- Analiza lastnih vrednosti:
V vsakem trenutku analize je v statični analizi možen račun lastnih vektorjev (oblik) in lastnih vrednosti in v dinamični analizi račun nihajnih oblik in nihajnih časov.

7.2 Knjižnica končnih elementov

Uporaba naprednih orodij za generacijo programske kode končnih elementov nam je omogočila, da smo naredili veliko različnih elementov. Elementi so zbrani v preglednicah 7.1 in 7.2.

7.2.1 Končni elementi za statično analizo

V preglednici 7.1 so zbrani elementi za statično analizo.

Preglednica 7.1: Knjižnica končnih elementov za statično analizo.

Table 7.1: Finite element library for static analysis.

Material	Stopnja int.	Lin. teorija	Teorija 2. reda	Točna teorija
Elastičen	Linearna	2DBStaeILinKI1	2DBStaeI2orKI1	2DBStaeIReisI1
	Kvadratična	2DBStaeIKinKI2	2DBStaeI2orKI2	2DBStaeIReisI2
	Kubična	2DBStaeILinKI3	2DBStaeI2orKI3	2DBStaeIReisI3
	4. reda	2DBStaeILinKI4	2DBStaeI2orKI4	2DBStaeIReisI4
Jeklen	Linearna	2DBStaeStLinKI1	2DBStaeSt2orKI1	2DBStaeStReisI1
	Kvadratična	2DBStaeStKinKI2	2DBStaeSt2orKI2	2DBStaeStReisI2
	Kubična	2DBStaeStLinKI3	2DBStaeSt2orKI3	2DBStaeStReisI3
	4. reda	2DBStaeStLinKI4	2DBStaeSt2orKI4	2DBStaeStReisI4
AB	Linearna	2DBStaeRCLinKI1	2DBStaeRC2orKI1	2DBStaeRCReisI1
	Kvadratična	2DBStaeRCKinKI2	2DBStaeRC2orKI2	2DBStaeRCReisI2
	Kubična	2DBStaeRCLinKI3	2DBStaeRC2orKI3	2DBStaeRCReisI3
	4. reda	2DBStaeRCLinKI4	2DBStaeRC2orKI4	2DBStaeRCReisI4

7.2.2 Končni elementi za dinamično analizo

V preglednici 7.2 so zbrani elementi za dinamično analizo.

Preglednica 7.2: Knjižnica končnih elementov za dinamično analizo.

Table 7.2: Finite element library for dynamic analysis.

Alg.	Stopnja int.	Elastičen mat.	Jeklen mat.	AB
New	Linearna	2DBDynElReisI1New	2DBDynStReisI1New	2DBDynRCReisI1New
	Kvadratična	2DBDynElReisI2New	2DBDynStReisI2New	2DBDynRCReisI2New
	Kubična	2DBDynElReisI3New	2DBDynStReisI3New	2DBDynRCReisI3New
	4. reda	2DBDynElReisI4New	2DBDynStReisI4New	2DBDynRCReisI4New
HHT	Linearna	2DBDynElReisI1HHT	2DBDynStReisI1HHT	2DBDynRCReisI1HHT
	Kvadratična	2DBDynElReisI2HHT	2DBDynStReisI2HHT	2DBDynRCReisI2HHT
	Kubična	2DBDynElReisI3HHT	2DBDynStReisI3HHT	2DBDynRCReisI3HHT
	4. reda	2DBDynElReisI4HHT	2DBDynStReisI4HHT	2DBDynRCReisI4HHT
StaSt	Linearna	2DBDynElReisI1StaSt	2DBDynStReisI1StaSt	2DBDynRCReisI1StaSt
	Kvadratična	2DBDynElReisI2StaSt	2DBDynStReisI2StaSt	2DBDynRCReisI2StaSt
	Kubična	2DBDynElReisI3StaSt	2DBDynStReisI3StaSt	2DBDynRCReisI3StaSt
	4. reda	2DBDynElReisI4StaSt	2DBDynStReisI4StaSt	2DBDynRCReisI4StaSt
STD	Linearna	2DBDynElReisI1STD	2DBDynStReisI1STD	2DBDynRCReisI1STD
	Kvadratična	2DBDynElReisI2STD	2DBDynStReisI2STD	2DBDynRCReisI2STD
	Kubična	2DBDynElReisI3STD	2DBDynStReisI3STD	2DBDynRCReisI3STD
	4. reda	2DBDynElReisI4STD	2DBDynStReisI4STD	2DBDynRCReisI4STD
IbMa	Linearna	2DBDynElReisI1IbMa	2DBDynStReisI1IbMa	2DBDynRCReisI1IbMa
	Kvadratična	2DBDynElReisI2IbMa	2DBDynStReisI2IbMa	2DBDynRCReisI2IbMa
	Kubična	2DBDynElReisI3IbMa	2DBDynStReisI3IbMa	2DBDynRCReisI3IbMa
	4. reda	2DBDynElReisI4IbMa	2DBDynStReisI4IbMa	2DBDynRCReisI4IbMa
Wavg	Linearna	2DBDynElReisI1Wavg	2DBDynStReisI1Wavg	2DBDynRCReisI1Wavg
	Kvadratična	2DBDynElReisI2Wavg	2DBDynStReisI2Wavg	2DBDynRCReisI2Wavg
	Kubična	2DBDynElReisI3Wavg	2DBDynStReisI3Wavg	2DBDynRCReisI3Wavg
	4. reda	2DBDynElReisI4Wavg	2DBDynStReisI4Wavg	2DBDynRCReisI4Wavg
Wmid	Linearna	2DBDynElReisI1Wmid	2DBDynStReisI1Wmid	2DBDynRCReisI1Wmid
	Kvadratična	2DBDynElReisI2Wmid	2DBDynStReisI2Wmid	2DBDynRCReisI2Wmid
	Kubična	2DBDynElReisI3Wmid	2DBDynStReisI3Wmid	2DBDynRCReisI3Wmid
	4. reda	2DBDynElReisI4Wmid	2DBDynStReisI4Wmid	2DBDynRCReisI4Wmid

8 ZAKLJUČKI

V disertaciji smo se ukvarjali s štirimi področji mehanike kinematično točnih ravninskih nosilcev: (i) z izpeljavo in aplikacijo končnih elementov z interpolacijo osne, strižne in upogibne deformacije kot osnovnih neznanih količin v dinamiki nosilcev; (ii) s časovno integracijskimi shemami v dinamiki končnih elementov z interpolacijo pomikov s poudarkom na integratorjih, ki ohranjajo mehansko energijo in količine gibanja. Pri tem smo razvili tudi novo časovno integracijsko shemo za geometrijsko točne ravninske nosilce; (iii) z optimizacijo v dinamiki kinematično točnih elastičnih nosilcev in (iv) z uporabo kinematično točnih nosilcev v dinamiki armiranobetonskih konstrukcij.

V sklopu numeričnih in teoretičnih raziskav dinamike nosilcev z interpolacijo deformacijskih količin smo prišli do naslednjih ugotovitev:

- Razvili in predstavili smo osnove pristopa k reševanju tako zastavljenega problema in ga preverili z računskimi primeri. V njem smo upoštevali osne, strižne in upogibne deformacije. Ugotovili smo, da tak pristop ne blokira in daje zelo natančne rezultate, vendar pa je s stališča računskega časa zaradi gnezdenja integralov nekonkurenčen in časovno nestabilen pri uporabi Newmarkove časovno integracijske sheme.
- Učinkovitost osnovne formulacije je možno numerično izboljšati s posebnim pristopom k numerični integraciji vgnezenih funkcij. Z izboljšavo se računski čas v primerjavi z osnovno formulacijo skrajša približno za faktor 10. Izboljšana formulacija ima podobno število numeričnih operacij na iteracijo Newton-Raphsonovega postopka kot standardne formulacije s pomiki in je v tem pogledu povsem konkurenčna drugim formulacijam za geometrijsko točno dinamično analizo.
- Izboljšana formulacija je zastavljena tako, da v njej ni več eksplicitne integracije po dolžini elementa pri vsakem računu integralov. V primerjavi s prvotno formulacijo, kjer je stopnjo integracije potrebno določiti s poskušanjem, je v izboljšani formulaciji stopnja integracije že vsebovana v formulaciji in ni uporabniški podatek, kar je prednost.
- Časovno stabilnost na deformacijah osnovane formulacije je moč izboljšati z izbiro ustrezne časovne integracijske sheme, ki pa bi morala biti brezpogojno stabilna. Izpeljava take sheme je še odprto vprašanje.
- Prisotnost konsistenčnih enačb v formulaciji nam zagotavlja konsistentnost količin in odpornost na blokiranje. Ker so osnovne spremenljivke deformacije, lahko deformacije in napetosti v poljubni točki nosilca računamo z enako natančnostjo. To je drugače kot pri formulacijah s pomiki, kjer je deformacije potrebno računati z ekstrapolacijo deformacij, izračunanih v Barlowih točkah (Barlow (1976)).

V sklopu raziskav časovnih integracij za končne elemente, ki temeljijo na interpolaciji kinematičnih količin, ugotavljamo:

- Energijske integratorje je moč izpeljati iz pogoja o ohranitvi energije, kar sta pokazala že Jelenić in Crisfield (2002). Njuna izpeljava velja za formulacije, ki uporabljajo kinematične enačbe v osnovni (krepki) obliki. V disertaciji smo pokazali, da lahko isto izhodišče služi za izpeljavo integratorjev, ki temeljijo na kinematičnih enačbah v šibki obliki.
- V pristopu, ki izhaja iz zahteve po ohranitvi energije, ravnotežne enačbe niso osnovne, temveč izpeljane in imajo v splošnem drugačno obliko kot klasične. Izpeljano ravnotežje imenujemo 'energijsko ravnotežje' in je klasičnemu enako le v limiti, ko gre inkrement zasukov proti nič ($\Delta\varphi \rightarrow 0$).
- Z ustrezno interpolacijo rotacijske matrike lahko dosežemo, da je energijsko ravnotežje enako klasičnemu, toda le v primeru integratorja, ki uporablja šibke kinematične enačbe.
- Novo razvita integratorja, ki temeljita na uporabi šibkih kinematičnih enačb, ohranjata vse količine gibanja (mehansko energijo, gibalno in vrtilno količino). Ohranjanje količin se da analitično dokazati, bilo je preverjeno tudi z numeričnim primerom.
- Za vse analizirane integratorje je kvaliteta ohranjanja količin gibanja, če se te ohranjajo, neodvisna od velikosti časovnega koraka in stopnje krajevne interpolacije.
- Integratorji z ohranjevalnimi lastnostmi so veliko bolj stabilni od klasičnih, nekonzervativnih, kar je posebej očitno v primeru togih enačb.
- Klasični model dušenja deformacij po Armeru in Petőczu lahko nadgradimo s pametnim algoritmom, ki vklaplja in izklaplja dušenje po potrebi. Identifikacija situacij za vklop in izklop dušenja poteka na osnovi spreminjanja predznakov sprememb deformacij in prekoračitve praga velikosti. S tem se zmanjša količina disipirane energije in, kar je prav tako pomembno, vpliv na osnovne nihajne oblike.

Pri aplikaciji optimizacijskih postopkov na dinamiko kinematično točnih nosilcev smo ugotovili:

- Vpeljava posrednih projektnih spremenljivk za opis oblike preko Bézierjevih teles, ki je tako uspešna pri optimizaciji statičnih problemov, se je obnesla tudi v dinamiki.
- Potrdilo se je znano dejstvo iz teorije optimizacije, da lahko pogoje, ki so podani na zveznem območju, skoraj enakovredno nadomestimo z manjšim številom diskretnih pogojev.
- Optimizacijski postopek v zahtevnejših primerih ni bil sposoben skonvergirati k sprejemljivi rešitvi že v prvem poskusu. Optimizacijo pa smo lahko vedno uspešno izpeljali do konca, če smo problem prevedli na več preprostejših faz. Izkušnje in pripravljenost poskušati ostajata del uspešne optimizacije.
- Predstavili smo algoritem za občutljivostno analizo v primeru uporabe šibkega časovnega integratorja s povprečno rotacijsko matriko. Reševanje optimizacijskih problemov je potrdilo velik potencial take formulacije pri optimiranju dinamičnih problemov.

Ob izpeljavi in aplikaciji numeričnega postopka za dinamično analizo kinematično točnih ravninskih armiranobetonskih konstrukcij smo ugotovili:

- Formulacija predstavlja novost na tem področju, saj so formulacije s točnimi kinematičnimi zvezami za analizo armiranobetonskih konstrukcij redke.
- V analizah smo uporabili več različnih konzervativnih shem, toda pokazalo se je, da so za obravnavane primere enakovredne. S tega stališča ugotavljamo, da je izbira algoritma za račun obravnavanih AB konstrukcij drugotnega pomena. Sklep ne velja za splošne AB konstrukcije.

8.1 Prispevki k znanosti

Pomembnejše izvirne prispevke k tehničnim znanostim predstavljajo naslednji novi numerični postopki v kinematično točni dinamični analizi elastičnih in armiranobetonskih konstrukcij, izpeljani v disertaciji:

- Izpeljali in implementirali smo novo formulacijo za numerično reševanje enačb dinamike kinematično točnih ravninskih nosilcev, ki za osnovne neznane količine uporablja osno, strižno in upogibno deformacijo. Ključne lastnosti formulacije so odpornost na blokiranje, natančnost, konsistentnost napetostnih rezultatov v prerezu, diferencialno–algebrajski sistem vodilnih enačb in pojav gnezdenih integralov.
- Izpeljali smo numerični postopek s katerim se izognemo zaporednemu računu notranjih integralov v primeru vgnazdenih integralov. Ideja postopka temelji na interpolaciji argumentov gnezdenih integralov, s čimer se občutno zmanjša število računskih operacij pri vrednotenju integralov. Postopek smo uporabili v formulaciji z interpolacijo deformacij in dosegli občutno skrajšanje računskih časov.
- Razvili smo nov časovni integrator, ki za kinematično točne, linearno elastične ravninske nosilce, ki točno ohranja mehansko energijo in količine gibanja in to neodvisno od velikosti časovnega koraka in krajevne interpolacije. Posebnost integratorja je uporaba kinematičnih enačb v šibki obliki. Za integrator smo ohranjanje količin dokazali analitično in preverili na numeričnih primerih.
- Integrator smo dopolnili tudi z umetnim dušenjem za stabilizacijo rešitve, ki s selektivnim vklapljanjem in izklapljanjem numeričnega dušenja dobro uduši visoke oblike nihanja, medtem ko skoraj v celoti ohranja vpliv osnovnih nihajnih oblik.
- Izpeljali in implementirali smo tudi občutljivostno analizo v dinamiki kinematično točnih elastičnih konstrukcij s šibkim časovnim integratorjem s povprečno rotacijsko matriko. Z razvitim programskim orodjem smo nato optimirali zanimive probleme iz dinamike konstrukcij in strojnih manipulatorjev.
- Izpeljane in implementirane formulacije smo nato priredili tudi za račun kinematično točnih armiranobetonskih konstrukcij.

VIRI

Ademar, B.N., White, D.W. 2005. Displacement, flexibility, and mixed beam-column finite element formulations for distributed plasticity analysis. *J. Struct. Eng.* 131, 12: 1811–1819.

Armero, F., Petőcz, E. 1999. A new dissipative time-stepping algorithm for frictional contact problems: formulation and analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 179: 151–178.

Armero, F., Romero, I. 2001a. On the formulation of high-frequency dissipative time-stepping algorithms for nonlinear dynamics. Part I: Low-order methods for two model problems and nonlinear elastodynamics. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 190: 2603–2649.

Armero, F., Romero, I. 2001b. On the formulation of high-frequency dissipative time-stepping algorithms for nonlinear dynamics. Part II: Second-order methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 190, 6783–6824.

Armero, F., Romero, I. 2003. Energy-dissipative momentum-conserving time-stepping algorithms for the dynamics of nonlinear Cosserat rods. *Comput. Mech.* 31: 3–26.

Arora, J.S., Dutta, A. 1997. Explicit and implicit methods for design sensitivity analysis of a nonlinear structures under dynamic loads. *Appl. Mech. Rev. Trans. ASME* 50: S11–S19.

Barlow, J. 1976. Optimal stress locations in finite element models. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 10: 243–251.

Bathe, K.J. 1996. *Finite element procedures*. New Jersey. Prentice-Hall, Inc: 1037 str.

Bauchau, O.A., Damilano, G., Theron, N.J. 1995. Numerical integration of non-linear elastic multi-body systems. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 38: 2737–2751.

Bauchau, O.A., Theron, N.J. 1996a. Energy decaying scheme for nonlinear elastic multi-body systems. *Comp. Struct.* 59: 317–331.

Bauchau, O.A., Theron, N.J. 1996b. Energy decaying scheme for nonlinear beam model. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 134: 37–56.

Bauchau, O.A., Bottasso, C.L., Trainelli, L. 2003. Robust integration schemes for flexible multibody systems. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 192: 395–420.

Belytschko, T., Schoeberle, D.F. 1975. On the unconditional stability of an implicit algorithm for nonlinear structural dynamics. *J. Appl. Mech.* 42: 865–869.

Betsch, P., Steinmann, P. 2000. Inherently energy conserving time finite elements for classical mechanics. *J. Comput. Phys.* 160: 88–116.

- Betsch, P., Steinmann, P. 2003. Constrained dynamics of geometrically exact beams. *Comput. Mech.* 31: 49–59.
- Bottasso, C.L., Borri, M. 1998. Integrating finite rotations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 164: 307–331.
- Bottasso, C.L., Borri, M., Trainelli, L. 2001. Integration of elastic multibody systems by invariant conserving/dissipating algorithms. Part II: Numerical schemes and applications. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 190: 3701–3733.
- Bottasso, C.L., Bauchau, O.A., Choi, J.Y. 2002. An energy decaying scheme for nonlinear dynamics of shells. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 191: 3099–3121.
- Bratina, S. 2003. Odziv armiranobetonskih linijskih konstrukcij na požarno obtežbo. Doktorska disertacija. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo: 159 str.
- Bratina, S., Saje, M., Planinc, I. 2004. On materially and geometrically non-linear analysis of reinforced concrete planar frames. *Int. J. Solids Struct.* 41: 7181–7207.
- Bui, Q.V. 2003. Energy dissipative time finite elements for classical mechanics. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 192: 2925–2947.
- Cardoso, J.B., Arora, J.S. 1992. Design sensitivity analysis of nonlinear dynamic response of structural and mechanical systems. *Struct. Optim.* 4: 37–46.
- Cho, S., Choi, K.K. 2000a. Design sensitivity analysis and optimization of non-linear transient dynamics. Part I – sizing design. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 48: 351–373.
- Cho, S., Choi, K.K. 2000b. Design sensitivity analysis and optimization of non-linear transient dynamics. Part II – configuration design. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 48: 375–399.
- Chung, J., Hulbert, G.M. 1993. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized- α method. *ASME J. Appl. Mech.* 60: 371–375.
- Como, M., De Stefano, M., Ramasco, R. 2003. Effects of column axial force – bending moment interaction on inelastic seismic response of steel frames. *Earth. Eng. Struct. Dyn.* 32: 1833–1852.
- Corte, G.D., Brecchia, E., Mazzolani, F.M. 2006. Seismic upgrading of RC buildings by FRP: Full-scale tests of a real structure. *J. Mat. Civil Engrg. ASCE* 18, 5: 659–669.
- Crisfield, M.A., Shi, J. 1994. A co-rotational element/time-integration strategy for non-linear dynamics. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 37: 1897–1913.
- Crisfield, M.A., Shi, J. 1996. An energy conserving co-rotational procedure for non-linear dynamics with finite elements. *Nonlinear Dynamics* 9: 37–52.
- Crisfield, M.A., Galvanetto, U., Jelenić, G. 1997. Dynamics of 3-D co-rotational beams. *Comput. Mech.* 20: 507–519.
- Čas, B. 2004. Nelinearna analiza kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med sloji. Doktorska disertacija. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo: 136 str.
- Della Corte, G., Brecchia, E., Mazzolani, F.M. 2005. Seismic upgrading of RC buildings by FRP: full-scale tests of a real structure. *J. Mater. Civ. Eng.* 18, 5: 659–669.
- Dombrowski, S. von. 2002. Analysis of large flexible body deformation in multibody systems using absolute coordinates. *Multibody System Dynamics* 8: 409–432.

- Dufva, K.E., Sopanen, J.T., Mikkola, A.M. 2005. A two-dimensional shear deformable beam element based on the absolute nodal coordinate formulation. *J. Sound Vibration* 280: 719–738.
- Erlicher, S., Bonaventura, L., Bursi, O.S. 2002. The analysis of the generalized- α method for the non-linear dynamic problems. *Comput. Mech.* 28: 83–104.
- Ehrlich, D., Armero, F. 2005. Finite element methods for the analysis of softening plastic hinges in beams and frames. *Comput. Mech.* 35: 237–264.
- Fajfar, P. 1984. *Dinamika gradbenih konstrukcij*. Ljubljana, Univerza Edvarda Kardelja, FAGG: 550 str.
- Filippou, F.C., Popov, E.P., Bertero, V.V. 1983. Effects of bond deterioration on hysteretic behavior of reinforced concrete joints. EERC Report 83-19. Berkeley, Earthquake engineering research center Berkeley.
- Fung, T.C. 2003. Numerical dissipation in time-step integration algorithms for structural dynamic analysis. *Prog. Struct. Engrg. Mater.* 5: 167–180.
- Gams, M., Saje, M., Srpčič, S., Planinc, I. 2007a. Finite element dynamic analysis of geometrically exact beams. *Comput. Struct.* 85, 17/18: 1409–1419.
- Gams, M., Planinc, I., Saje, M. 2007b. The strain-based finite elements in multibody dynamics. *J. Sound Vibration* 305, 1–2: 194–210.
- Gams, M., Planinc, I., Saje, M. 2007c. Energy conserving time integration scheme for geometrically exact beams. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg* 196, 17–20: 2117–2129.
- Gams, M., Planinc, I., Saje, M. 2007d. A heuristic viscosity-type dissipation for high frequency oscillation damping in time integration algorithms. *Comput. Mech.* 41, 1: 17–29.
- Géradin, M., Cardona, A. 2001. *Flexible Multibody Dynamics. A Finite Element Approach*. England, John Wiley and Sons Ltd: 340 str.
- Goicolea, J.M., Orden, J.C.G. 2002. Quadratic and higher-order constraints in energy-conserving formulations of flexible multibody systems. *Multibody Sys. Dyn.* 7: 3–29.
- Graham, E. 2001. A survey of current time-stepping algorithms used in non-linear, dynamic structural analysis. Internal report. London, Department of Aeronautics, Imperial College of Science, Technology & Medicine.
- Harl, B., Kegl, M. 2005. Optimization of space trusses. *J. Mech. Engrg.* 51, 9: 570–588.
- Hilber, H.M., Hughes, T.J.R., Taylor, R.L. 1977. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.* 5: 282–292.
- Hjelmstad, K.D., Taciroglu, E. 2003. Mixed variational methods for finite element analysis of geometrically non-linear, inelastic Bernoulli-Euler beams. *Commun. Num. Methods Engrg.* 19: 809–832.
- Hozjan, T., Turk, G., Srpčič, S. 2007. Fire analysis of steel frames with the use of artificial neural networks. *J. Constr. Steel Res.* 63, 10: 1396–1403.
- Hsiao, K.M., Jang, J.Y. 1991. Dynamic analysis of planar flexible mechanisms by co-rotational formulation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg* 87: 1–14.
- Hughes, T.J.R. 1992. *The Finite Element Method*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- Ibrahimbegović, A., Mamouri, S. 1999. Nonlinear dynamics of flexible beams in planar motion: formulation and time-stepping scheme for stiff problems. *Comput. Struct.* 70: 1–22.

Ibrahimbegović, A., Mamouri, S., Taylor, R.L., Chen, A.J. 2000. Finite element method in dynamics of flexible multibody systems: Modeling of holonomic constraints and energy conserving integration schemes. *Multibody Sys. Dyn.* 4: 195–223.

Ibrahimbegović, A., Mamouri, S. 2002. Energy conserving/decaying implicit time-stepping scheme for three-dimensional beams undergoing finite rotations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 191: 4241–4258.

Iura, M., Atluri, S.N. 1995. Dynamic analysis of planar flexible beams with finite rotations by using inertial and rotating frames. *Comput. Struct.* 55: 453–462.

Jelenić, G. 1990. Dinamika ravninskih hiperelastičnih nosilcev pri neomejenih deformacijah. Magistrska naloga. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za arhitekturo, gradbeništvo in geodezijo.

Jelenić, G., Saje, M. 1994. Finite deformations of linear elastic space beams. *Z. angew. Math. Mech.* 74, 4:298–300.

Jelenić, G., Saje, M. 1995. A kinematically exact space finite strain beam model – finite element formulation by generalized virtual work principle. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 120:131–161.

Jelenić, G., Crisfield, M.A. 2002. Stability and convergence characteristics of conserving algorithms for dynamics of 3D rods. Internal report, Department of Aeronautics, Imperial College of Science, Technology & Medicine, London, UK.

Jelenić, G., Crisfield, M.A. 2001. Dynamic analysis of 3D beams with joints in presence of large rotations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 190: 4195–4230.

Kane, T.R., Likins, P.W., Levinson, D.A. 1983. *Spacecraft Dynamics*. McGraw-Hill, New York.

Kang, B.S., Park, G.J., Arora, J.S. 2006. A review of optimization of structures subjected to transient loads. *Struct. Multidisc. Optim.* 31, 2: 81–95.

Kante, P. 2005. Potresna ranljivost armiranobetonskih sten, Doktorska disertacija, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.

Karsan, I.D., Jirsa, J.O. 1969. Behavior of concrete under compressive loading. *J. Struct. Division ASCE* 95, ST12: 2543–2563.

Kegl, M. 2000. Shape optimal design of structures: an efficient shape representation concept. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 49: 1571–1588.

Kegl, M., Butinar, B., Kegl, B. 2002. An efficient gradient-based optimization algorithm for mechanical systems. *Comm. Numer. Meth. Engrg.* 18: 363–371.

Kegl, M. 2005. Parameterization based shape optimization: theory and practical implementation aspects. *Eng. Comput.* 22, 5–6: 646–663.

Kegl, M., Brank, B. 2006. Shape optimization of truss-stiffened shell structures with variable thickness. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 195: 2611–2634.

Kegl, M. 2007. Program 'iGO'. <http://fs-server.uni-mb.si/si/inst/im/loms/KeglM-si.html>.

Korelc, J. 1997. Automatic generation of finite-element code by simultaneous optimization of expressions. *Theor. Comput. Sci.* 187: 231–248.

Korelc, J. 2007. AceGen, AceFEM and AceShare. <http://www.fgg.uni-lj.si/Symech/Flyer.pdf>

- Krauberger, N., Saje, M., Planinc, I., Bratina, S. 2007. Exact buckling load of a restrained RC column. *Struct. Eng. Mech.* 27, 3: 293–310.
- Kuhl, D., Ramm, E. 1996. Constraint energy momentum algorithm and its application to non-linear dynamics of shells. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 136: 293–315.
- Kuhl, D., Crisfield, M.A. 1999. Energy-conserving and decaying algorithms in non-linear structural dynamics. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 45: 569–599.
- Kuhl, D., Ramm, E. 1999. Generalized energy-momentum method for non-linear adaptive shell dynamics. *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 178: 343–366.
- Kulkarni, M., Noor, A.K. 1995. Sensitivity analysis of the nonlinear dynamic viscoplastic response of 2-D structures with respect to material parameters. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 38: 183–198.
- Mander, J.B., Priestley, M.J.N., Park, R. 1988. Theoretical stress-strain model for confined concrete. *J. Struct. Eng. ASCE* 114, 8: 1804–1825.
- Markovič, M. 2006. Mejna nosilnost AB prečnih prerezov pri dvojno ekscentrični osni obremenitvi. *Diplomska naloga*. Ljubljana. Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.
- Menegotto, M., Pinto, P.E. 1973. Method of analysis for cyclically loaded reinforced concrete plane frames including changes in geometry and non-elastic behavior of elements under combined normal force and bending, *Proceedings, IABSE Symposium on resistance and ultimate deformability of structures acted on by well defined repeated loads*: 15–22.
- Nuenhofer, A., Filippou, F.C. 1998. Geometrically nonlinear flexibility-based frame finite element. *J. Struct. Eng.* 124, 6: 704–711.
- Newmark, N.M. 1959. A method of computation for structural dynamics. *ASCE J. Engrg. Mech. Division* 85: 67–94.
- Omar, M.A., Shabana, A.A. 2001. A two-dimensional shear deformable beam for large rotation and deformation problems. *J. Sound Vibration* 243, 3: 565–576.
- OpenSees. 2006. Open System for Earthquake Engineering Simulation. <http://opensees.berkeley.edu/index.php>.
- Paz, M., Leigh, W. 2004. *Structural Dynamics*. New York, Springer, 5th ed.
- Pedersen, C.B.W. 2004. Crashworthiness design of transient frame structures using topology optimization. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 193, 6–8: 653–678.
- Pedersen, N.L., Nielsen, A.K., 2003. Optimization of practical trusses with constraints on eigenfrequencies, displacements, stresses and buckling. *Struct. Multidisc. Optim.* 25, 5–6: 436–445.
- Petrangeli, M., Ciampi, V. 1997. Equilibrium based iterative solutions for the non-linear beam problem. *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 40: 423–437.
- Planinc, I. 1998. Račun kritičnih točk konstrukcij s kvadratično konvergentnimi metodami. *Doktorska disertacija*, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.
- Planinc, I., Saje, M., Čas, B. 2001. On local stability condition in planar beam finite element. *Struct. Eng. Mech.* 12: 507–526.
- Popovics, S. 1973. A numerical approach to the complete stress strain curve for concrete. *Cement and concrete research* 3, 5: 583–599.

Prohitech 2004. Project n. INCO-CT-2004-509119. Earthquake protection of historical buildings by reversible mixed technologies. Project acronym: Prohitech. WP8: NUMERICAL ANALYSES – Preliminary study.

Reissner, E. 1972. On one-dimensional finite-strain beam theory: the plane problem. *J. Appl. Math. Physics (ZAMP)* 23: 795–804.

Romero, I., Armero, F. 2002. Numerical integration of the stiff dynamics of geometrically exact shells: an energy-dissipative momentum-conserving scheme. *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 54: 1043–1086.

Rong, T.-Y., Lu, A.-Q. 2003. Generalized mixed variational principles and solutions of ill-conditioned problems in computational mechanics. Part II: Shear locking. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.* 192: 4981–5000.

Rozman, M., Fajfar, P. 2006. Earthquake protection of historical buildings by reversible mixed technologies. Project report. WP9: numerical analyses. Preliminary study.

Saje, M. 1990. A variational principle for finite planar deformation of straight slender elastic beams. *Int. J. Solids Struct.* 26, 8: 887–900.

Saje, M. 1991. Finite-element formulation of finite planar deformation of curved elastic beams. *Comput. Struct.* 39, 3–4: 327–337.

Saje, M., Jelenić, G. 1994. Finite element formulation of hyperelastic plane frames subjected to nonconservative loads. *Comput. Struct.* 50, 2: 177–189.

Saje, M., Planinc, I., Turk, G., Vratnar, B. 1997. A kinematically exact finite element formulation of planar elastic-plastic beam. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.* 144: 125–151.

Sansour, C., Sansour, J., Wriggers, P. 1996. A finite element approach to the chaotic motion of geometrically exact rods undergoing in-plane deformations. *Nonlinear Dyn.* 11: 189–212.

Sansour, C., Wriggers, P., Sansour, J. 1997. Nonlinear dynamics of shells: Theory, finite element formulation and integration schemes. *Nonlinear Dyn.* 13: 279–305.

Sansour, C., Wagner, W., Wriggers, P., Sansour, J. 2002. An energy-momentum integration scheme and enhanced strain finite elements for the non-linear dynamics of shells. *Int. J. Non-Linear Mech.* 37: 951–966.

Sansour, C., Wriggers, P., Sansour, J. 2003. A finite element post-processed Galerkin method for dimensional reduction in the non-linear dynamics of solids. Application to shells. *Comput. Mech.* 32: 104–114.

Sansour, C., Wriggers, P., Sansour, J. 2004. On the design of energy-momentum integration schemes for arbitrary continuum formulations. Applications to classical and chaotic motion of shells. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 60: 2419–2440.

Schnabl, S. 2007. Mehanska in požarna analiza kompozitnih nosilcev. Doktorska disertacija. Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.

Shabana, A.A. 1997. Definition of the slopes and the finite element absolute nodal coordinate formulation. *Multibody System Dynamics* 1, 3: 339–348.

Shabana, A.A. 1998. Dynamics of multibody systems. Second ed. Cambridge. Cambridge University Press: 384 str.

- Simo, J.C., Vu-Quoc, L. 1986. On the dynamics of flexible beams under large overall motions – the plane case: Part I and Part II. *ASME J. Appl. Mech.* 53: 849–863.
- Simo, J.C., Tarnow, N., Wong, K.K. 1992. Exact energy-momentum conserving algorithms and symplectic schemes for non-linear dynamics. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 100: 63–116.
- Simo, J.C., Tarnow, N., Doblare, M. 1995. Non-linear dynamics of three-dimensional rods: exact energy and momentum conserving algorithms. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 38: 1431–1473.
- Sivaselvan, M.V., Reinhorn, A.M. 2002. Collapse analysis: Large inelastic deformations analysis of planar frames. *J. Struct. Eng.* 128, 12: 1575–1583.
- Sousa, L.G., Cardoso, J.B., Valido, A.J. 1997. Optimal cross-section and configuration design of elastic-plastic structures subject to dynamic cyclic loading. *Struct. Optim.* 13: 112–118.
- Spacone, E., Filippou, F.C., Taucer, F.F. 1996. Fibre beam-column model for non-linear analysis of R/C frames: Part I. Formulation, Part II. Applications. *Earth. Eng. Struct. Dyn.* 25: 711–742.
- Stander, N., Stein, E. 1996. An energy-conserving planar finite beam element for dynamics of flexible mechanisms. *Engrg. Comput.* 13, 6: 60–85.
- Stocki, R., Kolandek, K., Jendo, S., Kleiber, M. 2001. Study on discrete optimization techniques in reliability-based optimization of truss structures. *Comput. Struct.* 79, 22–25: 2235–2247.
- Stupkiewicz, S. 2001. Approximate response sensitivities for nonlinear problems in explicit dynamic formulation. *Struct. Multidisc. Optim.* 21: 283–291.
- Taucer, F.F., Spacone, E., Filippou, F.C. 1991. A fiber beam-column element for seismic response analysis of reinforced concrete structures. EERC Report 91-17, Earthquake engineering research center Berkeley.
- Toniolo, G. (coordinator) 2007. Final report of the EU Research Project: Seismic Behaviour of Precast Concrete Structures with respect to EC8 (Contract No. G6RD-CT-2002-00857).
- Vratanar, B. 1998. Geometrijsko točna dinamika ravninskih nosilcev. Doktorska disertacija. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.
- Vratanar, B., Saje, M. 1999. A consistent equilibrium in a cross-section of an elastic-plastic beam. *Int. J. Solids Struct.* 36, 2: 311–337.
- Wang, D., Zhang, W.H., Jiang, J.S. 2002a. Combined shape and sizing optimization of truss structures. *Comput. Mech.* 29, 4–5: 307–312.
- Wang, D., Zhang, W.H., Jiang, J.S. 2002b. Truss shape optimization with multiple displacement constraints. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 191, 33: 3597–3612.
- Wang, D., Zhang, W.H., Jiang, J.S. 2004. Truss optimization of shape and sizing with frequency constraints. *AIAA J.* 42, 3: 622–630.
- Wood, W.L., Bossak, M., Zienkiewicz, O.C. 1980. An alpha modification of the Newmark's method. *Int. J. Numer. Methods Engrg* 15: 1562–1566.
- Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., Zhu, J.Z. 2005. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*, Sixth edition, Elsevier Butterworth-Heinemann.
- Zupan, D. 2001. Teorija prostorskih nosilcev, osnovana na ukrivljenostih. Magistrska naloga. Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.

Zupan, D. 2003. Rotacijsko invariantne deformacijske količine v geometrijsko točni teoriji prostorskih nosilcev. Doktorska disertacija. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.

Zupan, D., Saje, M. 2003. A new finite element formulation of three-dimensional beam theory based on interpolation of curvature. *Comput. Model. Eng. Sci.* 4, 2: 301–318.

PRILOGE

PRILOGA A

Gams, M., Saje, M., Srpčič, S., Planinc, I. 2007a. Finite element dynamic analysis of geometrically exact beams. *Computers and structures* 85, 17/18: 1409–1419.

PRILOGA B

Gams, M., Planinc, I., Saje, M. 2007b. The strain-based finite elements in multibody dynamics. *Journal of sound and vibration* 305, 1-2: 194–210.

PRILOGA C

Gams, M., Planinc, I., Saje, M. 2007c. Energy conserving time integration scheme for geometrically exact beams. *Computer methods in applied mechanics and engineering* 196, 17–20: 2117–2129.

PRILOGA D

Gams, M., Planinc, I., Saje, M. 2007d. A heuristic viscosity-type dissipation for high frequency oscillation damping in time integration algorithms. *Computational mechanics* 41, 1: 17–29.

PRILOGA E

Gams, M., Saje, M., Planinc, I., Kegl, M. 2007. Optimization of geometrically exact planar beams in dynamics. Neobjavljeno.