

Univerza
v Ljubljani
Fakulteta
*za gradbeništvo
in geodezijo*



NANA KRAUBERGER

**VPLIV POŽARA NA OBNAŠANJE
OJAČANIH BETONSKIH
LINIJSKIH KONSTRUKCIJ**

DOKTORSKA DISERTACIJA

Ljubljana, 10. junij 2008

BIBLIOGRAFSKO-DOKUMENTACIJSKA STRAN IN IZVLEČEK

UDK: 614.84:624.012.46(043.3)
Avtor: Nana Krauberger
Mentor: izr. prof. dr. Igor Planinc
Somentor: doc. dr. Sebastjan Bratina
Naslov: Vpliv požara na obnašanje ojačanih betonskih linijskih konstrukcij
Obseg in oprema: 109 str., 11 pregl., 62 sl., 347 en.
Ključne besede: prednapeti betonski nosilci, zamik, stik beton-jeklo za prednapenjanje, Reissnerjev nosilec, požarna odpornost, lezenje, diferenčna metoda, metoda končnih elementov

Izvleček

V disertaciji je predstavljen matematični model in računski postopek za geometrijsko in materialno nelinearno analizo predhodno napetih betonskih linijskih konstrukcij ob sočasnem delovanju mehanske in požarne obtežbe. Pri izpeljavi modela so upoštevani zamiki na stiku med betonom in jeklom za prednapenjanje, luščenje betona pa v modelu ni upoštevano. Zaradi zahtevnosti modela je vsebina disertacije razdeljena na dva dela. V prvem delu so predstavljene osnovne enačbe modela za analizo prednapetih betonskih linijskih konstrukcij pri sobni temperaturi. Obnašanje betonskega dela prednapete linijske konstrukcije je opisano z Reissnerjevim modelom ravninskega nosilca, obnašanje jekla za prednapenjanje pa z modelom vrvi. Osnovne enačbe modela so rešene s pomočjo novih deformacijskih končnih elementov, ki so izpeljani s pomočjo modificiranega izreka o virtualnem delu. Ustreznost in natančnost predstavljenega matematičnega modela in računskega postopka za analizo prednapetih betonskih linijskih konstrukcij pri sobni temperaturi je ocenjena s primerjavo med numeričnimi in eksperimentalnimi rezultati. Primerjava je pokazala, da togost stika med betonom in jeklom za prednapenjanje bistveno vpliva na potek kinematičnih in statičnih količin v prednapetih betonskih linijskih konstrukcijah. V drugem delu naloge, ki je tudi osrednja tema disertacije, je matematični model in računski postopek za analizo prednapetih betonskih linijskih konstrukcij pri sobni temperaturi razširjen na razmere, ki vladajo med požarom. Predstavljeni model je razdeljen na dve matematično nepovezani fazi. V prvi fazi je določena časovna in krajevna razporeditev temperature in vlage v prečnem prerezu prednapete betonske linijske konstrukcije. Za opis povezanega prenosa toplote in vlage v kapilarno poroznih materialih med požarom je uporabljen Luikov matematični model. Določata ga dve povezani nelinearni parcialni diferencialni enačbi s temperaturno in vlažnostno odvisnimi materialnimi parametri. Enačbi sta rešeni z diferenčno metodo. V drugi fazi analize je s pomočjo dobljenih rezultatov prve faze določen časovni odziv prednapete linijske konstrukcije med požarom ob sočasnem delovanju mehanske in temperaturne obtežbe. Materialni zakoni betona, jekla za armiranje in jekla za prednapenjanje so nelinearni, pripadajoči materialni parametri pa so odvisni od temperature. Prav tako je nelinearna in odvisna od temperature konstitucijska zveza med zamiki in strižnimi napetostmi na stiku med betonom in jeklom za prednapenjanje. Pri določitvi napetostnega in deformacijskega stanja prednapetih linijskih konstrukcij med požarom so poleg mehanskih in temperaturnih deformacij upoštevane tudi t.i. prehodne deformacije betona in lezenje betona ter viskozno lezenje jekla za armiranje in prednapenjanje. Ustreznost in natančnost predstavljenega matematičnega modela in računskega postopka za analizo prednapetih betonskih linijskih konstrukcij med požarom je ocenjena s primerjavo med numeričnimi in eksperimentalnimi rezultati. Primerjava in podrobna parametrična študija je pokazala, da je časovno in krajevno razporeditev temperatur in vlage v prednapetih linijskih konstrukcijah potrebno določiti z enačbami povezanega prenosa toplote in vlage, ter da imajo zamiki na stiku med betonom in jeklom za prednapenjanje pomemben vpliv na napetostno in deformacijsko stanje ter požarno odpornost prednapetih betonskih linijskih konstrukcij in jih v analizi ne smemo zanemariti.

BIBLIOGRAPHIC-DOCUMENTALISTIC INFORMATION

UDC: 614.84:624.012.46(043.3)
Author: Nana Krauberger
Supervisor: Assoc. Prof. dr. Igor Planinc
Co-supervisor: Assist. Prof. dr. Sebastjan Bratina
Title: Analysis of prestressed concrete structures exposed to fire
Notes: 109 p., 11 tab., 62 fig., 347 eq.
Key words: prestressed concrete beams, slip, contact concrete-prestressing steel, Reissner's beam theory, fire resistance, finite difference method, creep, finite element method

Summary

The thesis presents the mathematical model and numerical procedure for geometrically and materially non-linear static analysis and fire resistance of prestressed concrete structures. The mathematical model is limited to pretensioned prestressed concrete structure. In the derivation of mathematical model the slip effect between concrete part of the structure and prestressing steel is considered, while the concrete spalling is not included into the mathematical model. Because the problem was very complex we decided to divide the thesis into two parts. The first part presents the static analysis and the system of fundamental equations of prestressed concrete structures considering slip effect between concrete part of structure and prestressing steel. Reissner's planar beam theory is used to model the concrete part of the structure, while the prestressing steel is modelled as a rope model. The system of the fundamental equations has to be solved numerically. Therefore, a modified principle of virtual work is used to derive the strain based family of finite elements for a non-linear analysis of prestressed concrete structures. The applicability and the accuracy of the proposed mathematical model and numerical procedure of prestressed concrete structures subjected to static load are illustrated and verified by numerical examples available in literature. It was found out that the slip effect between concrete part of the structure and prestressing steel has a significant influence on kinematic and static quantities in prestressed concrete structures. In the second part, which is the main part of the thesis the mathematical model and numerical procedure is expanded to the analysis of prestressed concrete structure exposed to fire. Because the problem is very complex, the problem was divided into two phases. In the first phase the temperature and moisture content in concrete section are analysed. The Luikov mathematical model with two coupled non-linear partial differential equations is used to describe the simultaneous heat and moisture content. Material parameters are dependent on temperature and moisture content. Generally, the exact solution of this problem is not known, therefore the simultaneous heat and moisture content in porous material has to be solved numerically. In our case the finite difference method is used. The temperature field of the structure represents the temperature load in the second phase of the analysis, where the mechanical response of prestressed concrete structures simultaneously exposed to static load and fire is presented. Concrete, reinforcing and prestressing steel all depend on temperature. Also, the slip-shear stress relationship between concrete part of the structure and prestressing steel depend on temperature. The geometric strain increment is assumed to be the sum of increments of elastic, plastic, temperature and creep strain in concrete, reinforcing steel and prestressing steel and the increment of transient strain in concrete. The applicability and the accuracy of prestressed concrete structures subjected to static load and fire is illustrated and verified by numerical examples available in literature. It was found out that simultaneous heat and moisture content has an important influence on the temperature and moisture content analysis in concrete. It was also found out that the slip effect between concrete part of the structure and prestressing steel significantly affects on the stress and strain state of prestressed concrete structures, when taken into account.

ZAHVALE

Najprej bi se iz srca zahvalila mentorju izr. prof. dr. Igorju Planincu in somentorju doc. dr. Sebastjanu Bratini. Hvala vama za strokovno vodenje, nasvete in nesebično pomoč, ki sem jih bila deležna pri nastajanju tega dela.

Iskrena hvala vsem sodelavcem na Katedri za mehaniko. V tako naklonjenem okolju in prijetnem delovnem vzdušju zahtevne poti postanejo enostavnejše.

Za razne nasvete in izmenjavo mnenj bi se zahvalila tudi sodelavcem v pisarni: dr. Matiji Gamsu, Tomažu Hozjanu in Mojci Markovič.

Iskrena hvala Ministrstvu za visoko šolstvo, znanost in tehnologijo Republike Slovenije ter Ministrstvu za gospodarstvo Republike Slovenije za dodeljeno štipendijo.

Na tem mestu bi se iskreno zahvalila Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo v Ljubljani ter gradbenemu podjetju Vegrad d.d., ki sta mi v okviru programa mladih raziskovalcev ponudila ustrezno delovno mesto za podiplomski študij.

Iskrena hvala prijateljem, ki so mi stali ob strani.

Na koncu, a ne na zadnje, bi se iskreno zahvalila tudi svojim najbližjim: Domnu, staršema ter sestri z družino. Hvala vam za podporo, spodbudo in razumevanje, tebi Domen pa hvala tudi za potrpežljivost.

KAZALO VSEBINE

1	UVOD	1
2	STATIČNA ANALIZA PREDNAPETIH BETONSKIH LINIJSKIH KONSTRUKCIJ	5
2.1	Osnovne enačbe prednapetih betonskih linijskih nosilcev	5
2.1.1	Kinematične enačbe	5
2.1.2	Ravnotežne enačbe	8
2.1.3	Konstitucijske enačbe	10
2.1.4	Vezne enačbe	12
2.1.5	Konstitucijski zakon stika	15
2.1.6	Posplošene ravnotežne enačbe	17
2.2	Diskretizacija posplošenih ravnotežnih enačb prednapetega betonskega linijskega nosilca	19
2.2.1	Izrek o virtualnem delu	19
2.2.2	Modificiran izrek o virtualnem delu	20
2.2.3	Galerkinova (standardna) metoda končnih elementov	27
2.3	Računski primeri	30
2.3.1	Prednapeti prostoležeči nosilec	30
2.3.1.1	Analiza izbranega geometrijskega modela	31
2.3.1.2	Primerjava eksperimentalnih in numeričnih rezultatov	33
2.3.1.3	Analiza konvergence deformacijskih končnih elementov	34
2.3.1.4	Vpliv togosti stika na obnašanje prednapetega nosilca	35
2.3.2	Prednapeta betonska votla plošča	37
2.3.2.1	Primerjava med numeričnimi in eksperimentalnimi rezultati	38
2.3.2.2	Vpliv nivoja zunanje obtežbe na obnašanje prednapete votle plošče	38
2.3.2.3	Vpliv togosti stika na obnašanje prednapete votle plošče	40

3	VPLIV POŽARA NA OBNAŠANJE PREDNAPETIH BETONSKIH LINIJSKIH KONSTRUKCIJ	47
3.1	Temperaturno-vlažnostna analiza prednapetih betonskih linijskih konstrukcij	47
3.1.1	Osnovne enačbe prevajanja toplote in vlage	49
3.1.2	Diferenčna metoda	52
3.2	Določitev napetostnega in deformacijskega stanja v prednapetem betonskem nosilcu med požarom	55
3.2.1	Adicijski razcep geometrijske deformacije	55
3.2.2	Posplošene ravnotežne enačbe prednapetega betonskega nosilca med požarom	55
3.2.3	Računski postopek	57
3.3	Mehanske in toplotne lastnosti betona, jekla za armiranje in prednapenjanje ter stika pri visokih temperaturah	59
3.3.1	Beton	59
3.3.1.1	Tlačna trdnost betona	59
3.3.1.2	Elastični modul betona	61
3.3.1.3	Koeficient toplotnega raztezanja betona	61
3.3.1.4	Specifična toplotna kapaciteta in specifična vlažnost betona	63
3.3.1.5	Gostota betona	64
3.3.1.6	Koeficient toplotne prevodnosti in prevodnostni koeficient vlage betona	64
3.3.1.7	Konstitucijski zakon betona pri povišanih temperaturah	65
3.3.2	Jeklo za armiranje	69
3.3.2.1	Meja elastičnosti in natezna trdnost jekla za armiranje	69
3.3.2.2	Elastični modul jekla za armiranje	69
3.3.2.3	Koeficient raztezanja in krčenja pri jeklu za armiranje	70
3.3.2.4	Specifična toplotna kapaciteta jekla za armiranje	70
3.3.2.5	Konstitucijski zakon jekla za armiranje pri povišanih temperaturah	71
3.3.3	Jeklo za prednapenjanje	75
3.3.3.1	Meja elastičnosti in natezna trdnost jekla za prednapenjanje	75
3.3.3.2	Elastični modul jekla za prednapenjanje	75
3.3.3.3	Koeficient raztezanja in krčenja pri jeklu za prednapenjanje	75
3.3.3.4	Specifična toplotna kapaciteta jekla za prednapenjanje	75
3.3.3.5	Konstitucijski zakon jekla za prednapenjanje pri povišanih temperaturah	77
3.3.4	Stik med betonom in jeklom za prednapenjanje	78
3.3.4.1	Mehanske lastnosti stika	78
3.3.4.2	Konstitucijski zakon stika pri povišanih temperaturah	80

3.4	Računski primeri	82
3.4.1	Prostoležeče prednapete betonske plošče	82
3.4.1.1	Določitev temperature in vlage v prečnem prerezu	83
3.4.1.2	Analiza mehanskega odziva plošč pri sočasnem delovanju požara in mehanske obtežbe	85
3.4.2	Prednapeta betonska plošča s previsi	90
3.4.2.1	Določitev temperature in vlage v prečnem prerezu	91
3.4.2.2	Analiza mehanskega odziva plošče pri sočasnem delovanju požara in mehanske obtežbe	92
4	ZAKLJUČKI	101
	VIRI	103

KAZALO SLIK

Slika 2.1	Prednapeti betonski nosilec: (a) nedeformirana lega in (b) Deformirana lega.	6
Slika 2.2	Obtežba prednapetega betonskega nosilca.	9
Slika 2.3	Geometrijski pomen zamika na stiku med betonom in prednapetim kablom.	14
Slika 2.4	Komponente kontaktne linijske obtežbe na stiku med betonom in prednapetim kablom.	16
Slika 2.5	Geometrijski in materialni podatki ter podatki o obtežbi.	31
Slika 2.6	Konstitucijski zakoni za beton, jeklo za armiranje in prednapenjanje v skladu z Eurocode 2, Part 1-1 (2004); konstucijski zakon stika med betonom in prednapetim jeklom (Keuser in Mehlhorn, 1983).	33
Slika 2.7	Obtežno-deformacijska krivulja. Primerjava numeričnih in eksperimentalnih rezultatov.	34
Slika 2.8	Spreminjanje relativne napake pri mejni nosilnosti nosilca P_{mej} v odvisnosti: (a) od števila končnih elementov in (b) od stopnje numerične integracije.	35
Slika 2.9	Vpliv začetne togosti stika na potek osne sile: (a) v betonu \mathcal{N}_c in (b) v prednapetem kablju \mathcal{N}_p^1	36
Slika 2.10	Vpliv začetne togosti stika na potek: (a) zamikov Δ^1 in (b) strižne komponente kontaktnega napetostnega vektorja $p_{t,p}^1$	36
Slika 2.11	Vpliv začetne togosti stika na potek: (a) normalne komponente kontaktnega napetostnega vektorja $p_{n,p}^1$ in (b) navpičnega pomika w_c na sredini nosilca.	37
Slika 2.12	Geometrijski in materialni podatki ter podatki o obtežbi.	38

Slika 2.13 Obtežno-deformacijska krivulja. Primerjava numeričnih in eksperimentalnih rezultatov.	39
Slika 2.14 Spreminjanje osne sile vzdolž osi plošče za štiri nivoje zunanje obtežbe: (a) v betonu \mathcal{N}_c in (b) v prednapetem kablu \mathcal{N}_p^1	39
Slika 2.15 Spreminjanje: (a) zamika Δ^1 in (b) strižne komponente kontaktnega napetostnega vektorja $p_{t,p}^1$ vzdolž stika med betonom in prednapetim kablom za štiri nivoje zunanje obtežbe.	40
Slika 2.16 Vpliv začetne togosti stika na potek obtežno-deformacijske krivulje.	41
Slika 2.17 Vpliv nivoja zunanje obtežbe in začetne togosti stika na potek osne sile v prednapetem kablu \mathcal{N}_p^1	42
Slika 2.18 Vpliv nivoja zunanje obtežbe in začetne togosti stika na potek zamikov Δ^1 vzdolž stika med betonom in prednapetim kablom.	43
Slika 2.19 Vpliv nivoja zunanje obtežbe in začetne togosti stika na potek strižne komponente kontaktnega napetostnega vektorja $p_{t,p}^1$ vzdolž stika med betonom in prednapetim kablom.	44
Slika 3.1 Požarne krivulje.	48
Slika 3.2 Oznake temperatur v točkah diferenčne mreže pri dveh različnih časih.	53
Slika 3.3 Oznake vozlišč izbrane diferenčne mreže glede na lego v prerezu.	54
Slika 3.4 Spreminjanje tlačne trdnosti betona s temperaturo glede na nivo tlačne obremenitve za: (a) kremenčev agregat in (b) apnenčev agregat.	60
Slika 3.5 Spreminjanje tlačne trdnosti betona s temperaturo glede na vrsto uporabljenega agregata.	60
Slika 3.6 Spreminjanje elastičnega modula betona s temperaturo.	62
Slika 3.7 Temperaturne deformacije betona.	62
Slika 3.8 Spreminjanje specifične toplote betona iz kremenčevega agregata skladno z Eurocode 2, Part 1-2 (2003).	63
Slika 3.9 Spreminjanje gostote betona s temperaturo skladno z Eurocode 2, Part 1-2 (2003).	64
Slika 3.10 Toplotna prevodnost betona kot funkcija temperature.	65

Slika 3.11 Konstitucijski zakon betona pri izbranih temperaturah v skladu z Eurocode 2, Part 1-2 (2003).	66
Slika 3.12 Spreminjanje meje elastičnosti in trdnosti jekla za armiranje s temperaturo.	69
Slika 3.13 Spreminjanje elastičnega modula jekla za armiranje s temperaturo.	70
Slika 3.14 Temperaturne deformacije jekla za armiranje.	71
Slika 3.15 Konstitucijski zakon hladno oblikovanega jekla za armiranje pri izbranih temperaturah skladno z Eurocode 2, Part 1-2 (2003).	72
Slika 3.16 Značilni diagram časovnega razvoja lezenja jekla.	73
Slika 3.17 Spreminjanje meje elastičnosti in trdnosti jekla za prednapenjanje s temperaturo.	76
Slika 3.18 Spreminjanje elastičnega modula jekla za prednapenjanje s temperaturo.	76
Slika 3.19 Temperaturne deformacije jekla za prednapenjanje.	77
Slika 3.20 Konstitucijski zakon za hladno oblikovano jeklo za prednapenjanje pri različnih temperaturah skladno z Eurocode 2, Part 1-2 (2003).	78
Slika 3.21 Konstitucijski zakon stika med betonom in jeklom za prednapenjanje pri različnih temperaturah po Diederichsu in Schneiderju (1981).	79
Slika 3.22 Temperaturno odvisna trdnost stika med betonom jeklom za prednapenjanje po Diederichsu in Schneiderju (1981).	80
Slika 3.23 Konstitucijski zakon stika med betonom in jeklom za prednapenjanje pri sobni temperaturi (Keuser in Mehlhorn, 1983).	80
Slika 3.24 Konstitucijski zakon stika med betonom in prednapetim kablom pri povišanih temperaturah (Keuser in Mehlhorn, 1983; Diederichs in Schneider, 1981).	81
Slika 3.25 Prednapeta betonska plošča. Geometrijski in materialni podatki ter podatki o obtežbi.	82
Slika 3.26 Časovno spreminjanje temperature v prečnem prerezu na mestu prednapetih kablov: (a) normalni beton in (b) lahki beton. Primerjava matematičnih modelov.	84
Slika 3.27 Časovno spreminjanje temperature v prečnem prerezu na mestu prednapetih kablov: (a) normalni beton in (b) lahki beton. Primerjava numeričnih in eksperimentalnih rezultatov.	85

Slika 3.28 Prednapeta betonska plošča Pl _I . Izmerjeni in izračunani navpični pomik na sredini razpona plošče w_{III}	86
Slika 3.29 Prednapeta betonska plošča Pl _{II} . Izmerjeni in izračunani navpični pomik na sredini razpona plošče w_{III}	87
Slika 3.30 Prednapeta betonska plošča Pl _{III} . Izmerjeni in izračunani navpični pomik na sredini razpona plošče w_{III}	87
Slika 3.31 Prednapeta betonska plošča Pl _{IV} . Izmerjeni in izračunani navpični pomik na sredini razpona plošče w_{III}	88
Slika 3.32 Prednapeta betonska plošča Pl _{II} . Porazdelitev osnih sil v: (a) betonu \mathcal{N}_c in (b) prednapetem kablju \mathcal{N}_p^1 za 0, 10, 70, 137 minut trajanja požara.	89
Slika 3.33 Prednapeta betonska plošča Pl _{II} . Porazdelitev: (a) zamikov Δ^1 in (b) strižne komponente linijske obtežbe na stiku med betonom in prednapetim kablom $p_{t,p}^1$ za 0, 10, 70, 137 minut trajanja požara.	89
Slika 3.34 Prednapeta betonska plošča s previsi. Geometrijski in materialni podatki ter podatki o obtežbi.	90
Slika 3.35 Časovno spreminjanje temperature v prečnem prerezu na mestu prednapetih kablov. Primerjava numeričnih in eksperimentalnih rezultatov.	92
Slika 3.36 Razporeditev temperature in vlage v prečnem prerezu plošče za 10, 30, 63 minut trajanja požara.	93
Slika 3.37 Prednapeta betonska plošča s previsi. Izmerjeni in izračunani navpični pomik na sredini plošče w_{III}	94
Slika 3.38 Prednapeta betonska plošča s previsoma. Vpliv upoštevanja prispevkov deformacij na velikost mejnega pomika na sredini plošče w_{III}	94
Slika 3.39 Porazdelitev osnih sil v: (a) betonu \mathcal{N}_c in (b) prednapetem kablju \mathcal{N}_p^1 za 0, 10, 30, 63 minut trajanja požara.	96
Slika 3.40 Upogibni moment: (a) v betonskem delu plošče \mathcal{M}_c in (b) v prednapeti plošči \mathcal{M} za 0, 10, 30, 63 minut trajanja požara.	96
Slika 3.41 Porazdelitev: (a) zamika Δ^1 in (b) tangencialne komponente kontaktnega napetostnega vektorja vzdolž stika med betonom in prednapetim kablom $p_{t,p}^1$ za 0, 10, 30, 63 minut trajanja požara.	97
Slika 3.42 Deformirana oblika računskega modela za 0, 10, 30, 63 minut trajanja požara.	97

Slika 3.43 Porazdelitev: (a) specifične spremembe dolžine referenčne osi betonskega dela nosilca ε_{c0} , (b) psevdoukrivljenosti referenčne osi betonskega dela nosilca κ_c in (c) specifične spremembe referenčne osi prednapetega kabla ε_p^1 za 0, 10, 30, 63 minut trajanja požara. 98

LIST OF FIGURES

Figure 2.1	Prestressed concrete beam: (a) undeformed configuration and (b) deformed configuration.	6
Figure 2.2	Load of prestressed concrete beam.	9
Figure 2.3	Geometrical meaning of slip between concrete and prestressing tendon.	14
Figure 2.4	Components of bond stress between concrete and prestressing tendon.	16
Figure 2.5	Geometrical, material and loading data.	31
Figure 2.6	Stress-strain relationships of concrete, reinforcing and prestressing steel recommended by Eurocode 2, Part 1-1 (2004); bond stress-slip relationship between concrete and prestressing steel (Keuser and Mehlhorn, 1983).	33
Figure 2.7	Load-displacement curve. The comparison of numerical and experimental results.	34
Figure 2.8	The change of relative error at load capacity P_{mej} : (a) for different numbers of finite elements and (b) for different levels of numerical interpolation.	35
Figure 2.9	Influence of initial slip modulus on distribution of axial force: (a) in concrete \mathcal{N}_c and (b) in prestressing tendon \mathcal{N}_p^1	36
Figure 2.10	Influence of initial slip modulus on distribution of: (a) slips Δ^1 ; (b) tangential component of bond stress vector $p_{t,p}^1$	36
Figure 2.11	Influence of initial slip modulus on distribution of: (a) normal component of bond stress vector $p_{n,p}^1$ and (b) vertical midspan displacement w_c	37
Figure 2.12	Geometrical, material and loading data.	38
Figure 2.13	Load-displacement curve. The comparison of numerical and experimental results.	39

Figure 2.14 Distribution of axial force along the span of slab for four different levels of load: (a) in concrete \mathcal{N}_c and (b) in prestressing tendon \mathcal{N}_p^1	39
Figure 2.15 Distribution of: (a) slip Δ^1 and (b) tangential component of bond stress vector $p_{t,p}^1$ between concrete and prestressing tendon for four different load levels.	40
Figure 2.16 Influence of initial slip modulus on distribution of load-displacement curve.	41
Figure 2.17 Distribution of axial force in prestressing tendon \mathcal{N}_p^1 for different load levels and different initial slip modulus.	42
Figure 2.18 Distribution of slip Δ^1 between concrete and prestressing tendon for different load levels and different initial slip modulus.	43
Figure 2.19 Distribution of tangential component of bond stress vector $p_{t,p}^1$ between concrete and prestressing tendon for different load levels and different initial slip modulus.	44
Figure 3.1 Fire curves.	48
Figure 3.2 Finite difference points at two different times.	53
Figure 3.3 Finite difference points and their position in the cross-section.	54
Figure 3.4 Compressive strength at elevated temperature for different strength levels for: (a) siliceous aggregate and (b) carbonate aggregate.	60
Figure 3.5 Compressive strength at elevated temperatures for different types of aggregates.	60
Figure 3.6 Modulus of elasticity of concrete at elevated temperature.	62
Figure 3.7 Thermal elongation of concrete.	62
Figure 3.8 Specific heat of siliceous concrete, as function of temperature recommended by Eurocode 2, Part 1-2 (2003).	63
Figure 3.9 The variation of density at elevated temperature, recommended by Eurocode 2, Part 1-2 (2003).	64
Figure 3.10 Thermal conductivity of concrete as function of temperature.	65
Figure 3.11 Stress-strain relationships of concrete under compression at elevated temperature, recommended by Eurocode 2, Part 1-2 (2003).	66
Figure 3.12 Strength and proportional limit of reinforcing steel at elevated temperature.	69

Figure 3.13 Modulus of elasticity of reinforcing steel at elevated temperature.	70
Figure 3.14 Thermal elongation of reinforcing steel.	71
Figure 3.15 Stress-strain relationships of cold worked reinforcing steel at elevated temperature, recommended by Eurocode 2, Part 1-2 (2003).	72
Figure 3.16 Typical time depended creep diagram of steel.	73
Figure 3.17 Strength and proportional limit of prestressing steel at elevated temperature.	76
Figure 3.18 Modulus of elasticity of prestressing steel at elevated temperature.	76
Figure 3.19 Thermal elongation of prestressing steel.	77
Figure 3.20 Stress-strain relationships of prestressing for cold worked steel at elevated temperature, recommended by Eurocode 2, Part 1-2 (2003).	78
Figure 3.21 Bond stress-slip relationship between concrete and prestressing steel at elevated temperature, reported by Diederichs and Schneider (1981).	79
Figure 3.22 Bond strength between concrete and prestressing steel at elevated temperature, reported by Diederichs and Schneider (1981).	80
Figure 3.23 Bond stress-slip relationship between concrete and prestressing tendon at room temperature (Keuser and Mehlhorn, 1983).	80
Figure 3.24 Bond stress-slip relationship between concrete and prestressing tendon at elevated temperature (Keuser and Mehlhorn, 1983; Diederichs and Schneider, 1981).	81
Figure 3.25 Prestressed concrete slab. Geometrical, material and loading data.	82
Figure 3.26 Time dependent temperature in cross section in place of prestressing tendons: (a) normalweight concrete and (b) lightweight concrete. Comparison between mathematical models.	84
Figure 3.27 Time dependent temperature in cross section in place of prestressing tendons: (a) normalweight concrete and (b) lightweight concrete. Comparison between numerical and experimental results.	85
Figure 3.28 Prestressed concrete slab Pl _I . Measured and calculated vertical midspan deflection w_{III}	86
Figure 3.29 Prestressed concrete slab Pl _{II} . Measured and calculated vertical midspan deflection w_{III}	87

Figure 3.30 Prestressed concrete slab Pl _{III} . Measured and calculated vertical midspan deflection w_{III}	87
Figure 3.31 Prestressed concrete slab Pl _{IV} . Measured and calculated vertical midspan deflection w_{III}	88
Figure 3.32 Prestressed concrete slab Pl _{II} . The distribution of axial force in: (a) concrete \mathcal{N}_c and (b) prestressing tendon \mathcal{N}_p^1 for 0, 10, 70, 137 minutes of fire.	89
Figure 3.33 Prestressed concrete slab Pl _{II} . The distribution of: (a) slips Δ^1 and (b) tangential component of bond stress vector between concrete and prestressing tendon $p_{t,p}^1$ for 0, 10, 70, 137 minutes of fire.	89
Figure 3.34 Prestressed concrete slab with overhangings. Geometrical, material and loading data.	90
Figure 3.35 Time dependent temperature in cross section in place of prestressing tendons. Comparison between numerical and experimental results.	92
Figure 3.36 The distribution of temperature and moisture in slab cross section for 10, 30, 63 minutes of fire.	93
Figure 3.37 Prestressed concrete slab with overhangings. Measured and calculated vertical midspan deflection w_{III}	94
Figure 3.38 Prestressed concrete slab with overhangings. The influence of strain contributions to value of limit midspan deflection w_{III}	94
Figure 3.39 The distribution of axial force in: (a) concrete \mathcal{N}_c and (b) prestressing tendon \mathcal{N}_p^1 for 0, 10, 30, 63 minutes of fire.	96
Figure 3.40 The distribution of the bending moment: (a) in concrete part of slab \mathcal{M}_c and (b) in prestressed concrete slab \mathcal{M} for 0, 10, 30, 63 minutes of fire.	96
Figure 3.41 The distribution of: (a) slip Δ^1 and (b) tangential component of bond stress vector between concrete and prestressing tendon $p_{t,p}^1$ for 0, 10, 30, 63 minutes of fire.	97
Figure 3.42 The deformed shape of mathematical model for 0, 10, 30, 63 minutes of fire.	97
Figure 3.43 The distribution of: (a) extensional strain of centroidal axis for concrete part of beam ε_{c0} , (b) pseudocurvature of centroidal axis for concrete part of beam κ_c and (c) extensional strain of centroidal axis for prestressed tendon ε_p^1 for 0, 10, 30, 63 minutes of fire.	98

KAZALO PREGLEDNIC

Preglednica 2.1	Primerjava rezultatov med geometrijsko linearno teorijo (GLT) in geometrijsko nelinearno teorijo (GNT) za različne togosti stika K	32
Preglednica 2.2	Vpliv začetne togosti stika na mejno nosilnost in pripadajoči pomik.	41
Preglednica 2.3	Vpliv začetne togosti stika na značilne kinematične in ravnotežne količine prednapete votle plošče.	45
Preglednica 3.1	Parametri lezenja po Williams-Leiru (1983).	74
Preglednica 3.2	Spreminjanje karakterističnih vrednosti stižne napetosti s temperaturo na stiku.	81
Preglednica 3.3	Prednapete betonske plošče. Geometrijski in materialni podatki ter podatki o obtežbi.	83
Preglednica 3.4	Podatki za račun povezanega prenosa toplote in vlage.	84
Preglednica 3.5	Primerjava numeričnih in eksperimentalnih rezultatov za mejni pomik na sredini plošče ter požarna odpornost.	88
Preglednica 3.6	Prednapeta betonska plošča Pl_{II} . Značilne količine na stiku med betonom in prednapetim kablom in osni sili pri štirih časih trajanja požara $t = 0, 10, 70, 137$ min.	90
Preglednica 3.7	Vpliv prispevkov deformacij na velikost mejnega pomika na sredini plošče.	95
Preglednica 3.8	Prednapeta betonska plošča s previsnima poljema. Značilne kinematične, ravnotežne in deformacijske količine pri štirih časih trajanja požara $t = 0, 10, 30, 63$ min.	99

LIST OF TABLES

Table 2.1	The comparison of numerical results obtained by geometrical linear theory (GLT) and geometrical nonlinear theory (GNT) for different slip modulus K	32
Table 2.2	Influence of initial slip modulus on bearing capacity and appurtenant deflection. . .	41
Table 2.3	Influence of initial slip modulus on characteristic kinematic and equilibrium quantities of hollow core slab.	45
Table 3.1	Creep parameters, reported by Williams-Leir (1983).	74
Table 3.2	The temperature dependent values of characteristic tangential stress between concrete and prestressing steel.	81
Table 3.3	Prestressed concrete slabs. Geometrical, material and load data.	83
Table 3.4	Data for calculating coupled heat and mass transfer.	84
Table 3.5	The comparison of numerical and experimental results of limit midspan deflection. Fire endurance of prestressed concrete slabs.	88
Table 3.6	Prestressed concrete slab P _{II} . Characteristic quantities in a contact between concrete and prestressing tendon and axial forces for four different times of fire duration $t = 0, 10, 70, 137$ min.	90
Table 3.7	The influence of strain contributions to value of limit midspan deflection.	95
Table 3.8	Prestressed concrete slab with overhangings. Characteristic kinematic, equilibrium and deformation quantities for four different times of fire duration $t = 0, 10, 30, 63$ min.	99

1 UVOD

Predstavitev problema

Prednapete betonske konstrukcije se zelo pogosto uporabljajo v gradbeništvu. To nedvoumno potrjuje njihova razširjena uporaba pri montažni gradnji, mostogradnji, raznih sanacijah in podobno. Značilni nosilni elementi prednapetih konstrukcij so prednapeti nosilci in stebri, prednapete polne ali votle plošče kot del medetažnih stropnih konstrukcij, prednapeti stenasti elementi itd. Poznamo dva osnovna tehnološka postopka prednapenjanja: (i) predhodno napenjanje in (ii) naknadno napenjanje. Pri prvem najprej napnemo jeklo za prednapenjanje in šele kasneje zabetoniramo nosilec, pri drugem pa je tehnološki postopek napenjanja ravno obraten. Vzporedno z razvojem tehnoloških postopkov gradnje, pa je skokovit napredek opazen tudi v razvoju različnih matematičnih modelov ter s tem povezanih računskih postopkov in računalniških programov za analizo prednapetih betonskih konstrukcij. Avtorji Campbell in Kodur (1990), Chern, You in Bažant (1992), Hurst (1988), Keuser in Mehlhorn (1983) podajajo različne matematične modele in računske postopke za analizo prednapetih betonskih konstrukcij. Ti se razlikujejo predvsem glede modeliranja obnašanja betona, kot tudi v načinu modeliranja interakcije med betonskim delom konstrukcije in jeklom za prednapenjanje. Nekateri med njimi zamik na stiku med betonom in jeklom za prednapenjanje upoštevajo (Keuser in Mehlhorn, 1983), drugi ne (Eurocode 2, Part 1-1, 2004).

Pomemben del varnosti gradbenih konstrukcij in s tem tudi prednapetih betonskih konstrukcij predstavlja požarna varnost. To lahko v največji meri zagotovimo s poznavanjem nastanka, razvoja in poteka požara oziroma z analizo termodinamičnih, kemijskih in mehanskih procesov v gradbenih konstrukcijah in njihovem okolju med požarom. Med požarom se sprošča veliko toplote. Količina sproščene toplote je odvisna od gorljivih lastnosti konstrukcije in razpoložljivih gorljivih snovi v požarnem prostoru. Znano je, da se konstrukciji oziroma delu konstrukcije, ki je izpostavljena požaru, zmanjšuje nosilnost in povečuje deformabilnost (Abrams, 1979; Gustaferrero in Selvaggio, 1967). Zato s projektiranjem požarne odpornosti gradbeni konstrukciji zagotavljamo ustrezno nosilnost in deformabilnost za različne možne požarne scenarije. Prvi projektantski postopki, ki so bili osnovani na izkušnjah, so bili stavbarski ukrepi (Pickard, 1994). V drugi polovici dvajsetega stoletja pa so se s tehnološkim razvojem pojavile tudi prve metode požarnega testiranja gradbenih elementov, ki so se do današnjih dni že zelo izpopolnile in standardizirale (White in Shirvill, 1995). Tako danes raziskovalci v požarnih laboratorijih izvajajo standardizirane požarne preizkuse, s katerimi pridobivajo informacije o požarni odpornosti preizkušancev. V požarni peči preizkušane izpostavijo različnim t.i. standardnim požarom oziroma požarnim krivuljam, ki določajo časovno spreminjanje temperature v požarnem prostoru. Različna združenja (American Society for Testing and Materials; ISO 834, 1999; Eurocode 1, 1995) podajajo različne požarne krivulje. Nekateri med njimi določajo samo naraščajočo temperaturo v požarnem prostoru, medtem ko druge, ki so bolj realne, vsebujejo tudi fazo ohlajevanja. Pridobljeni podatki standardnih požarnih preizkusov določajo požarno odpornost preizkušance, lastnosti materialov in podobno. Še bolj realno sliko obnašanja konstrukcij in njihovih elementov med požarom vsekakor predstavlja preizkušanje kon-

strukcij v naravnem merilu, kar pa je zelo drago. Ker pa je obnašanje konstrukcij med požarom odvisno od velikega števila parametrov, kot so: velikost in razvoj požarne obtežbe, lokacija ognja v prostoru, vrste in razporeditve gorljive snovi, površine odprtin, dimenzij prostora, termične difuzivnosti in konduktivnosti konstrukcije, toplotne radiacije znotraj prostora in skozi odprtine, temperature in zračnega pritiska, relativne vlažnosti okolja in podobno, so pridobljeni eksperimentalni podatki pogosto premalo splošni. Ker lahko z računalniki ta problem v veliki meri rešimo, se je z razvojem računalništva povečalo zanimanje raziskovalcev za določitev natančnih matematičnih modelov in zanesljivih numeričnih metod (računalniških programov) za analizo gradbenih konstrukcij ob sočasnem delovanju mehanske obtežbe in povišanih temperatur med požarom.

Podobne trende razvoja požarne varnosti gradbenih konstrukcij opazimo tudi pri armiranobetonskih in prednapetih betonskih konstrukcijah. Pri teh konstrukcijah je matematično modeliranje zaradi zahtevnih in medsebojno povezanih mehanskih, temperaturnih in vlažnostnih pojavov zelo zahtevno. Teoretično najzahtevnejši, a tudi najrealnejši, so tridimenzionalni modeli, pri katerih odziv konstrukcije ob sočasnem delovanju mehanske in požarne obtežbe modeliramo kot povezan termo-hidrološko-mehanski problem (Bianco *et al.*, 2003; Dal Pont *et al.*, 2005; Ichikawa in England, 2004; Obeid *et al.*, 2001; Pesavento in Schrefler, 2003). S temi modeli lahko v analizi upoštevamo vrsto značilnih povezanih pojavov v betonu pri povišani temperaturi, kot so: deformiranje konstrukcije, nestacionaren prehod toplote in vlage, difuzijo pare ter izparevanje vlage, kondenzacijo pare v konstrukciji, razpokanje in luščenje betona. Zaradi zahtevnosti se ti modeli uporabljajo le pri študijah najzahtevnejših inženirskih objektov, kot so na primer jedrske elektrarne in predori. Poenostavljeni, a še vedno zahtevni so računski postopki, pri katerih mehanski del analize ločimo od termo-hidrološkega dela. S tem se požarna analiza konstrukcij razdeli v dve matematično nepovezani fazi. To je fizikalno upravičeno zaradi dveh razlogov: (i) stisljivost vode v betonu je mnogo večja kot je stisljivost betona, zato sprememba prostornine por bistveno ne vpliva na povečanje pornih tlakov in (ii) povečanje temperature v konstrukciji zaradi mehanskega dela je glede na dovedeno toploto med požarom zanemarljivo (Bažant in Kaplan, 1996). Skladno s temi modeli, najprej glede na izbrano požarno krivuljo in spreminjanje vlage v požarnem prostoru določimo časovno in krajevno razporeditev temperature in vlage v konstrukciji med požarom (Luikov, 1966; Luikov, 1975; Luikov in Mikhailov 1966), nato s pomočjo dobljenih rezultatov določimo mehanski odziv obravnavane konstrukcije ob sočasnem delovanju mehanske in požarne obtežbe (Bratina, 2003; Li *et al.*, 2003; Obeid *et al.*, 2001; Schnabl, 2007). Kljub veliki poenostavitvi pa je ta matematični model še vedno matematično zelo zahteven. Zato evropski predpisi za beton Eurocode 2, Part 1-2 (2003) ta model za standardne armiranobetonske in prednapete betonske konstrukcije še dodatno poenostavijo. Pri tem lahko povezan problem za določitev temperature in vlage v betonskih konstrukcijah med požarom določimo nepovezano (Bratina, 2003; Bratina *et al.* 2004; Eurocode 2, Part 1-2, 2003; Gawin *et al.*, 2003; Purkiss, 1996).

Podobno kot pri vseh gradbenih konstrukcijah se tudi pri prednapetih betonskih konstrukcijah s spreminjanjem temperature v konstrukciji spreminjajo tudi mehanske in toplotne lastnosti betona, jekla za armiranje in jekla za prednapenjanje (Abrams, 1979; Abrams in Cruz, 1961; Anderberg, 1976; Eurocode 2, Part 1-2, 2003; Li in Purkiss, 2005). Zato je poznavanje spreminjanja mehanskih in toplotnih lastnosti betona in jekla s temperaturo bistvenega pomena za natančno oceno obnašanja prednapetih betonskih konstrukcij med požarom. V standardu Eurocode 2, Part 1-2 (2003) je spreminjanje tlačne trdnosti betona, elastičnega modula ter materialnega modela s temperaturo podano v obliki preglednic. Tako se tlačna trdnost betona pri temperaturah nad 350°C zmanjša (Abrams, 1979; Eurocode 2, Part 1-2, 2003), podobno tudi elastični modul. Abrams (1979), Abrams in Cruz (1961) sta ugotovila, da je padec elastičnega modula betona najizrazitejši pri betonih iz lahkega agregata. Temperaturne deformacije betona so odvisne od vrste agregata (Eurocode 2, Part 1-2, 2003). Za lezenje betona pri visokih temperaturah so Harmathy (1993), Cruz (1966) in Purkiss (2005) ugotovili, da je pri visokih temperaturah bistveno bolj izrazito kot pri sobni temperaturi, kjub temu pa lahko v požarni analizi skladno z

Eurocode 2, Part 1-2 (2003) lezenje betona zanemarimo. Značilnost betona pri povišanih temperaturah so t.i. prehodne deformacije. Te se pojavijo v začetni fazi segrevanja betona, so trajne in nepovratne (Bratina, 2003). Tudi za jeklo za armiranje in prednapenjanje evropski standard Eurocode 2, Part 1-2 (2003) v pregledicah podaja spreminjanje trdnosti in elastičnega modula s temperaturo ter zveze med napetostmi in deformacijami pri visokih temperaturah. V splošnem je pri povišanih temperaturah jeklo za prednapenjanje bolj občutljivo na zunanje vplive kot jeklo za armiranje (Eurocode 2, Part 1-2, 2003). Značilnost jekla pri povišanih temperaturah je t.i. viskozno lezenje. Abrams (1979) je ugotovil, da se lezenje jekla pojavi, ko temperatura doseže vrednost okoli 400°C , hitrost lezenja pa je odvisna od vrste jekla (Bratina, 2003; Srpčič, 1991). Pri jeklu za prednapenjanje se lezenje pojavi že pri 300°C (Eurocode 2, Part 1-2, 2003). Pomembna predpostavka pri modeliranju gradbenih konstrukcij pri povišanih temperaturah, ki jo praktično upoštevajo vsi raziskovalci, je t.i. adicijski razcep prirastka geometrijske deformacije v vsoto prirastkov mehanskih in temperaturnih deformacij, prirastka viskoznega lezenja jekla in prirastka prehodnih deformacij betona (Bratina, 2003; Eurocode 2, Part 1-2, 2003; Srpčič, 1991).

Vsebina dela

V doktorski disertaciji predstavimo matematični model in računski postopek za nelinearno analizo prednapetih betonskih linijskih konstrukcij, ki so izpostavljene sočasnemu delovanju mehanske obtežbe in požara. Pomembna novost predstavljenega modela je v tem, da omogoča modeliranje zamika med betonom in prednapetim jeklom, ter da časovno in krajevno razporeditev temperature in vlage v konstrukciji določimo kot povezan temperaturno-vlažnostni pojav. Ker lahko pri standardnih prednapetih betonskih konstrukcijah luščenje betona zanemarimo, razdelimo matematični model in pripadajoči računski postopek v dve matematično nepovezani fazi.

V prvi fazi s pomočjo temperaturno-vlažnostne analize določimo časovno in krajevno razporeditev temperature in vlage v prečnem prerezu obravnavane prednapete betonske konstrukcije. V ta namen povezan prenos toplote in vlage v kapilarno poroznih materialih zapišemo s povezanima nelinearnima parcialnima diferencialnima enačbama Luikova (1966). Pri tem upoštevamo temperaturno in vlažnostno odvisne materialne parametre za beton. V splošnem dani sistem povezanih nelinearnih parcialnih enačb analitično ni rešljiv, zato ga rešimo s t.i. diferenčno metodo. S tem namenom računalniški program, ki ga je za določitev vlage in temperature v lesenih konstrukcijah med požarom v svoji doktorski disertaciji predstavil Schnabl (Schnabl, 2007), ustrezno prilagodimo prednapetim betonskim konstrukcijam med požarom. Izračunana časovna in krajevna razporeditev temperature in vlage v prečnem prerezu v nadaljevanju predstavlja požarno obtežbo za drugo fazo požarne analize prednapetih betonskih konstrukcij.

Jedro disertacije predstavlja druga faza predstavljenega matematičnega modela in računskega postopka za analizo odziva prednapetih betonskih linijskih konstrukcij na sočasen vpliv mehanske in temperaturne obtežbe. Zaradi večje preglednosti v doktorski disertaciji najprej prikažemo izpeljavo matematičnega modela in računskega postopka za analizo prednapetih linijskih konstrukcij pri sobni temperaturi, v nadaljevanju pa jo razširimo še na razmere, ki vladajo med požarom. V obeh primerih je izhodišče geometrijsko točna Reissner-jeva teorija ravninskega nosilca (Reissner, 1972). Skladno s to teorijo nosilcev v modelu upoštevamo Bernoulli-jevo hipotezo o ravnih prečnih prerezih ter predpostavko, da se oblika in velikost prečnih prerezov med deformiranjem ne spreminja. Pri izpeljavi matematičnega modela in računskega postopka se omejimo na predhodno prednapete nosilce. Glede na to, da se med požarom betonski del nosilca in prednapeto jeklo zamakneta, uporabimo Reissner-jev model nosilca ločeno za betonski del konstrukcije in ločeno za prednapeto jeklo. Pri tem model za prednapeto jeklo poenostavimo v model vrvi. Ker v disertaciji obravnavamo prednapete konstrukcije standardnih dimenzij, v analizi strižne deformacije zanemarimo. Na stiku med betonom in jeklom za armiranje predpostavimo kompatibilnost deformacij betona in jekla. Poleg prispevka mehanskih deformacij v analizi napetost-

nega in deformacijskega stanja upoštevamo tudi prispevke temperaturnih deformacij, prispevke lezenja in prispevek prehodne deformacije betona. Pomembna novost doktorske disertacije je, da posplošene ravnotežne enačbe za analizo prednapetih linijskih konstrukcij pri sobni temperaturi in med požarom z upoštevanjem zamikov med betonom in prednapetimi kabli rešimo z novimi deformacijskimi končnimi elementi. Značilnost deformacijskih končnih elementov je v tem, da vzdolž referenčne osi interpoliramo osno deformacijo in psevdoukrivljenost betonskega dela nosilca ter osne deformacije prednapetih kablov. Posebnost novih končnih elementov pa je v tem, da interpoliramo tudi materialne koordinate x_p^{*k} ($k = 1, 2, \dots, n_p$), ki določajo tiste delce prednapetih kablov, ki so v deformirani legi v stiku z betonom, ter normalne komponente kontaktne linijske obtežbe $p_{n,p}^k$ ($k = 1, 2, \dots, n_p$) na stiku med betonom in prednapetimi kabli.

Pri predstavljeni nelinearni analizi odziva prednapetih betonskih konstrukcij na sočasen vpliv mehanske in požarne obtežbe rešujemo sistem diskretnih posplošenih ravnotežnih enačb inkrementno, s t.i. Newtonovo inkrementno-iteracijsko metodo. Pri tem celoten čas požarne analize $[0, t^{\text{kon}}]$ razdelimo na dovolj majhne časovne korake $[t^r, t^{r+1}]$, znotraj katerih predpostavimo konstantno temperaturo, napetost in mehansko obtežbo. Za znan inkrement obtežbe in temperature iterativno izračunamo popravke inkrementov posplošenih vozliščnih pomikov vse do željene natančnosti. Kot kriterij za porušitev konstrukcije med požarom izberemo singularnost tangentne togostne matrike konstrukcije.

Disertacija ima poleg uvoda še tri poglavja. V drugem poglavju predstavimo matematični model in računski postopek za analizo prednapetih betonskih linijskih konstrukcij pri sobni temperaturi. S pomočjo modificiranega izreka o virtualnem delu prikažemo družino novih deformacijskih končnih elementov za analizo prednapetih betonskih konstrukcij. Primernost in natančnost predstavljenega modela in računskega postopka prikažemo z dvema računskima primeroma. V tretjem poglavju podrobno predstavimo dvofazni matematični model in računski postopek za analizo odziva prednapetih betonskih konstrukcij na sočasno delovanje mehanske in požarne obtežbe. V tem poglavju najprej prikažemo temperaturno-vlažnostno analizo prednapetih betonskih konstrukcij in v nadaljevanju še razširitev matematičnega modela in računskega postopka za analizo prednapetih linijskih konstrukcij pri sobni temperaturi na razmere, ki vladajo med požarom. Tudi tu natančnost in primernost matematičnega modela in računskega postopka prikažemo z dvema računskima primeroma. Na koncu podamo zaključke.

2 STATIČNA ANALIZA PREDNAPETIH BETONSKIH LINIJSKIH KONSTRUKCIJ

2.1 Osnovne enačbe prednapetih betonskih linijskih nosilcev

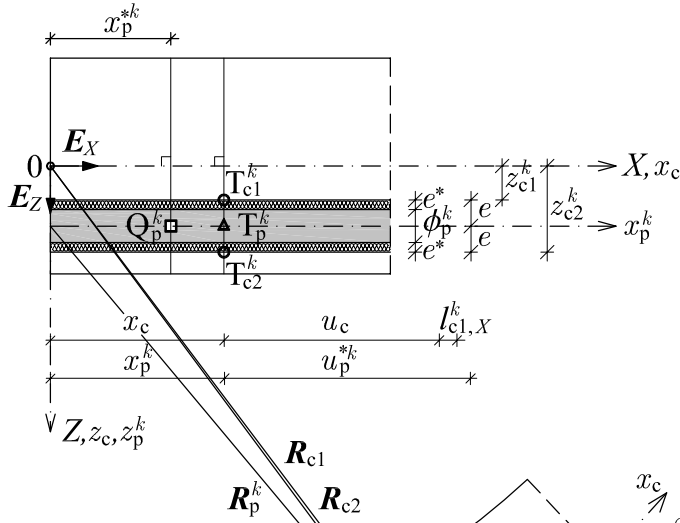
V tem poglavju prikažemo osnovne enačbe matematičnega modela in računskega postopka za geometrijsko in materialno nelinearno statično analizo prednapetih betonskih linijskih konstrukcij pri sobni temperaturi. Pri izpeljavi osnovnih enačb modela upoštevamo tudi zamike na stiku med betonom in jeklom za prednapenjanje, omejimo pa se na predhodno napete linijske konstrukcije. Izhodišče izpeljave predstavlja geometrijsko točna Reissner-jeva teorija ravninskega nosilca (Reissner, 1972). Ker upoštevamo zamike med betonom in jeklom za prednapenjanje, uporabimo Reissner-jev model nosilca ločeno za betonski del konstrukcije in za jeklo za prednapenjanje. Pri tem se model za prednapeto jeklo poenostavi v model vrvi. Glede na dimenzije prednapetih betonskih konstrukcij, ki se uporabljajo v gradbeništvu, je vpliv strižnih deformacij na njihovo obnašanje majhen, zato jih zanemarimo.

2.1.1 Kinematične enačbe

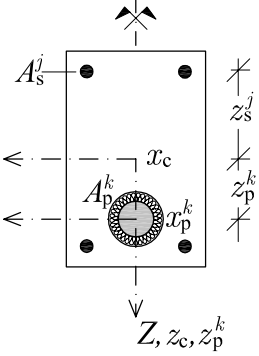
Obravnavamo raven prednapeti betonski nosilec z začetno dolžino L in konstantnim prečnim prerezom A_c . Jeklo za prednapenjanje predstavlja n_p prednapetih kablov s prečnim prerezom A_p^k ($k = 1, 2, \dots, n_p$). Betonski del nosilca je dodatno ojačan z n_s armaturnimi palicami s prečnim prerezom A_s^j ($j = 1, 2, \dots, n_s$). Količine, ki pripadajo betonskemu delu prednapetega nosilca označimo s spodnjim indeksom $(\bullet)_c$, količine, ki pripadajo k -temu prednapetemu kablju pa z indeksoma $(\bullet)_p^k$ (slika 2.1). Deformiranje prednapetega betonskega linijskega nosilca opazujemo v ravnini (X, Z) evklidskega prostora s kartezijskim pravokotnim koordinatnim sistemom (X, Y, Z) in pripadajočimi baznimi vektorji \mathbf{E}_X , \mathbf{E}_Z in $\mathbf{E}_Y = \mathbf{E}_Z \times \mathbf{E}_X$. Za referenčno os predpostavimo težiščno os betonskega dela nosilca. Poljubne delce betonskega dela nosilca identificiramo z materialnimi koordinatami (x_c, y_c, z_c) , poljubne delce k -tega prednapetega kabla pa z materialnimi koordinatami (x_p^k, y_p^k, z_p^k) . Vektorji $e_{x,c}$, $e_{y,c}$ in $e_{z,c}$ predstavljajo bazo materialnega koordinatnega sistema za betonski del prednapetega nosilca, vektorji $e_{x,p}^k$, $e_{y,p}^k$ in $e_{z,p}^k$ pa bazo materialnega koordinatnega sistema za k -ti prednapeti kabel.

Zaradi večje preglednosti veznih enačb na stiku med betonom in prednapetimi kabli, pri izpeljavi osnovnih enačb reparametriziramo referenčne osi prednapetih kablov (Čas, 2004). S tem namenom vpeljemo nove materialne koordinate x_p^{*k} ($k = 1, 2, \dots, n_p$), ki določajo tiste delce prednapetih kablov v nedeformirani legi, ki so v deformirani legi v stiku z delcem v betonu (slika 2.1). Dodatno pa predpostavimo, da se med betonom in prednapetimi kabli ustvari vmesna plast debeline e^* ($e = e^* + \phi_p^k/2$, $k = 1, 2, \dots, n_p$). To prikazujemo na sliki 2.1, kjer se delca betona in k -tega prednapetega kabla, \mathcal{D}_c (točka T_{c1}^k oziroma T_{c2}^k) in \mathcal{D}_p^k (točka T_p^k), ki sta bila v nedeformirani legi soležna, v deformirani legi

(a) Nedeformirana lega:



Prečni prerez:



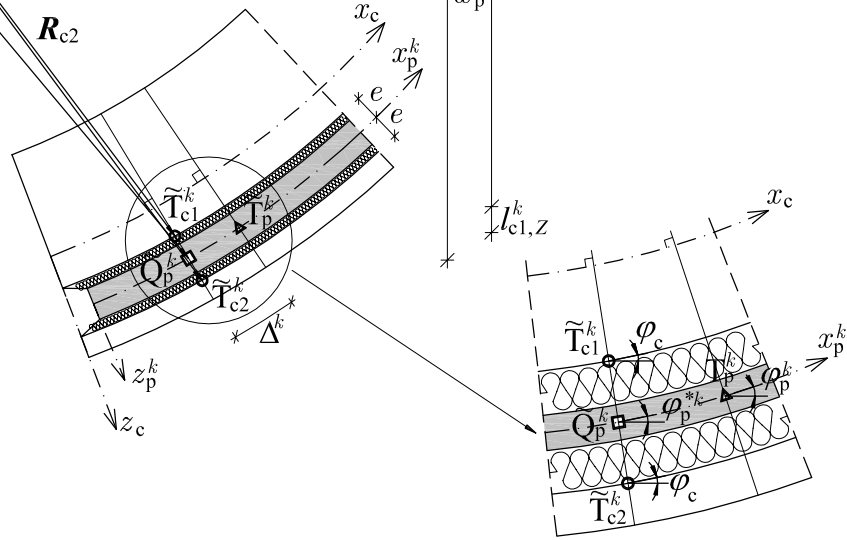
(b) Deformirana lega:

$$\begin{aligned} l_{c1,X}^k &= z_{c1}^k \sin \varphi_c \\ l_{c1,Z}^k &= z_{c1}^k \cos \varphi_c \end{aligned}$$

$$e = e^* + \phi_p^k / 2$$

$$\begin{aligned} u_p^{*k} &= u_p^k(x_p^{*k}) \\ w_p^{*k} &= w_p^k(x_p^{*k}) \\ \varphi_p^{*k} &= \varphi_p^k(x_p^{*k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_p^k &(x_p^k, z_p^k) \\ \tilde{Q}_p^k &(x_p^{*k}, z_p^{*k}) \\ \tilde{T}_{c1}^k &(x_c, z_{c1}^k) \\ \tilde{T}_{c2}^k &(x_c, z_{c2}^k) \end{aligned}$$



Slika 2.1: Prednapeti betonski nosilec: (a) nedeformirana lega in (b) deformirana lega.

Figure 2.1: Prestressed concrete beam: (a) undeformed configuration and (b) deformed configuration.

zamakneta za zamik $\Delta^k(x_c)$. Tako lahko deformirano lego poljubnega delca betonskega dela nosilca na stiku med betonom in k -tim prednapetim kablom ($k = 1, 2, \dots, n_p$) zapišemo s krajevnima vektorjema ($i = 1, 2$)

$$\mathbf{R}_{ci}(x_c, y_c, z_{ci}^k) = \mathbf{r}_{0,c}(x_c) + \mathbf{u}_c(x_c) + \boldsymbol{\rho}_{ci}(x_c, y_c, z_{ci}^k), \quad (2.1)$$

deformirano lego poljubnega delca k -tega prednapetega kabla pa s krajevnimi vektorji ($k = 1, 2, \dots, n_p$)

$$\mathbf{R}_p^k(x_p^{*k}, y_p^k, z_p^k) = \mathbf{r}_{0,p}^k(x_p^{*k}) + \mathbf{u}_p^k(x_p^{*k}) + \boldsymbol{\rho}_p^k(x_p^{*k}, y_p^k, z_p^k). \quad (2.2)$$

V enačbah (2.1) in (2.2) smo z $\mathbf{r}_{0,c}(x_c) = x_c \mathbf{E}_X$ označili krajevni vektor poljubne točke referenčne osi betonskega dela nosilca, z $\mathbf{r}_{0,p}^k(x_p^{*k}) = x_p^{*k} \mathbf{E}_X$ krajevni vektor poljubne točke referenčne osi k -tega prednapetega kabla, z $\mathbf{u}_c(x_c) = u_c(x_c) \mathbf{E}_X + w_c(x_c) \mathbf{E}_Z$ vektor pomikov referenčne osi betonskega dela nosilca, z $\mathbf{u}_p^k(x_p^{*k}) = u_p^k(x_p^{*k}) \mathbf{E}_X + w_p^k(x_p^{*k}) \mathbf{E}_Z$ vektor pomikov k -tega prednapetega kabla, z

$\rho_{ci}(x_c, y_c, z_{ci}^k) = y_c \mathbf{e}_{y,c}(x_c) + z_{ci}^k \mathbf{e}_{z,c}(x_c)$ relativno lego poljubne točke prečnega prereza betonskega dela nosilca glede na izbrano referenčno os in $\mathbf{z} \rho_p^k(x_p^{*k}, y_p^k, z_p^k) = y_p^k \mathbf{e}_{y,p}^k(x_p^{*k}) + z_p^k \mathbf{e}_{z,p}^k(x_p^{*k})$ relativno lego poljubne točke prečnega prereza k -tega prednapetega kabla. Zvezo med materialno in prostorsko bazo, ločeno za betonski del nosilca in k -ti prednapeti kabel, določimo z enačbami ($k = 1, 2, \dots, n_p$):

betonski del nosilca:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{e}_{x,c}(x_c) \\ \mathbf{e}_{y,c}(x_c) \\ \mathbf{e}_{z,c}(x_c) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_c(x_c) & 0 & \sin \varphi_c(x_c) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_c(x_c) & 0 & \cos \varphi_c(x_c) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{E}_X \\ \mathbf{E}_Y \\ \mathbf{E}_Z \end{Bmatrix}. \quad (2.3)$$

prednapeti kabli ($k = 1, 2, \dots, n_p$):

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{e}_{x,p}^k(x_p^{*k}) \\ \mathbf{e}_{y,p}^k(x_p^{*k}) \\ \mathbf{e}_{z,p}^k(x_p^{*k}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_p^k(x_p^{*k}) & 0 & \sin \varphi_p^k(x_p^{*k}) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_p^k(x_p^{*k}) & 0 & \cos \varphi_p^k(x_p^{*k}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{E}_X \\ \mathbf{E}_Y \\ \mathbf{E}_Z \end{Bmatrix}. \quad (2.4)$$

Če v izrazih (2.1) oziroma (2.2) upoštevamo izraza (2.3) oziroma (2.4), lahko zapišemo deformirane lege poljubnih delcev \mathcal{D}_c in \mathcal{D}_p^k prednapetega nosilca v prostorski bazi ($i = 1, 2$ in $k = 1, 2, \dots, n_p$):

$$\mathbf{R}_{ci}(x_c, z_{ci}^k) = (x_c + u_c(x_c) + z_{ci}^k \sin \varphi_c(x_c)) \mathbf{E}_X + (w_c(x_c) + z_{ci}^k \cos \varphi_c(x_c)) \mathbf{E}_Z, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{R}_p^k(x_p^{*k}, z_p^k) = (x_p^{*k} + u_p^k(x_p^{*k})) \mathbf{E}_X + (w_p^k(x_p^{*k})) \mathbf{E}_Z. \quad (2.6)$$

V enačbah (2.5) in (2.6) smo z $x_c, z_{ci}^k = z_p^k \mp e$ označili materialne koordinate betonskega delca nosilca na stiku s k -tim prednapetim kablom, z x_p^{*k}, z_p^k materialne koordinate k -tega prednapetega kabla na stiku, z $u_c(x_c)$ in $w_c(x_c)$ smo označili komponenti pomika referenčne osi betonskega dela nosilca, z $u_p^k(x_p^{*k})$ in $w_p^k(x_p^{*k})$ komponenti pomika referenčne osi k -tega prednapetega kabla, s $\varphi_c(x_c)$ zasuk prečnega prereza betonskega dela nosilca, s $\varphi_p^k(x_p^{*k})$ pa zasuk k -tega prednapetega kabla. Ne izgubimo veliko na splošnosti, če predpostavimo, da je $e = 0$ ($z_{c1}^k = z_{c2}^k = z_c^k = z_p^k$), enačbe pa postanejo veliko bolj pregledne.

Skladno z Reissnerjevim modelom ravninskega nosilca in omenjenimi predpostavkami so kinematične enačbe prednapetega betonskega nosilca sledeče:

betonski del nosilca:

$$1 + \frac{du_c(x_c)}{dx_c} - (1 + \varepsilon_{c0}(x_c)) \cos \varphi_c(x_c) = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{dw_c(x_c)}{dx_c} + (1 + \varepsilon_{c0}(x_c)) \sin \varphi_c(x_c) = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{d\varphi_c(x_c)}{dx_c} - \kappa_c(x_c) = 0, \quad (2.9)$$

prednapeti kabli ($k = 1, 2, \dots, n_p$):

$$1 + \frac{du_p^k(x_p^{*k})}{dx_p^{*k}} - (1 + \varepsilon_p^k(x_p^{*k})) \cos \varphi_p^k(x_p^{*k}) = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{dw_p^k(x_p^{*k})}{dx_p^{*k}} + (1 + \varepsilon_p^k(x_p^{*k})) \sin \varphi_p^k(x_p^{*k}) = 0, \quad (2.11)$$

$$\frac{d\varphi_p^k(x_p^{*k})}{dx_p^{*k}} - \kappa_p^k(x_p^{*k}) = 0. \quad (2.12)$$

V enačbah (2.7)–(2.12) predstavljajo $\varepsilon_{c0}(x_c)$, $\kappa_c(x_c)$, $\varepsilon_p^k(x_p^{*k})$ in $\kappa_p^k(x_p^{*k})$ specifične spremembe dolžine in psevdoukrivljenost referenčne osi betonskega dela nosilca oziroma referenčne osi k -tega prednapetega kabla. V nadaljevanju količine $\varepsilon_{c0}(x_c)$, $\kappa_c(x_c)$, $\varepsilon_p^k(x_p^{*k})$ in $\kappa_p^k(x_p^{*k})$ imenujemo deformacijske količine, $u_c(x_c)$, $w_c(x_c)$, $\varphi_c(x_c)$, $u_p^k(x_p^{*k})$, $w_p^k(x_p^{*k})$, $\varphi_p^k(x_p^{*k})$ pa kinematične količine.

2.1.2 Ravnotežne enačbe

Ravnotežne enačbe predstavljajo zvezo med notranjimi statičnimi količinami prednapetega betonskega nosilca in zunanjo obtežbo. Zapišemo jih ločeno za betonski del nosilca in prednapeto jeklo. Zaradi tega predstavlja obtežbo prednapetega nosilca konservativna zunanja linijska obtežba $\mathbf{q}_c(x_c) = q_{X,c}(x_c)\mathbf{E}_X + q_{Z,c}(x_c)\mathbf{E}_Z$ in linijska momentna obtežba $\mathbf{m}_c(x_c) = m_{Y,c}(x_c)\mathbf{E}_Y$ ter tudi kontaktna linijska obtežba na stiku $\mathbf{p}_c^k(x_c)$, $\mathbf{p}_p^k(x_p^k)$, $\mathbf{h}_c^k(x_c)$ in $\mathbf{h}_p^k(x_p^k)$ ($k = 1, 2, \dots, n_p$) (slika 2.2). Ko upoštevamo, da so dimenzije prečnega prereza jekla za prednapenjanje majhne, lahko kontaktno obtežbo na stiku zapišemo z enačbami:

betonski del nosilca :

$$\mathbf{p}_c^k(x_c) = p_{x,c}^k(x_c)\mathbf{e}_{x,c}(x_c) + p_{z,c}^k(x_c)\mathbf{e}_{z,c}(x_c) = p_{X,c}^k(x_c)\mathbf{E}_X + p_{Z,c}^k(x_c)\mathbf{E}_Z, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{h}_c^k(x_c) = h_{y,c}^k(x_c)\mathbf{e}_{y,c}(x_c) = h_{Y,c}^k(x_c)\mathbf{E}_Y = p_{X,c}^k(x_c)z_c^k\mathbf{E}_Y. \quad (2.14)$$

prednapeti kabli ($k = 1, 2, \dots, n_p$):

$$\mathbf{p}_p^k(x_p^k) = p_{x,p}^k(x_p^k)\mathbf{e}_{x,p}(x_p^k) + p_{z,p}^k(x_p^k)\mathbf{e}_{z,p}(x_p^k) = p_{X,p}^k(x_p^k)\mathbf{E}_X + p_{Z,p}^k(x_p^k)\mathbf{E}_Z, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{h}_p^k(x_p^k) = h_{y,p}^k(x_p^k)\mathbf{e}_{y,p}(x_p^k) = h_{Y,p}^k(x_p^k)\mathbf{E}_Y = \mathbf{0}. \quad (2.16)$$

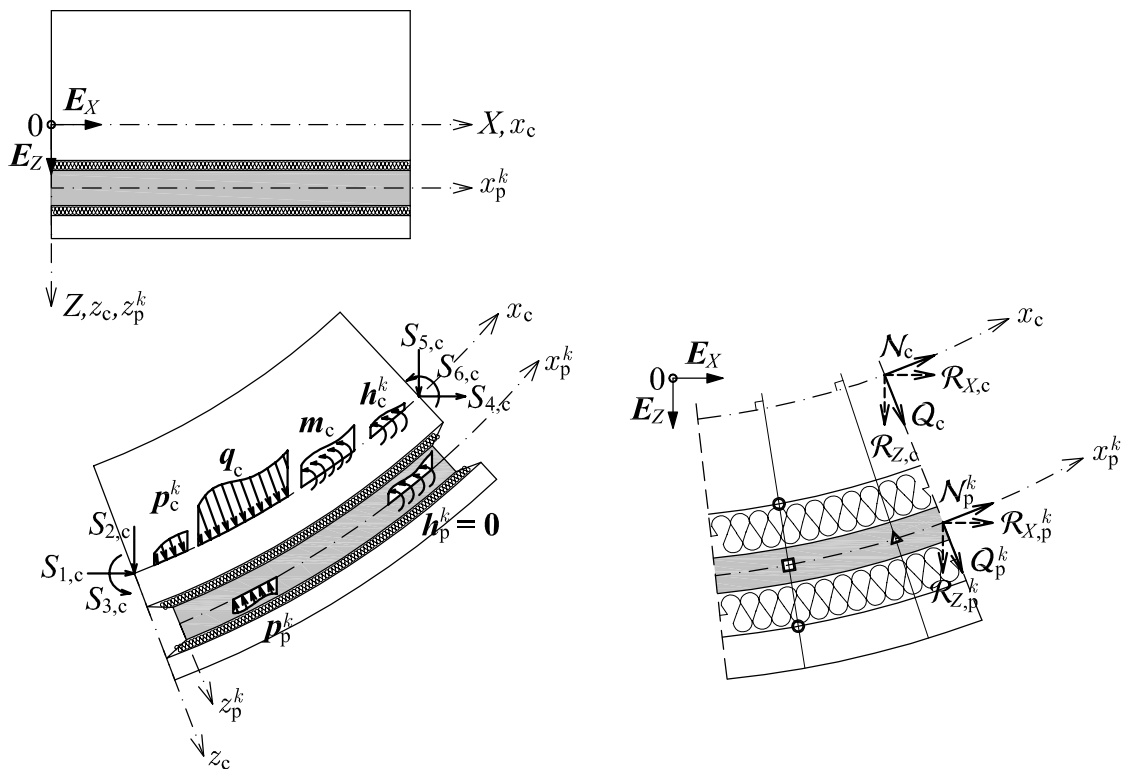
Glede na povedano sestavljata ravnotežne enačbe betonskega dela prednapetega nosilca (Simo, 1985) dve vektorski diferencialni enačbi prvega reda:

$$\frac{d\mathbf{N}_c(x_c)}{dx_c} + \mathbf{q}_c(x_c) + \sum_{k=1}^{n_p} \mathbf{p}_c^k(x_c) = \mathbf{0}, \quad (2.17)$$

$$\frac{d\mathbf{M}_c(x_c)}{dx_c} + \frac{d\mathbf{R}_{0,c}^i(x_c)}{dx_c} \times \mathbf{N}_c(x_c) + \mathbf{m}_c(x_c) + \sum_{k=1}^{n_p} \mathbf{h}_c^k(x_c) = \mathbf{0}. \quad (2.18)$$

Posplošeni ravnotežni sili v betonskem delu nosilca \mathbf{N}_c in \mathbf{M}_c lahko zapišemo v komponentni obliki:

$$\mathbf{N}_c(x_c) = \mathcal{N}_c(x_c)\mathbf{e}_{x,c}(x_c) + \mathcal{Q}_c(x_c)\mathbf{e}_{z,c}(x_c) = \mathcal{R}_{X,c}(x_c)\mathbf{E}_X + \mathcal{R}_{Z,c}(x_c)\mathbf{E}_Z, \quad (2.19)$$



Slika 2.2: Obtežba prednapetega betonskega nosilca.

Figure 2.2: Load of prestressed concrete beam.

$$\mathbf{M}_c(x_c) = \mathcal{M}_c(x_c)\mathbf{e}_{y,c}(x_c) = \mathcal{M}_{Y,c}(x_c)\mathbf{E}_Y, \quad (2.20)$$

kjer predstavljata $\mathcal{N}_c(x_c)$ in $\mathcal{Q}_c(x_c)$ ravnotežno osno in ravnotežno prečno silo, $\mathcal{M}_c(x_c)$ pa ravnotežni upogibni moment, medtem ko predstavljata $\mathcal{R}_{X,c}(x_c)$ in $\mathcal{R}_{Z,c}(x_c)$ ravnotežno vodoravno in navpično komponento notranje sile. Zveze med ravnotežnimi količinami $\mathcal{N}_c(x_c)$ in $\mathcal{Q}_c(x_c)$ ter $\mathcal{R}_{X,c}(x_c)$ in $\mathcal{R}_{Z,c}(x_c)$ zapišemo s pomočjo enačb:

$$\mathcal{N}_c(x_c) = \mathcal{R}_{X,c}(x_c) \cos \varphi_c(x_c) - \mathcal{R}_{Z,c}(x_c) \sin \varphi_c(x_c), \quad (2.21)$$

$$\mathcal{Q}_c(x_c) = \mathcal{R}_{X,c}(x_c) \sin \varphi_c(x_c) + \mathcal{R}_{Z,c}(x_c) \cos \varphi_c(x_c). \quad (2.22)$$

Ko izraza (2.19) in (2.20) vstavimo v ravnotežni enačbi (2.17) in (2.18), zapišemo znane ravnotežne enačbe za betonski del prednapetega nosilca v komponentni obliki (Reissner, 1972):

$$\frac{d\mathcal{R}_{X,c}(x_c)}{dx_c} + q_{X,c}(x_c) + \sum_{k=1}^{n_p} p_{X,c}^k(x_c) = 0, \quad (2.23)$$

$$\frac{d\mathcal{R}_{Z,c}(x_c)}{dx_c} + q_{Z,c}(x_c) + \sum_{k=1}^{n_p} p_{Z,c}^k(x_c) = 0, \quad (2.24)$$

$$\frac{d\mathcal{M}_c(x_c)}{dx_c} - (1 + \varepsilon_{c0}(x_c))\mathcal{Q}_c(x_c) + m_{Y,c}(x_c) + \sum_{k=1}^{n_p} p_{X,c}^k(x_c) z_c^k = 0. \quad (2.25)$$

Na podoben način zapišemo tudi ravnotežne enačbe za prednapete kable ($k = 1, 2, \dots, n_p$):

$$\frac{d\mathbf{N}_p^k(x_p^k)}{dx_p^k} + \mathbf{p}_p^k(x_p^k) = \mathbf{0}, \quad (2.26)$$

$$\frac{d\mathbf{M}_p^k(x_p^k)}{dx_p^k} + \frac{d\mathbf{R}_{0,p}^k(x_p^k)}{dx_p^k} \times \mathbf{N}_p^k(x_p^k) + \mathbf{h}_p^k(x_p^k) = \mathbf{0}. \quad (2.27)$$

S pomočjo enačb

$$\mathbf{N}_p^k(x_p^k) = \mathcal{N}_p^k(x_p^k)\mathbf{e}_{x,p}(x_p^k) + \mathcal{Q}_p^k(x_p^k)\mathbf{e}_{z,b}(x_p^k) = \mathcal{R}_{X,p}^k(x_p^k)\mathbf{E}_X + \mathcal{R}_{Z,p}^k(x_p^k)\mathbf{E}_Z, \quad (2.28)$$

$$\mathbf{M}_p^k(x_p^k) = \mathcal{M}_p^k(x_p^k)\mathbf{e}_{y,p}(x_p^k) = \mathcal{M}_{Y,p}^k(x_p^k)\mathbf{E}_Y, \quad (2.29)$$

$$\mathcal{N}_p^k(x_p^k) = \mathcal{R}_{X,p}^k(x_p^k) \cos \varphi_p^k(x_p^k) - \mathcal{R}_{Z,p}^k(x_p^k) \sin \varphi_p^k(x_p^k), \quad (2.30)$$

$$\mathcal{Q}_p^k(x_p^k) = \mathcal{R}_{X,p}^k(x_p^k) \sin \varphi_p^k(x_p^k) + \mathcal{R}_{Z,p}^k(x_p^k) \cos \varphi_p^k(x_p^k), \quad (2.31)$$

so ravnotežne enačbe prednapetih kablov v komponentni obliki sledeče ($k = 1, 2, \dots, n_p$):

$$\frac{d\mathcal{R}_{X,p}^k(x_p^k)}{dx_p^k} + p_{X,p}^k(x_p^k) = 0, \quad (2.32)$$

$$\frac{d\mathcal{R}_{Z,p}^k(x_p^k)}{dx_p^k} + p_{Z,p}^k(x_p^k) = 0, \quad (2.33)$$

$$\frac{d\mathcal{M}_p^k(x_p^k)}{dx_p^k} - (1 + \varepsilon_p^k(x_p^k))\mathcal{Q}_p^k(x_p^k) = 0. \quad (2.34)$$

2.1.3 Konstitucijske enačbe

S konstitucijskimi enačbami ravnotežne količine $\mathcal{N}_c(x_c)$, $\mathcal{M}_c(x_c)$, $\mathcal{N}_p^k(x_p^k)$ in $\mathcal{M}_p^k(x_p^k)$ povežemo z deformacijskimi količinami $\varepsilon_{c0}(x_c)$, $\kappa_c(x_c)$, $\varepsilon_p^k(x_p^k)$ in $\kappa_p^k(x_p^k)$ ($k = 1, 2, \dots, n_p$). V ta namen vpeljemo konstitucijske osne sile $\mathcal{N}_{c,c}(x_c)$ in $\mathcal{N}_{c,p}^k(x_p^k)$ ter konstitucijske upogibne momente $\mathcal{M}_{c,c}(x_c)$ in $\mathcal{M}_{c,p}^k(x_p^k)$ ($k = 1, 2, \dots, n_p$). Konstitucijske enačbe zapišemo ločeno za betonski del nosilca in za prednapete kable:

betonski del nosilca:

$$\mathcal{N}_c(x_c) = \mathcal{N}_{c,c}(x_c, \varepsilon_{c0}(x_c), \kappa_c(x_c)), \quad (2.35)$$

$$\mathcal{M}_c(x_c) = \mathcal{M}_{c,c}(x_c, \varepsilon_{c0}(x_c), \kappa_c(x_c)), \quad (2.36)$$

prednapeti kabli ($k = 1, 2, \dots, n_p$):

$$\mathcal{N}_p^k(x_p^k) = \mathcal{N}_{c,p}^k(x_p^k, \varepsilon_p^k(x_p^k), \kappa_p^k(x_p^k)), \quad (2.37)$$

$$\mathcal{M}_p^k(x_p^k) = \mathcal{M}_{c,p}^k(x_p^k, \varepsilon_p^k(x_p^k), \kappa_p^k(x_p^k)). \quad (2.38)$$

Omenili smo, da lahko prednapete jeklene kable zaradi majhne upogibne togosti obravnavamo kot jeklene vrvi. V tem primeru velja $\mathcal{M}_{c,p}^k(x_p^k, \varepsilon_p^k(x_p^k), \kappa_p^k(x_p^k)) = 0$ in posledično tudi $\mathcal{M}_p^k(x_p^k) = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n_p$), pri tem pa $\kappa_p^k(x_p^k) \neq 0$. S tem je enačbi (2.38) identično zadoščeno. V nadaljevanju izrazimo $\mathcal{N}_{c,c}(x_c)$ in $\mathcal{N}_p^k(x_p^k)$ ($k = 1, 2, \dots, n_p$) ter $\mathcal{M}_{c,c}(x_c)$ z napetostmi. V primeru prednapetih betonskih linijskih nosilcev jih določajo enačbe:

$$\mathcal{N}_{c,c}(x_c, \varepsilon_{c0}, \kappa_c) = \int_{A_c} \sigma_c(x_c, \varepsilon_{c0}, \kappa_c) dA_c + \sum_{j=1}^{n_s} \sigma_s(x_c, \varepsilon_{c0}, \kappa_c) A_s^j, \quad (2.39)$$

$$\mathcal{M}_{c,c}(x_c, \varepsilon_{c0}, \kappa_c) = \int_{A_c} \sigma_c(x_c, \varepsilon_{c0}, \kappa_c) z dA_c + \sum_{j=1}^{n_s} \sigma_s(x_c, \varepsilon_{c0}, \kappa_c) z_s^j A_s^j, \quad (2.40)$$

$$\mathcal{N}_{c,p}^k(x_p^k, \varepsilon_p^k) = \sigma_p(x_p^k, \varepsilon_p^k) A_p^k, \quad (k = 1, 2, \dots, n_p). \quad (2.41)$$

V enačbah (2.39)–(2.41) predstavlja A_s^j ploščino prečnega prereza j -te armaturne palice z oddaljenostjo z_s^j od referenčne osi betona in A_p^k ploščino prečnega prereza k -tega prednapetega kabla (slika 2.1). Pri tem $\sigma_c(x_c, \varepsilon_{c0}, \kappa_c)$, $\sigma_s(x_c, \varepsilon_{c0}, \kappa_c)$ in $\sigma_p(x_p^k, \varepsilon_p^k)$ po vrsti označujejo fizikalne normalne napetosti v betonu ter jeklu za armiranje in prednapenjanje. Z deformacijskimi količinami prednapetega nosilca jih formalno povežemo z enačbami:

$$\sigma_c = \mathcal{F}_c(\varepsilon_{c0}, \kappa_c), \quad (2.42)$$

$$\sigma_s = \mathcal{F}_s(\varepsilon_{c0}, \kappa_c), \quad (2.43)$$

$$\sigma_p = \mathcal{F}_p(\varepsilon_p^k + \varepsilon_{p,\text{predn}}^k), \quad (k = 1, 2, \dots, n_p), \quad (2.44)$$

kjer smo za vse kable predpostavili enak konstitucijski zakon. Funkcije \mathcal{F}_c , \mathcal{F}_s in \mathcal{F}_p so poljubne in jih določimo s preizkusi. Z njimi lahko opišemo elastično, hiperelastično, plastično in tudi viskoplastično obnašanje prednapetih betonskih nosilcev. Pri prednapetih betonskih nosilcih je jeklo za prednapenjanje predhodno napeto z začetno silo prednapetja $\mathcal{N}_{p,\text{predn}}^k$ oziroma začetno deformacijo prednapetja $\varepsilon_{p,\text{predn}}^k = \mathcal{N}_{p,\text{predn}}^k / E_p A_p^k$ ($k = 1, 2, \dots, n_p$). Pri tem zaenkrat v disertaciji vpliva izgub sile prednapetja zaradi reoloških pojavov ne upoštevamo.

Povedali smo že, da pri izpeljavi modela vrvi predpostavimo $\mathcal{M}_p^k(x_p^k) = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n_p$). Ta predpostavka nam omogoča tudi poenostavitev ravnotežnih enačb prednapetih kablov. To na kratko predstavimo v nadaljevanju. Ker je $\mathcal{M}_p^k(x_p^k) = 0$, velja tudi $d\mathcal{M}_p^k(x_p^k)/dx_p^k = 0$ in posledično $\mathcal{Q}_p^k(x_p^k) = 0$. Tako je enačbi (2.34) identično zadoščeno. Če v izrazih (2.30) in (2.31) upoštevamo $\mathcal{Q}_p^k(x_p^k) = 0$, se enačbe poenostavijo ($k = 1, 2, \dots, n_p$):

$$\mathcal{R}_{X,p}^k(x_p^k) = \mathcal{N}_p^k(x_p^k) \cos \varphi_p^k(x_p^k), \quad (2.45)$$

$$\mathcal{R}_{Z,p}^k(x_p^k) = -\mathcal{N}_p^k(x_p^k) \sin \varphi_p^k(x_p^k). \quad (2.46)$$

Enačbi (2.45) in (2.46) upoštevamo v ravnotežnih enačbah (2.32) in (2.33) in dobimo:

$$\frac{d(\mathcal{N}_p^k(x_p^k) \cos \varphi_p^k(x_p^k))}{dx_p^k} + p_{X,p}^k(x_p^k) = 0, \quad (2.47)$$

$$\frac{d(-\mathcal{N}_p^k(x_p^k) \sin \varphi_p^k(x_p^k))}{dx_p^k} + p_{Z,p}^k(x_p^k) = 0. \quad (2.48)$$

V nadaljevanju enačbi odvajamo in pomnožimo s $\cos \varphi_p^k(x_p^k)$ oziroma s $\sin \varphi_p^k(x_p^k)$ ter seštejemo. Dobimo preoblikovane ravnotežne enačbe ($k = 1, 2, \dots, n_p$):

$$\frac{d\mathcal{N}_p^k(x_p^k)}{dx_p^k} + (p_{X,p}^k(x_p^k) \cos \varphi_p^k(x_p^k) - p_{Z,p}^k(x_p^k) \sin \varphi_p^k(x_p^k)) = 0. \quad (2.49)$$

Podobno dobimo po kratkem računu še druge ravnotežne enačbe ($k = 1, 2, \dots, n_p$):

$$-\mathcal{N}_p^k(x_p^k) \kappa_p^k(x_p^k) + (p_{X,p}^k(x_p^k) \sin \varphi_p^k(x_p^k) + p_{Z,p}^k(x_p^k) \cos \varphi_p^k(x_p^k)) = 0. \quad (2.50)$$

Glede na povedano nadomestimo ravnotežne enačbe prednapetih kablov (2.32)–(2.34) s preoblikovanimi ravnotežnimi enačbami (2.49) in (2.50).

2.1.4 Vezne enačbe

Z veznimi enačbami opišemo interakcijo na stiku med betonom in prednapetimi kabli. Ker smo pri izpeljavi matematičnega modela predpostavili, da se beton in prednapeti kabli na stiku samo zamaknejo, ne morejo pa se razmakniti oziroma vtisniti drug v drugega (upoštevamo tudi $e = 0$), na stikih velja ($k = 1, 2, \dots, n_p$)

$$\mathbf{R}_c = \mathbf{R}_c(x_c, z_c^k = z_p^k) = \mathbf{R}_p^k(x_p^{*k}, z_p^k), \quad (2.51)$$

oziroma v komponentni obliki

$$x_c + u_c(x_c) + z_c^k \sin \varphi_c(x_c) = x_p^{*k} + u_p^k(x_p^{*k}), \quad (2.52)$$

$$w_c(x_c) + z_c^k \cos \varphi_c(x_c) = w_p^k(x_p^{*k}). \quad (2.53)$$

Enačbe (2.51) oziroma (2.52) in (2.53) v nadaljevanju imenujemo kinematične vezne enačbe. Zaradi njihove posebne strukture so zveze med nekaterimi kinematičnimi količinami prednapetega betonskega nosilca zelo preproste. To ugotovimo tako, da enačbe (2.52) in (2.53) odvajamo po x_c :

$$1 + \frac{du_c(x_c)}{dx_c} + z_c^k \cos \varphi_c(x_c) \frac{d\varphi_c(x_c)}{dx_c} = \frac{dx_p^{*k}}{dx_c} \left[1 + \frac{du_p^k(x_p^{*k})}{dx_c} \right], \quad (2.54)$$

$$\frac{dw_c(x_c)}{dx_c} - z_c^k \sin \varphi_c(x_c) \frac{d\varphi_c(x_c)}{dx_c} = \frac{dx_p^{*k}}{dx_c} \left[\frac{dw_p^k(x_p^{*k})}{dx_c} \right]. \quad (2.55)$$

Ko v enačbah (2.54) in (2.55) upoštevamo kinematične enačbe (2.7)–(2.12), dobimo:

$$\left(1 + \varepsilon_{c0}(x_c) + z_c^k \frac{d\varphi_c(x_c)}{dx_c} \right) \cos \varphi_c(x_c) = \frac{dx_p^{*k}}{dx_c} \left[\left(1 + \varepsilon_p^k(x_p^{*k}) \right) \cos \varphi_p^k(x_p^{*k}) \right], \quad (2.56)$$

$$\left(1 + \varepsilon_{c0}(x_c) + z_c^k \frac{d\varphi_c(x_c)}{dx_c} \right) \sin \varphi_c(x_c) = \frac{dx_p^{*k}}{dx_c} \left[\left(1 + \varepsilon_p^k(x_p^{*k}) \right) \sin \varphi_p^k(x_p^{*k}) \right]. \quad (2.57)$$

V nadaljevanju enačbe (2.56) in (2.57) med seboj delimo in dobimo preproste zveze ($k = 1, 2, \dots, n_p$):

$$\tan \varphi_c(x_c) = \tan \varphi_p^k(x_p^{*k}) \quad \rightarrow \quad \varphi_c(x_c) = \varphi_p^k(x_p^{*k}). \quad (2.58)$$

S pomočjo enačb (2.54) in (2.55) lahko ugotovimo tudi zveze dx_p^{*k}/dx_c ($k = 1, 2, \dots, n_p$). Po kratkem računu dobimo:

$$\frac{dx_p^{*k}}{dx_c} = \frac{(1 + \varepsilon_{c0}(x_c) + z_c^k \kappa_c(x_c))}{(1 + \varepsilon_p^k(x_p^{*k}))}. \quad (2.59)$$

Enostavno tudi pokažemo, da so enačbe (2.8) in (2.11) ter enačbe (2.9) in (2.12) identične. V ta namen najprej enačbe (2.11) pomnožimo z enačbami (2.59), pri tem upoštevamo enačbe (2.55), (2.58) in (2.59) in dobimo:

$$\frac{dw_p^k(x_p^{*k})}{dx_p^{*k}} \frac{dx_p^{*k}}{dx_c} + (1 + \varepsilon_p^k(x_p^{*k})) \sin \varphi_p^k(x_p^{*k}) \frac{dx_p^{*k}}{dx_c} = 0. \quad \rightarrow \quad (2.60)$$

$$\frac{dw_c(x_c)}{dx_c} + (1 + \varepsilon_{c0}(x_c)) \sin \varphi_c(x_c) = 0. \quad (2.61)$$

Na podoben način pokažemo, da sta identični tudi enačbi (2.9) in (2.12):

$$\frac{d\varphi_p^k(x_p^{*k})}{dx_p^{*k}} \frac{dx_p^{*k}}{dx_c} - \kappa_p^k(x_p^{*k}) \frac{dx_p^{*k}}{dx_c} = 0 \quad \rightarrow \quad (2.62)$$

$$\kappa_c(x_c) = \kappa_p^k(x_p^{*k}) \frac{dx_p^{*k}}{dx_c} \quad \rightarrow \quad \frac{d\varphi_c(x_c)}{dx_c} - \kappa_c(x_c) = 0. \quad (2.63)$$

S pomočjo enačb (2.63) lahko določimo tudi zvezo med psevdoukrivljenostjo betonskega dela nosilca in psevdoukrivljenostmi prednapetih kablov ($k = 1, 2, \dots, n_p$):

$$\kappa_p^k(x_p^{*k}) = \frac{(1 + \varepsilon_p^k(x_p^{*k}))}{(1 + \varepsilon_{c0}(x_c) + z_c^k \kappa_c(x_c))} \kappa_c(x_c). \quad (2.64)$$

Ob upoštevanju zgoraj navedenih dejstev se kinematične enačbe prednapetega betonskega nosilca (2.7)–(2.12) bistveno poenostavijo. Nadomestimo jih s sistemom enačb ($k = 1, 2, \dots, n_p$):

$$1 + \frac{du_c(x_c)}{dx_c} - (1 + \varepsilon_{c0}(x_c)) \cos \varphi_c(x_c) = 0, \quad (2.65)$$

$$\frac{dw_c(x_c)}{dx_c} + (1 + \varepsilon_{c0}(x_c)) \sin \varphi_c(x_c) = 0, \quad (2.66)$$

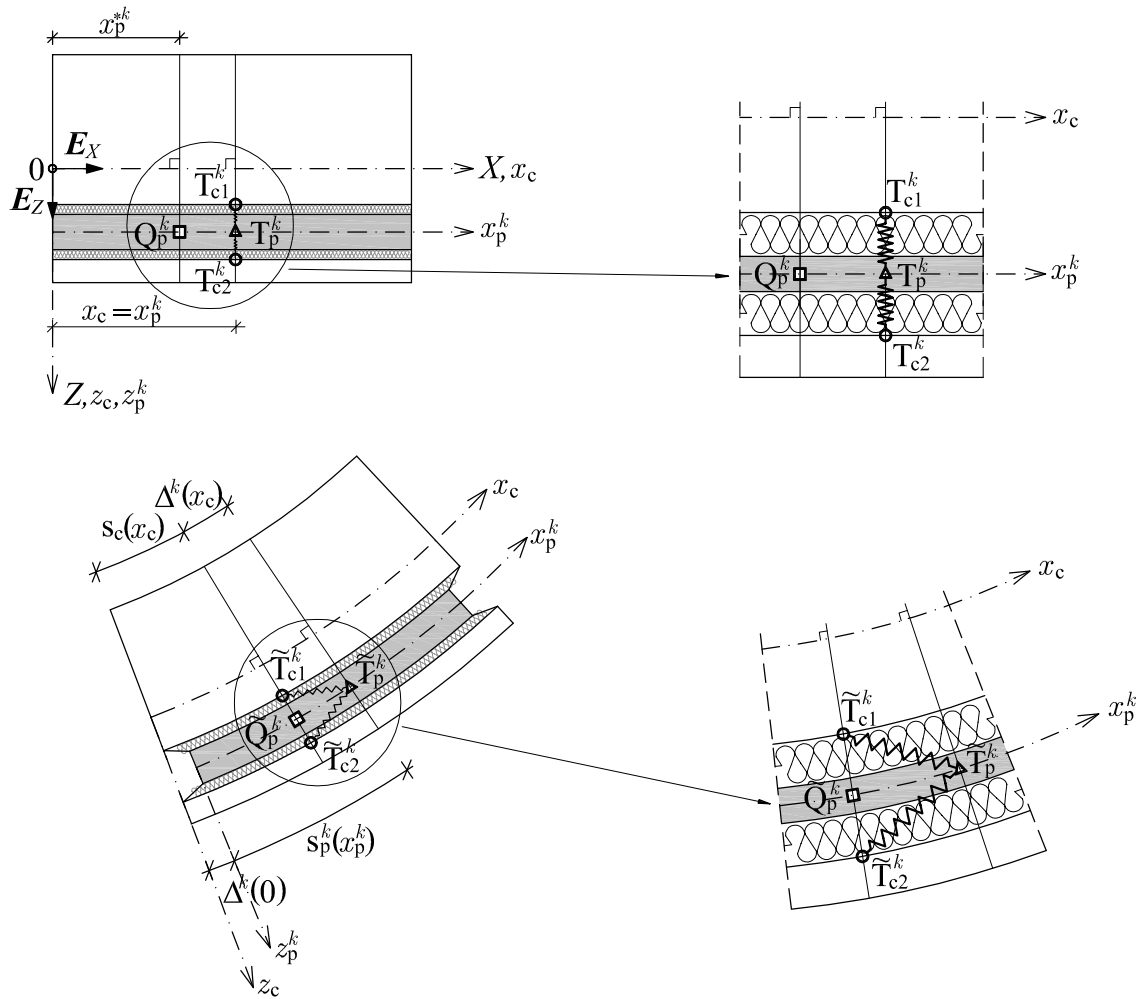
$$\frac{d\varphi_c(x_c)}{dx_c} - \kappa_c(x_c) = 0, \quad (2.67)$$

$$1 + \frac{du_p^k(x_p^{*k})}{dx_p^{*k}} - (1 + \varepsilon_p^k(x_p^{*k})) \cos \varphi_c(x_c) = 0, \quad (2.68)$$

$$w_p^k(x_p^{*k}) = w_c(x_c) + z_c^k \cos \varphi_c(x_c), \quad (2.69)$$

$$\varphi_p^k(x_p^{*k}) = \varphi_c(x_c). \quad (2.70)$$

Kar nekajkrat smo že omenili, da se delca betona in k -tega prednapetega kabla na stiku medsebojno samo zamakneta in ne razmakneta oziroma ne vtisneta drug v drugega. Geometrijski pomen zamika je nazorno prikazan na sliki 2.3. Koordinate značilnih točk za opis zamika smo na sliki 2.3 označili s $\tilde{T}_p^k(x_p^k, z_p^k)$, $\tilde{Q}_p^k(x_p^{*k}, z_p^k)$, $\tilde{T}_{c1}^k(x_c, z_{c1}^k)$, $\tilde{T}_{c2}^k(x_c, z_{c2}^k)$, kjer je $x_p^k = x_c^k$. Tako lahko s pomočjo slike 2.3 na preprost način zapišemo zvezo med deformacijskimi količinami $\varepsilon_{c0}(x_c)$ in $\varepsilon_p^k(x_p^k)$ ($k = 1, 2, \dots, n_p$) in zamiki $\Delta^k(x_c)$ na stiku. Pri tem zaradi preglednosti ponovno upoštevamo $e = 0$, kar pomeni $z_{c1}^k = z_{c2}^k = z_c^k = z_p^k$.



Slika 2.3: Geometrijski pomen zamika na stiku med betonom in prednapetim kablom.

Figure 2.3: Geometrical meaning of slip between concrete and prestressing tendon.

Zamik na stiku torej določa enačba

$$s_c(x_c) + \Delta^k(x_c) = \Delta^k(0) + s_p^k(x_p^k) \quad \rightarrow \quad \Delta^k(x_c) = \Delta^k(0) + \left[s_p^k(x_c) - s_c(x_c) \right], \quad (2.71)$$

kjer predstavljajo $s_c(x_c)$ in $s_p^k(x_p^k = x_c)$ ($k = 1, 2, \dots, n_p$) deformirani dolžini od začetnega delca betonskega dela nosilca oziroma prednapetih kablov na stiku do izbranega delca. Določimo jih z izrazi ($k = 1, 2, \dots, n_p$):

$$s_c(x_c) = \int_0^{x_c} \left(1 + \varepsilon_{c0}(x) + z_c^k \kappa_c(x) \right) dx, \quad (2.72)$$

$$s_p^k(x_p^k = x_c) = \int_0^{x_p^k = x_c} (1 + \varepsilon_p^k(x)) dx. \quad (2.73)$$

Ko izraze (2.72) in (2.73) vstavimo v enačbe (2.71), dobimo ($k = 1, 2, \dots, n_p$):

$$\Delta^k(x_c) = \Delta(0) + \int_0^{x_c} [\varepsilon_p^k(x) - (\varepsilon_{c0}(x) + z_c^k \kappa_c(x))] dx \quad (2.74)$$

oziroma

$$\frac{d\Delta^k(x_c)}{dx_c} = \varepsilon_p^k(x_c) - (\varepsilon_{c0}(x_c) + z_c^k \kappa_c(x_c)) = \varepsilon_p^k(x_c) - \varepsilon_c(x_c), \quad (2.75)$$

kjer je $\varepsilon_c(x_c) = \varepsilon_{c0}(x_c) + z_c^k \kappa_c(x_c)$. Z upoštevanjem zvez (2.59) pa lahko zamik na stiku med betonom in k -tim prednapetim kablom zapišemo tudi z izrazom ($k = 1, 2, \dots, n_p$) (Čas, 2004):

$$\Delta^k(x_c) = \int_{x_p^{*k}}^{x_c} (1 + \varepsilon_p^k(x)) dx. \quad (2.76)$$

2.1.5 Konstitucijski zakon stika

S konstitucijskim zakonom stika definiramo zvezo med strižno komponento kontaktne linijske obtežbe in zamikom na stiku med betonom in prednapetim kablom. Skladno s tretjim Newtonovim zakonom velja na stiku enačba ($k = 1, 2, \dots, n_p$):

$$\mathbf{p}_c^k(x_c) + \mathbf{p}_p^k(x_p^k = x_c) = \mathbf{0} \quad (2.77)$$

oziroma v komponentni obliki glede na prostorsko bazo ($k = 1, 2, \dots, n_p$):

$$p_{X,c}^k(x_c) + p_{X,p}^k(x_p^k = x_c) = 0, \quad (2.78)$$

$$p_{Z,c}^k(x_c) + p_{Z,p}^k(x_p^k = x_c) = 0. \quad (2.79)$$

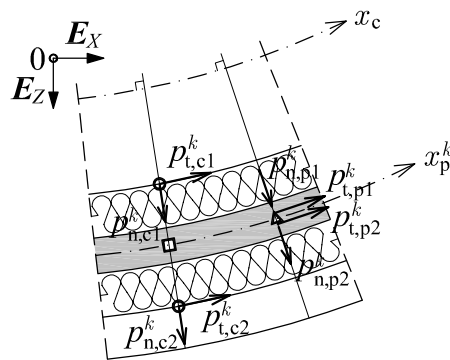
V enačbah (2.13)–(2.16) smo kontaktno linijsko obtežbo, ki deluje na stiku med betonom in jeklom za prednapenjanje, zapisali tudi v materialnem koordinatnem sistemu. V disertaciji materialne bazne vektorje, na primer za betonski del nosilca, označimo $e_{t,c} \equiv e_{x,c}$ in $e_{n,c} \equiv e_{z,c}$. S tem poudarimo, da gre za tangentni in normalni vektor glede na deformirano referenčno os. Posledično pripadajoče komponente kontaktne linijske obtežbe imenujemo tangentna (strižna) in normalna komponenta (slika 2.4). S pomočjo slike 2.4 zapišemo zveze ($k = 1, 2, \dots, n_p$):

$$p_{t,c}^k(x_c) = p_{t,c1}^k(x_c) + p_{t,c2}^k(x_c), \quad (2.80)$$

$$p_{t,p}^k(x_p^k) = p_{t,p1}^k(x_p^k) + p_{t,p2}^k(x_p^k), \quad (2.81)$$

$$p_{n,c}^k(x_c) = p_{n,c1}^k(x_c) + p_{n,c2}^k(x_c), \quad (2.82)$$

$$p_{n,p}^k(x_p^k) = p_{n,p1}^k(x_p^k) + p_{n,p2}^k(x_p^k). \quad (2.83)$$



Slika 2.4: Komponente kontaktne linijske obtežbe na stiku med betonom in prednapetim kablom.

Figure 2.4: Components of bond stress between concrete and prestressing tendon.

Z upoštevanjem enačb (2.80)–(2.83) pa zapišemo tudi zveze med komponentami kontaktne linijske obtežbe v različnih bazah:

za betonski del nosilca ($k = 1, 2, \dots, n_p$):

$$p_{X,c}^k(x_c) = p_{t,c}^k(x_c) \cos \varphi_c(x_c) + p_{n,c}^k(x_c) \sin \varphi_c(x_c), \quad (2.84)$$

$$p_{Z,c}^k(x_c) = -p_{t,c}^k(x_c) \sin \varphi_c(x_c) + p_{n,c}^k(x_c) \cos \varphi_c(x_c), \quad (2.85)$$

za prednapete kable ($k = 1, 2, \dots, n_p$):

$$p_{X,p}^k(x_p^k) = p_{t,p}^k(x_p^k) \cos \varphi_p^k(x_p^k) + p_{n,p}^k(x_p^k) \sin \varphi_p^k(x_p^k), \quad (2.86)$$

$$p_{Z,p}^k(x_p^k) = -p_{t,p}^k(x_p^k) \sin \varphi_p^k(x_p^k) + p_{n,p}^k(x_p^k) \cos \varphi_p^k(x_p^k). \quad (2.87)$$

V enačbah (2.84)–(2.87) predstavljata $p_{t,c}^k(x_c)$ in $p_{n,c}^k(x_c)$ tangencialno (strižno) oziroma normalno komponento kontaktnega napetostnega vektorja, s katero k -ti prednapeti kabel deluje na betonski del nosilca. Podobno pa $p_{t,p}^k(x_p^k)$ in $p_{n,p}^k(x_p^k)$ predstavljata tangencialno (strižno) in normalno komponento kontaktnega napetostnega vektorja, s katero betonski del nosilca deluje na k -ti prednapeti kabel. Ko enačbe (2.84)–(2.87) vstavimo v ravnotežne enačbe (2.49) in (2.50), dobijo te znane oblike ravnotežnih enačb za vrvi ($k = 1, 2, \dots, n_p$):

$$\frac{d\mathcal{N}_p^k(x_p^k)}{dx_p^k} + p_{t,p}^k(x_p^k) = 0, \quad (2.88)$$

$$-\mathcal{N}_p^k(x_p^k) \kappa_p^k(x_p^k) + p_{n,p}^k(x_p^k) = 0. \quad (2.89)$$

V splošnem lahko konstitucijski zakon stika med betonom in prednapetimi kabli zapišemo v obliki ($k = 1, 2, \dots, n_p$):

$$p_{t,c}^k(x_c) = \mathcal{G}_{t,c}^k(\Delta^k(x_c), p_{n,c}^k(x_c), x_c, \dots). \quad (2.90)$$

Funkcije $\mathcal{G}_{t,c}^k$ ($k = 1, 2, \dots, n_p$) so v splošnem odvisne od zamika, normalne komponente kontaktne linijske obtežbe, lege in številnih drugih parametrov. Kot vse konstitucijske zveze tudi te določimo s

preizkusi. Te zveze v literaturi pogosto imenujejo *strižni tok-zamik*. Najpreprostejša je linearna zveza (Čas, 2004)

$$p_{t,c}^k(x_c) = K \Delta^k(x_c), \quad (2.91)$$

kjer predstavlja K koeficient togosti stika.

Kot je pokazal Čas v svoji doktorski disertaciji (Čas, 2004), so pri gradbenih konstrukcijah zamiki na stiku majhni. V tem primeru lahko v osnovnih enačbah predstavljenega matematičnega modela še dodatno upoštevamo ($k = 1, 2, \dots, n_p$):

$$\varphi_p^k(x_p^k) \approx \varphi_p^k(x_p^{*k}) = \varphi_c(x_c), \quad (2.92)$$

$$u_p^k(x_p^{*k}) \approx u_p^k(x_p^k), \quad (2.93)$$

$$w_p^k(x_p^{*k}) \approx w_p^k(x_p^k), \quad (2.94)$$

$$\varepsilon_p^k(x_p^{*k}) \approx \varepsilon_p^k(x_p^k), \quad (2.95)$$

$$\kappa_p^k(x_p^{*k}) \approx \kappa_p^k(x_p^k). \quad (2.96)$$

Če enačbo (2.92) upoštevamo v enačbah (2.84)–(2.87), lahko ob upoštevanju enačb (2.78) in (2.79) dobimo poenostavljene zveze tudi za komponente kontaktne linijske obtežbe v materialni bazi ($k = 1, 2, \dots, n_p$):

$$p_{n,p}^k(x_p^k) \approx -p_{n,c}^k(x_c), \quad (2.97)$$

$$p_{t,p}^k(x_p^k) \approx -p_{t,c}^k(x_c). \quad (2.98)$$

2.1.6 Posplošene ravnotežne enačbe

Posplošene ravnotežne enačbe predstavljenega matematičnega modela za analizo prednapetih betonskih linijskih konstrukcij pri sobni temperaturi sestavljajo kinematične, ravnotežne, konstitucijske in vezne enačbe:

kinematične enačbe:

$$1 + \frac{du_c(x_c)}{dx_c} - (1 + \varepsilon_{c0}(x_c)) \cos \varphi_c(x_c) = 0, \quad (2.99)$$

$$\frac{dw_c(x_c)}{dx_c} + (1 + \varepsilon_{c0}(x_c)) \sin \varphi_c(x_c) = 0, \quad (2.100)$$

$$\frac{d\varphi_c(x_c)}{dx_c} - \kappa_c(x_c) = 0, \quad (2.101)$$

$$1 + \frac{du_p^k(x_p^k)}{dx_c} - (1 + \varepsilon_p^k(x_p^k)) \cos \varphi_c(x_c) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n_p), \quad (2.102)$$

ravnotežne enačbe:

$$\frac{d\mathcal{R}_{X,c}(x_c)}{dx_c} + q_{X,c}(x_c) + \sum_{k=1}^{n_p} p_{X,c}^k(x_c) = 0, \quad (2.103)$$

$$\frac{d\mathcal{R}_{Z,c}(x_c)}{dx_c} + q_{Z,c}(x_c) + \sum_{k=1}^{n_p} p_{Z,c}^k(x_c) = 0, \quad (2.104)$$

$$\frac{d\mathcal{M}_c(x_c)}{dx_c} - (1 + \varepsilon_{c0}(x_c)) \mathcal{Q}_c(x_c) + m_{Y,c}(x_c) + \sum_{k=1}^{n_p} p_{X,c}^k(x_c) z_c^k = 0, \quad (2.105)$$

$$\frac{d\mathcal{N}_p^k(x_p^k)}{dx_p^k} + p_{t,p}^k(x_p^k) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n_p), \quad (2.106)$$

$$-\mathcal{N}_p^k(x_p^k) \left(\frac{(1 + \varepsilon_p^k(x_p^k))}{(1 + \varepsilon_{c0}(x_c) + z_c^k \kappa_c(x_c))} \kappa_c(x_c) \right) + p_{n,p}^k(x_p^k) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n_p), \quad (2.107)$$

konstitucijske enačbe:

$$\mathcal{N}_c(x_c) = \mathcal{N}_{c,c}(x_c, \varepsilon_{c0}, \kappa_c), \quad (2.108)$$

$$\mathcal{M}_c(x_c) = \mathcal{M}_{c,c}(x_c, \varepsilon_{c0}, \kappa_c), \quad (2.109)$$

$$\mathcal{N}_p^k(x_p^k) = \mathcal{N}_{c,p}^k(x_p^k, \varepsilon_p^k), \quad (k = 1, 2, \dots, n_p), \quad (2.110)$$

vezne enačbe:

$$x_c + u_c(x_c) + z_c^k \sin \varphi_c(x_c) = x_p^{*k} + u_p^k(x_p^k), \quad (k = 1, 2, \dots, n_p), \quad (2.111)$$

$$\Delta^k(x_c) = \int_{x_p^{*k}}^{x_c} (1 + \varepsilon_p^k(x)) dx, \quad (k = 1, 2, \dots, n_p), \quad (2.112)$$

$$p_{t,c}^k(x_c) = \mathcal{G}_{t,c}^k(\Delta^k(x_c), p_{n,c}^k(x_c), x_c, \dots), \quad (k = 1, 2, \dots, n_p), \quad (2.113)$$

$$p_{X,c}^k(x_c) = p_{t,c}^k(x_c) \cos \varphi_c(x_c) - p_{n,p}^k(x_p^k) \sin \varphi_c(x_c), \quad (k = 1, 2, \dots, n_p), \quad (2.114)$$

$$p_{Z,c}^k(x_c) = -p_{t,c}^k(x_c) \sin \varphi_c(x_c) - p_{n,p}^k(x_p^k) \cos \varphi_c(x_c), \quad (k = 1, 2, \dots, n_p), \quad (2.115)$$

$$p_{X,p}^k(x_p^k) = -p_{X,c}^k(x_c), \quad (k = 1, 2, \dots, n_p), \quad (2.116)$$

$$p_{Z,p}^k(x_p^k) = -p_{Z,c}^k(x_c), \quad (k = 1, 2, \dots, n_p) \quad (2.117)$$

ter pripadajoči statični in kinematični robni pogoji:

$x_c = 0$:

$$-S_{1,c} - \mathcal{R}_{X,c}(0) = 0 \quad \text{ali} \quad u_{1,c} = u_c(0), \quad (2.118)$$

$$-S_{2,c} - \mathcal{R}_{Z,c}(0) = 0 \quad \text{ali} \quad u_{2,c} = w_c(0), \quad (2.119)$$

$$-S_{3,c} - \mathcal{M}_c(0) = 0 \quad \text{ali} \quad u_{3,c} = \varphi_c(0), \quad (2.120)$$

$x_c = L$:

$$-S_{4,c} + \mathcal{R}_{X,c}(L) = 0 \quad \text{ali} \quad u_{4,c} = u_c(L), \quad (2.121)$$

$$-S_{5,c} + \mathcal{R}_{Z,c}(L) = 0 \quad \text{ali} \quad u_{5,c} = w_c(L), \quad (2.122)$$

$$-S_{6,c} + \mathcal{M}_c(L) = 0 \quad \text{ali} \quad u_{6,c} = \varphi_c(L), \quad (2.123)$$

Sistem enačb (2.99)–(2.113) sestavlja $(7n_p + 8)$ diferencialnih in algebrskih enačb za prav toliko neznank: $\varepsilon_{c0}(x_c)$, $\kappa_c(x_c)$, $\varepsilon_p^k(x_p^k)$, $\mathcal{R}_{X,c}(x_c)$, $\mathcal{R}_{Z,c}(x_c)$, $\mathcal{M}_c(x_c)$, $\mathcal{N}_p^k(x_p^k)$, $u_c(x_c)$, $w_c(x_c)$, $\varphi_c(x_c)$, $u_p^k(x_p^k)$, $x_p^{*k}(x_c)$, $p_{n,p}^k(x_p^k)$, $p_{t,c}^k(x_c)$, $\Delta^k(x_c)$, ($k = 1, 2, \dots, n_p$). Ker analitične rešitve obravnavanega sistema enačb ne poznamo, jih v nadaljevanju rešimo z metodo končnih elementov.

2.2 Diskretizacija posplošenih ravnotežnih enačb prednapetega betonskega linijskega nosilca

Točno rešitev osnovnih enačb prednapetega betonskega linijskega nosilca (2.99)–(2.123) poznamo le za geometrijsko linearne in elastične modele. Zato dani sistem osnovnih enačb s pripadajočimi robnimi pogoji rešimo numerično, in sicer z metodo končnih elementov (MKE). V disertaciji predstavimo nov numerični postopek za nelinearno analizo prednapetih betonskih linijskih konstrukcij z možnostjo zamika na stiku med betonom in prednapetimi kabli. Postopek je zasnovan na t.i. deformacijski metodi končnih elementov (Planinc, 1998). Glavna prednost deformacijskih končnih elementov pred standardnimi končnimi elementi je v tem, da so deformacijski končni elementi neobčutljivi na vse vrste blokiranj. Družino novih deformacijskih končnih elementov izpeljemo s pomočjo modificiranega izreka o virtualnem delu. Zaradi preglednosti izpeljave v nadaljevanju funkcijske argumente posameznih količin izpustimo.

2.2.1 Izrek o virtualnem delu

Izrek o virtualnem delu pravi, da je v ravnotežnem stanju telesa virtualno delo zunanjih sil enako virtualnemu delu notranjih sil. Ker so zamiki na stiku med betonom in prednapetimi kabli pri običajnih gradbenih konstrukcijah majhni, predpostavimo, da je beton v stiku s prednapetimi kabli na celotni dolžini nosilca. S to predpostavko lahko zapišemo izrek o virtualnem delu z ločenima enačbama na celotnem nosilcu:

za betonski del nosilca:

$$\begin{aligned} \delta W_c &= \int_0^L \mathcal{N}_c \delta \varepsilon_{c0} dx + \int_0^L \mathcal{M}_c \delta \kappa_c dx \\ &- \int_0^L \left(q_{X,c} + \sum_{k=1}^{n_p} p_{X,c}^k \right) \delta u_c dx - \int_0^L \left(q_{Z,c} + \sum_{k=1}^{n_p} p_{Z,c}^k \right) \delta w_c dx - \end{aligned}$$

$$- \int_0^L \left(m_{Y,c} + \sum_{k=1}^{n_p} p_{X,c}^k z_c^k \right) \delta \varphi_c dx - \sum_{i=1}^6 S_{i,c} \delta u_{i,c} = 0, \quad (2.124)$$

za prednapete kable ($k = 1, 2, \dots, n_p$):

$$\begin{aligned} \delta W_p = & \sum_{k=1}^{n_p} \left[\int_0^L \mathcal{N}_p^k \delta \varepsilon_p^k dx + \int_0^L \mathcal{M}_p^k \delta \kappa_p^k dx - \right. \\ & \left. - \int_0^L p_{X,p}^k \delta u_p^k dx - \int_0^L p_{Z,p}^k \delta w_p^k dx - \int_0^L h_{Y,p}^k \delta \varphi_p^k dx \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.125)$$

Izrek o virtualnem delu prednapetega betonskega nosilca zapišemo kot vsoto izrazov (2.124) in (2.125):

$$\delta W = \delta W_c + \delta W_p \quad (2.126)$$

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_0^L \mathcal{N}_c \delta \varepsilon_{c0} dx + \int_0^L \mathcal{M}_c \delta \kappa_c dx - \\ & - \int_0^L \left(q_{X,c} + \sum_{k=1}^{n_p} p_{X,c}^k \right) \delta u_c dx - \int_0^L \left(q_{Z,c} + \sum_{k=1}^{n_p} p_{Z,c}^k \right) \delta w_c dx - \\ & - \int_0^L \left(m_{Y,c} + \sum_{k=1}^{n_p} p_{X,c}^k z_c^k \right) \delta \varphi_c dx - \sum_{i=1}^6 S_{i,c} \delta u_{i,c} + \\ & + \sum_{k=1}^{n_p} \left[\int_0^L \mathcal{N}_p^k \delta \varepsilon_p^k dx + \int_0^L \mathcal{M}_p^k \delta \kappa_p^k dx - \right. \\ & \left. - \int_0^L p_{X,p}^k \delta u_p^k dx - \int_0^L p_{Z,p}^k \delta w_p^k dx \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.127)$$

kjer smo upoštevali $h_{Y,p}^k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n_p$). V enačbi (2.127) količine δu_c , δw_c , $\delta \varphi_c$, δu_p^k , δw_p^k in $\delta \varphi_p^k$ označujejo virtualne spremembe pomikov in zasukov referenčne osi betonskega dela nosilca oziroma k -tega prednapetega kabla, $\delta \varepsilon_{c0}$, $\delta \kappa_c$, $\delta \varepsilon_p^k$ in $\delta \kappa_p^k$ pa so virtualne spremembe deformacijskih količin prednapetega betonskega nosilca. Z $\delta u_{i,c}$ in $S_{i,c}$ ($i = 1, \dots, 6$) smo označili virtualne spremembe robnih pomikov in zasukov ter zunanje točkovne sile in momente betonskega dela nosilca.

2.2.2 Modificiran izrek o virtualnem delu

Pri izpeljavi modificiranega izreka o virtualnem delu upoštevamo, da so konstitucijske enačbe (2.39)–(2.41) identično zadoščene, zato v funkcionalu (2.127) ravnotežne količine \mathcal{N}_c , \mathcal{M}_c , \mathcal{N}_p^k in \mathcal{M}_p^k nadomestimo s konstitucijskimi količinami $\mathcal{N}_{c,c}$, $\mathcal{M}_{c,c}$, $\mathcal{N}_{c,p}^k$ in $\mathcal{M}_{c,p}^k$:

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_0^L \mathcal{N}_{c,c} \delta \varepsilon_{c0} dx + \int_0^L \mathcal{M}_{c,c} \delta \kappa_c dx - \\ & - \int_0^L \left(q_{X,c} + \sum_{k=1}^{n_p} p_{X,c}^k \right) \delta u_c dx - \int_0^L \left(q_{Z,c} + \sum_{k=1}^{n_p} p_{Z,c}^k \right) \delta w_c dx - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^L \left(m_{Y,c} + \sum_{k=1}^{n_p} p_{X,c}^k z_c^k \right) \delta \varphi_c dx - \sum_{i=1}^6 S_{i,c} \delta u_{i,c} + \\
 & + \sum_{k=1}^{n_p} \left[\int_0^L \mathcal{N}_{c,p}^k \delta \varepsilon_p^k dx + \int_0^L \mathcal{M}_{c,p}^k \delta \kappa_p^k dx - \right. \\
 & \left. - \int_0^L p_{X,p}^k \delta u_p^k dx - \int_0^L p_{Z,p}^k \delta w_p^k dx \right] = 0. \tag{2.128}
 \end{aligned}$$

V nadaljevanju obravnavamo funkcional (2.128) kot vezan variacijski princip. Vezi predstavljajo kinematične enačbe (2.7)–(2.12). Zaradi preglednosti izpeljave veznih enačb (2.52)–(2.53) zaenkrat še ne obravnavamo kot vezi k funkcionalu (2.128). V izpeljavo jih bomo vključili na koncu poglavja. Pri vezanih problemih variacijskega računa vezi pomnožimo s pripadajočimi Lagrangevimi množitelji: $\mathcal{R}_{X,c}$, $\mathcal{R}_{Z,c}$ in \mathcal{M}_c ter $\mathcal{R}_{X,p}^k$, $\mathcal{R}_{Z,p}^k$ in \mathcal{M}_p^k ($k = 1, 2, \dots, n_p$). Produkte vezi in Lagrangevih množiteljev v nadaljevanju integriramo po referenčni osi betonskega dela nosilca oziroma prednapetih kablov. Dobljene izraze variramo po spremenljivkah u_c , w_c , φ_c , ε_{c0} , κ_c , $\mathcal{R}_{X,c}$, $\mathcal{R}_{Z,c}$, \mathcal{M}_c , u_p^k , w_p^k , φ_p^k , ε_p^k , κ_p^k , $\mathcal{R}_{X,p}^k$, $\mathcal{R}_{Z,p}^k$ in \mathcal{M}_p^k ($k = 1, 2, \dots, n_p$) in dobimo:

za betonski del nosilca:

$$\begin{aligned}
 \delta D_c &= \int_0^L \left(1 + u'_c - (1 + \varepsilon_{c0}) \cos \varphi_c \right) \delta \mathcal{R}_{X,c} dx + \\
 &+ \int_0^L \mathcal{R}_{X,c} \left(\delta u'_c - \cos \varphi_c \delta \varepsilon_{c0} + (1 + \varepsilon_{c0}) \sin \varphi_c \delta \varphi_c \right) dx + \\
 &\quad + \int_0^L \left(w'_c + (1 + \varepsilon_{c0}) \sin \varphi_c \right) \delta \mathcal{R}_{Z,c} dx + \\
 &+ \int_0^L \mathcal{R}_{Z,c} \left(\delta w'_c + \sin \varphi_c \delta \varepsilon_{c0} + (1 + \varepsilon_{c0}) \cos \varphi_c \delta \varphi_c \right) dx + \\
 &+ \int_0^L \left(\varphi'_c - \kappa_c \right) \delta \mathcal{M}_c dx + \int_0^L \mathcal{M}_c \left(\delta \varphi'_c - \delta \kappa_c \right) dx = 0, \tag{2.129}
 \end{aligned}$$

za prednapete kable ($k = 1, 2, \dots, n_p$):

$$\begin{aligned}
 \delta D_p &= \sum_{k=1}^{n_p} \left[\int_0^L \left(1 + (u_p^k)' - (1 + \varepsilon_p^k) \cos \varphi_p^k \right) \delta \mathcal{R}_{X,p}^k dx + \right. \\
 &+ \int_0^L \mathcal{R}_{X,p}^k \left((\delta u_p^k)' - \cos \varphi_p^k \delta \varepsilon_p^k + (1 + \varepsilon_p^k) \sin \varphi_p^k \delta \varphi_p^k \right) dx + \\
 &\quad + \int_0^L \left((w_p^k)' + (1 + \varepsilon_p^k) \sin \varphi_p^k \right) \delta \mathcal{R}_{Z,p}^k dx + \\
 &+ \int_0^L \mathcal{R}_{Z,p}^k \left((\delta w_p^k)' + \sin \varphi_p^k \delta \varepsilon_p^k + (1 + \varepsilon_p^k) \cos \varphi_p^k \delta \varphi_p^k \right) dx + \\
 &\left. + \int_0^L \left((\varphi_p^k)' - \kappa_p^k \right) \delta \mathcal{M}_p^k dx + \int_0^L \mathcal{M}_p^k \left((\delta \varphi_p^k)' - \delta \kappa_p^k \right) dx \right] = 0. \tag{2.130}
 \end{aligned}$$

Ko izraza (2.129) in (2.130) prištejemo k funkcionalu (2.128), integrale $\int_0^L \mathcal{R}_{X,c} \delta u'_c dx$, $\int_0^L \mathcal{R}_{Z,c} \delta w'_c dx$, $\int_0^L \mathcal{M}_c \delta \varphi'_c dx$, $\int_0^L \mathcal{R}_{X,p}^k (\delta u_p^k)' dx$, $\int_0^L \mathcal{R}_{Z,p}^k (\delta w_p^k)' dx$ in $\int_0^L \mathcal{M}_p^k (\delta \varphi_p^k)' dx$ ($k = 1, 2, \dots, n_p$) integriramo po delih in ko v funkcionalu (2.128) upoštevamo izraze:

$$\mathcal{N}_c = \mathcal{R}_{X,c} \cos \varphi_c - \mathcal{R}_{Z,c} \sin \varphi_c, \quad (2.131)$$

$$\mathcal{Q}_c = \mathcal{R}_{X,c} \sin \varphi_c + \mathcal{R}_{Z,c} \cos \varphi_c, \quad (2.132)$$

$$\mathcal{N}_p^k = \mathcal{R}_{X,p}^k \cos \varphi_p^k - \mathcal{R}_{Z,p}^k \sin \varphi_p^k, \quad (2.133)$$

$$\mathcal{Q}_p^k = \mathcal{R}_{X,p}^k \sin \varphi_p^k + \mathcal{R}_{Z,p}^k \cos \varphi_p^k, \quad (2.134)$$

dobimo t.i. razširjen izrek o virtualnem delu:

$$\begin{aligned} \delta \bar{W}^* = & \int_0^L \left((\mathcal{N}_{c,c} - \mathcal{N}_c) \delta \varepsilon_{c0} + (\mathcal{M}_{c,c} - \mathcal{M}_c) \delta \kappa_c - \right. \\ & - (\mathcal{R}'_{X,c} + q_{X,c} + \sum_{k=1}^{n_p} p_{X,c}^k) \delta u_c - (\mathcal{R}'_{Z,c} + q_{Z,c} + \sum_{k=1}^{n_p} p_{Z,c}^k) \delta w_c - \\ & \left. - (\mathcal{M}'_c - (1 + \varepsilon_{c0}) \mathcal{Q}_c + m_{Y,c} + \sum_{k=1}^{n_p} p_{X,c}^k z_c^k) \delta \varphi_c + \right. \\ & + (1 + u'_c - (1 + \varepsilon_{c0}) \cos \varphi_c) \delta \mathcal{R}_{X,c} + (w'_c - (1 + \varepsilon_{c0}) \sin \varphi_c) \delta \mathcal{R}_{Z,c} + (\varphi'_c - \kappa_c) \delta \mathcal{M}_c \Big) dx + \\ & + (-S_{1,c} - \mathcal{R}_{X,c}(0)) \delta u_{1,c} + (-S_{2,c} - \mathcal{R}_{Z,c}(0)) \delta u_{2,c} + (-S_{3,c} - \mathcal{M}_c(0)) \delta u_{3,c} + \\ & + (-S_{4,c} + \mathcal{R}_{X,c}(L)) \delta u_{4,c} + (-S_{5,c} + \mathcal{R}_{Z,c}(L)) \delta u_{5,c} + (-S_{6,c} + \mathcal{M}_c(L)) \delta u_{6,c} + \\ & + \sum_{k=1}^{n_p} \left[\int_0^L \left((\mathcal{N}_{c,p}^k - \mathcal{N}_p^k) \delta \varepsilon_p^k + (\mathcal{M}_{c,p}^k - \mathcal{M}_p^k) \delta \kappa_p^k - \right. \right. \\ & - ((\mathcal{R}_{X,p}^k)' + p_{X,p}^k) \delta u_p^k - ((\mathcal{R}_{Z,p}^k)' + p_{Z,p}^k) \delta w_p^k - \\ & \left. - ((\mathcal{M}_p^k)' - (1 + \varepsilon_p^k) \mathcal{Q}_p^k) \delta \varphi_p^k + \right. \\ & + (1 + (u_p^k)' - (1 + \varepsilon_p^k) \cos \varphi_p^k) \delta \mathcal{R}_{X,p}^k + \\ & + ((w_p^k)' - (1 + \varepsilon_p^k) \sin \varphi_p^k) \delta \mathcal{R}_{Z,p}^k + \\ & \left. + ((\varphi_p^k)' - \kappa_p^k) \delta \mathcal{M}_p^k \right) dx + \\ & + (-\mathcal{R}_{X,p}^k(0)) \delta u_{1,p}^k + (-\mathcal{R}_{Z,p}^k(0)) \delta u_{2,p}^k + (-\mathcal{M}_p^k(0)) \delta u_{3,p}^k + \\ & \left. + (\mathcal{R}_{X,p}^k(L)) \delta u_{4,p}^k + (\mathcal{R}_{Z,p}^k(L)) \delta u_{5,p}^k + (\mathcal{M}_p^k(L)) \delta u_{6,p}^k \right] = 0. \quad (2.135) \end{aligned}$$

Variacije δu_c , δw_c , $\delta \varphi_c$, $\delta \varepsilon_{c0}$, $\delta \kappa_c$, $\delta \mathcal{R}_{X,c}$, $\delta \mathcal{R}_{Z,c}$, $\delta \mathcal{M}_c$, δu_p^k , δw_p^k , $\delta \varphi_p^k$, $\delta \varepsilon_p^k$, $\delta \kappa_p^k$, $\delta \mathcal{R}_{X,p}^k$, $\delta \mathcal{R}_{Z,p}^k$ in $\delta \mathcal{M}_p^k$ v funkcionalu (2.135) predstavljajo poljubne neodvisne funkcije, variacije:

$$\delta u_{1,c} = \delta u_c(0), \quad \delta u_{2,c} = \delta w_c(0), \quad \delta u_{3,c} = \delta \varphi_c(0), \quad (2.136)$$

$$\delta u_{4,c} = \delta u_c(L), \quad \delta u_{5,c} = \delta w_c(L), \quad \delta u_{6,c} = \delta \varphi_c(L), \quad (2.137)$$

$$\delta u_{1,p}^k = \delta u_p^k(0), \quad \delta u_{2,p}^k = \delta w_p^k(0), \quad \delta u_{3,p}^k = \delta \varphi_p^k(0), \quad (2.138)$$

$$\delta u_{4,p}^k = \delta u_p^k(L), \quad \delta u_{5,p}^k = \delta w_p^k(L), \quad \delta u_{6,p}^k = \delta \varphi_p^k(L), \quad (2.139)$$

pa poljubne vozliščne vrednosti pomikov in zasuka prednapetega betonskega nosilca. Osnovna lema variacijskega računa pravi, da so koeficienti pri neodvisnih variacijah enaki nič. Od tod sledijo Euler-Lagrangeve enačbe ravninskega prednapetega betonskega nosilca, ki jih sestavljajo:

konstitucijske enačbe:

$x_c, x_p^k \in [0, L] :$

$$f_1 = \mathcal{N}_{c,c} - \mathcal{N}_c = 0, \quad (2.140)$$

$$f_2 = \mathcal{M}_{c,c} - \mathcal{M}_c = 0, \quad (2.141)$$

$$f_3^k = \mathcal{N}_{c,p}^k - \mathcal{N}_p^k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n_p), \quad (2.142)$$

$$f_4^k = \mathcal{M}_{c,p}^k - \mathcal{M}_p^k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n_p), \quad (2.143)$$

kinematične enačbe:

$x_c, x_p^k \in [0, L] :$

$$f_5 = 1 + u'_c - (1 + \varepsilon_{c0}) \cos \varphi_c = 0, \quad (2.144)$$

$$f_6 = w'_c + (1 + \varepsilon_{c0}) \sin \varphi_c = 0, \quad (2.145)$$

$$f_7 = \varphi'_c - \kappa_c = 0, \quad (2.146)$$

$$f_8^k = 1 + (u_p^k)' - (1 + \varepsilon_p^k) \cos \varphi_p^k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n_p), \quad (2.147)$$

$$f_9^k = (w_p^k)' + (1 + \varepsilon_p^k) \sin \varphi_p^k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n_p), \quad (2.148)$$

$$f_{10}^k = (\varphi_p^k)' - \kappa_p^k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n_p), \quad (2.149)$$

ravnotežne enačbe:

$x_c, x_p^k \in [0, L] :$

$$f_{11} = \mathcal{R}'_{X,c} + q_{X,c} + \sum_{k=1}^{n_p} p_{X,c}^k = 0, \quad (2.150)$$

$$f_{12} = \mathcal{R}'_{Z,c} + q_{Z,c} + \sum_{k=1}^{n_p} p_{Z,c}^k = 0, \quad (2.151)$$

$$f_{13} = \mathcal{M}'_c - (1 + \varepsilon_{c0}) \mathcal{Q}_c + \left(m_{Y,c} + \sum_{k=1}^{n_p} p_{X,c}^k z_c^k \right) = 0, \quad (2.152)$$

$$f_{14}^k = (\mathcal{R}_{X,p}^k)' + p_{X,p}^k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n_p), \quad (2.153)$$

$$f_{15}^k = (\mathcal{R}_{Z,p}^k)' + p_{Z,p}^k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n_p), \quad (2.154)$$

$$f_{16}^k = (\mathcal{M}_p^k)' - (1 + \varepsilon_p^k) \mathcal{Q}_p^k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n_p). \quad (2.155)$$

Pripadajoči statični (ali naravni) in kinematični (ali bistveni) robni pogoji so:

$x_c = 0$:

$$-S_{1,c} - \mathcal{R}_{X,c}(0) = 0 \quad \text{ali} \quad u_{1,c} = u_c(0), \quad (2.156)$$

$$-S_{2,c} - \mathcal{R}_{Z,c}(0) = 0 \quad \text{ali} \quad u_{2,c} = w_c(0), \quad (2.157)$$

$$-S_{3,c} - \mathcal{M}_c(0) = 0 \quad \text{ali} \quad u_{3,c} = \varphi_c(0), \quad (2.158)$$

$x_c = L$:

$$-S_{4,c} + \mathcal{R}_{X,c}(L) = 0 \quad \text{ali} \quad u_{4,c} = u_c(L), \quad (2.159)$$

$$-S_{5,c} + \mathcal{R}_{Z,c}(L) = 0 \quad \text{ali} \quad u_{5,c} = w_c(L), \quad (2.160)$$

$$-S_{6,c} + \mathcal{M}_c(L) = 0 \quad \text{ali} \quad u_{6,c} = \varphi_c(L), \quad (2.161)$$

kjer smo upoštevali, da je $\mathcal{R}_{X,p}^k(0) = \mathcal{R}_{Z,p}^k(0) = \dots = \mathcal{M}_p^k(L) = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n_p$). Napetostno in deformacijsko stanje prednapetega betonskega linijskega nosilca določajo poleg enačb (2.140)–(2.155) in robnih pogojev (2.156)–(2.161) tudi vezne enačbe (2.52) in (2.53). V podpoglavjih 2.1.2 in 2.1.3 smo posplošene ravnotežne enačbe prednapetih kablov nadomestili z enačbami za vrvi, v podpoglavju 2.1.4 pa smo z veznimi enačbami (2.52)–(2.53) modificirali kinematične enačbe (2.7)–(2.12). S temi modifikacijami v nadaljevanju preoblikujemo Euler-Lagrangeove enačbe (2.140)–(2.161) in dobimo:

konstitucijske enačbe:

$x_c, x_p^k \in [0, L]$:

$$f_1 = \mathcal{N}_{c,c} - \mathcal{N}_c = 0, \quad (2.162)$$

$$f_2 = \mathcal{M}_{c,c} - \mathcal{M}_c = 0, \quad (2.163)$$

$$f_3^k = \mathcal{N}_{c,p}^k - \mathcal{N}_p^k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n_p), \quad (2.164)$$

kinematične enačbe:

$x_c, x_p^k \in [0, L]$:

$$f_5 = 1 + u'_c - (1 + \varepsilon_{c0}) \cos \varphi_c = 0, \quad (2.165)$$

$$f_6 = w'_c + (1 + \varepsilon_{c0}) \sin \varphi_c = 0, \quad (2.166)$$

$$f_7 = \varphi'_c - \kappa_c = 0, \quad (2.167)$$

$$f_8^k = 1 + (u_p^k)' - (1 + \varepsilon_p^k) \cos \varphi_p^k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n_p), \quad (2.168)$$

$$f_9^k = w_c + z_c^k \cos \varphi_c - w_p^k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n_p), \quad (2.169)$$

$$f_{10}^k = \varphi_c - \varphi_p^k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n_p), \quad (2.170)$$

ravnotežne enačbe:

$x_c, x_p^k \in [0, L]$:

$$f_{11} = \mathcal{R}'_{X,c} + q_{X,c} + \sum_{k=1}^{n_p} p_{X,c}^k = 0, \quad (2.171)$$

$$f_{12} = \mathcal{R}'_{Z,c} + q_{Z,c} + \sum_{k=1}^{n_p} p_{Z,c}^k = 0, \quad (2.172)$$

$$f_{13} = \mathcal{M}'_c - (1 + \varepsilon_{c0}) \mathcal{Q}_c + \left(m_{Y,c} + \sum_{k=1}^{n_p} p_{X,c}^k z_c^k \right) = 0, \quad (2.173)$$

$$f_{14}^k = (\mathcal{N}_p^k)' + p_{t,p}^k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n_p), \quad (2.174)$$

$$f_{15}^k = -\mathcal{N}_p^k \kappa_p^k + p_{n,p}^k = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n_p). \quad (2.175)$$

Pomike in zasuk prednapetega betonskega linijskega nosilca določimo z integriranjem kinematičnih enačb (2.165)–(2.168):

$x_c, x_p^k \in [0, L]$:

$$u_c(x_c) = u_c(0) + \int_0^{x_c} \left((1 + \varepsilon_{c0}) \cos \varphi_c \right) dx - x_c, \quad (2.176)$$

$$w_c(x_c) = w_c(0) - \int_0^{x_c} \left((1 + \varepsilon_{c0}) \sin \varphi_c \right) dx, \quad (2.177)$$

$$\varphi_c(x_c) = \varphi_c(0) + \int_0^{x_c} \kappa_c dx, \quad (2.178)$$

$$u_p^k(x_p^k) = u_p^k(0) + \int_0^{x_p^k} \left((1 + \varepsilon_p^k) \cos \varphi_c \right) dx - x_p^k, \quad (k = 1, 2, \dots, n_p). \quad (2.179)$$

Če $u_c(0)$, $w_c(0)$, $\varphi_c(0)$, $u_p^k(0)$ ($k = 1, 2, \dots, n_p$) zadostijo bistvenim robnim pogojem pri $x_c = 0$ oziroma pri $x_p^k = 0$, so kinematične količine u_c , w_c , φ_c , u_p^k odvisne le od deformacijskih spremenljivk ε_{c0} , κ_c , ε_p^k . V splošnem moramo pomikom in zasukom zadostiti tudi pri $x_c = L$ oziroma pri $x_p^k = L$. Vsem tem pogojem lahko preprosto zadostimo, če enačbe:

$$u_c(L) = u_c(0) + \int_0^L \left((1 + \varepsilon_{c0}) \cos \varphi_c \right) dx - L, \quad (2.180)$$

$$w_c(L) = w_c(0) - \int_0^L \left((1 + \varepsilon_{c0}) \sin \varphi_c \right) dx, \quad (2.181)$$

$$\varphi_c(L) = \varphi_c(0) + \int_0^L \kappa_c dx, \quad (2.182)$$

$$u_p^k(L) = u_p^k(0) + \int_0^L \left((1 + \varepsilon_p^k) \cos \varphi_c \right) dx - L, \quad (k = 1, 2, \dots, n_p) \quad (2.183)$$

obravnavamo kot vezne enačbe deformacijskih količin prednapetega betonskega nosilca (Planinc, 1998). Na podoben način rešimo tudi ravnotežne enačbe (2.171)–(2.174):

$x_c, x_p^k \in [0, L]$:

$$\mathcal{R}_{X,c}(x_c) = \mathcal{R}_{X,c}(0) - \int_0^{x_c} \left(q_{X,c} + \sum_{k=1}^{n_p} p_{X,c}^k \right) dx, \quad (2.184)$$

$$\mathcal{R}_{Z,c}(x_c) = \mathcal{R}_{Z,c}(0) - \int_0^{x_c} \left(q_{Z,c} + \sum_{k=1}^{n_p} p_{Z,c}^k \right) dx, \quad (2.185)$$

$$\mathcal{M}_c(x_c) = \mathcal{M}_c(0) + \int_0^{x_c} \left((1 + \varepsilon_{c0}) \mathcal{Q}_c - \left(m_{Y,c} + \sum_{k=1}^{n_p} p_{X,c}^k z_c^k \right) \right) dx, \quad (2.186)$$

$$\mathcal{N}_p^k(x_p^k) = \mathcal{N}_p^k(0) - \int_0^{x_p^k} p_{t,p}^k dx, \quad (k = 1, 2, \dots, n_p). \quad (2.187)$$

Statične količine pri $x_c = L$ oziroma $x_p^k = L$ ($k = 1, 2, \dots, n_p$), ki jih potrebujemo v enačbah (2.159)–(2.161), izračunamo z enačbami:

$$\mathcal{R}_{X,c}(L) = \mathcal{R}_{X,c}(0) - \int_0^L \left(q_{X,c} + \sum_{k=1}^{n_p} p_{X,c}^k \right) dx, \quad (2.188)$$

$$\mathcal{R}_{Z,c}(L) = \mathcal{R}_{Z,c}(0) - \int_0^L \left(q_{Z,c} + \sum_{k=1}^{n_p} p_{Z,c}^k \right) dx, \quad (2.189)$$

$$\mathcal{M}_c(L) = \mathcal{M}_c(0) + \int_0^L \left((1 + \varepsilon_{c0}) \mathcal{Q}_c - \left(m_{Y,c} + \sum_{k=1}^{n_p} p_{X,c}^k z_c^k \right) \right) dx, \quad (2.190)$$

$$\mathcal{N}_p^k(L) = \mathcal{N}_p^k(0) - \int_0^L p_{t,p}^k dx, \quad (k = 1, 2, \dots, n_p). \quad (2.191)$$

Ker smo kinematične in ravnotežne enačbe točno rešili, v funkcionalu (2.135) odpadejo ustrezni členi. Da zadostimo kinematičnim robnim pogojem, oziroma da povežemo nosilce v konstrukcijo, k enačbi (2.135) dodamo še enačbe (2.180)–(2.183). Dobimo t.i. modificiran izrek o virtualnem delu:

$$\begin{aligned} \delta W^* = & \int_0^L \left((\mathcal{N}_{c,c} - \mathcal{N}_c) \delta \varepsilon_{c0} + (\mathcal{M}_{c,c} - \mathcal{M}_c) \delta \kappa_c \right) dx + \\ & + \left(u_c(L) - u_c(0) - \int_0^L \left((1 + \varepsilon_{c0}) \cos \varphi_c \right) dx + L \right) \delta \mathcal{R}_{X,c}(0) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(w_c(L) - w_c(0) + \int_0^L ((1 + \varepsilon_{c0}) \sin \varphi_c) dx \right) \delta \mathcal{R}_{Z,c}(0) + \\
 & \quad + \left(\varphi_c(L) - \varphi_c(0) - \int_0^L \kappa_c dx \right) \delta \mathcal{M}_c(0) + \\
 & + \left(-S_{1,c} - \mathcal{R}_{X,c}(0) \right) \delta u_c(0) + \left(-S_{2,c} - \mathcal{R}_{Z,c}(0) \right) \delta w_c(0) + \left(-S_{3,c} - \mathcal{M}_c(0) \right) \delta \varphi_c(0) + \\
 & + \left(-S_{4,c} + \mathcal{R}_{X,c}(L) \right) \delta u_c(L) + \left(-S_{5,c} + \mathcal{R}_{Z,c}(L) \right) \delta w_c(L) + \left(-S_{6,c} + \mathcal{M}_c(L) \right) \delta \varphi_c(L) + \\
 & \quad + \sum_{k=1}^{n_p} \left[\int_0^L \left(\mathcal{N}_{c,p}^k - \mathcal{N}_p^k \right) \delta \varepsilon_p^k dx + \right. \\
 & \quad + \left. \left(u_p^k(L) - u_p^k(0) - \int_0^L ((1 + \varepsilon_p^k) \cos \varphi_c) dx + L \right) \delta \mathcal{N}_p^k(0) + \right. \\
 & \quad \left. + \left(-\mathcal{N}_p^k(0) \right) \delta u_p^k(0) + \left(\mathcal{N}_p^k(L) \right) \delta u_p^k(L) \right] = 0. \tag{2.192}
 \end{aligned}$$

Bistvena lastnost modificiranega izreka o virtualnem delu (2.192) je, da je odvisen le od deformacijskih količin $\varepsilon_{c0}(x_c)$, $\kappa_c(x_c)$ in $\varepsilon_p^k(x_p^k)$. Ostale neznane količine (pomiki, zasuk, Lagrangevi množitelji) nastopajo le s svojimi robnimi vrednostmi. V nadaljevanju bomo dani modificiran izrek o virtualnem delu skupaj z enačbami ($k = 1, 2, \dots, n_p$):

$$-\mathcal{N}_p^k \kappa_p^k + p_{n,p}^k = 0, \tag{2.193}$$

$$\kappa_p^k - \frac{(1 + \varepsilon_p^k)}{(1 + \varepsilon_{c0} + z_c^k \kappa_c)} \kappa_c = 0, \tag{2.194}$$

$$x_c + u_c + z_c^k \sin \varphi_c - x_p^{*k} - u_p^k = 0 \tag{2.195}$$

uporabili za formulacijo deformacijskih končnih elementov prednapetega linijskega betonskega nosilca.

2.2.3 Galerkinova (standardna) metoda končnih elementov

Pri metodi končnih elementov prednapeti betonski nosilec razdelimo na končne elemente. Neznane deformacijske količine v funkcionalu (2.192) $\varepsilon_{c0}(x_c)$, $\kappa_c(x_c)$ in $\varepsilon_p^k(x_p^k)$ interpoliramo z Lagrangevimi interpolacijskimi polinomi ($k = 1, 2, \dots, n_p$):

$$\varepsilon_{c0}(x_c) = \sum_{n=1}^N P_n(x_c) \varepsilon_{c0,n}, \quad \kappa_c(x_c) = \sum_{n=1}^N P_n(x_c) \kappa_{c,n}, \tag{2.196}$$

$$\varepsilon_p^k(x_p^k) = \sum_{n=1}^N P_n(x_p^k) \varepsilon_{p,n}^k,$$

kjer predstavljajo $\varepsilon_{c0,n}$, $\kappa_{c,n}$ in $\varepsilon_{p,n}^k$ ($n = 1, 2, \dots, N$) vozliščne vrednosti deformacijskih količin. Skladno z interpolacijskimi nastavki (2.196) zapišemo tudi nastavke za variacije deformacijskih količin ($k = 1, 2, \dots, n_p$):

$$\delta \varepsilon_{c0}(x_c) = \sum_{n=1}^N P_n(x_c) \delta \varepsilon_{c0,n}, \quad \delta \kappa_c(x_c) = \sum_{n=1}^N P_n(x_c) \delta \kappa_{c,n}, \tag{2.197}$$

$$\delta \varepsilon_p^k(x_p^k) = \sum_{n=1}^N P_n(x_p^k) \delta \varepsilon_{p,n}^k.$$

Formulacija posplošenih diskretnih ravnotežnih enačb pri homogenih nosilcih je dobro znana in predstavlja osnovo za formulacijo posplošenih diskretnih ravnotežnih enačb prednapetega betonskega nosilca (Planinc, 1998). Skladno s to teorijo nastavke (2.196)–(2.197) vstavimo v modificiran izrek o virtualnem delu (2.192) in dobimo ($k = 1, 2, \dots, n_p$):

$$\begin{aligned}
\delta W^* = & \sum_{n=1}^N \left(\int_0^L (\mathcal{N}_{c,c} - \mathcal{N}_c) P_n dx \right) \delta \varepsilon_{c0,n} + \\
& + \sum_{n=1}^N \left(\int_0^L (\mathcal{M}_{c,c} - \mathcal{M}_c) P_n dx \right) \delta \kappa_{c,n} + \\
& + \sum_{k=1}^{n_p} \left[\sum_{n=1}^N \left(\int_0^L (\mathcal{N}_{c,p}^k - \mathcal{N}_p^k) P_n dx \right) \delta \varepsilon_{p,n}^k \right] + \\
& + \left(u_c(L) - u_c(0) - \int_0^L \left((1 + \sum_{n=1}^N P_n \varepsilon_{c0,n}) \cos \varphi_c \right) dx + L \right) \delta \mathcal{R}_{X,c}(0) + \\
& + \left(w_c(L) - w_c(0) + \int_0^L \left((1 + \sum_{n=1}^N P_n \varepsilon_{c0,n}) \sin \varphi_c \right) dx \right) \delta \mathcal{R}_{Z,c}(0) + \\
& + \left(\varphi_c(L) - \varphi_c(0) - \int_0^L \left(\sum_{n=1}^N P_n \kappa_{c,n} \right) dx \right) \delta \mathcal{M}_c(0) + \\
& + \sum_{k=1}^{n_p} \left[\left(u_p^k(L) - u_p^k(0) - \int_0^L \left((1 + \sum_{n=1}^N P_n \varepsilon_{p,n}^k) \cos \varphi_c \right) dx + L \right) \delta \mathcal{N}_p^k(0) \right] + \\
& + \left(-S_{1,c} - \mathcal{R}_{X,c}(0) \right) \delta u_c(0) + \left(-S_{2,c} - \mathcal{R}_{Z,c}(0) \right) \delta w_c(0) + \left(-S_{3,c} - \mathcal{M}_c(0) \right) \delta \varphi_c(0) + \\
& + \left(-S_{4,c} + \mathcal{R}_{X,c}(L) \right) \delta u_c(L) + \left(-S_{5,c} + \mathcal{R}_{Z,c}(L) \right) \delta w_c(L) + \left(-S_{6,c} + \mathcal{M}_c(L) \right) \delta \varphi_c(L) + \\
& + \sum_{k=1}^{n_p} \left[\left(-\mathcal{N}_p^k(0) \right) \delta u_p^k(0) + \left(\mathcal{N}_p^k(L) \right) \delta u_p^k(L) \right] = 0. \tag{2.198}
\end{aligned}$$

Euler-Lagrangeove enačbe k variacijskemu problemu (2.198) so ($k = 1, 2, \dots, n_p$):

$$g_{\varepsilon_{c0}}^n = \int_0^L (\mathcal{N}_{c,c} - \mathcal{N}_c) P_n dx = 0, \quad (n = 1, 2, \dots, N), \tag{2.199}$$

$$g_{\kappa_c}^n = \int_0^L (\mathcal{M}_{c,c} - \mathcal{M}_c) P_n dx = 0, \quad (n = 1, 2, \dots, N), \tag{2.200}$$

$$g_{\varepsilon_{p,n}^k}^n = \int_0^L (\mathcal{N}_{c,p}^k - \mathcal{N}_p^k) P_n dx, \quad (n = 1, 2, \dots, N), \tag{2.201}$$

$$g_{\mathcal{R}_{X,c}} = u_c(L) - u_c(0) - \int_0^L \left((1 + \sum_{n=1}^N P_n \varepsilon_{c0,n}) \cos \varphi_c \right) dx + L = 0, \tag{2.202}$$

$$g_{\mathcal{R}_{Z,c}} = w_c(L) - w_c(0) + \int_0^L \left((1 + \sum_{n=1}^N P_n \varepsilon_{c0,n}) \sin \varphi_c \right) dx = 0, \tag{2.203}$$

$$g_{\mathcal{M}_c} = \varphi_c(L) - \varphi_c(0) - \int_0^L \left(\sum_{n=1}^N P_n \kappa_{c,n} \right) dx = 0, \quad (2.204)$$

$$g_{\mathcal{N}_p^k} = u_p^k(L) - u_p^k(0) - \int_0^L \left((1 + \sum_{n=1}^N P_n \varepsilon_{p,n}^k) \cos \varphi_c \right) dx + L = 0, \quad (2.205)$$

$$g_{u_{c0}} = -S_{1,c} - \mathcal{R}_{X,c}(0) = 0, \quad (2.206)$$

$$g_{w_{c0}} = -S_{2,c} - \mathcal{R}_{Z,c}(0) = 0, \quad (2.207)$$

$$g_{\varphi_{c0}} = -S_{3,c} - \mathcal{M}_c(0) = 0, \quad (2.208)$$

$$g_{u_{p0}^k} = -\mathcal{N}_p^k(0) = 0, \quad (2.209)$$

$$g_{u_{cL}} = -S_{4,c} + \mathcal{R}_{X,c}(0) - \int_0^L \left(q_{X,c} + \sum_{k=1}^{n_p} p_{X,c}^k \right) dx = 0, \quad (2.210)$$

$$g_{w_{cL}} = -S_{5,c} + \mathcal{R}_{Z,c}(0) - \int_0^L \left(q_{Z,c} + \sum_{k=1}^{n_p} p_{Z,c}^k \right) dx = 0, \quad (2.211)$$

$$g_{\varphi_{cL}} = -S_{6,c} + \mathcal{M}_c(0) + \int_0^L \left((1 + \sum_{n=1}^N P_n \varepsilon_{c0,n}) \mathcal{Q}_c - m_{Y,c} - \sum_{k=1}^{n_p} p_{X,c}^k z_c^k \right) dx = 0, \quad (2.212)$$

$$g_{u_{pL}^k} = \mathcal{N}_p^k(0) - \int_0^L p_{t,p}^k dx = 0. \quad (2.213)$$

Poleg Euler-Lagrangeovih enačb (2.199)–(2.213) sestavljajo posplošene diskretne ravnotežne enačbe prednapetega betonskega nosilca tudi enačbe (2.193)–(2.195). Izkaže se, da je numerično ugodno z Lagrangeovimi interpolacijskimi polinomi aproksimirati tudi spremenljivki x_p^{*k} in $p_{n,p}^k$ ($k = 1, 2, \dots, n_p$):

$$x_p^{*k}(x_c) = \sum_{n=1}^N P_n(x_c) x_{p,n}^{*k}, \quad p_{n,p}^k(x_p^k) = \sum_{n=1}^N P_n(x_p^k) p_{n,p,n}^k. \quad (2.214)$$

Ko nastavke (2.214) vstavimo v enačbe (2.193)–(2.195) in točno zadostimo enačbi (2.194), dobimo ($k = 1, 2, \dots, n_p$):

$$g_{x_p^{*k}}^n = x_{c,n} + u_c + z_c^k \sin \varphi_c - x_{p,n}^{*k} - u_p^k = 0, \quad (n = 1, 2, \dots, N), \quad (2.215)$$

$$g_{p_{n,p}^k}^n = p_{n,p,n}^k - \mathcal{N}_p^k \frac{(1 + \varepsilon_p^k)}{(1 + \varepsilon_{c0} + z_c^k \kappa_c)} \kappa_c = 0, \quad (n = 1, 2, \dots, N). \quad (2.216)$$

Za dano zunanjo obtežbo predstavljajo enačbe (2.199)–(2.213) in (2.215)–(2.216) sistem $N(3n_p + 2) + (3n_p + 9)$ enačb za prav toliko neznank. Med notranjimi prostostnimi stopnjami je neznanih $N(n_p + 2)$ deformacijskih vozliščnih količin: $\varepsilon_{c0,n}$, $\kappa_{c,n}$, in $\varepsilon_{p,n}^k$ ter $(n_p + 3)$ ravnotežnih količin: $\mathcal{R}_{X,c}(0)$, $\mathcal{R}_{Z,c}(0)$, $\mathcal{M}_c(0)$ in $\mathcal{N}_p^k(0)$. Med zunanji prostostnimi stopnjami pa je neznanih $(2n_p + 6)$ kinematičnih količin: $u_c(0)$, $w_c(0)$, $\varphi_c(0)$, $u_p^k(0)$, $u_c(L)$, $w_c(L)$, $\varphi_c(L)$ in $u_p^k(L)$. Neznanih je še dodatnih $2Nn_p$ vozliščnih količin $x_{p,n}^{*k}$ in $p_{n,p}^k$. Funkcije $\mathcal{R}_{X,c}(x_c)$, $\mathcal{R}_{Z,c}(x_c)$, $\mathcal{M}_c(x_c)$ in $\mathcal{N}_p^k(x_p^k)$ v enačbah (2.199)–(2.216) določimo s pomočjo izrazov (2.184)–(2.187). V nadaljevanju notranje prostostne stopnje končnih elementov kondenziramo, zunanje prostostne stopnje pa združimo v enačbo konstrukcije

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{0}. \quad (2.217)$$

V enačbi (2.217), ki jo imenujemo tudi diskretna posplošena ravnotežna enačba konstrukcije, je \mathbf{x} vektor posplošenih pomikov oziroma vektor vozliščnih pomikov končnega elementa, parameter λ pa obtežni faktor konstrukcije. Pri reševanju enačbe (2.217) si pomagamo z inkrementno-iteracijskimi metodami. V disertaciji je uporabljena Newton-Raphsonova inkrementno-iteracijska metoda, ki jo je v svoji disertaciji podrobno opisal Bratina (2003), zato je tu ne opišemo.

2.3 Računski primeri

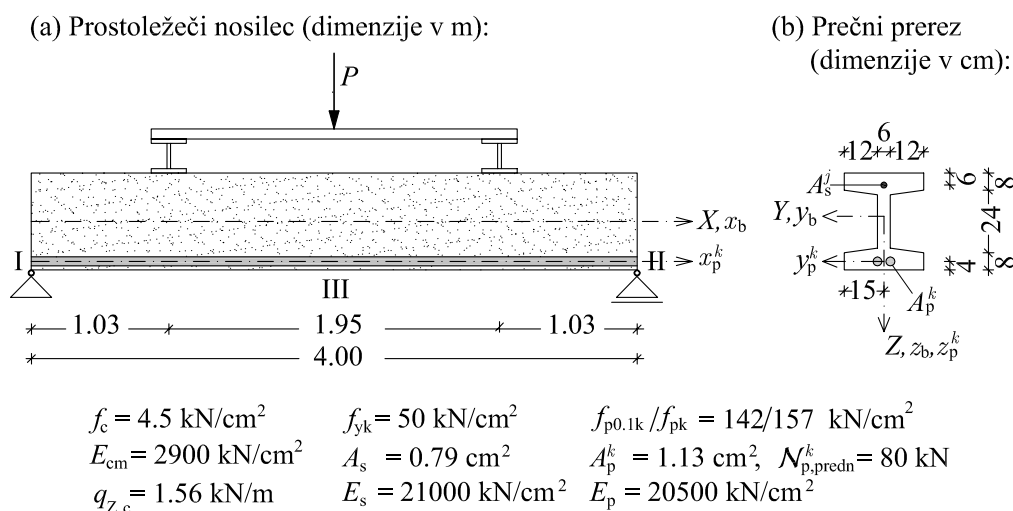
Z računskimi primeri prikažemo učinkovitost, natančnost in primernost predstavljenega matematičnega modela in pripadajočega računskega postopka za analizo prednapetih betonskih linijskih konstrukcij z upoštevanjem zamika na stiku med betonom in jeklom za prednapenjanje pri sobni temperaturi. S tem namenom smo z novo deformacijsko družino končnih elementov dopolnili računalniški program NFIRA (Non-linear FIRE Analysis), narejen v programskem okolju Matlab (Bratina, 2003). V vseh računskih primerih smo predpostavili, da je debelina vmesne plasti med betonom in prednapetimi kabli enaka nič ($e = 0$), ter da so zamiki na stiku med betonom in prednapetimi kabli majhni. Podobno kot Bratina (Bratina, 2003) končne elemente označimo z E_{i-j} , kjer indeks “ i ” predstavlja število interpolacijskih točk, indeks “ j ” pa stopnjo numerične integracije. Tako smo označili, da ε_{c0} , κ_c ter ε_p^k , x_p^{*k} in $p_{n,p}^k$ ($k = 1, 2, \dots, n_p$) interpoliramo s polinomi enake stopnje in enačbe integriramo z enako stopnjo numerične integracije. Obravnavamo dva računski primera: (i) prednapeti betonski prostoležeči nosilec in (ii) prednapeto betonsko votlo ploščo.

2.3.1 Prednapeti prostoležeči nosilec

V prvem računskem primeru obravnavamo prednapeti prostoležeči nosilec I prečnega prereza, za katerega so Rabczuk in Eibl (2004) oziroma Rabczuk, Akkermann in Eibl (2005) predstavili eksperimentalne rezultate. S tem računskim primerom analiziramo vpliv geometrijskega modela nosilca na napetostno in deformacijsko stanje nosilca. V nadaljevanju s primerjavo med numeričnimi in eksperimentalnimi rezultati ocenimo natančnost predstavljenega matematičnega modela in računskega postopka. Na koncu prikažemo še konvergenčne lastnosti deformacijskih končnih elementov in s parametrično študijo vpliv togosti stika med betonom in prednapetimi kabli na napetostno in deformacijsko stanje prednapetih betonskih nosilcev.

Geometrijski in materialni podatki ter podatki o legi obtežbe obravnavanega nosilca so prikazani na sliki 2.5. Z I, II in III označimo levi in desni rob nosilca ter prečni prerez na sredini razpona nosilca.

Izmerjeni materialni parametri so (Rabczuk, Akkermann in Eibl, 2005): tlačna trdnost betona $f_c = 4.5 \text{ kN/cm}^2$, sekantni modul elastičnosti betona $E_{cm} = 2900 \text{ kN/cm}^2$, deformacija pri tlačni trdnosti



Slika 2.5: Geometrijski in materialni podatki ter podatki o obtežbi.

Figure 2.5: Geometrical, material and loading data.

betona $\varepsilon_{c1} = -2.2 \text{ ‰}$, mejna tlačna deformacija betona $\varepsilon_{cu} = -3.5 \text{ ‰}$, meja tečenja jekla za armiranje $f_{yk} = 50 \text{ kN/cm}^2$, elastični modul jekla za armiranje $E_s = 21000 \text{ kN/cm}^2$, karakteristična napetost jekla za prednapenjanje, pri kateri po razbremenitvi ostane 0.1 ‰ plastične deformacije $f_{p0.1k} = 142 \text{ kN/cm}^2$, natezna trdnost jekla za prednapenjanje $f_{pk} = 157 \text{ kN/cm}^2$, elastični modul jekla za prednapenjanje $E_p = 20500 \text{ kN/cm}^2$. Dodatni materialni parametri, ki niso izmerjeni, so pa potrebni pri analizi so: modul utrditve jekla za armiranje $E_{utrd} = 0 \text{ kN/cm}^2$ (brez utrditve), mejna deformacija jekla za armiranje $\varepsilon_{uk} = 40 \text{ ‰}$ in mejna deformacija jekla za prednapenjanje $\varepsilon_{uk} = 40 \text{ ‰}$.

Obravnavani prednapeti betonski nosilec je ojačan z mehko armaturo s prečnim prerezom $A_s = 0.79 \text{ cm}^2$ ter prednapet z dvema kabloma ($n_p = 2$). Sili prednapetja ter prečna prereza kablov so za oba kabla enaki: $N_{p,pređn}^k = 80 \text{ kN}$, $A_p^k = 1.13 \text{ cm}^2$ ($k = 1, 2$). Poleg točkovne sile P , ki deluje na nosilec preko vmesne konstrukcije (slika 2.5), upoštevamo v analizi še vpliv lastne teže nosilca $q_{z,c} = 1.56 \text{ kN/m}$. Nosilec modeliramo z mrežo 20-ih končnih elementov tipa E_{4-5} .

2.3.1.1 Analiza izbranega geometrijskega modela

V nadaljevanju najprej analiziramo vpliv geometrijskega modela nosilca na napetostno in deformacijsko stanje prednapetega nosilca. Obravnavani nosilec je prednapet in obremenjen le z lastno težo $q_{z,c}$ ($P = 0$). Rezultate prikazujemo za linearno elastičen prednapeti betonski nosilec. Tudi konstitucijski zakon stika med betonom in prednapetima kabloma je linearen, torej ($k = 1, 2$):

$$\sigma_c(x_c, z_c) = E_{cm} (\varepsilon_{c0}(x_c) + z_c \kappa_c(x_c)), \quad (2.218)$$

$$\sigma_p(x_c) = E_{cm} (\varepsilon_p^k(x_c) + \varepsilon_{p,0}^k(x_c)), \quad (2.219)$$

$$p_{t,p}^k(x_c) = K \Delta^k(x_c), \quad (2.220)$$

oziroma

$$\tau^k(x_c) = \theta \Delta^k(x_c). \quad (2.221)$$

Pri tem je

$$\tau^k(x_c) = \frac{p_{t,p}^k(x_c)}{\pi \phi_p^k}. \quad (2.222)$$

Rezultate analize prikazujemo v preglednici 2.1, kjer za različne togosti stika prikazujemo kinematične in ravnotežne količine ločeno za geometrijsko linearno teorijo nosilcev (GLT) in geometrijsko nelinearno teorijo nosilcev (GNT). Togost stika spremljamo od $K = \infty \text{ kN/cm}^2$ (absolutno togi stik), $K = 150 \text{ kN/cm}^2$ do $K = 15 \text{ kN/cm}^2$ (zelo podajen stik). Relativno napako označimo z ϵ , določimo pa jo v odstotkih z enačbo

$$\epsilon(\bullet) = \left| \frac{(\bullet)^{\text{GLT}} - (\bullet)^{\text{GNT}}}{(\bullet)^{\text{GNT}}} \right| \cdot 100. \quad (2.223)$$

Preglednica 2.1: Primerjava rezultatov med geometrijsko linearno teorijo (GLT) in geometrijsko nelinearno teorijo (GNT) za različne togosti stika K .

Table 2.1: The comparison of numerical results obtained by geometrical linear theory (GLT) and geometrical nonlinear theory (GNT) for different slip modulus K .

	GLT			GNT		
	∞	150	15	∞	150	15
$u_{p,I}^1$ [mm]	0	0.60	1.89	0	0.75	1.99
$u_{p,II}^1$ [mm]	-0.74	-0.89	-2.16	-0.71	-1.05	-2.34
$u_{c,II}$ [mm]	-0.74	-0.69	-0.55	-0.71	-0.30	-0.24
$w_{c,III}$ [mm]	-1.26	-1.28	-1.11	-1.21	-1.08	-0.92
$\mathcal{N}_{p,III}^1$ [kN]	151.44	156.00	147.84	159.95	152.26	144.71
$\mathcal{N}_{c,III}$ [kN]	-151.44	-156.00	-147.84	-159.95	-152.26	-144.71
$\Delta_{p,I}^1$ [mm]	0	0.60	1.89	0	0.56	1.86
$p_{t,p,I}^1$ [kN/cm]	0	8.99	2.84	0	8.87	2.80
$p_{n,p,III}^1$ [kN/cm]	0	$-1.01 \cdot 10^{-3}$	$-9.11 \cdot 10^{-4}$	0	$-0.81 \cdot 10^{-3}$	$-7.29 \cdot 10^{-4}$

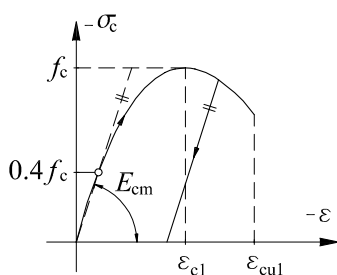
V preglednici 2.1 vidimo, da so za prednapeti nosilec s $K = 150 \text{ kN/cm}^2$ napake značilnih količin naslednje: za vodoravna pomika na začetku in koncu prednapetih kablov ($u_{p,I}^1$ in $u_{p,II}^1$) 20% oziroma 15.2%, za vodoravni pomik težišča betonskega dela nosilca ($u_{c,II}$) kar 130%, za prečni pomik na sredini razpona prednapetega nosilca ($w_{c,III}$) 18.5%, za maksimalno napenjalno silo v kablji ($\mathcal{N}_{p,III}^1$) samo 2.5%, za največji zamik na stiku med betonom in prednapetimi kabli ($\Delta_{p,I}^1$) 7.1%, za maksimalno strižno napetost na stiku ($p_{t,p,I}^1$) samo 1.4% in za maksimalno normalno napetost na stiku ($p_{n,p,III}^1$) 24.7%. Ugotovimo lahko, da ima geometrijski model nosilca relativno majhen vpliv na velikost značilnih količin prednapetega betonskega nosilca (prečni pomik, maksimalna napenjalna sila, zamik in strižna napetost), nekoliko večji je ta vpliv na vodoravne pomike nosilca, ki pa so relativno majhni in jih zato lahko zanemarimo. Nekoliko večji je vpliv togosti stika med betonom in prednapetimi kabli.

Tako je napaka maksimalne napenjalne sile in prečnega pomika na sredini razpona med prednapetima nosilcema z zelo podajnim stikom in togim stikom 8.4 % oziroma kar 24 %.

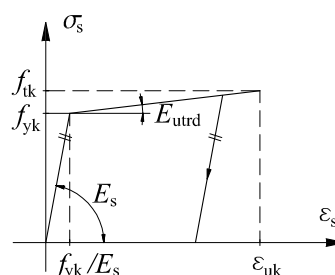
2.3.1.2 Primerjava eksperimentalnih in numeričnih rezultatov

Natančnost predstavljenega matematičnega modela in pripadajočega računskega postopka za statično analizo prednapetih betonskih nosilcev pri sobni temperaturi prikažemo s primerjavo numeričnih in eksperimentalnih rezultatov (Rabczuk in Eibl, 2004; Rabczuk, Akkermann in Eibl, 2005). Za konstitucijske zakone betona, jekla za armiranje in prednapenjanje, ki v veliki meri določajo natančnost vsakega matematičnega modela, izberemo nelinearne zveze skladno z evropskim standardom za beton Eurocode 2, Part 1-1 (2004). Grafe teh zakonov ter fizikalni pomen materialnih parametrov prikazujemo na slikah 2.6a–2.6c. Nelinearni konstitucijski zakon med strižno napetostjo in zamikom na stiku med betonom in prednapetimi kablji privzamemo skladno s priporočili Abrishamija in Mitchella (1993), Jendela in Crvenke (2006) oziroma Keuserja in Mehlhorna (1983). Graf tega zakona in fizikalni pomen materialnih parametrov prikazujemo na sliki 2.6d. Izbrani materialni parametri tega zakona so: začetna togost stika $\theta_0 = 30 \text{ kN/cm}^3$, meja elastičnosti $\tau_0 = 0.3 \text{ kN/cm}^2$, zamik pri meji elastičnosti $\Delta_0 = 0.01 \text{ cm}$, strižna trdnost stika $\tau_I = 0.327 \text{ kN/cm}^2$ in pripadajoči zamik $\Delta_I = 0.1 \text{ cm}$. Vrednosti materialnih

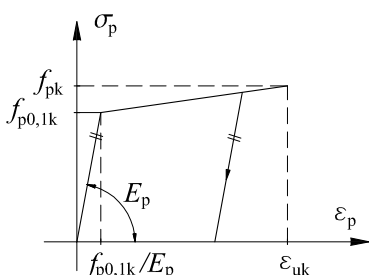
(a) konstitucijski zakon betona



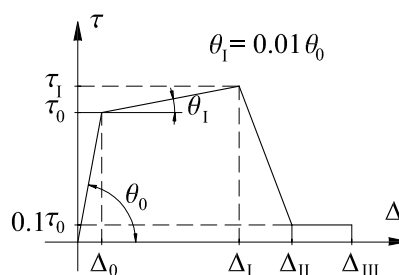
(b) konstitucijski zakon jekla za armiranje



(c) konstitucijski zakon jekla za prednapenjanje



(d) konstitucijski zakon stika

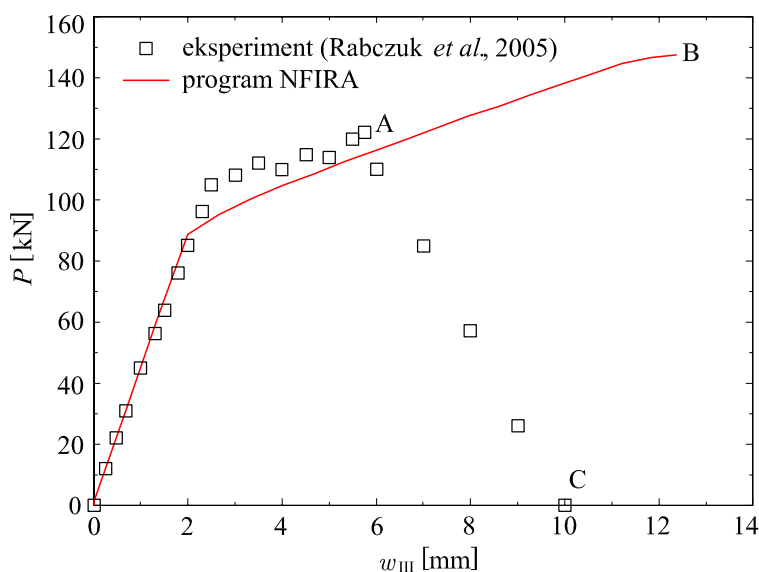


Slika 2.6: Konstitucijski zakoni za beton, jeklo za armiranje in prednapenjanje v skladu z Eurocode 2, Part 1-1 (2004); konstitucijski zakon stika med betonom in prednapetim jeklom (Keuser in Mehlhorn, 1983).

Figure 2.6: Stress-strain relationships of concrete, reinforcing and prestressing steel recommended by Eurocode 2, Part 1-1 (2004); bond stress-slip relationship between concrete and prestressing steel (Keuser and Mehlhorn, 1983).

parametrov za opis mehčanja stika sta: $\Delta_{II} = 0.25$ cm in $\Delta_{III} = 1.0$ cm. Njuni velikosti izberemo tako, da povečamo stabilnost numeričnega postopka.

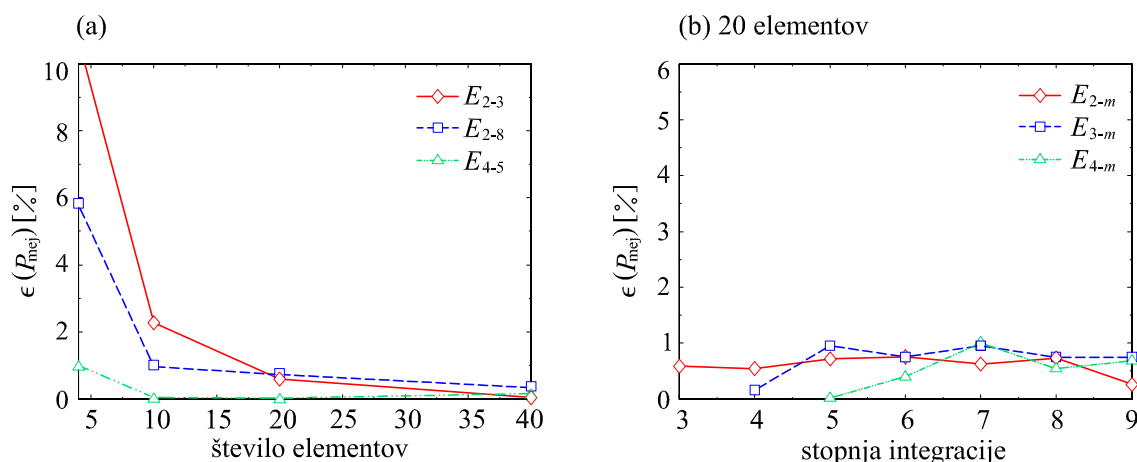
Na sliki 2.7 prikazujemo izračunano in izmerjeno obtežno-deformacijsko krivuljo za navpični pomik na sredini nosilca, w_{III} , v odvisnosti od velikosti zunanje obtežbe P . Opazimo zelo dobro ujemanje med krivuljama do točke A, od tu naprej pa veliko odstopanje. Izmerjena mejna nosilnost nosilca znaša $P_{mej}^{eksp} = 122$ kN, pripadajoči pomik pa $w_{III,mej}^{eksp} = 5.8$ mm (točka A na sliki 2.7). Izmerjeni prečni pomik ob porušitvi nosilca pa je $w_{III,mej}^{eksp} = 10$ mm (točka C na sliki 2.7). Izračunana mejna nosilnost nosilca je $P_{mej} = 147.19$ kN, pripadajoči prečni pomik pa $w_{III,mej} = 12.37$ mm (točka B na sliki 2.7). Opazimo, da izračunana mejna nosilnost ter pripadajoči pomik znatno prekoračita izmerjene vrednosti. Vzrok odstopanj je najverjetneje v prevelikih izbranih (izmerjenih) trdnostih betona in jekla.



Slika 2.7: Obtežno-deformacijska krivulja. Primerjava numeričnih in eksperimentalnih rezultatov.
Figure 2.7: Load-displacement curve. The comparison of numerical and experimental results.

2.3.1.3 Analiza konvergence deformacijskih končnih elementov

V nadaljevanju preverimo konvergenco predstavljenih deformacijskih končnih elementov E_{i-j} . Deformacijske količine ε_{c0} , κ_c , ε_p^k ter količini x_p^{*k} in $p_{n,p}^k$ ($k = 1, 2$) interpoliramo z različnimi stopnjami Lagrangevih interpolacijskih polinomov (indeks "i") ter različnimi stopnjami Lobattove numerične integracije (indeks "j"). Za referenčno oziroma točno rešitev privzamemo rešitev, dobljeno z 40 končnimi elementi tipa E_{8-9} . Napako ocenimo z enačbo (2.223). Spreminjanje relativne napake pri mejni nosilnosti nosilca P_{mej} glede na točno vrednost v odvisnosti od števila končnih elementov prikažemo na sliki 2.8a, v odvisnosti od stopnje numerične integracije pa na sliki 2.8b. Iz slike 2.8a vidimo, da se relativna napaka s številom končnih elementov manjša, iz slike 2.8b pa, da izbrana stopnja numerične integracije bistveno ne vpliva na relativno napako. Glede na povedano lahko povzamemo, da je za analizo prednapetih betonskih nosilcev najugodnejše izbrati mrežo 20-ih končnih elementov tipa E_{4-5} . Zato v nadaljnjih parametričnih študijah uporabimo mrežo 20-ih končnih elementov tipa E_{4-5} .



Slika 2.8: Spreminjanje relativne napake pri mejni nosilnosti nosilca P_{mej} v odvisnosti: (a) od števila končnih elementov in (b) od stopnje numerične integracije.

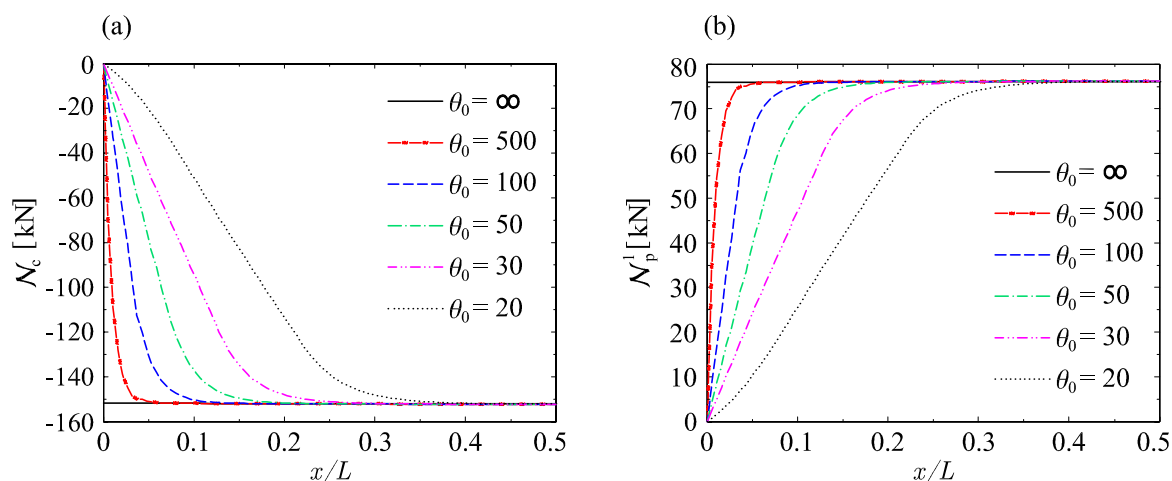
Figure 2.8: The change of relative error at load capacity P_{mej} : (a) for different numbers of finite elements and (b) for different levels of numerical interpolation.

2.3.1.4 Vpliv togosti stika na obnašanje prednapetega nosilca

Že v podpoglavju 2.3.1.1 smo ugotovili, da togost stika med betonom in prednapetimi kabli pomembno vpliva na napetostno in deformacijsko stanje prednapetih betonskih nosilcev. V tem podpoglavju podrobno analiziramo vpliv začetne togosti stika θ_0 (konstitucijski zakon stika je prikazan na sliki 2.6d) na obnašanje obravnavanega prednapetega nosilca. Pri tem spreminjamo le začetno togost stika θ_0 , vrednosti značilnih zamikov Δ_0 , Δ_I , Δ_{II} in Δ_{III} pa ohranjamo nespremenjene. Za začetno togost stika izberemo vrednosti: $\theta_0 = \infty$ (absolutno togi stik), $\theta_0 = 500$, $\theta_0 = 100$, $\theta_0 = 50$, $\theta_0 = 30$ in $\theta_0 = 20$ kN/cm³ (zelo podajen stik). Rezultate parametrične študije prikažemo za prednapeti nosilec, ki je obtežen z lastno težo $q_{z,b}$ in prednapet z začetno napenjalno silo $\mathcal{N}_{p,predn}^k$ ($k = 1, 2$). Zunanja sila P je enaka nič. Zaradi simetrije in obtežbe nosilca prikazujemo rezultate analize le za polovico nosilca ($0 \leq x/L \leq 0.5$).

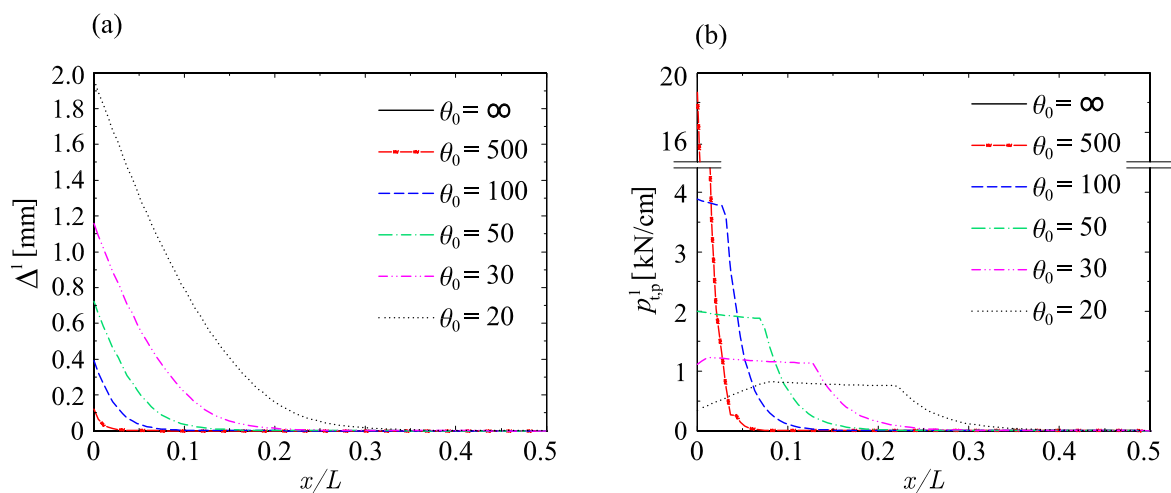
Na sliki 2.9 prikazujemo spreminjanje osne sile v betonskem delu nosilca \mathcal{N}_c ter prednapetem kablu \mathcal{N}_p^1 v odvisnosti od začetne togosti stika θ_0 . Pričakovano opazimo padanje sile \mathcal{N}_c in naraščanje sile \mathcal{N}_p^1 v območju prenosa napenjalne sile v betonski del nosilca. Območje prenosa napenjalne sile se povečuje s padanjem začetne togosti stika. Za teoretični primer $\theta_0 = \infty$ kN/cm³ sta sili \mathcal{N}_c in \mathcal{N}_p^1 vzdolž osi nosilca konstantni, kar pomeni, da se napenjalna sila s kabla na betonski del nosilca prenese na razdalji nič, kar seveda fizikalno ni mogoče. Zaradi deformiranja nosilca ob vnosu napenjalne sile v beton se sila v kablu zmanjša z začetne vrednosti $\mathcal{N}_{p,predn}^1 = 80$ kN na vrednost $\mathcal{N}_p^1 = 76.07$ kN.

Vpliv začetne togosti stika na potek strižne komponente kontaktnega napetostnega vektorja $p_{t,p}^1$ in zamika Δ^1 prikazujemo na sliki 2.10. Na sliki 2.10a vidimo, da je za večje začetne togosti stika zamik manjši in je največji na začetku nosilca. Za $\theta_0 = 500$ kN/cm³ je zamik na robu $\Delta_I^1 = 0.12$ mm in je malo večji od zamika pri meji elastičnosti $\Delta_0 = 0.1$ mm. Območje stika na začetku oziroma na koncu nosilca, kjer je vrednost zamika različna od nič, pa ne presega 5% dolžine nosilca. Za najbolj podajni stik ($\theta_0 = 20$ kN/cm³) je zamik na robu bistveno večji in je kar $\Delta_I^1 = 1.97$ mm ter občutno presega zamik pri doseženi strižni trdnosti stika $\Delta_I = 1$ mm. To pomeni, da je na tem delu stika, kjer so zamiki $\Delta^1 > 1.0$ mm, nosilnost stika prekoračena in je zato prišlo že do mehčanja. To vidimo tudi na sliki 2.10b, kjer prikazujemo potek strižne komponente kontaktnega napetostnega vektorja vzdolž stika med



Slika 2.9: Vpliv začetne togosti stika na potek osne sile: (a) v betonu N_c in (b) v prednapetem kablu N_p^1 .
 Figure 2.9: Influence of initial slip modulus on distribution of axial force: (a) in concrete N_c and (b) in prestressing tendon N_p^1 .

betonom in prednapetimi kabli. Tako za $\theta_0 = 20 \text{ kN/cm}^3$ $p_{t,p}^1$ proti robu nosilca pada, čeprav se zamiki povečujejo. V nadaljevanju s pomočjo slike 2.10a tudi ugotovimo, da se zamiki praktično pojavijo skoraj po celotni dolžini nosilca, nič so le na osrednji tretjini nosilca. Vpliv začetne togosti stika na $p_{t,p}^1$ prikazujemo na sliki 2.10b. Na sliki vidimo, da so za $\theta_0 = \infty \text{ kN/cm}^3$ zamiki na stiku nič, zato so tudi strižne napetosti enake nič. Pri prednapetih nosilcih z zelo togimi stiki ($\theta_0 = 500 \text{ kN/cm}^3$) se zamiki pojavijo le na majhnem območju ob robovih nosilcev. Vrednosti zamikov so bistveno manjše od zamikov na meji nosilnosti stika, strižne napetosti pa so na tem območju zelo velike. Največja vrednost je na robu nosilca in je kar $p_{t,p}^1 = 18.89 \text{ kN/cm}$. Pri nosilcih z zelo podajnimi stiki ($\theta_0 = 20 \text{ kN/cm}^3$) so zamiki bistveno večji, največja vrednost strižne napetosti na stiku pa je le $p_{t,p}^1 = 0.34 \text{ kN/cm}$. Pomembno pa

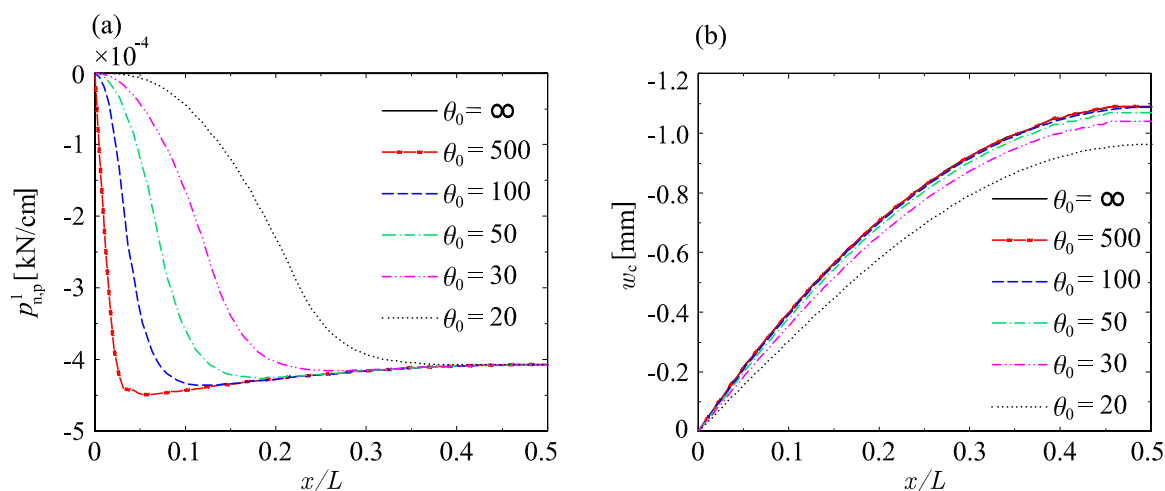


Slika 2.10: Vpliv začetne togosti stika na potek: (a) zamikov Δ^1 in (b) strižne komponente kontaktnega napetostnega vektorja $p_{t,p}^1$.

Figure 2.10: Influence of initial slip modulus on distribution of: (a) slips Δ^1 ; (b) tangential component of bond stress vector $p_{t,p}^1$.

je, da zaradi mehčanja stika ekstrem ne nastopi na mestu največjega zamika, t.j. na robu nosilca, temveč pri $x \approx 0.1L$.

V nadaljevanju na sliki 2.11a prikažemo tudi vpliv začetne togosti stika na potek normalne komponente kontaktnega napetostnega vektorja $p_{n,p}^1$. Vrednosti normalne komponente kontaktnega napetostnega vektorja so bistveno manjše od tangencialne komponente in ne presegajo vrednosti 0.0005 kN/cm, kar je praktično zanemarljivo. Na koncu na sliki 2.11b prikazujemo še spreminjanje prečnih pomikov nosilca w_c vzdolž referenčne osi prednapetega nosilca v odvisnosti od začetne togosti stika. Ker je zunanja obtežba relativno majhna (zgolj lastna teža nosilca), se nosilec zaradi prednapetja dvigne. Pri prednapetem nosilcu s podajnim stikom se prečni pomik na sredini razpona v primerjavi s pomikom nosilca s togim stikom spremeni za 16.55 % oziroma za 0.16 mm.



Slika 2.11: Vpliv začetne togosti stika na potek: (a) normalne komponente kontaktnega napetostnega vektorja $p_{n,p}^1$ in (b) navpičnega pomika w_c na sredini nosilca.

Figure 2.11: Influence of initial slip modulus on distribution of: (a) normal component of bond stress vector $p_{n,p}^1$ and (b) vertical midspan displacement w_c .

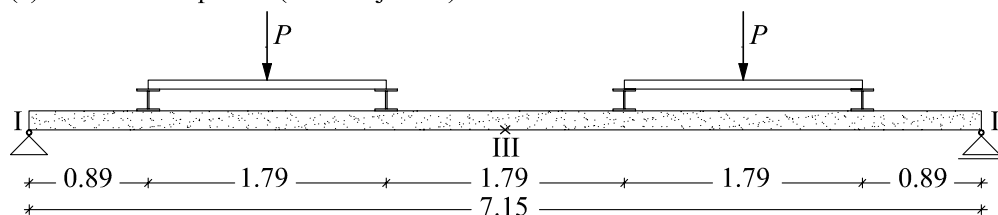
2.3.2 Prednapeta betonska votla plošča

V drugem računskem primeru analiziramo obnašanje prednapete votle betonske plošče. Za ta primer v literaturi obstajajo eksperimentalni rezultati (Keuser in Mehlhorn, 1983). Tudi s tem računskim primerom s primerjavo med numeričnimi in eksperimentalnimi rezultati ocenimo natančnost in primernost predstavljenega matematičnega modela in računskega postopka za analizo prednapetih betonskih konstrukcij. V nadaljevanju s parametričnimi študijami ocenimo vpliv togosti stika med betonom in prednapetimi kablji na togost, duktilnost in nosilnost tovrstnih prednapetih betonskih konstrukcij.

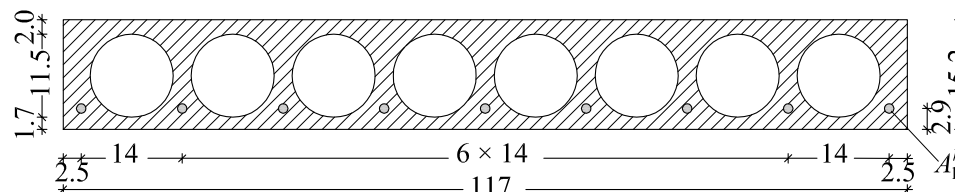
Geometrijske in materialne podatke, podatke o legi obtežbe in načinu podpiranja ter podatke o legi prednapetega jekla prikazujemo na sliki 2.12. Z I, II in III označimo levi in desni rob plošče ter prečni prerez na sredini razpona plošče.

Plošča je prednapeta z devetimi kablji. Prečni prerez posameznega kabla je $A_p^k = 0.71 \text{ cm}^2$, začetna napenjalna sila pa je $N_{p,predn}^k = 41.54 \text{ kN}$ ($k = 1, 2, \dots, 9$). Mehke armature v prečnem prerezu ni. Vpliv lastne teže prednapete votle betonske plošče upoštevamo z enakomerno linijsko obtežbo $q_{Z,c} = 2.40 \text{ kN/m}$. Podobno kot v prvem računskem primeru izberemo za konstitucijske zakone be-

(a) Prostoležeča plošča (dimenzije v m):



(b) Prečni prerez (dimenzije v cm):



$$\begin{array}{ll}
 f_c = 5.18 \text{ kN/cm}^2 & f_{p0.1k} / f_{pk} = 157/177 \text{ kN/cm}^2 \\
 E_{cm} = 3900 \text{ kN/cm}^2 & A_p^k = 0.71 \text{ cm}^2, N_{p, \text{predn}}^k = 41.54 \text{ kN} \\
 q_{z,c} = 2.40 \text{ kN/m} & E_p = 19500 \text{ kN/cm}^2
 \end{array}$$

Slika 2.12: Geometrijski in materialni podatki ter podatki o obtežbi.

Figure 2.12: Geometrical, material and loading data.

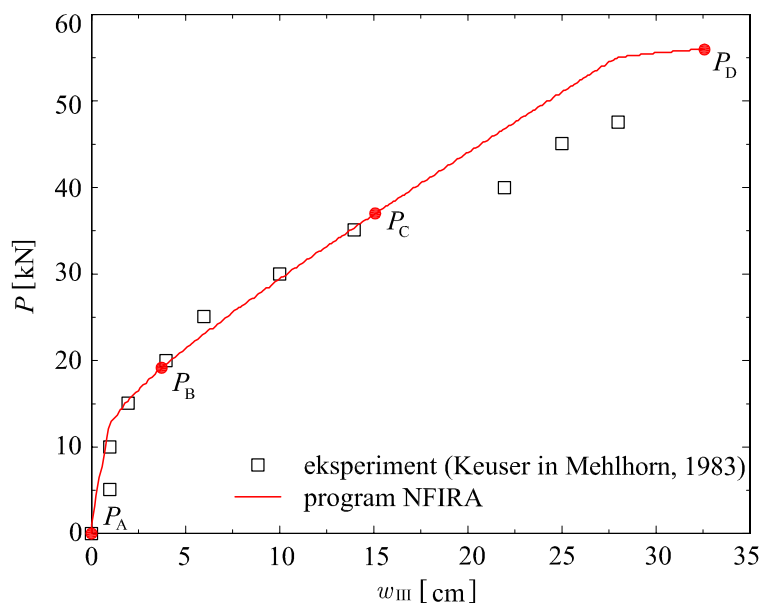
tona ter jekla za prednapenjanje nelinearni zvezi skladno z Eurocode 2, Part 1-1 (2004) (sliki 2.6a in 2.6c). Uporabljen je tudi enak konstitucijski zakon stika med betonom in prednapetimi kabli (slika 2.6d). Materialni parametri konstitucijskega zakona stika so: začetna togost stika $\theta_0 = 50 \text{ kN/cm}^3$, meja elastičnosti $\tau_0 = 0.5 \text{ kN/cm}^2$, trdnost stika $\tau_I = 0.545 \text{ kN/cm}^2$, zamika na meji elastičnosti in trdnosti stika pa sta $\Delta_0 = 0.01 \text{ cm}$ in $\Delta_I = 0.1 \text{ cm}$. Ploščo modeliramo z mrežo 20-ih linijskih končnih elementov tipa E_{4-5} .

2.3.2.1 Primerjava med numeričnimi in eksperimentalnimi rezultati

Na sliki 2.13 prikazujemo izmerjeno in izračunano obtežno-deformacijsko krivuljo za navpični pomik na sredini plošče, w_{III} , v odvisnosti od velikosti zunanje obtežbe P . Opazimo relativno dobro ujevanje krivulj. Tako je izmerjena mejna nosilnost plošče $P_{\text{mej}}^{\text{eksp}} = 47.50 \text{ kN}$, pripadajoči pomik pa $w_{III, \text{mej}}^{\text{eksp}} = 28 \text{ cm}$. Izračunana mejna nosilnost plošče je $P_{\text{mej}} = 55.99 \text{ kN}$, pripadajoči pomik pa $w_{III, \text{mej}} = 32.64 \text{ cm}$. Iz prikazanega lahko sklepamo, da predstavljeni matematični model za analizo prednapetih betonskih konstrukcij zelo dobro opiše togost prednapetih betonskih konstrukcij, nekoliko slabše pa duktilnost in nosilnost.

2.3.2.2 Vpliv nivoja zunanje obtežbe na obnašanje prednapete votle plošče

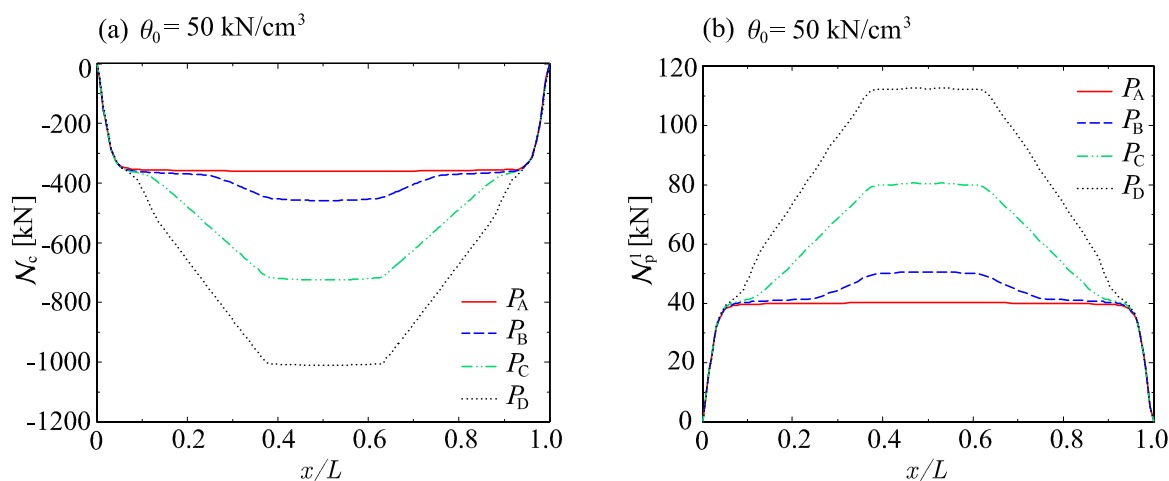
V nadaljevanju podrobneje analiziramo vpliv nivoja zunanje obtežbe na mehansko obnašanje prednapete votle plošče. Analizo prikažemo za štiri nivoje zunanje obtežbe, P_A , P_B , P_C in P_D (slika 2.13). Obtežba $P_A = 0 \text{ kN}$ predstavlja osnovni nivo obtežbe, kjer poleg lastne teže $q_{z,c}$ na ploščo delujejo le začetne napenjalne sile $N_{p, \text{predn}}^k$ ($k = 1, 2, \dots, 9$). Preostali nivoji obtežbe so: $P_B = 19.15 \text{ kN}$, $P_C = 37.0 \text{ kN}$ in $P_D = 55.99 \text{ kN}$.



Slika 2.13: Obtežno-deformacijska krivulja. Primerjava numeričnih in eksperimentalnih rezultatov.

Figure 2.13: Load-displacement curve. The comparison of numerical and experimental results.

Na slikah 2.14a in 2.14b prikažemo spreminjanje osne sile v betonu \mathcal{N}_c in prednapetem kablu \mathcal{N}_p^1 v odvisnosti od nivoja zunanje obtežbe. Opazimo, da je pri vseh nivojih obtežbe potek osne sile na robu plošče enak. V osrednjem delu plošče osna sila v prednapetem kablu z obtežbo narašča in je največja na sredini plošče. Pri obtežbi P_D je njena vrednost $\mathcal{N}_p^1 = 112.25$ kN. Pripadajoča napetost v kablu je $\sigma_p^1 = \mathcal{N}_p^1/A_p^1 = 158.09$ kN/cm² in je večja od karakteristične napetosti jekla za prednapenjanje, pri kateri po razbremenitvi ostane 0.1 ‰ plastične deformacije $f_{p0,1k} = 157$ kN/cm². To pomeni, da se pri

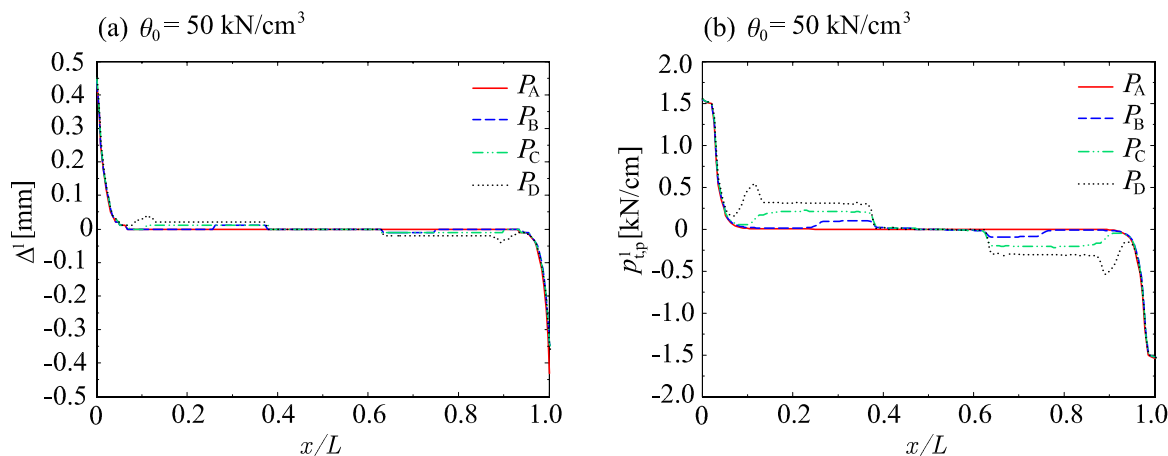


Slika 2.14: Spreminjanje osne sile vzdolž osi plošče za štiri nivoje zunanje obtežbe: (a) v betonu \mathcal{N}_c in (b) v prednapetem kablu \mathcal{N}_p^1 .

Figure 2.14: Distribution of axial force along the span of slab for four different levels of load: (a) in concrete \mathcal{N}_c and (b) in prestressing tendon \mathcal{N}_p^1 .

obtežbi P_D kabel že plastificira.

Na sliki 2.15 prikažemo spreminjanje zamika Δ^1 in strižne komponente kontaktnega napetostnega vektorja $p_{t,p}^1$ vzdolž stika med betonom in posameznim kablom za vse štiri izbrane nivoje zunanje obtežbe. Vidimo, da je zamik Δ^1 največji na robu plošče, t.j. v območju sidranja oziroma prenosa napenjalne sile v betonski del plošče. Opazimo tudi, da je zamik na robu plošče neodvisen od nivoja zunanje obtežbe in znaša $\Delta^1 = 0.45$ mm ter je manjši od zamika pri doseženi trdnosti stika $\Delta_I = 1.0$ mm ter večji od zamika pri meji elastičnosti $\Delta_0 = 0.1$ mm. Tudi strižna komponenta kontaktne linijske obtežbe $p_{t,p}^1$ je neodvisna od nivoja zunanje obtežbe. Njena vrednost na robu znaša $p_{t,p}^1 = 1.55$ kN/cm. Z računsko analizo smo ugotovili, da sta pri sili $P_A = 0$ kN tako zamik kot strižna komponenta kontaktnega napetostnega vektorja izven območja sidranja enaka nič, medtem ko za ostale nivoje zunanje obtežbe P_B , P_C in P_D to ne velja. V teh primerih se zamiki in strižne komponente kontaktnega napetostnega vektorja pojavijo tudi izven območja sidranja. Na sredini prednapete betonske plošče pa sta Δ^1 in $p_{t,p}^1$ za vse obravnavane nivoje zunanje obtežbe enaka nič.



Slika 2.15: Spreminjanje: (a) zamika Δ^1 in (b) strižne komponente kontaktnega napetostnega vektorja $p_{t,p}^1$ vzdolž stika med betonom in prednapetim kablom za štiri nivoje zunanje obtežbe.

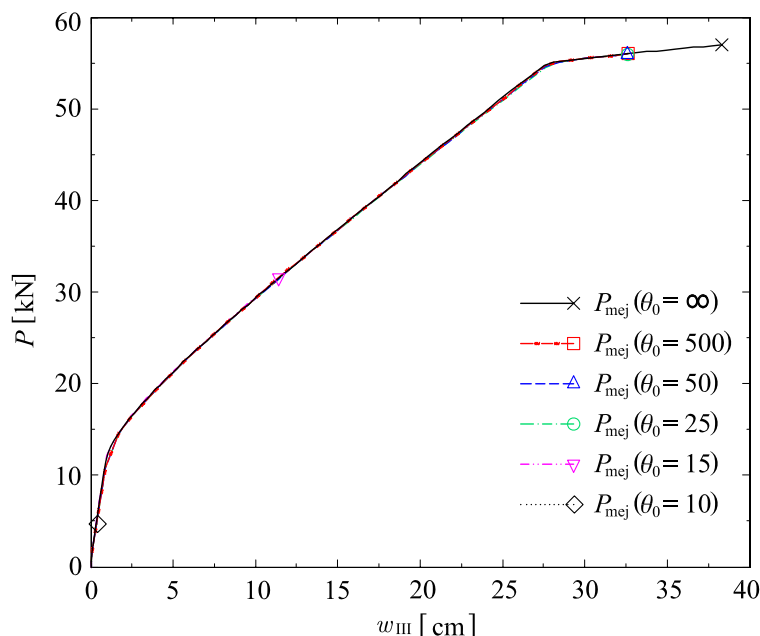
Figure 2.15: Distribution of: (a) slip Δ^1 and (b) tangential component of bond stress vector $p_{t,p}^1$ between concrete and prestressing tendon for four different load levels.

2.3.2.3 Vpliv togosti stika na obnašanje prednapete votle plošče

V nadaljevanju za vse štiri izbrane nivoje obtežbe (P_A , P_B , P_C in P_D) analiziramo še vpliv začetne togosti stika na napetostno in deformacijsko stanje prednapete betonske plošče. Analizo prikažemo za začetne togosti: $\theta_0 = \infty$ (absolutno togi stik), $\theta_0 = 500$, $\theta_0 = 50$, $\theta_0 = 25$, $\theta_0 = 15$ in $\theta_0 = 10$ kN/cm³ (zelo podajen stik). Vrednosti zamikov Δ_0 in Δ_I v konstitucijskem zakonu stika pri tem ne spreminjamo, vrednosti značilnih materialnih parametrov v območju mehčanja stika pa izberemo na podlagi stabilizacije numeričnega postopka. Vrednosti sta: $\Delta_{II} = 0.25$ cm in $\Delta_{III} = 1.0$ cm.

Na sliki 2.16 prikažemo vpliv začetne togosti stika med betonom in prednapetimi kablom na potek obtežno-deformacijske krivulje za pomik na sredini plošče w_{III} . Rezultate računa za mejno nosilnost P_{mej} in pripadajoči prečni pomik na sredini plošče w_{mej} prikazujemo tudi v preglednici 2.2. S pomočjo slike 2.16 ugotovimo, da je oblika obtežno-deformacijske krivulje praktično neodvisna od izbrane začetne togosti stika. To je najverjetneje posledica relativno majhnih zamikov na stiku. Popolnoma drugačen pa je vpliv začetne togosti stika θ_0 na velikost mejne nosilnosti plošče P_{mej} ter pripadajočega pomika na

sredini plošče w_{mej} (slika 2.16 in preglednica 2.2). Pri ploščah z zelo togimi stiki sta mejni vrednosti P_{mej} in w_{mej} največji, pri ploščah s podajnimi stiki pa se mejne nosilnosti plošč P_{mej} in pripadajoči pomiki w_{mej} zmanjšujejo.



Slika 2.16: Vpliv začetne togosti stika na potek obtežno-deformacijske krivulje.

Figure 2.16: Influence of initial slip modulus on distribution of load-displacement curve.

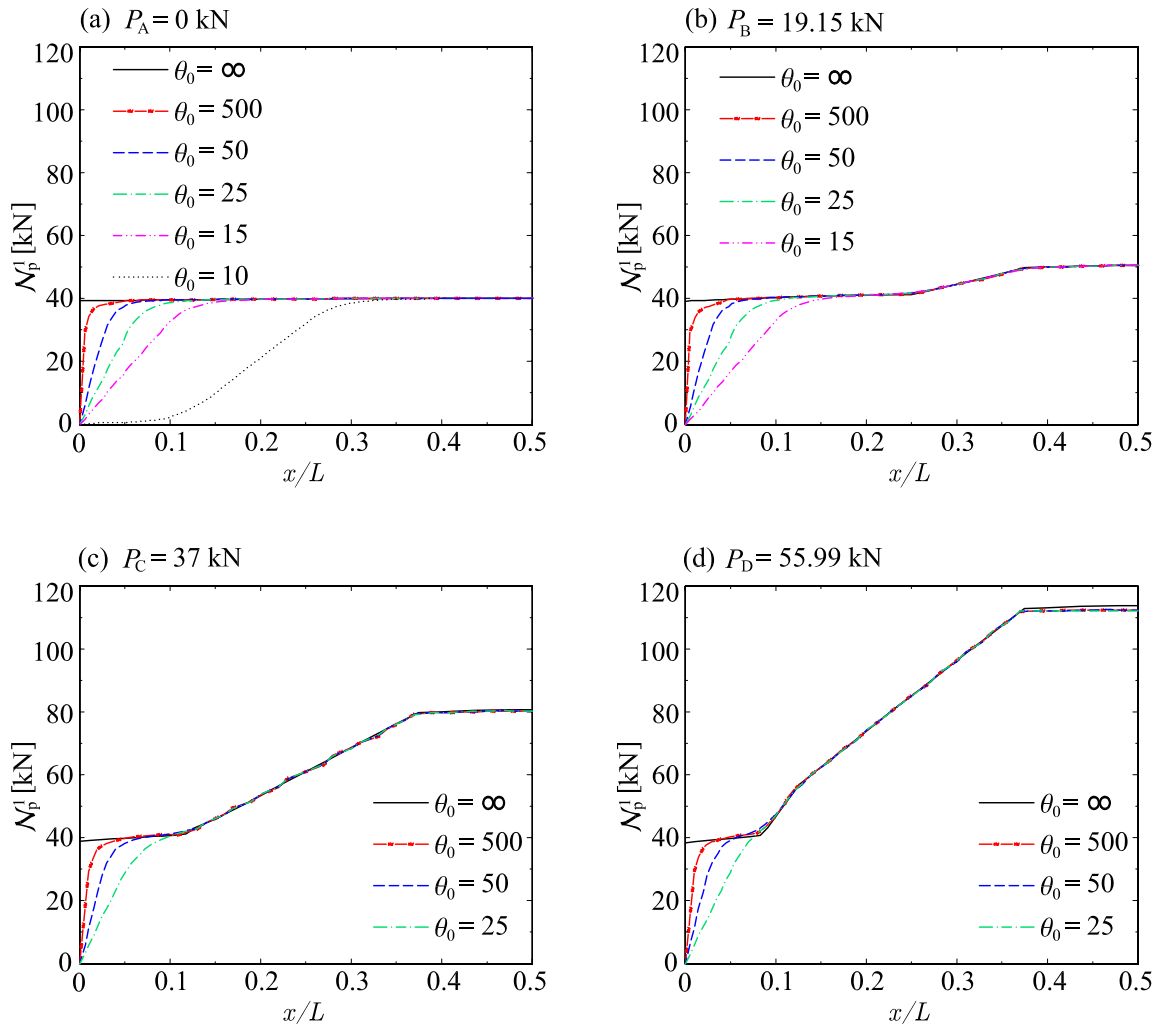
Preglednica 2.2: Vpliv začetne togosti stika na mejno nosilnost in pripadajoči pomik.

Table 2.2: Influence of initial slip modulus on bearing capacity and appurtenant deflection.

	$\theta_0 = \infty$	$\theta_0 = 500$	$\theta_0 = 50$	$\theta_0 = 25$	$\theta_0 = 15$	$\theta_0 = 10$
	[kN/cm ³]	[kN/cm ³]	[kN/cm ³]	[kN/cm ³]	[kN/cm ³]	[kN/cm ³]
P_{mej} [kN]	56.94	55.99	55.99	55.97	31.52	4.74
w_{mej} [cm]	38.31	32.65	32.64	32.64	11.38	0.34

V okviru tega računskega primera prikažemo tudi vpliv začetne togosti stika θ_0 na potek nekaterih ravnotežnih in kinematičnih količin v obravnavani prednapeti votli betonski plošči. Rezultate zopet prikazujemo za vse štiri izbrane nivoje zunanje obtežbe P_A , P_B , P_C in P_D . Zaradi simetrije plošče in obtežbe rezultate prikazujemo le za polovico plošče ($0 \leq x/L \leq 0.5$). Ker v prečnem prerezu plošče velja ravnotežje sil $\mathcal{N}_c + \sum_{k=1}^{n_p} \mathcal{N}_p^k = 0$, v nadaljevanju prikazujemo le osno silo v prednapetem kablju \mathcal{N}_p^1 , osne sile v betonskem delu plošče pa ne (slika 2.17). Potek osne sile v kablju je vzdolž referenčne osi zaradi simetrije plošče in obtežbe simetričen. Opazimo, da ima začetna togost stika ne glede na nivo zunanje obtežbe pomemben vpliv na potek osne sile v kablju \mathcal{N}_p^1 . V skladu s pričakovanji opazimo pri vseh nivojih zunanje obtežbe padec napenjalnih sil v bližini robov plošče. Padec osne sile v kablju je tem večji, čim bolj podajen je stik med betonom in kablom. Pri vseh nivojih zunanje obtežbe se s padanjem začetne togosti stika povečuje območje vnosa napenjalne sile v betonski del plošče. Pri osnovnem

nivoju obtežbe $P_A = 0$ kN je pri plošči z absolutno togim stikom vrednost osne sile v kablu konstantna $\mathcal{N}_p^1 = 39.21$ kN, vendar zaradi deformiranja plošče manjša od začetne napenjalne sile $\mathcal{N}_{p,0}^1 = 41.54$ kN.

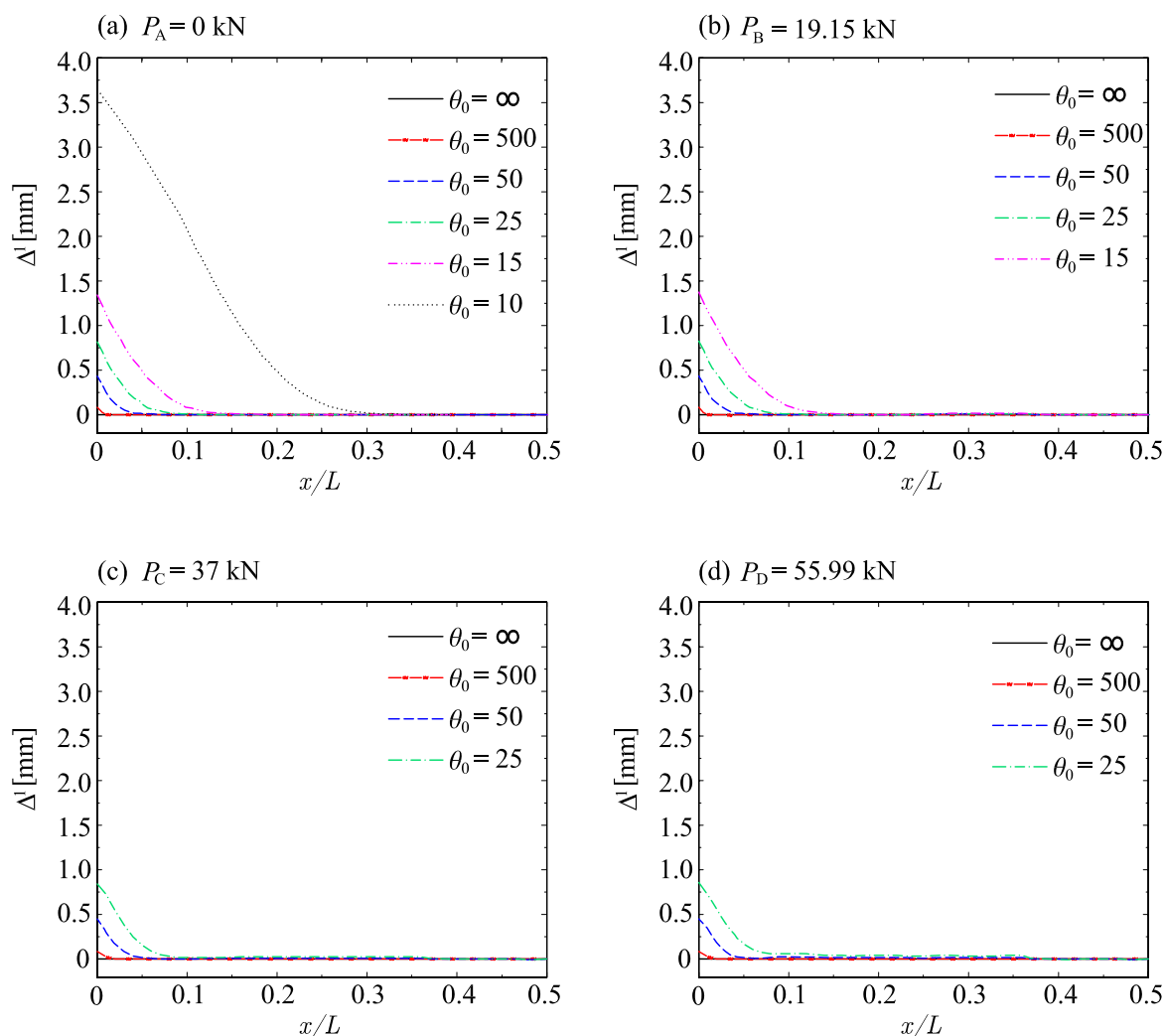


Slika 2.17: Vpliv nivoja zunanje obtežbe in začetne togosti stika na potek osne sile v prednapetem kablu \mathcal{N}_p^1 .

Figure 2.17: Distribution of axial force in prestressing tendon \mathcal{N}_p^1 for different load levels and different initial slip modulus.

V nadaljevanju na sliki 2.18 prikažemo vpliv začetne togosti stika na potek zamikov Δ^1 med betonom in prednapetimi kabli za vse štiri izbrane nivoje zunanje obtežbe P_A , P_B , P_C in P_D . Potek zamikov je antisimetričen glede na sredino plošče. Pričakovano so zamiki največji ob robovih plošče, t.j. v območju sidranja oziroma vnosa napenjalne sile v betonski del plošče. Ugotovimo, da so pri ploščah z isto začetno togostjo stika zamiki na robu plošče neodvisni od nivoja zunanje obtežbe. V primeru plošč z zelo togimi stiki med betonom in prednapetimi kabli ($\theta_0 = 500$, $\theta_0 = \infty$ kN/cm³) pa na stiku ni zamikov oziroma so zanemarljivo majhni.

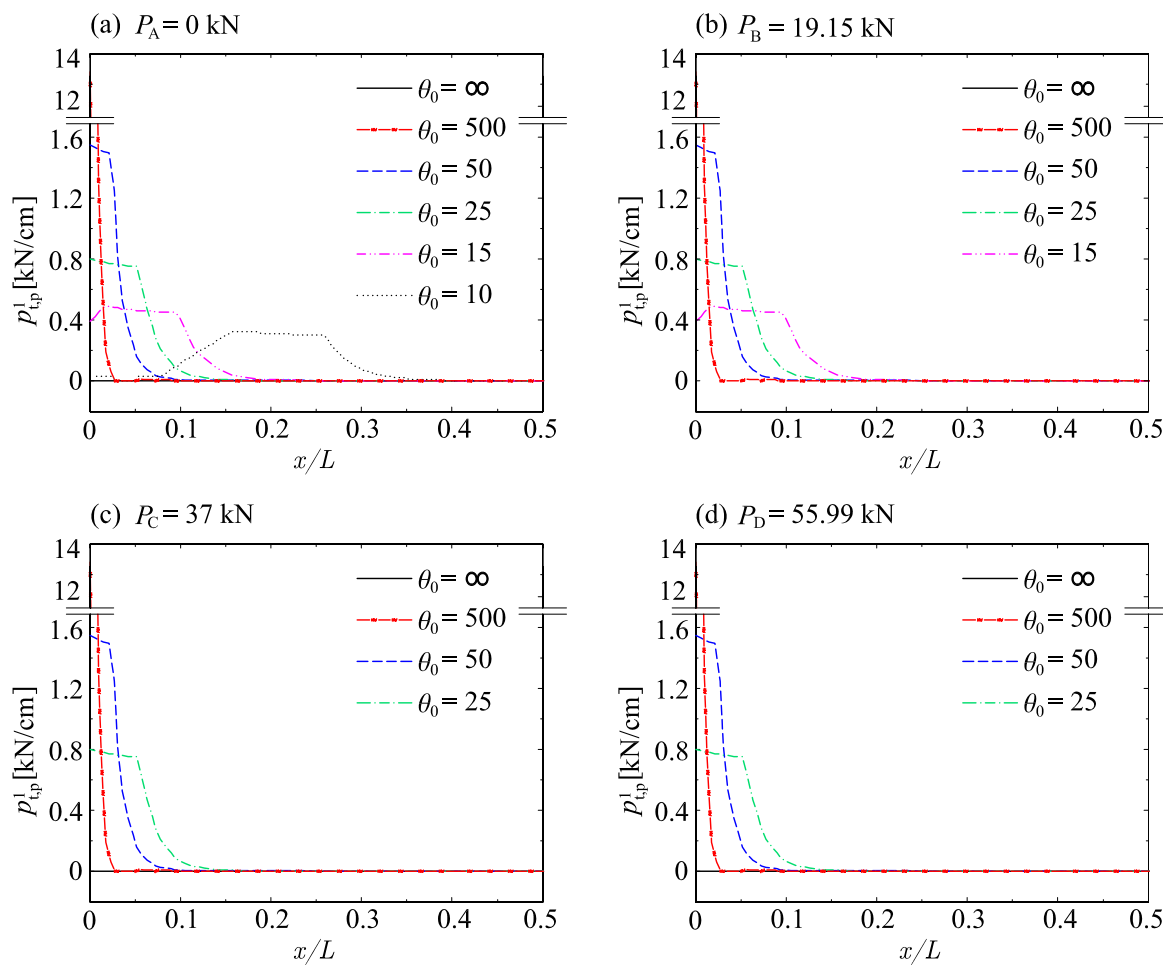
Na sliki 2.19 primerjamo za različne začetne togosti stika potek strižne komponente kontaktnega napetostnega vektorja $p_{t,p}^1$ vzdolž stika med betonom in prednapetim kablom pri vseh štirih izbranih nivojih zu-



Slika 2.18: Vpliv nivoja zunanje obtežbe in začetne togosti stika na potek zamikov Δ^1 vzdolž stika med betonom in prednapetim kablom.

Figure 2.18: Distribution of slip Δ^1 between concrete and prestressing tendon for different load levels and different initial slip modulus.

nanje obtežbe P_A , P_B , P_C in P_D . Potek $p_{t,p}^1$ je antisimetričen. Za obtežbo $P_A = 0$ kN so pri ploščah z zelo togim stikom ($\theta_0 = 500$ kN/cm³) zamiki, ki se pojavijo le na majhnem območju v bližini roba plošče majhni, obratno pa so vrednosti strižne komponente kontaktnega napetostnega vektorja velike. Na robu plošče je $p_{t,p}^1 = 13.24$ kN/cm. Pri ploščah z zelo podajnim stikom ($\theta_0 = 10$ kN/cm³) so zamiki ob robovih plošče bistveno večji. Posledično so vrednosti za $p_{t,p}^1$ zelo majhne, na robu plošče le $p_{t,p}^1 = 0.03$ kN/cm. Ta vrednost pa seveda ne predstavlja ekstremne vrednosti $p_{t,p}^1$. Kot vidimo na sliki 2.19, ta nastopi pri $x \approx 0.15L$. To je posledica mehčanja stika, saj so zamiki na stiku presegli zamik pri trdnosti stika $\Delta_I = 0.1$ cm. Pri ostalih nivojih zunanje obtežbe P_B , P_C in P_D so razmere podobne. Ugotovimo tudi, da je pri ploščah z istimi začetnimi togostmi stika potek strižne komponente kontaktnega napetostnega na robovih plošč neodvisen od nivoja zunanje obtežbe. Rezultati analize za vse štiri izbrane nivoje zunanje obtežbe so zbrani tudi v preglednici 2.3.



Slika 2.19: Vpliv nivoja zunanje obtežbe in začetne togosti stika na potek strižne komponente kontaktnega napetostnega vektorja $p_{t,p}^1$ vzdolž stika med betonom in prednapetim kablom.

Figure 2.19: Distribution of tangential component of bond stress vector $p_{t,p}^1$ between concrete and pre-stressing tendon for different load levels and different initial slip modulus.

Preglednica 2.3: Vpliv začetne togosti stika na značilne kinematične in ravnotežne količine prednapete votle plošče.

Table 2.3: Influence of initial slip modulus on characteristic kinematic and equilibrium quantities of hollow core slab.

	$\theta_0 = \infty$	$\theta_0 = 500$	$\theta_0 = 50$	$\theta_0 = 25$	$\theta_0 = 15$	$\theta_0 = 10$
	[kN/cm ³]	[kN/cm ³]	[kN/cm ³]	[kN/cm ³]	[kN/cm ³]	[kN/cm ³]
$P_A = 0$ kN						
$\mathcal{N}_{p,III}^1$ [kN]	40.10	40.11	40.11	40.10	40.10	40.10
Δ_I^1 [mm]	0	0.09	0.45	0.82	1.34*	3.65*
$p_{t,p,I}^1$ [kN/cm]	0	13.24	1.55	0.80	0.39	0.03
$P_B = 19.15$ kN						
$\mathcal{N}_{p,III}^1$ [kN]	50.53	50.41	49.97	49.97	50.42	×
Δ_I^1 [mm]	0	0.09	0.45	0.83	1.37*	×
$p_{t,p,I}^1$ [kN/cm]	0	13.25	1.55	0.80	0.38	×
$P_C = 37$ kN						
$\mathcal{N}_{p,III}^1$ [kN]	80.61	80.28	80.19	80.21	×	×
Δ_I^1 [mm]	0	0.09	0.45	0.84	×	×
$p_{t,p,I}^1$ [kN/cm]	0	13.25	1.55	0.80	×	×
$P_D = 55.99$ kN						
$\mathcal{N}_{p,III}^1$ [kN]	113.69	112.38	112.30	111.27	×	×
Δ_I^1 [mm]	0	0.09	0.45	0.86	×	×
$p_{t,p,I}^1$ [kN/cm]	0	13.22	1.55	0.80	×	×

* zamik je večji od zamika pri trdnosti stika $\Delta_I = 1$ mm

3 VPLIV POŽARA NA OBNAŠANJE PREDNAPETIH BETONSKIH LINIJSKIH KONSTRUKCIJ

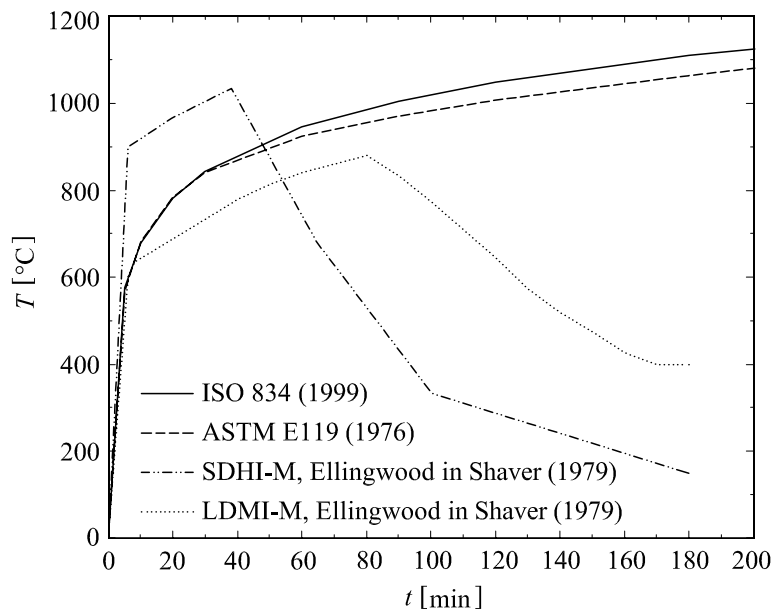
V tem poglavju predstavimo matematični model in računski postopek za nelinearno analizo prednapetih betonskih linijskih konstrukcij ob sočasnem delovanju mehanske in temperaturne obtežbe. Pri izpeljavi matematičnega modela upoštevamo zamike med betonom in jeklom za prednapenjanje. Luščenje betona v modelu zanemarimo, zato je predstavljeni matematični model in računski postopek dvofazen. V prvi fazi na podlagi požarnih krivulj določimo časovno in krajevno razporeditev temperature in vlage v prednapetem betonskem nosilcu. Pri tem povezan problem vlage in temperature v kapilarno poroznih materialih modeliramo s parcialnima diferencialnima enačbama Luikovima ob ustreznih začetnih in robnih pogojih. Enačbi rešimo z diferenčno metodo. Dobljeni rezultati prve faze predstavljajo vhodne podatke za drugo fazo računskega postopka, kjer na Reissnerjevem modelu nosilca določimo napetostno in deformacijsko stanje prednapetih betonskih linijskih konstrukcij ob sočasnem delovanju mehanske in požarne obtežbe. Posplošene ravnotežne enačbe matematičnega modela rešimo z novimi deformacijskimi končnimi elementi.

3.1 Temperaturno-vlažnostna analiza prednapetih betonskih linijskih konstrukcij

Vhodni podatek temperaturno-vlažnostne analize prednapetih betonskih konstrukcij predstavlja porazdelitev temperature in vlage po požarnem prostoru. Med požarom je spreminjanje temperature in vlage v času in prostoru zelo zahteven in nepredvidljiv proces, zato ga lahko le približno računsko predvidimo. V grobem razvoj požara opišemo s tremi značilnimi fazami in sicer z začetno fazo, fazo razvitega požara in fazo ohlajevanja. Zahtevnim matematičnim postopkom za določitev časovnega spreminjanja temperature v požarnem prostoru se izognemo z uporabo t.i. požarnih krivulj, pri katerih je časovni razvoj temperature požarnega prostora predpisan z vnaprej določenim zakonom. V splošnem se te krivulje določajo z eksperimenti. V okviru različnih združenj (American Society for Testing and Materials, 1976; Standard ISO, 1999; Eurocode 1, 1995) so požarne krivulje podane z eksplicitno definirano zvezo med temperaturo in časom. Požarne krivulje v splošnem delimo v dve skupini. V prvo skupino krivulj lahko uvrstimo tiste, kjer temperatura požarnega prostora ves čas narašča (ASTM E119, ISO 834), v drugo skupino pa tiste požarne krivulje, ki opišejo tudi fazo ohlajevanja (SDHI-M, LDMI-M) (slika 3.1). Te standardizirane požarne krivulje se uporabljajo predvsem pri eksperimentalnem preverjanju požarne odpornosti funkcionalnih in nosilnih elementov gradbenih konstrukcij.

Najosnovnejši modeli za določitev temperaturnega polja v konstrukciji upoštevajo le prenos toplote po

trdi snovi, ki poteka s kondukcijo (Bratina, 2003). Obstajajo tudi matematični modeli, kjer avtorji ločeno obravnavajo prenos toplote in vlage skozi porozen material. V literaturi zasledimo vrsto eksperimentalnih raziskav, ki dokazujejo pomemben vpliv vlage na časovno in krajevno razporeditev temperature v konstrukciji, zato je v matematičnih modelih za določitev temperaturnega polja v konstrukciji smiselno upoštevati povezan prenos toplote in vlage skozi kapilarno porozen material kakršen je beton. Dokazano je, da taka povezana analiza prenosa toplote in vlage v konstrukciji pripelje do realnejših rešitev.



Slika 3.1: Požarne krivulje.

Figure 3.1: Fire curves.

Povezan prenos toplote in vlage v kapilarno poroznih materialih je med prvimi raziskoval beloruski znanstvenik Luikov, po katerem se enačbe takega modela tudi imenujejo. Ugotovil je, da je prenos vlage in temperature posledica gradienta vlažnosti, temperature in pornega tlaka. Matematični model povezanega prenosa toplote in vlage, opisan s sistemom nelinearnih parcialnih diferencialnih enačb, je predstavil leta 1966. Kasneje sta tudi Bažant in Kaplan (1996) predstavila matematični model povezanega prenosa toplote in vlage, ki je nekoliko razširjen Luikov model. Na podlagi eksperimentalnih rezultatov sta na osnovi Fick-ovega, Soret-ovega, Fourier-jevega, Doufour-jevega in Darcy-jevega zakona izpeljala sistem povezanih parcialnih diferencialnih enačb za povezan problem prenosa toplote in vlage v kapilarno poroznih materialih. Zelo podoben Luikovemu je tudi t.i. Whitakerjev model (Whitaker, 1977).

Tako formuliran matematični problem povezanega prenosa toplote in vlage je bilo potrebno rešiti. Da je analitična rešitev sploh mogoča, sta Luikov (1966, 1975) ter Luikov in Mikhailov (1966) predlagala, da se za analizo povezanega prenosa toplote in vlage uporablja konstantne koeficiente prevodnosti znotraj posameznega časovnega koraka. S tem postane problem odsekoma linearen in rešitev nelinearnega sistema enačb predstavlja rešitev linearnih sistemov s konstantnimi koeficienti. Luikov in Mikhailov (1966) sta s pomočjo Laplaceove transformacije podala analitične rešitve za preproste plošče, cilindre in sfere. Lobo in sodelavci (1987) so v nadaljevanju ugotovili, da vse te rešitve Luikovih enačb ne upoštevajo možnosti obstoja kompleksnih lastnih vrednosti, kar vodi do vprašljivih in nezanesljivih rešitev. Ta problem sta kasneje rešila Liu in Cheng (1991). Še splošnejše analitične rešitve Luikovih enačb so v zadnjem času predstavili Pandey in sodelavci (1999b) ter Chang in Weng (2000).

Analitično reševanje Luikovih enačb ima predvsem akademski pomen. Za praktične primere prenosa temperature in vlage v kapilarno poroznih materialih analitičnih rešitev ne poznamo. Zato moramo Luikove enačbe rešiti numerično. Pogosto uporabljene numerične metode so na primer diferenčna metoda, metoda končnih elementov, metoda robnih elementov, itd. Diferenčno metodo je za rešitev Luikovih enačb uporabil Gams (2003). Primerjava med numeričnimi rezultati Gamsa in analitičnimi rešitvami Changa in Wenga (2000) je pokazala dobro ujemanje. Thomas in sodelavci (1980) so nelinearne Luikove enačbe reševali z metodo končnih elementov. Šelihova in sodelavci (1994) so analizirali povezan prenos toplote in vlage skozi betonske stene, izpostavljene dvema tipoma požarnih krivulj, ASTM E119 in SDHI. Na podlagi Whitaker-jevega matematičnega modela za prenos toplote in vlage (Whitaker, 1977) so sistem parcialnih diferencialnih enačb reševali z uporabo numeričnih postopkov. Ahmed in Hurst (1999) sta na podoben način analizirala povezan prenos toplote in vlage pri betonskih stebrih, izpostavljenih požarnemu režimu z oznako ASTM E119.

Če želimo v analizi upoštevati tudi luščenje betona, so prej opisani modeli prenosa vlage in temperature v kapilarno poroznih materialih še vedno premalo splošni. To v veliki meri odpravijo modeli, ki dodatno upoštevajo tudi vpliv prenosa vode in vodne pare znotraj betonske konstrukcije. Takšne kompleksne modele so predstavili Ahmed in Hurst (1999), Budaiwi, Diasty in Abdou (1999), Chung in Consolazio (2005), Dal Pont in Ehlacher (2004), Gawin, Pesavento in Schrefler (2003), Ichikawa in England (2004), Tenchev, Li in Purkiss (2001), Tenchev in Purnell (2005). Proces prenosa vode in vodne pare zaradi temperaturnih vplivov v poroznih materialih je zelo kompleksen in kot tak vključuje vrsto med seboj povezanih pojavov. Tenchev in Purnell (2005) predlagata, da lahko strukturo betona po procesu hidratacije cementa razdelimo v tri dele. Cementno pasto in agregat uvrstimo v prvi del. Drugi del zavzemata kemično vezana voda v gelskih porah in prosta voda v kapilarnih porah. Tretji del strukture pa predstavljajo z zrakom zapolnjene kapilarne pore. Tako se v kapilarnih porah betona nahajata voda in zrak. Po dolgotrajni izpostavljenosti betona povišanim temperaturam pride tudi do uparjanja vode. Ta lahko potuje po konstrukciji v smeri proti zunanji površini, ki je izpostavljena povišanim temperaturam, ali pa v notranjost. Tu se lahko vodna para zaradi nižjih temperatur ponovno utekočini. Vse te pojave pa spremlja povišanje pornih tlakov. Dodaten pojav v betonu pri povišanih temperaturah je sproščanje kemijsko vezane vode v gelskih porah in njeno uparjanje. Enačbe teh zahtevnejših matematičnih modelov sestavlja sistem treh povezanih parcialnih diferencialnih enačb. Rešitve takšnega sistema enačb so določljive ob upoštevanju ustreznih začetnih in robnih pogojev. Posamezni koeficienti v enačbah, kot so npr. koeficient toplotne prehodnosti, specifična toplota in podobno so odvisni od vlage in temperature. Zaradi zahtevnosti tudi te enačbe rešimo numerično, najpogosteje z metodo končnih elementov. V zadnjem času pa se za modeliranje luščenja betona v predorih povezano obravnava ne samo prenos temperature, vode in pare, temveč tudi deformiranje betonske konstrukcije med požarom (Gawin, Pesavento in Schrefler, 2003).

Ker se v disertaciji ukvarjamo z analizo odziva standardnih prednapetih betonskih konstrukcij na sočasen vpliv mehanske in požarne obtežbe, ki praviloma niso izpostavljene pojavu luščenja betona, lahko določimo časovno razporeditev vlage in temperature v konstrukciji z Luikovim matematičnim modelom. Ta model je za določitev temperature in vlage v lesenih konstrukcijah med požarom uporabil v svoji disertaciji tudi Schnabl (2007). Zato v disertaciji za določitev vlage in temperature v prednapetih betonskih konstrukcijah med požarom ustrezno modificiramo Schnablov matematični model.

3.1.1 Osnovne enačbe prevajanja toplote in vlage

Osnovne enačbe povezanega prenosa toplote in vlage v kapilarno poroznih materialih, ki jih je predstavil Luikov (1966), sestavljata dve povezani nelinearni parcialni diferencialni enačbi. Enačbi sta izpeljani z uporabo zakona o ohranitvi energije in mase infinitezimalno majhnega območja snovi. Prva enačba

predstavlja prevajanje toplote v kapilarno poroznem materialu zaradi gradienta temperature (Fourierv zakon) in gradienta vlage (Dufourjev zakon). Druga enačba pa predstavlja enačbo difuzije vlage zaradi gradienta vlage (Fickov zakon) in gradienta temperature (Soretov zakon). Z upoštevanjem naslednjih predpostavk:

- material je homogen (lahko tudi ortogonalno anizotropen),
- gravitacijske sile so veliko manjše od sil v kapilarah, zato jih zanemarimo,
- parametri prevodnosti so odvisni od temperature in vlage,
- krčenje ter ostale mehanske spremembe betona zanemarimo,
- maso plinov oziroma hlapov zanemarimo, masni tok je sestavljen le iz toka kapljevine,
- hitrost pretoka kapljevine skozi snov zanemarimo,
- sprememba agregatnega stanja vode (izparevanje/kondenziranje) deluje kot izvor/ponor energije,
- obravnavani prednapeti betonski nosilec se nahaja v okolju s konstantnim zračnim tlakom,

sta enačbi za povezan prehod toplote in vlage v kapilarno poroznih materialih naslednji (Luikov, 1966):

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} - (\varepsilon h_{LV} + \gamma) \frac{\partial(\rho c_m w)}{\partial t} = \operatorname{div}(\mathbf{k} \operatorname{grad} T), \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial(\rho c_m w)}{\partial t} = \operatorname{div}(\mathbf{D}_m \operatorname{grad} w + \mathbf{D}_T \operatorname{grad} T) \quad (3.2)$$

oziroma v komponentni obliki, za primer dvodimenzionalnega prehoda:

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} - (\varepsilon h_{LV} + \gamma) \frac{\partial(\rho c_m w)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial(\rho c_m w)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(D_{my} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_{mz} \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_{my} \delta_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_{mz} \delta_z \frac{\partial T}{\partial z} \right). \quad (3.4)$$

V enačbah (3.1)–(3.4) je \mathbf{k} simetrični tenzor toplotne prevodnosti, kjer sta k_y in k_z (W/mK) koeficienta toplotne prevodnosti v ortogonalnih smereh y in z vzporedno s stranicami pravokotnega prečnega prereza. Podobno predstavlja \mathbf{D}_m diagonalni tenzor prevodnosti vlage, člena D_{my} in D_{mz} (kg/m s °M) pa prevodnostna koeficienta vlage v smereh y in z . ρ je gostota snovi (kg/m³), c_p specifična toplota snovi (J/kgK), T temperatura snovi (°C), c_m specifična vlaga snovi (kg/kg °M), ε delež vlage v plinastem stanju, h_{LV} izparilna toplota snovi (J/kg), γ toplota sorpcije in desorpcije (J/kg), w potencial vlage (°M), t čas (s). \mathbf{D}_T je diagonalni termogradientni tenzor, ki ga v primeru otrotropnega materiala izračunamo kot $\mathbf{D}_T = \mathbf{D}_m \delta$. Tako sta pri dvodimenzionalnem prehodu toplote in vlage δ_y in δ_z (°M/K) termogradientna koeficienta snovi v smereh y in z .

Enačbi (3.1) in (3.3) oziroma (3.2) ter (3.4) sta zapisani za potenciala temperature in vlage. S tem so tudi rezultati izraženi s potencialoma (°C, °M). Z rezultati za temperaturo smo zadovoljni, saj temperaturo izražamo s °C. Problem predstavljajo rezultati za vlažnost. Rezultate za vlažnost izražamo z vlažnostjo materiala V (beton), ki je definirana kot delež vode glede na maso suhega materiala (kg/kg).

Torej moramo rezultate za vlažnost še ustrezno pretvoriti. Vlažnost betona V je s potencialom vlage w povezana preko linearne zveze (Luikov, 1966)

$$V = c_m w. \quad (3.5)$$

Za rešitev sistema enačb (3.1) in (3.2) oziroma (3.3) in (3.4), moramo poznati še robne in začetne pogoje. Z začetnimi pogoji predpišemo temperaturo in potencial vlage po prečnem prerezu pri začetnem času $t = 0$:

$$T(y, z, t = 0) = T_0(y, z), \quad (3.6)$$

$$w(y, z, t = 0) = w_0(y, z). \quad (3.7)$$

Robni pogoji so lahko različni:

- predpisana temperatura in potencial vlage na robu,
- predpisana toplotni tok in tok vlage na površini,
- toplotni in vlažnostni tok sta linearno odvisna od razlike med temperaturo in vlago na robu in v okolici (naravna ali prisiljena konvekcija),
- toplotni tok in tok vlage sta nelinearno odvisna od razlike med temperaturo in vlago na robu in v okolici.

Podrobneje pogledimo kombinacijo zadnjih dveh robnih pogojev. Tok toplote na robu dodatno upošteva vpliv latentne toplote izparevanja, medtem ko tok vlage na robu dodatno upošteva vpliv temperaturnega gradienta. Robni pogoji na izpostavljenih zunanjih površinah izenačujejo toplotni pretok s prevajanjem in pretokom vlage s pretokom, ki je posledica radiacije in konvekcije toplote oziroma konvekcijo vlage med nosilcem in okolico. Robne pogoje za poljubne poševne robove zapišemo v obliki:

$$-\mathbf{n}^T \mathbf{k} \text{grad } T = h_c (T - T_A) + \varepsilon_R \sigma (T^4 - T_A^4) + (1 - \varepsilon) h_{LV} h_m (w - w_A), \quad (3.8)$$

$$-\mathbf{n}^T \mathbf{D}_m \text{grad } w - \mathbf{n}^T \mathbf{D}_T \text{grad } T = h_m (w - w_A) \quad (3.9)$$

oziroma v komponentni obliki

$$-k_y \frac{\partial T}{\partial y} e_{ny} - k_z \frac{\partial T}{\partial z} e_{nz} = h_c (T - T_A) + \varepsilon_R \sigma (T^4 - T_A^4) + (1 - \varepsilon) h_{LV} h_m (w - w_A), \quad (3.10)$$

$$D_{my} \frac{\partial w}{\partial y} e_{ny} + D_{mz} \frac{\partial w}{\partial z} e_{nz} + D_{my} \delta_y \frac{\partial T}{\partial y} e_{ny} + D_{mz} \delta_z \frac{\partial T}{\partial z} e_{nz} = -h_m (w - w_A). \quad (3.11)$$

V enačbah (3.8)–(3.11) je \mathbf{n} zunanja normala na mejno ploskev s smernima kosinusoma e_{ny} in e_{nz} ; h_c in h_m sta prestopna koeficienta toplote ($\text{W}/\text{m}^2 \text{K}$) in vlage ($\text{kg}/\text{s m}^2 \text{ } ^\circ\text{M}$); T_A in w_A sta temperatura ($^\circ\text{C}$) in vlažnostni potencial ($^\circ\text{M}$) okolice (ambienta); člen $\varepsilon_R \sigma (T^4 - T_A^4)$ predstavlja vpliv radiacije, kjer je ε_R efektivna površinska emisivnost zunanje strani nosilca, σ pa Stephan-Boltzmannova konstanta radiacije ($\sigma = 5.671 \times 10^{-8} \text{ W}/\text{m}^2 \text{K}^4$).

Če povzamemo, smo z enačbama (3.1) in (3.2) matematično opisali problem povezanega prehoda toplote in vlage v prednapeti betonski konstrukciji, ki je izpostavljena požaru. Osnovni neznanki problema T in w določimo z upoštevanjem ustreznih začetnih in robnih pogojev (3.8) in (3.9).

3.1.2 Diferenčna metoda

Lastnosti in uporabo diferenčne metode v reševanju problemov prehoda toplote in vlage je v svojih knjigah natančno opisal Özisik (1985, 1994). Osnovna ideja diferenčne metode je, da dane diferencialne enačbe nadomestimo z ustreznimi algebrskimi enačbami. S tem namenom namesto odvodov uporabimo končne diference točkovnih vrednosti iskanih funkcij. Tako rešitve predstavljajo točkovne vrednosti v naprej izbranih točkah diferenčne mreže. Gostota diferenčne mreže je odvisna od zahtevane natančnosti rešitve.

Ena od možnosti izpeljave diferenčnih enačb problema je uvedba t.i. oblikovnih funkcij. To so funkcije, s katerimi vrednosti iz diskretnih točk prevedemo na celotno definicijsko območje problema. Ker so oblikovne funkcije le približki dejanskih funkcij, je pravilna izbira oblikovnih funkcij bistvena za natančnost rešitev. Izpeljavo oblikovnih funkcij pri reševanju povezanega prenosa toplote in vlage je v svoji diplomski nalogi podrobno predstavil že Gams (2003), zato se ji na tem mestu izognemo.

Uporaba diferenčne metode je preprosta in primerna predvsem za račun problemov, definiranih na pravokotnih območjih različnih dimenzij. Pri postopnem zgoščevanju diferenčne mreže metoda praviloma konvergira k točni rešitvi, zato je primerna za oceno natančnosti in pogosto predstavlja kontrolno metodo drugim numeričnim metodam, pri katerih napake metode ne moremo oceniti, na primer pri metodi končnih elementov.

Omenili smo že, da potek neznanih funkcij med posameznimi diskretnimi točkami poiščemo s t.i. oblikovnimi funkcijami. Ker v enačbah (3.1) in (3.3) oziroma (3.2) ter (3.4) nastopajo drugi odvodi po kraju in prvi odvodi po času, izberemo kvadratni potek temperature in potenciala vlage po prečnem prerezu ter linearen potek obeh količin po času. Na podlagi izbranih oblikovnih funkcij, lahko temperaturo in potencial vlage v poljubni točki zapišemo v odvisnosti od vrednosti v diskretnih točkah diferenčne mreže:

$$T(y, z, t) = \sum_{l=i-1}^{i+1} \sum_{m=j-1}^{j+1} \sum_{n=k}^{k+1} T_{l,m,n} N_{l,m} M_k, \quad (3.12)$$

$$w(y, z, t) = \sum_{l=i-1}^{i+1} \sum_{m=j-1}^{j+1} \sum_{n=k}^{k+1} w_{l,m,n} N_{l,m} M_k. \quad (3.13)$$

V izrazih (3.12) in (3.13) predstavljata $T_{l,m,n}$ in $w_{l,m,n}$ točkovne (vozliščne) vrednosti temperature in točkovne (vozliščne) vrednosti potenciala vlage v točkah diferenčne mreže, $N_{l,m}$ in M_k pa predstavljata krajevne in časovne oblikovne funkcije. V tem primeru z indeksoma "i" in "j" označimo koordinati y in z , z indeksom "k" pa čas. Diferenčno mrežo z danimi koordinatami prikazujemo na sliki 3.2.

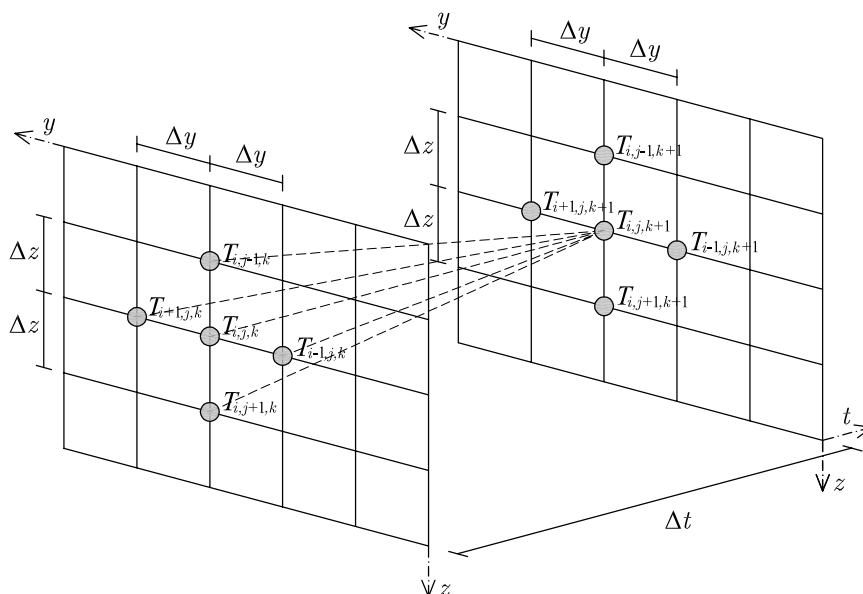
Z upoštevanjem odvodov oblikovnih funkcij in brezdimenzijskih koordinat (Gams, 2003) aproksimirane izraze, ki nastopajo v enačbah (3.1) in (3.3) oziroma (3.2) ter (3.4), zapišemo v razviti obliki z izrazi:

$$T = (1 - t_b)T_{i,j,k} + t_b T_{i,j,k+1}, \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{(1 - t_b)}{2\Delta y} (T_{i+1,j,k} - T_{i-1,j,k}) + \frac{t_b}{2\Delta y} (T_{i+1,j,k+1} - T_{i-1,j,k+1}), \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{(1 - t_b)}{2\Delta z} (T_{i+1,j,k} - T_{i-1,j,k}) + \frac{t_b}{2\Delta z} (T_{i+1,j,k+1} - T_{i-1,j,k+1}), \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{(1 - t_b)}{\Delta y^2} (T_{i+1,j,k} - 2T_{i,j,k} + T_{i-1,j,k}) + \frac{t_b}{\Delta y^2} (T_{i-1,j,k+1} - 2T_{i,j,k+1} + T_{i-1,j,k+1}), \quad (3.17)$$



Slika 3.2: Oznake temperatur v točkah diferenčne mreže pri dveh različnih časih.

Figure 3.2: Finite difference points at two different times.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{(1-t_b)}{\Delta z^2} (T_{i,j+1,k} - 2T_{i,j,k} + T_{i,j-1,k}) + \frac{t_b}{\Delta z^2} (T_{i,j+1,k+1} - 2T_{i,j,k+1} + T_{i,j-1,k+1}), \quad (3.18)$$

$$w = (1-t_b)w_{i,j,k} + t_b w_{i,j,k+1}, \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{(1-t_b)}{2\Delta y} (w_{i+1,j,k} - w_{i-1,j,k}) + \frac{t_b}{2\Delta y} (w_{i+1,j,k+1} - w_{i-1,j,k+1}), \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{(1-t_b)}{2\Delta z} (w_{i+1,j,k} - w_{i-1,j,k}) + \frac{t_b}{2\Delta z} (w_{i+1,j,k+1} - w_{i-1,j,k+1}), \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{(1-t_b)}{\Delta y^2} (w_{i+1,j,k} - 2w_{i,j,k} + w_{i-1,j,k}) + \frac{t_b}{\Delta y^2} (w_{i+1,j,k+1} - 2w_{i,j,k+1} + w_{i-1,j,k+1}), \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{(1-t_b)}{\Delta z^2} (w_{i,j+1,k} - 2w_{i,j,k} + w_{i,j-1,k}) + \frac{t_b}{\Delta z^2} (w_{i,j+1,k+1} - 2w_{i,j,k+1} + w_{i,j-1,k+1}), \quad (3.23)$$

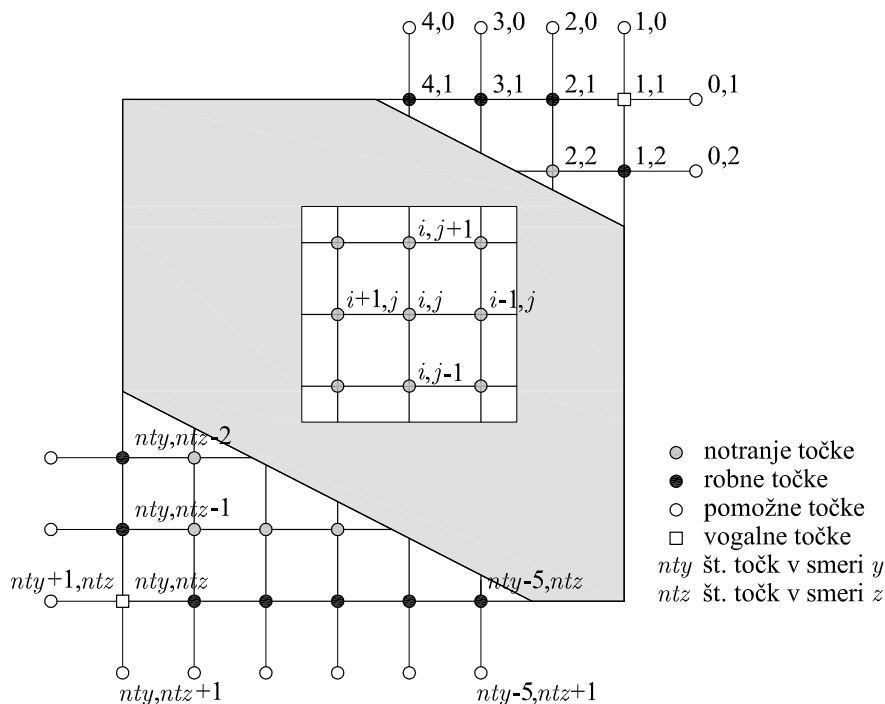
$$\rho = (1-t_b)\rho_{i,j,k} + t_b \rho_{i,j,k+1}, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial k_y}{\partial y} = \frac{(1-t_b)}{2\Delta y} \left((k_y)_{i+1,j,k} - (k_y)_{i-1,j,k} \right) + \frac{t_b}{2\Delta y} \left((k_y)_{i+1,j,k+1} - (k_y)_{i-1,j,k+1} \right), \quad (3.25)$$

itd.

Ko izraze (3.14)–(3.25) vstavimo v (3.1) in (3.3) oziroma (3.2) ter (3.4), dobimo enačbe za notranje (ne-robne) točke diferenčne mreže prečnega prereza (slika 3.3). Diferencialne enačbe za točke na robu in v vogalih izpeljemo z uporabo t.i. nesimetričnih ali simetričnih formul (Gams, 2003). Postopek računanja

je praviloma bolj učinkovit, če pri zapisu enačb uporabljamo le središčne interpolacije. Središčna interpolacija zahteva vpeljavo pomožnih vozlišč z namišljenimi vrednostmi temperature in potenciala vlage, ki se nahajajo okrog prereza. Posledično pomeni to vpeljavo dodatnih neznank, za kar potrebujemo dodatne enačbe. Dodatne enačbe dobimo, če enačbe za notranje točke zapišemo še v robnih točkah (slika 3.3).



Slika 3.3: Oznake vozlišč izbrane diferencne mreže glede na lego v prerezu.

Figure 3.3: Finite difference points and their position in the cross-section.

V izrazih (3.14)–(3.25) smo vpeljali brezdimenzijski čas $0 \leq t_b \leq 1$ kot prosti parameter. Da bi diskretiziran sistem enačb povezanega prenosa toplote in vlage lahko rešili, moramo izbrati vrednost parametra t_b . Če izberemo $t_b = 0$, imenujemo diferencno metodo *čista eksplicitna* ali *Eulerjeva metoda*, če je $t_b = 0.5$, jo imenujemo *Crank-Nicholsonova metoda*, če je $t_b = 0.67$, jo imenujemo *Galerkinova metoda* in če je $t_b = 1$, imenujemo diferencno metodo *čista implicitna metoda*.

Izbira parametra t_b nam pove, pri katerem času zadostimo diferencialnim enačbam. Pri tem pomeni $t_b = 0$ začetek časovnega koraka, $t_b = 1$ pa njegov konec. Različne izbire parametra t_b dajejo različno natančne rešitve. Če izberemo t_b na intervalu $0 \leq t_b \leq 0.5$, postane sicer stabilna diferencna metoda pogojno stabilna. Ker moramo v tem primeru zadostiti dodatni kriterij o dovoljeni dolžini časovnega koraka Δt , se takim izbiram t_b raje izognemo.

Pri nelinearnih problemih v splošem iščemo rešitve z raznimi iteracijskimi metodami. Za uspešno iterativno reševanje pa sta pomembna tako izbira začetnega približka kot izbira iteracijske metode. Na voljo je kar nekaj iteracijskih metod, npr. navadna oz. Jacobijeva iteracija, Newtonova metoda, kvazi-Newtonove metode, variacijske metode, itd. Neodvisno od izbire iteracijske metode je togostna matrika običajno odvisna od temperature in potenciala vlage. Poleg tega je togostna matrika pogosto tudi pasovna. Upoštevanje algoritmov za reševanje pasovnih matrik lahko v takem primeru zelo izboljša natančnost rešitev in hitrost konvergence (Schnabl, 2007).

3.2 Določitev napetostnega in deformacijskega stanja v prednapetem betonskem nosilcu med požarom

Drugo fazo predstavljenega matematičnega modela in računskega postopka za analizo prednapetih betonskih linijskih konstrukcij med požarom predstavlja določitev napetostnega in deformacijskega stanja v nosilcu ob sočasnem delovanju mehanske in požarne obtežbe. S tem namenom razširimo v prejšnjem poglavju predstavljen numerični model za analizo prednapetih nosilcev pri sobni temperaturi na temperaturne razmere med požarom. To zahteva razširitev matematičnega modela in računskega postopka. Pri razširitvi matematičnega modela upoštevamo spremenjene mehanske lastnosti betona, jekla za armiranje in prednapenjanje ter stika med betonom in prednapetimi kabli pri povišanih temperaturah. Večino teh pojavov v modelu upoštevamo z znanim adicijskim razcepom geometrijskih deformacij prednapetega betonskega linijskega nosilca (Bratina, 2003; Srpčič, 1991). Pri razširitvi računskega postopka pa moramo upoštevati, da je požar časovni pojav. Vse te razširitve predstavimo v nadaljevanju.

3.2.1 Adicijski razcep geometrijske deformacije

Kot smo že povedali, predstavlja osnovno razširitev matematičnega modela za analizo prednapetih nosilcev med požarom ustrezno upoštevanje spremenjenih mehanskih lastnosti betona, jekla za armiranje in prednapenjanje ter stika med betonom in prednapetimi kabli pri povišanih temperaturah. Te podrobno opišemo v podpoglavju 3.3. Formalno pa vse te vplive v matematičnem modelu upoštevamo z adicijskim razcepom prirastka geometrijske deformacije $\Delta\varepsilon$ v vsoto prirastkov mehanskih deformacij $\Delta\varepsilon_\sigma$, temperaturnih deformacij $\Delta\varepsilon_{th}$, viskoznih deformacij jekla za armiranje in prednapenjanje, $\Delta\varepsilon_{cr,s}$ ter $\Delta\varepsilon_{cr,p}$ in t.i. prehodnih deformacij betona $\Delta\varepsilon_{tr,c}$. Prispevke posameznih prirastkov deformacij zapišemo posebej za betonski del nosilca, jekla za armiranje in jekla za prednapenjanje:

$$\text{betonski del konstrukcije:} \quad \Delta\varepsilon_c = \Delta\varepsilon_{\sigma,c} + \Delta\varepsilon_{th,c} + \Delta\varepsilon_{cr,c} + \Delta\varepsilon_{tr,c}, \quad (3.26)$$

$$\text{jeklo za armiranje:} \quad \Delta\varepsilon_s = \Delta\varepsilon_{\sigma,s} + \Delta\varepsilon_{th,s} + \Delta\varepsilon_{cr,s}, \quad (3.27)$$

$$\text{jeklo za prednapenjanje:} \quad \Delta\varepsilon_p^k = \Delta\varepsilon_{\sigma,p}^k + \Delta\varepsilon_{th,p}^k + \Delta\varepsilon_{cr,p}^k, \quad (k = 1, 2, \dots, n_p). \quad (3.28)$$

Seveda so vsi ti prirastki deformacij eksplicitno ali pa implicitno odvisni od temperature. V predstavljenem matematičnem modelu jih upoštevamo preko konstitucijskih količin $\mathcal{N}_{c,c}$, $\mathcal{M}_{c,c}$ in $\mathcal{N}_{c,p}^k$ ($k = 1, 2, \dots, n_p$).

3.2.2 Posplošene ravnotežne enačbe prednapetega betonskega nosilca med požarom

Posplošene ravnotežne enačbe predstavljenega matematičnega modela za analizo prednapetih betonskih linijskih konstrukcij med požarom so formalno enake enačbam (2.99)–(2.113). Zaradi spremenjenih mehanskih lastnosti betona, jekla za armiranje in prednapenjanje ter stika med betonom in prednapetimi kabli pri povišanih temperaturah se spremenijo konstitucijske količine $\mathcal{N}_{c,c}$, $\mathcal{M}_{c,c}$ in $\mathcal{N}_{c,p}^k$ ($k = 1, 2, \dots, n_p$). V posplošenih ravnotežnih enačbah te spremembe upoštevamo s pomočjo adicijskega razcepa prirastka geometrijskih deformacij (enačbe (3.26)–(3.28)). Poleg tega pa so sedaj posplošene ravnotežne enačbe za analizo prednapetih betonskih nosilcev med požarom odvisne tudi od časa in temperature in so:

kinematične enačbe:

$$1 + \frac{du_c(x_c, t)}{dx_c} - (1 + \varepsilon_{c0}(x_c, t)) \cos \varphi_c(x_c, t) = 0, \quad (3.29)$$

$$\frac{dw_c(x_c, t)}{dx_c} + (1 + \varepsilon_{c0}(x_c, t)) \sin \varphi_c(x_c, t) = 0, \quad (3.30)$$

$$\frac{d\varphi_c(x_c, t)}{dx_c} - \kappa_c(x_c, t) = 0, \quad (3.31)$$

$$1 + \frac{du_p^k(x_p^k, t)}{dx_c} - (1 + \varepsilon_p^k(x_p^k, t)) \cos \varphi_c(x_c, t) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n_p), \quad (3.32)$$

ravnotežne enačbe:

$$\frac{d\mathcal{R}_{X,c}(x_c, t)}{dx_c} + q_{X,c}(x_c, t) + \sum_{k=1}^{n_p} p_{X,c}^k(x_c, t) = 0, \quad (3.33)$$

$$\frac{d\mathcal{R}_{Z,c}(x_c, t)}{dx_c} + q_{Z,c}(x_c, t) + \sum_{k=1}^{n_p} p_{Z,c}^k(x_c, t) = 0, \quad (3.34)$$

$$\frac{d\mathcal{M}_c(x_c, t)}{dx_c} - (1 + \varepsilon_{c0}(x_c, t)) \mathcal{Q}_c(x_c, t) + m_{Y,c}(x_c, t) + \sum_{k=1}^{n_p} p_{X,c}^k(x_c, t) z_c^k = 0, \quad (3.35)$$

$$\frac{d\mathcal{N}_p^k(x_p^k, t)}{dx_p^k} + p_{t,p}^k(x_p^k, t) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n_p), \quad (3.36)$$

$$-\mathcal{N}_p^k(x_p^k, t) \left(\frac{(1 + \varepsilon_p^k(x_p^k, t))}{(1 + \varepsilon_{c0}(x_c, t) + z_c^k \kappa_c(x_c, t))} \kappa_c(x_c, t) \right) + p_{n,p}^k(x_p^k, t) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n_p), \quad (3.37)$$

konstitucijske enačbe:

$$\mathcal{N}_c(x_c, t) = \mathcal{N}_{c,c}(x_c, \varepsilon_{c0}, \kappa_c, T(y, z, t, w)), \quad (3.38)$$

$$\mathcal{M}_c(x_c, t) = \mathcal{M}_{c,c}(x_c, \varepsilon_{c0}, \kappa_c, T(y, z, t, w)), \quad (3.39)$$

$$\mathcal{N}_{c,p}^k(x_p^k, t) = \mathcal{N}_{c,p}^k(x_p^k, \varepsilon_p^k, T(y, z, t, w)), \quad (k = 1, 2, \dots, n_p), \quad (3.40)$$

vezne enačbe:

$$x_c + u_c(x_c, t) + z_c^k \sin \varphi_c(x_c, t) = x_p^{*k} + u_p^k(x_p^k, t), \quad (k = 1, 2, \dots, n_p), \quad (3.41)$$

$$\Delta^k(x_c, t) = \int_{x_p^{*k}}^{x_c} (1 + \varepsilon_p^k(x, t)) dx, \quad (k = 1, 2, \dots, n_p), \quad (3.42)$$

$$p_{t,c}^k(x_c, t) = \mathcal{G}_{t,c}^k(\Delta^k(x_c, t), p_{n,c}^k(x_c, t), x_c, \dots), \quad (k = 1, 2, \dots, n_p), \quad (3.43)$$

$$p_{X,c}^k(x_c, t) = p_{t,c}^k(x_c, t) \cos \varphi_c(x_c, t) - p_{n,p}^k(x_p^k, t) \sin \varphi_c(x_c, t), \quad (k = 1, 2, \dots, n_p), \quad (3.44)$$

$$p_{Z,c}^k(x_c, t) = -p_{t,c}^k(x_c, t) \sin \varphi_c(x_c, t) - p_{n,p}^k(x_p^k, t) \cos \varphi_c(x_c, t), \quad (k = 1, 2, \dots, n_p), \quad (3.45)$$

$$p_{X,p}^k(x_p^k, t) = -p_{X,c}^k(x_c, t), \quad (k = 1, 2, \dots, n_p), \quad (3.46)$$

$$p_{Z,p}^k(x_p^k, t) = -p_{Z,c}^k(x_c, t), \quad (k = 1, 2, \dots, n_p) \quad (3.47)$$

ter pripadajoči statični in kinematični robni pogoji.

$x_c = 0$:

$$-S_{1,c} - \mathcal{R}_{X,c}(0) = 0 \quad \text{ali} \quad u_{1,c} = u_c(0), \quad (3.48)$$

$$-S_{2,c} - \mathcal{R}_{Z,c}(0) = 0 \quad \text{ali} \quad u_{2,c} = w_c(0), \quad (3.49)$$

$$-S_{3,c} - \mathcal{M}_c(0) = 0 \quad \text{ali} \quad u_{3,c} = \varphi_c(0), \quad (3.50)$$

$x_c = L$:

$$-S_{4,c} + \mathcal{R}_{X,c}(L) = 0 \quad \text{ali} \quad u_{4,c} = u_c(L), \quad (3.51)$$

$$-S_{5,c} + \mathcal{R}_{Z,c}(L) = 0 \quad \text{ali} \quad u_{5,c} = w_c(L), \quad (3.52)$$

$$-S_{6,c} + \mathcal{M}_c(L) = 0 \quad \text{ali} \quad u_{6,c} = \varphi_c(L). \quad (3.53)$$

V splošnem so lahko tudi robni pogoji odvisni od časa in temperature. Podobno kot pri analizi prednapetih linijskih konstrukcij pri sobni temperaturi predstavlja zgornji sistem $(7n_p + 8)$ diferencialnih in algebrskih enačb za prav toliko neznanke: $\varepsilon_{c0}(x_c, t)$, $\kappa_c(x_c, t)$, $\varepsilon_p^k(x_p^k, t)$, $\mathcal{R}_{X,c}(x_c, t)$, $\mathcal{R}_{Z,c}(x_c, t)$, $\mathcal{M}_c(x_c, t)$, $\mathcal{N}_p^k(x_p^k, t)$, $u_c(x_c, t)$, $w_c(x_c, t)$, $\varphi_c(x_c, t)$, $u_p^k(x_p^k, t)$, $x_p^{*k}(x_c, t)$, $p_{n,p}^k(x_p^k, t)$, $p_{t,c}^k(x_c, t)$, $\Delta^k(x_c, t)$ ($k = 1, 2, \dots, n_p$).

3.2.3 Računski postopek

Podobno kot posplošene ravnotežne enačbe za določitev napetostnega in deformacijskega stanja prednapetega betonskega nosilca pri sobni temperaturi, rešimo enačbe (3.29)–(3.43) z deformacijsko metodo končnih elementov. Ker je krajevna diskretizacija podobna kot pri analizi prednapetih nosilcev pri sobni temperaturi (poglavje 2), je na tem mestu ne izpeljemo, prikažemo pa reševanje diskretnih posplošenih ravnotežnih enačb (3.29)–(3.51) po času. S tem namenom celotni čas požarne analize $[0, t^{\text{kon}}]$ razdelimo na dovolj majhne časovne korake oziroma inkremente $[t^r, t^{r+1}]$. Napetostno in deformacijsko stanje prednapetega linijskega nosilca pri času t^{r+1} izračunamo iz znanih kinematičnih, deformacijskih in ravnotežnih količin pri času t^r in znane temperature ter obtežbe pri času t^{r+1} z Newtonovo iteracijsko metodo. Zato take računske postopke v literaturi uvrščamo med inkrementno-iteracijske (Bratina, 2003; Planinc, 1998). Kot kriterij za porušitev konstrukcije med požarom izberemo singularnost tangentne togostne matrike konstrukcije; pripadajoči čas imenujemo kritični čas in ga označimo s t_{cr} . Posplošene

diskretne ravnotežne enačbe za analizo prednapetih betonskih linijskih konstrukcij ob sočasnem delovanju mehanske in požarne obtežbe pri času t^{r+1} so ($k = 1, 2, \dots, n_p$):

$$g_{\varepsilon_{c0}}^{n,r+1} = \int_0^L (\mathcal{N}_{c,c}^{r+1} - \mathcal{N}_c^{r+1}) P_n dx = 0, \quad (n = 1, 2, \dots, N), \quad (3.54)$$

$$g_{\kappa_c}^{n,r+1} = \int_0^L (\mathcal{M}_{c,c}^{r+1} - \mathcal{M}_c^{r+1}) P_n dx = 0, \quad (n = 1, 2, \dots, N), \quad (3.55)$$

$$g_{\varepsilon_p^k}^{n,r+1} = \int_0^L (\mathcal{N}_{c,p}^{k,r+1} - \mathcal{N}_p^{k,r+1}) P_n dx, \quad (n = 1, 2, \dots, N), \quad (3.56)$$

$$g_{\mathcal{R}_{X,c}}^{r+1} = u_c^{r+1}(L) - u_c^{r+1}(0) - \int_0^L \left((1 + \sum_{n=1}^N P_n \varepsilon_{c0,n}^{r+1}) \cos \varphi_c^{r+1} \right) dx + L = 0, \quad (3.57)$$

$$g_{\mathcal{R}_{Z,c}}^{r+1} = w_c^{r+1}(L) - w_c^{r+1}(0) + \int_0^L \left((1 + \sum_{n=1}^N P_n \varepsilon_{c0,n}^{r+1}) \sin \varphi_c^{r+1} \right) dx = 0, \quad (3.58)$$

$$g_{\mathcal{M}_c}^{r+1} = \varphi_c^{r+1}(L) - \varphi_c^{r+1}(0) - \int_0^L \left(\sum_{n=1}^N P_n \kappa_{c,n}^{r+1} \right) dx = 0, \quad (3.59)$$

$$g_{\mathcal{N}_p^k}^{r+1} = u_p^{k,r+1}(L) - u_p^{k,r+1}(0) - \int_0^L \left((1 + \sum_{n=1}^N P_n \varepsilon_{p,n}^{k,r+1}) \cos \varphi_c^{r+1} \right) dx + L = 0, \quad (3.60)$$

$$g_{u_{c0}}^{r+1} = -S_{1,c}^{r+1} - \mathcal{R}_{X,bc}^{r+1}(0) = 0, \quad (3.61)$$

$$g_{w_{c0}}^{r+1} = -S_{2,c}^{r+1} - \mathcal{R}_{Z,c}^{r+1}(0) = 0, \quad (3.62)$$

$$g_{\varphi_{c0}}^{r+1} = -S_{3,c}^{r+1} - \mathcal{M}_c^{r+1}(0) = 0, \quad (3.63)$$

$$g_{u_{p0}^k}^{r+1} = -\mathcal{N}_p^{k,r+1}(0) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n_p), \quad (3.64)$$

$$g_{u_{cL}}^{r+1} = -S_{4,c}^{r+1} + \mathcal{R}_{X,c}^{r+1}(0) - \int_0^L \left(q_{X,c}^{r+1} + \sum_{k=1}^{n_p} p_{X,c}^{k,r+1} \right) dx = 0, \quad (3.65)$$

$$g_{w_{cL}}^{r+1} = -S_{5,c}^{r+1} + \mathcal{R}_{Z,c}^{r+1}(0) - \int_0^L \left(q_{Z,c}^{r+1} + \sum_{k=1}^{n_p} p_{Z,c}^{k,r+1} \right) dx = 0, \quad (3.66)$$

$$g_{\varphi_{cL}}^{r+1} = -S_{6,c}^{r+1} + \mathcal{M}_c^{r+1}(0) + \int_0^L \left((1 + \sum_{n=1}^N P_n \varepsilon_{c0,n}^{r+1}) \mathcal{Q}_c^{r+1} - m_{Y,c}^{r+1} - \sum_{k=1}^{n_p} p_{X,c}^{k,r+1} z_c^k \right) dx = 0, \quad (3.67)$$

$$g_{u_{pL}^k}^{r+1} = \mathcal{N}_p^{k,r+1}(0) - \int_0^L p_{t,p}^{k,r+1} dx = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n_p), \quad (3.68)$$

$$g_{x_{p,n}^{*k}}^{n,r+1} = x_{c,n}^{r+1} + u_c^{r+1} + z_c^k \sin \varphi_c^{r+1} - x_{p,n}^{*k,r+1} - u_p^{k,r+1} = 0, \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (3.69)$$

$$g_{p_{n,p}^k}^{n,r+1} = p_{n,p,n}^{k,r+1} - \mathcal{N}_p^{k,r+1} \frac{(1 + \varepsilon_p^{k,r+1})}{(1 + \varepsilon_{c0}^{r+1} + z_c^k \kappa_c^{r+1})} \kappa_c^{r+1} = 0, \quad (n = 1, 2, \dots, N). \quad (3.70)$$

Sistem enačb (3.54)–(3.70) sestavlja $N(3n_p + 2) + (3n_p + 9)$ enačb za prav toliko neznank. Med notranjimi prostostnimi stopnjami je neznanih $N(n_p + 2)$ deformacijskih vozliščnih količin $\varepsilon_{c0,n}^{r+1}$, $\kappa_{c,n}^{r+1}$ in $\varepsilon_{p,n}^{k,r+1}$ ter $(n_p + 3)$ ravnotežnih količin: $\mathcal{R}_{X,c}^{r+1}(0)$, $\mathcal{R}_{Z,c}^{r+1}(0)$, $\mathcal{M}_c^{r+1}(0)$ in $\mathcal{N}_p^{k,r+1}(0)$. Med zunanji prostostnimi stopnjami pa je neznanih $(2n_p + 6)$ kinematičnih količin: $u_c^{r+1}(0)$, $w_c^{r+1}(0)$, $\varphi_c^{r+1}(0)$, $u_p^{k,r+1}(0)$, $u_c^{r+1}(L)$, $w_c^{r+1}(L)$, $\varphi_c^{r+1}(L)$ in $u_p^{k,r+1}(L)$. Neznanih je še dodatnih $2Nn_p$ vozliščnih količin $x_{p,n}^{*k,r+1}$ in $p_{n,p,n}^{k,r+1}$. Funkcije $\mathcal{R}_{X,c}^{r+1}(x_c)$, $\mathcal{R}_{Z,c}^{r+1}(x_c)$, $\mathcal{M}_c^{r+1}(x_c)$ in $\mathcal{N}_p^{k,r+1}(x_p^k)$ v enačbah (3.54)–(3.70) določimo s pomočjo izrazov (2.184)–(2.187). V nadaljevanju notranje prostostne stopnje končnih elementov kondenziramo, zunanje prostostne stopnje pa združimo v enačbo konstrukcije

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}^{r+1}, \lambda^{r+1}, T^{r+1}, w^{r+1}) = \mathbf{0}. \quad (3.71)$$

V enačbi (3.71) predstavljajo: \mathbf{x}^{r+1} vektor posplošenih pomikov oziroma vektor vozliščnih pomikov in zasukov končnega elementa pri času t^{r+1} ; parameter λ^{r+1} obtežni faktor konstrukcije pri času t^{r+1} ; T^{r+1} temperaturno in w^{r+1} vlažnostno polje po konstrukciji pri času t^{r+1} .

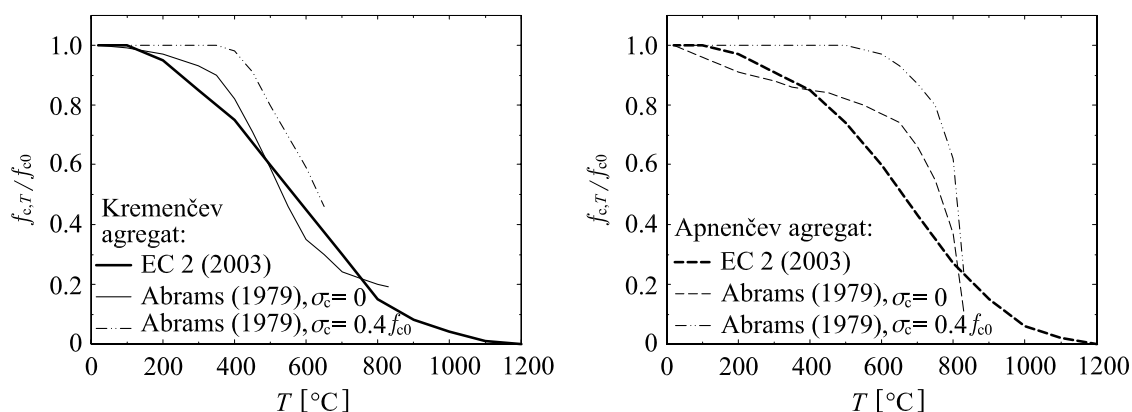
3.3 Mehanske in toplotne lastnosti betona, jekla za armiranje in prednapenjanje ter stika pri visokih temperaturah

Spreminjanje temperature v konstrukciji bistveno vpliva na mehanske in toplotne lastnosti betona, jekla za armiranje in prednapenjanje ter stika med betonom in prednapetimi kabli. Poznavanje spreminjanja teh lastnosti v odvisnosti od temperaturnih sprememb je bistvenega pomena za oceno obnašanja prednapetih betonskih konstrukcij, ki so izpostavljene požaru. V literaturi je na voljo vrsta eksperimentalnih podatkov o mehanskih in toplotnih lastnostih omenjenih materialov pri povišanih temperaturah. Te lastnosti na kratko opišemo v nadaljevanju.

3.3.1 Beton

3.3.1.1 Tlačna trdnost betona

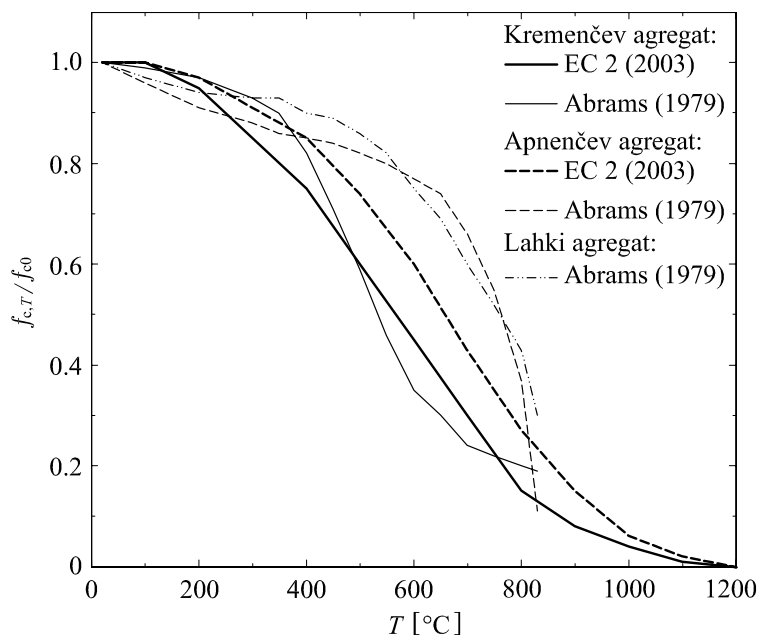
Med prvimi je natančne eksperimentalne rezultate spreminjanja materialnih karakteristik betona v odvisnosti od temperature predstavil Abrams (1979). Predstavil je rezultate enosnih tlačnih preiskav za tlačno trdnost betonskih vzorcev pri povišanih temperaturah, $f_{c,T}$. Podobne izsledke o spreminjanju tlačne trdnosti betona pri povišanih temperaturah podaja tudi evropski standard za beton Eurocode 2, Part 1-2 (2003). Rezultate Abramsa (1979) ter priporočila Eurocode 2, Part 1-2 (2003) za spreminjanje tlačne trdnosti betona pri povišanih temperaturah prikazujemo na slikah 3.4 in 3.5.



Slika 3.4: Spreminjanje tlačne trdnosti betona s temperaturo glede na nivo tlačne obremenitve za: (a) kremenčev agregat in (b) apnenčev agregat.

Figure 3.4: Compressive strength at elevated temperature for different strength levels for: (a) siliceous aggregate and (b) carbonate aggregate.

Na sliki 3.4a je prikazano spreminjanje tlačne trdnosti v odvisnosti od temperature za betonski vzorec iz kremenčevega agregata, na sliki 3.4b pa za vzorec iz apnenčevega agregata. Iz slik 3.4a in 3.4b vidimo, da tlačna trdnost betonskega vzorca iz obeh vrst agregata z naraščanjem temperature pada. Padec tlačne trdnosti betona iz kremenčevega agregata je izrazitejši. Najprej interpretiramo rezultate Abramsa. Pri neobremenjenem betonskem vzorcu iz kremenčevega agregata ($\sigma_c = 0$) vidimo, da ima betonski vzorec pri temperaturi 450°C še 75 % tlačne trdnosti betona pri sobni temperaturi, f_{c0} , pri temperaturi 550°C pa le še 50 %. Hiter padec tlačne trdnosti betona nastopi zaradi relativno velikega raztezanja silikatnih



Slika 3.5: Spreminjanje tlačne trdnosti betona s temperaturo glede na vrsto uporabljenega agregata.

Figure 3.5: Compressive strength at elevated temperatures for different types of aggregates.

kamenin, ki vodi v hipno spremembo volumna. Če je betonski vzorec iz kremenčevega agregata med požarom tudi tlačno obremenjen ($\sigma_c = 0.4f_{c0}$), ima pri temperaturi 450°C še 90% tlačne trdnosti betona pri sobni temperaturi, pri temperaturi 550°C pa le še 60% (slika 3.4a). Zanimivo je, da je v tem primeru tlačna trdnost betona do temperature 350°C enaka tlačni trdnosti betona pri sobni temperaturi. Praktično enake kvalitativne ugotovitve veljajo tudi za betonske vzorce iz apnenčevega agregata (slika 3.4b). Razlikujejo se le kvantitativni rezultati. V tem primeru ima neobremenjen betonski vzorec ($\sigma_c = 0$) pri temperaturi 650°C le še 75% tlačne trdnosti betona pri sobni temperaturi, pri temperaturi 760°C pa le še 50%. Če je betonski vzorec med požarom tudi tlačno obremenjen ($\sigma_c = 0.4f_{c0}$), ima pri temperaturi 650°C še 90% tlačne trdnosti betona pri sobni temperaturi, pri temperaturi 760°C pa le še 60%. Pri tlačno obremenjenih betonskih vzorcih je tlačna trdnost betona do temperature 500°C kar enaka tlačni trdnosti betona pri sobni temperaturi. Abrams (1979) je tako ugotovil, da ima tlačno obremenjen betonski vzorec med požarom višjo tlačno trdnost kot neobremenjen vzorec, kar nazorno prikazuje tudi slika 3.4. Ugotovil pa je tudi, da imajo predhodno segreti in nato ohlajeni neobremenjeni betonski vzorci največji padec tlačne trdnosti betona, ter da imajo betonski vzorci iz lahkega agregata najvišjo tlačno trdnost betona pri povišanih temperaturah. Z enoosnimi nateznimi preizkusi valjastih betonskih vzorcev pa je Abrams (1979) pokazal, da se z naraščanjem temperature tudi natezna trdnost betona zmanjšuje.

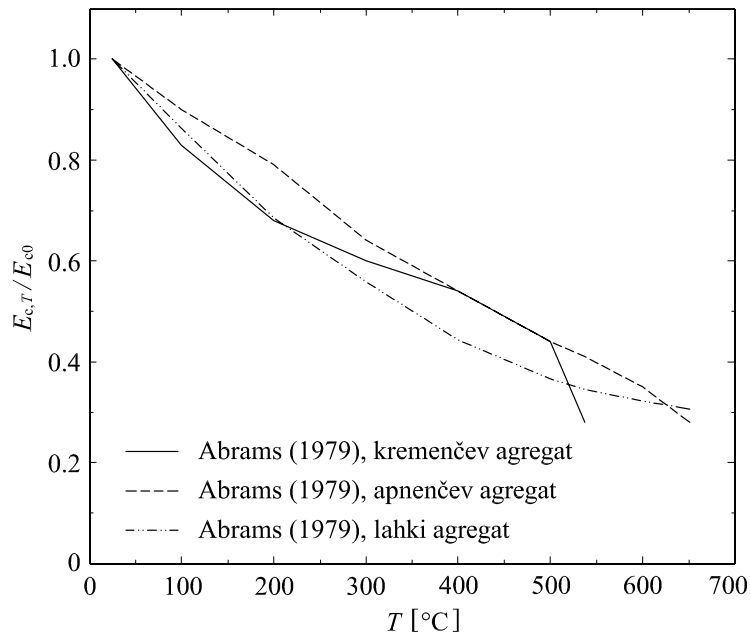
Če primerjamo spreminjanje tlačne trdnosti betona s temperaturo po priporočilih evropskega standarda Eurocode 2, Part 1-2 (2003) z rezultati Abramsa (1979) ugotovimo, da so priporočila iz standardov dokaj konzervativna. Iz slike 3.5 vidimo, da je Eurocode 2, Part 1-2 (2003) najbolj konservativen na temperaturnem intervalu med 500°C in 800°C. Skladno z evropskim standardom Eurocode 2, Part 1-2 (2003) ima betonski vzorec iz kremenčevega agregata pri temperaturi 450°C le še 65% tlačne trdnosti betona pri sobni temperaturi, pri temperaturi 550°C pa še 50%. Betonski vzorec iz apnenčevega agregata pa ima pri temperaturi 650°C le še 50% tlačne trdnosti betona pri sobni temperaturi, pri 760°C pa le še 35%. Skupna značilnost vseh predstavljenih rezultatov je, da se tlačna trdnost betona z naraščanjem temperature zmanjšuje, pri tem pa se deformacije betona povečujejo.

3.3.1.2 Elastični modul betona

Eksperimentalne rezultate in ugotovitve o spreminjanju elastičnega modula betona v odvisnosti od temperature predstavlja Abrams (1979) ter Abrams in Cruz (1961). Rezultate eksperimentov prikazujeta za tri vrste agregata, in sicer za kremenčev, apnenčev ter lahki agregat (slika 3.6). Najizrazitejše spreminjanje elastičnega modula betona s temperaturo opazimo pri betonih iz lahkega agregata, najmanj pa pri betonih iz apnenčevega agregata. Opazimo tudi, da se ne glede na vrsto agregata vrednost elastičnega modula z višanjem temperature dokaj enakomerno zmanjšuje. Betonski vzorec ima pri temperaturi 200°C le še 70% do 80% vrednosti elastičnega modula pri sobni temperaturi, E_{c0} , pri temperaturi 450°C pa le še 40% do 50%.

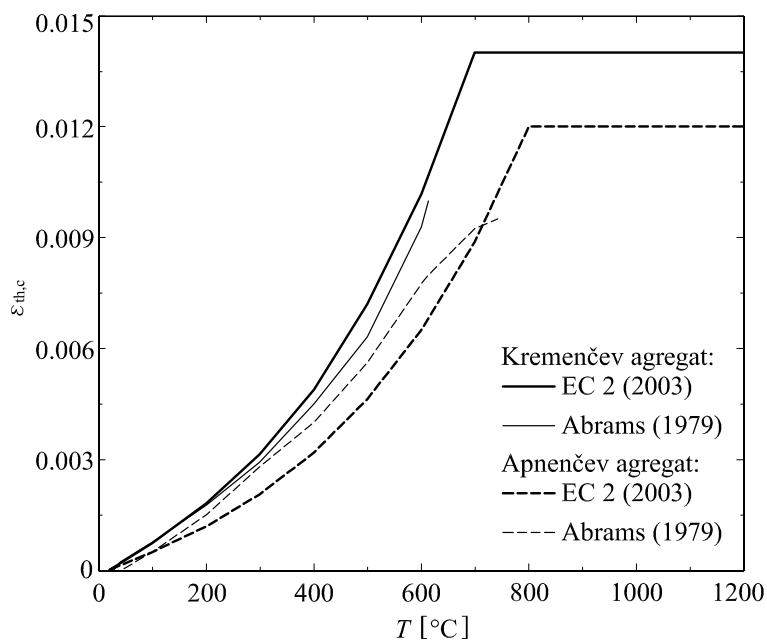
3.3.1.3 Koeficient toplotnega raztezanja betona

Segrevanje oziroma ohlajevanje betona vpliva na spremembo njegovega volumna. S koeficientom toplotnega raztezanja betona opišemo raztezanje oziroma krčenje betona zaradi temperaturnih sprememb. Specifično temperaturno deformacijo betonskega vlakna označimo z $\varepsilon_{th,c}$. Na sliki 3.7 prikazujemo temperaturne deformacije betona, kot jih za različne vrste betona podaja Abrams (1979) oziroma Eurocode 2, Part 1-2 (2003). Rezultati kažejo, da se temperaturne deformacije spreminjajo nelinearno s temperaturo, ter da so odvisne od vrste agregata. Tako po Abramsu (1979) kot po Eurocode 2, Part 1-2 (2003) so najizrazitejše temperaturne deformacije pri betonih iz kremenčevega agregata.



Slika 3.6: Spreminjanje elastičnega modula betona s temperaturo.

Figure 3.6: Modulus of elasticity of concrete at elevated temperature.



Slika 3.7: Temperaturne deformacije betona.

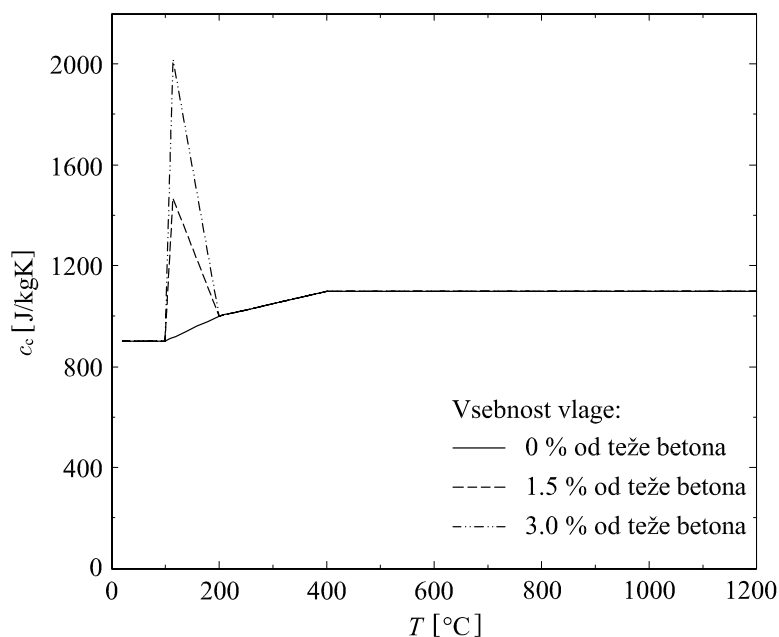
Figure 3.7: Thermal elongation of concrete.

3.3.1.4 Specifična toplotna kapaciteta in specifična vlažnost betona

Specifična toplota betona c_c (J/kgK) pove, za koliko J se spremeni notranja energija enega kilograma betona pri spremembi temperature betona za 1 K. V splošnem je specifična toplotna kapaciteta betona odvisna od vrste agregata. Praviloma zadržujejo silikatni agregati večje količine toplote kot apnenčasti. Spreminjanje specifične toplote betona za beton normalne teže in 0 % vsebnosti vlage s temperaturo določa izraz (Eurocode 2, Part 1-2 (2003)):

$$c_c(T) = \begin{cases} 900, & 20^\circ\text{C} \leq T \leq 100^\circ\text{C} \\ 900 + (T - 100), & 100^\circ\text{C} < T \leq 200^\circ\text{C} \\ 1000 + (T - 200)/2, & 200^\circ\text{C} < T \leq 400^\circ\text{C} \\ 1100, & 400^\circ\text{C} < T \leq 1200^\circ\text{C} \end{cases} \quad (3.72)$$

Za betone z različno vsebnostjo vlage pa prikazujemo spreminjanje specifične toplote betona s temperaturo na sliki 3.8. Eurocode 2, Part 1-2 (2003) predlaga, da lahko v primeru, ko pri računu temperaturnega polja v konstrukciji ne upoštevamo povezanega prenosa toplote in vlage, c_c na temperaturnem območju med 100°C in 200°C ustrezno povečamo (slika 3.8). Za lahke betone Eurocode 2, Part 1-2 (2003) podaja konstantno vrednost specifične toplote betona, ki je $c_c = 840$ J/kgK.



Slika 3.8: Spreminjanje specifične toplote betona iz kremenčevega agregata skladno z Eurocode 2, Part 1-2 (2003).

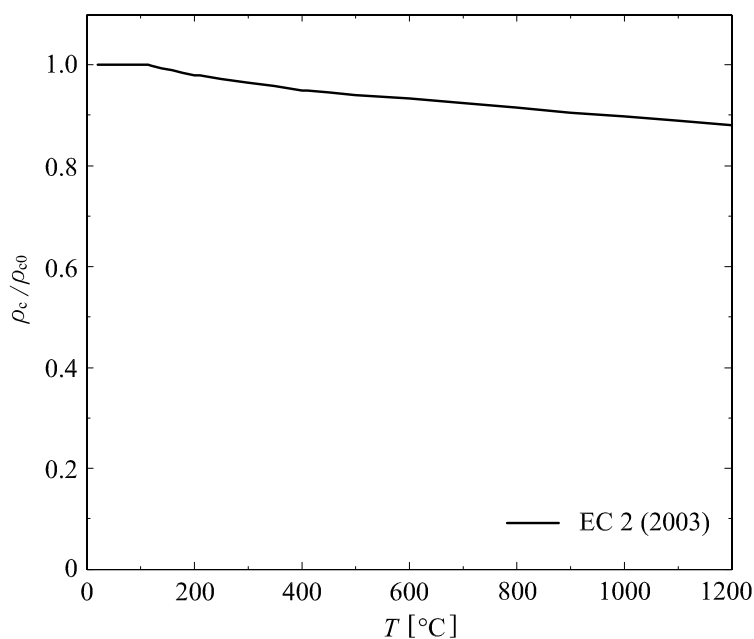
Figure 3.8: Specific heat of siliceous concrete, as function of temperature recommended by Eurocode 2, Part 1-2 (2003).

Specifična vlažnost betona c_m (kg/kg $^\circ\text{M}$) pove, za koliko kg se spremeni količina vode (vlage) v enem kilogramu suhega betona pri spremembi potenciala vlage 1°M . Eurocode 2, Part 1-2 (2003) eksplicitno ne podaja spreminjanja specifične vlažnosti betona c_m s temperaturo. Ko poznamo vlažnost betona V (kg/kg) ter potencial vlage w ($^\circ\text{M}$), lahko c_m določimo s pomočjo izraza (3.5).

3.3.1.5 Gostota betona

Spreminjanje gostote betona $\rho_c(\text{kg}/\text{cm}^3)$ s temperaturo je odvisno od količine izparele vodne pare. Za betone običajnih trdnosti znaša gostota pri sobni temperaturi $\rho_{c0} = 2400 \text{ kg}/\text{cm}^3$. Spreminjanje gostote betona s temperaturo skladno z Eurocode 2, Part 1-2 (2003) prikazujemo na sliki 3.9, določimo pa jo z naslednjimi izrazi:

$$\rho_c(T) = \begin{cases} \rho_{c0}, & 20^\circ\text{C} \leq T \leq 115^\circ\text{C} \\ \rho_{c0}(1 - 0.02(T - 115)/85), & 115^\circ\text{C} < T \leq 200^\circ\text{C} \\ \rho_{c0}(0.98 - 0.03(T - 200)/200), & 200^\circ\text{C} < T \leq 400^\circ\text{C} \\ \rho_{c0}(0.95 - 0.07(T - 400)/800), & 400^\circ\text{C} < T \leq 1200^\circ\text{C} \end{cases} \quad (3.73)$$



Slika 3.9: Spreminjanje gostote betona s temperaturo skladno z Eurocode 2, Part 1-2 (2003).

Figure 3.9: The variation of density at elevated temperature, recommended by Eurocode 2, Part 1-2 (2003).

3.3.1.6 Koeficient toplotne prevodnosti in prevodnostni koeficient vlage betona

Koeficient toplotne prevodnosti betona $\lambda_c(\text{W}/\text{mK})$ pove, koliko J energije se prenese skozi en meter debelo plast betona v eni sekundi, če je temperaturna razlika med krajnima točkama te plasti 1 K. Eurocode 2, Part 1-2 (2003) podaja za beton normalne teže dva izraza za spreminjanje koeficienta toplotne prevodnosti betona s temperaturo. Za zgornjo mejo ga določa izraz:

$$\lambda_c(T) = 2.0 - 0.2451(T/100) + 0.0107(T/100)^2, \quad 20^\circ\text{C} < T \leq 1200^\circ\text{C} \quad (3.74)$$

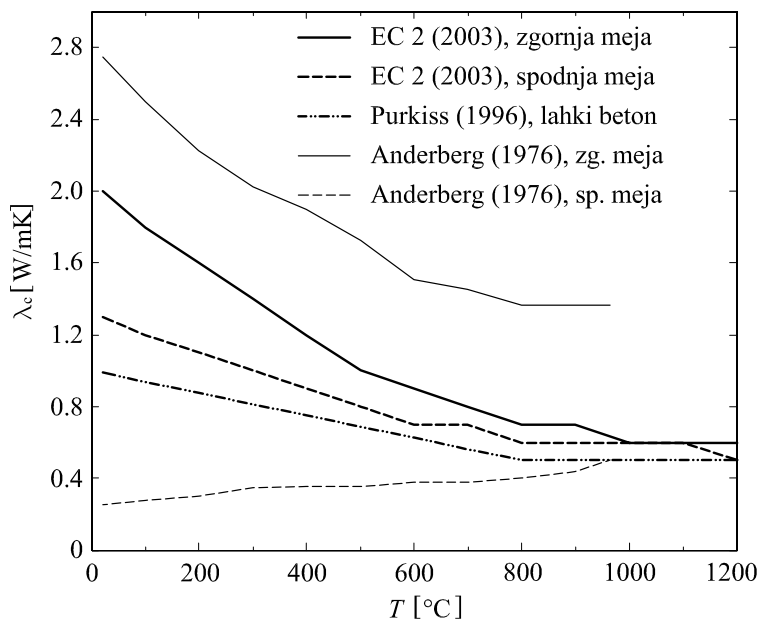
za spodnjo mejo pa:

$$\lambda_c(T) = 1.36 - 0.136(T/100) + 0.0057(T/100)^2, \quad 20^\circ\text{C} \leq T \leq 1200^\circ\text{C}. \quad (3.75)$$

Purkiss (1996) podaja izraz za spreminjanje koeficienta toplotne prevodnosti s temperaturo za lahke betone:

$$\lambda_c(T) = \begin{cases} 1.0 - (T/1600), & 20^\circ\text{C} \leq T \leq 800^\circ\text{C} \\ 0.5, & 800^\circ\text{C} < T \end{cases} \quad (3.76)$$

Izraze (3.74)–(3.76) prikazujemo na sliki 3.10. Na sliki so prikazani tudi rezultati meritev toplotne prevodnosti betona, ki jih je opravil Anderberg (1976). Iz slike 3.10 vidimo, da se toplotna prevodnost betona pri naraščanju temperature zmanjšuje.



Slika 3.10: Toplotna prevodnost betona kot funkcija temperature.

Figure 3.10: Thermal conductivity of concrete as function of temperature.

Prevodnostni koeficient vlage D_m (kg/m s °M) pove, koliko kg vode se preide skozi en meter debelo plast betona v eni sekundi, če je razlika v vlažnostnih potencialih v teh dveh točkah 1°M. Znano je, da je difuzivnost betona z običajno gostoto $D_c = 7.4 \cdot 10^{-8}$ m²/s. Prevodnostni koeficient vlage D_m določimo z izrazom

$$D_m = D_c \rho_c c_m. \quad (3.77)$$

3.3.1.7 Konstitucijski zakon betona pri povišanih temperaturah

Zvezo med mehansko deformacijo betonskega vlakna $\varepsilon_{\sigma,c}$ in normalno napetostjo σ_c opišemo s konstitucijskim zakonom betona pri povišani temperaturi. Formalno ga zapišemo v obliki

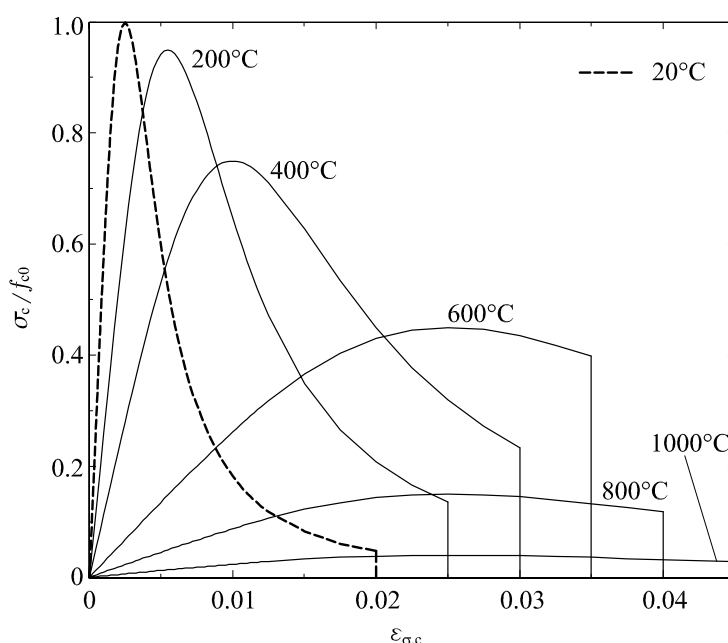
$$\sigma_c = \mathcal{F}_c(\varepsilon_{\sigma,c}). \quad (3.78)$$

Pri tem je \mathcal{F}_c poljubna funkcija, ki jo določimo s preizkusi. Li in Purkiss (2005) v svojem prispevku podajata številne konstitucijske zakone betona pri povišani temperaturi (Anderberg in Thelanderssonov konstitucijski zakon betona, Schneiderjev konstitucijski zakon betona, Diederichsev konstitucijski zakon

betona). V okviru disertacije uporabimo zakon, ki ga priporoča evropski standard Eurocode 2, Part 1-2 (2003) in je podan z enačbo:

$$\sigma_c(\varepsilon_{\sigma,c}, f_{c,T}, \varepsilon_{c1,T}, \varepsilon_{cu1,T}) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_{\sigma,c} > 0 \\ -f_{c,T} \frac{3\varepsilon_{\sigma,c}}{\varepsilon_{c1,T} \left(2 + \left(\frac{\varepsilon_{\sigma,c}}{\varepsilon_{c1,T}} \right)^3 \right)}, & \varepsilon_{cu1,T} \leq \varepsilon_{\sigma,c} \leq 0 \\ 0, & \varepsilon_{\sigma,c} < \varepsilon_{cu1,T} \end{cases} \quad (3.79)$$

Materialni parametri v enačbi (3.79) so: $f_{c,T}$ je tlačna trdnost betona, $\varepsilon_{c1,T}$ je deformacija pri tlačni trdnosti betona, $\varepsilon_{cu1,T}$ pa je porušna deformacija. Vsi materialni parametri so odvisni od temperature. Eurocode 2, Part 1-2 (2003) vrednosti teh parametrov podaja v obliki preglednic ločeno za beton iz kremenčevega agregata in za beton iz apnenčevega agregata. Za izbrane temperature prikazujemo na sliki 3.11 konstitucijski zakon betona iz kremenčevega agregata. Ugodni vpliv natezne nosilnosti betona na požarno nosilnost konstrukcij predstavljeni model zanemari; za zgornjo mejo plastičnega utrjevanja betona predpostavimo $0.4f_{c,T}$.



Slika 3.11: Konstitucijski zakon betona pri izbranih temperaturah v skladu z Eurocode 2, Part 1-2 (2003).
Figure 3.11: Stress-strain relationships of concrete under compression at elevated temperature, recommended by Eurocode 2, Part 1-2 (2003).

Normalna napetost v posameznem betonskem vlaknu pri času t^{r+1} je zaradi adicijskega razcepa prirastka mehanske deformacije odvisna od prirastka geometrijske deformacije, prirastka temperaturne deformacije, prirastka deformacije lezenja betona pri povišanih temperaturah ter od prirastka t.i. prehodne deformacije obravnavanega betonskega vlakna. Običajno so deformacije lezenja in prehodne deformacije betona odvisne tudi od napetosti. Zato je potrebno prirastek normalne napetosti betonskega vlakna v časovnem intervalu $[t^r, t^{r+1}]$ izračunati z Newtonovo iteracijsko metodo ($i = 1, 2, \dots$)

$$\Delta\sigma_{c,i}^{r+1} = \Delta\sigma_{c,i}^r + \delta\Delta\sigma_{c,i}^{r+1}. \quad (3.80)$$

V enačbi (3.80) predstavlja $\delta\Delta\sigma_{c,i}^{r+1}$ inkrement prirastka normalne napetosti v betonskem vlaknu. Sočasno z določitvijo normalne napetosti betonskega vlakna v časovnem intervalu $[t^r, t^{r+1}]$ izračunamo tudi prirastek napetostno odvisne deformacije lezenja betona ter prirastek napetostno odvisne prehodne deformacije betona. Določimo ju z enačbama:

$$\Delta\varepsilon_{cr,c,i}^{r+1} = \Delta\varepsilon_{cr,c,i}^r + \delta\Delta\varepsilon_{cr,c,i}^{r+1}, \quad (3.81)$$

$$\Delta\varepsilon_{tr,c,i}^{r+1} = \Delta\varepsilon_{tr,c,i}^r + \delta\Delta\varepsilon_{tr,c,i}^{r+1}. \quad (3.82)$$

V enačbah (3.81)–(3.82) predstavljata $\delta\Delta\varepsilon_{cr,c,i}^{r+1}$ in $\delta\Delta\varepsilon_{tr,c,i}^{r+1}$ inkrementa prirastka deformacije lezenja in prirastka t.i. prehodne deformacije betona v časovnem intervalu $[t^r, t^{r+1}]$. Inkremente prirastka normalne napetosti, prirastka deformacije lezenja in prirastka prehodne deformacije izračunamo z naslednjimi enačbami:

$$\delta\Delta\sigma_{c,i}^{r+1} = \frac{-F_1 + \frac{\partial\mathcal{F}_c}{\partial\varepsilon_{\sigma,c}}(F_2 + F_3)}{\frac{\partial\mathcal{F}_c}{\partial\varepsilon_{\sigma,c}} \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Delta\sigma_c} + \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\Delta\sigma_c} \right)}, \quad (3.83)$$

$$\delta\Delta\varepsilon_{cr,c,i}^{r+1} = -F_3 + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Delta\sigma_c} \delta\Delta\sigma_{c,i}^{r+1}, \quad (3.84)$$

$$\delta\Delta\varepsilon_{tr,c,i}^{r+1} = -F_2 + \frac{\partial\mathcal{K}}{\partial\Delta\sigma_c} \delta\Delta\sigma_{c,i}^{r+1}. \quad (3.85)$$

V enačbah (3.83)–(3.85) smo z F_1 , F_2 in F_3 označili algebrajske enačbe za prirastek normalne napetosti in prirastka deformacij lezenja in prehodne deformacije:

$$F_1 = \Delta\sigma_{c,i}^{r+1} - \mathcal{F}_c \left(\varepsilon_{\sigma,c,i}^{r+1} \right) + \sigma_{c,i}^r, \quad (3.86)$$

$$F_2 = \Delta\varepsilon_{tr,c,i}^{r+1} - \mathcal{K} \left(\sigma_{c,i}^{r+1} \right), \quad (3.87)$$

$$F_3 = \Delta\varepsilon_{cr,c,i}^{r+1} - \mathcal{H} \left(\sigma_{c,i}^{r+1} \right) + \varepsilon_{cr,c}^r. \quad (3.88)$$

Pri tem smo v enačbah (3.83)–(3.88) s \mathcal{H} označili zakon, s katerim izračunamo deformacijo lezenja (angl. *creep strain*) betonskega vlakna na koncu časovnega intervala $[t^r, t^{r+1}]$:

$$\Delta\varepsilon_{cr,c}^{r+1} = \varepsilon_{cr,c}^{r+1} - \varepsilon_{cr,c}^r. \quad (3.89)$$

Kot poroča Purkiss (2005), sta Anderberg in Thelandersson določila deformacije lezenja betona pri povišani temperaturi T , času t in tlačni napetosti σ_c z izrazom:

$$\varepsilon_{cr,c} = -0.00053 \frac{\sigma_c}{f_{c,T}} \left(\frac{t}{180} \right)^{1/2} e^{0.00304(T-20)}. \quad (3.90)$$

Nekoliko poenostavljen izraz za lezenje betona pri povišanih temperaturah, ki ga uporabimo tudi v okviru predstavljenega računskega modela je predstavil Harmathy (1993):

$$\varepsilon_{cr,c} = \beta_1 \frac{\sigma_c}{f_{c,T}} t^{1/2} e^{d(T-293)}. \quad (3.91)$$

V enačbi (3.91) sta β_1 in d empirični konstanti materiala in sta (Bratina, 2003):

$$\beta_1 = 6.28 \cdot 10^{-6}, \quad (3.92)$$

$$d = 2.658 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}. \quad (3.93)$$

Določiti moramo še prirastek t.i. prehodnih deformacij betona (angl. *transient strain*). V enačbah (3.83)–(3.88) smo s \mathcal{K} označili zakon, s katerim izračunamo prirastek prehodnih deformacij betona. Li in Purkiss (2005) sta na podlagi meritev Anderberga in Thelanderssona podala naslednji enačbi za določitev prehodnih deformacij betona v časovnem intervalu $[t^r, t^{r+1}]$:

$$\Delta \varepsilon_{\text{tr},c}^{r+1} = k_{\text{tr}} \frac{\sigma_c^{r+1}}{f_{c0}} \Delta \varepsilon_{\text{th},c}^{r+1}, \quad T \leq 550^\circ\text{C}, \quad (3.94)$$

$$\Delta \varepsilon_{\text{tr},c}^{r+1} = 0.0001 \frac{\sigma_c^{r+1}}{f_{c0}}, \quad T > 550^\circ\text{C}. \quad (3.95)$$

V enačbah (3.94)–(3.95) predstavlja f_{c0} tlačno trdnost betona pri sobni temperaturi, k_{tr} pa empirično konstanto materiala, katere vrednost se nahaja na intervalu med 1.8 in 2.35. V literaturi zasledimo tudi alternativne modele za račun t.i. prehodnih deformacij betona. Omenimo model Schneiderja (1986), pri katerem so deformacije lezenja betona in prehodne deformacije betona združene v t.i. deformacijo prehodnega lezenja betona (angl. *transient creep strain*). V okviru predstavljenega matematičnega modela in računskega postopka smo izberali zakon, ki sta ga predlagala Anderberg in Thelandersson (1976).

Temperaturne deformacije betona (angl. *thermal strain*) izračunamo skladno z evropskim standardom Eurocode 2, Part 1-2 (2003). Za beton iz kremenčevega agregata so temperaturne deformacije betona določene z enačbo:

$$\varepsilon_{\text{th},c}(T) = \begin{cases} -1.8 \cdot 10^{-4} + 9 \cdot 10^{-6}T + 2.3 \cdot 10^{-11}T^3, & 20^\circ\text{C} \leq T \leq 700^\circ\text{C} \\ 14 \cdot 10^{-3}, & 700^\circ\text{C} < T \leq 1200^\circ\text{C} \end{cases}, \quad (3.96)$$

za beton iz apnenčevega agregata pa z enačbo:

$$\varepsilon_{\text{th},c}(T) = \begin{cases} -1.2 \cdot 10^{-4} + 6 \cdot 10^{-6}T + 1.4 \cdot 10^{-11}T^3, & 20^\circ\text{C} \leq T \leq 805^\circ\text{C} \\ 12 \cdot 10^{-3}, & 805^\circ\text{C} < T \leq 1200^\circ\text{C} \end{cases}. \quad (3.97)$$

Prirastek temperaturne deformacije betona v časovnem inkrementu $[t^r, t^{r+1}]$ izračunamo z enačbo:

$$\Delta \varepsilon_{\text{th},c}^{r+1} = \varepsilon_{\text{th},c}^{r+1} - \varepsilon_{\text{th},c}^r. \quad (3.98)$$

Prirastek geometrijske deformacije betonskega vlakna v časovnem intervalu $[t^r, t^{r+1}]$ izračunamo z izrazom:

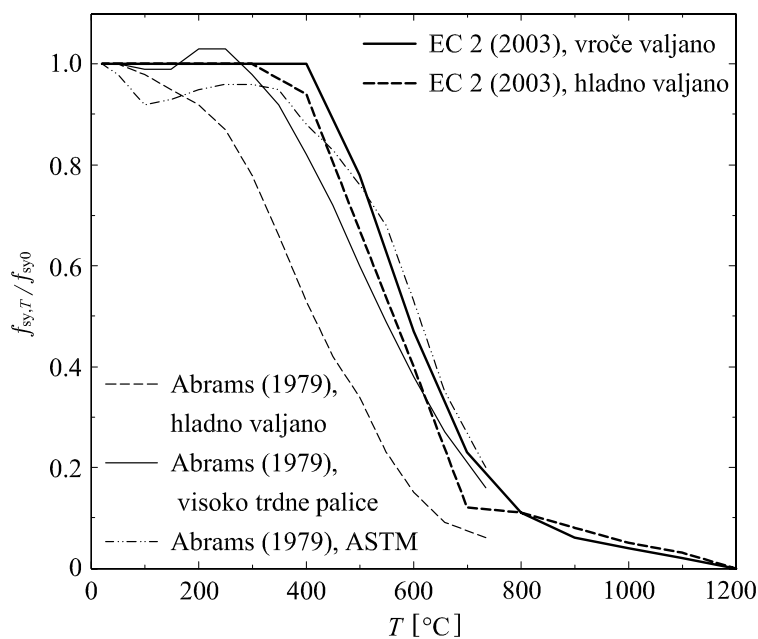
$$\Delta \varepsilon_c = \Delta \varepsilon_{c0} + z_c \Delta \kappa_c. \quad (3.99)$$

Pri tem je $\Delta \varepsilon_{c0} = \varepsilon_{c0}^{r+1} - \varepsilon_{c0}^r$ prirastek specifične spremembe dolžine betonskega vlakna, $\Delta \kappa_c = \kappa_c^{r+1} - \kappa_c^r$ prirastek psevdoukrivljenosti prečnega prereza, z_c pa pravokotna oddaljenost vlakna od referenčne osi betonskega dela.

3.3.2 Jeklo za armiranje

3.3.2.1 Meja elastičnosti in natezna trdnost jekla za armiranje

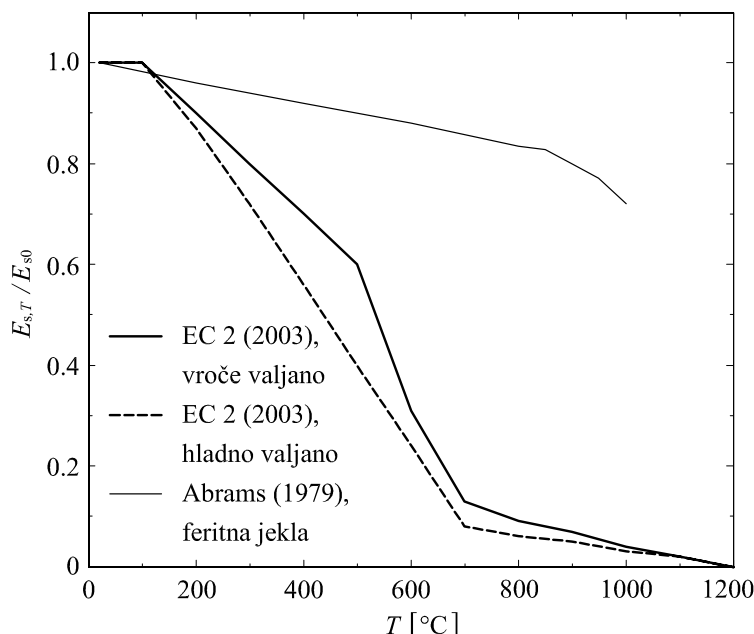
Skladno z Eurocode 2, Part 1-2 (2003) je trdnost ($f_{sy,T}$) hladno oblikovanega jekla nižja kot pri vroče valjanih jeklih, še posebej na intervalu med 400°C in 600°C (slika 3.12). Na sliki 3.12 vidimo, da ima hladno oblikovano jeklo pri temperaturi 470°C le še 75 % natezne trdnosti pri sobni temperaturi, pri temperaturi 570°C pa le še 50 % natezne trdnosti jekla pri sobni temperaturi. Vroče valjano jeklo pa ima pri temperaturi 510°C še 75 % natezne trdnosti jekla pri sobni temperaturi, medtem ko ima pri temperaturi 590°C le še 50 % natezne trdnosti pri sobni temperaturi. Na sliki 3.12 prikazujemo tudi vpliv temperature na spreminjanje trdnosti za različne vrste jekla (hladno oblikovane palice, visoko trdne legirane palice), kot jih podaja Abrams (1979). Tudi njegovi eksperimentalni podatki kažejo na dejstvo, da z naraščanjem temperature trdnost jekla pada. Visoko trdno jeklo ima na temperaturnem intervalu od 160°C do 280°C nekoliko višjo trdnost kot jo ima pri sobni temperaturi. Pri temperaturah okoli 430°C je meja elastičnosti po ASTM (1976) nekoliko nižja od tiste, ki jo podaja Eurocode 2, Part 1-2 (2003), medtem ko je pri višjih temperaturah (okoli 510°C) le-ta višja.



Slika 3.12: Spreminjanje meje elastičnosti in trdnosti jekla za armiranje s temperaturo.
Figure 3.12: Strength and proportional limit of reinforcing steel at elevated temperature.

3.3.2.2 Elastični modul jekla za armiranje

Podobno kot pri betonu se tudi pri jeklu za armiranje elastični modul s temperaturo hitro zmanjšuje. Eurocode 2, Part 1-2 (2003) podaja spreminjanje elastičnega modula s temperaturo za hladno in vroče valjano jeklo. Na sliki 3.13 prikazujemo spreminjanje elastičnega modula s temperaturo skladno z Eurocode 2, Part 1-2 (2003) ter Abramsom (1979). Ta je ugotovil, da je spreminjanje elastičnega modula s temperaturo pri feritnih jeklih do 500°C linearno, nato pa nelinearno.



Slika 3.13: Spreminjanje elastičnega modula jekla za armiranje s temperaturo.

Figure 3.13: Modulus of elasticity of reinforcing steel at elevated temperature.

3.3.2.3 Koeficient raztezanja in krčenja pri jeklu za armiranje

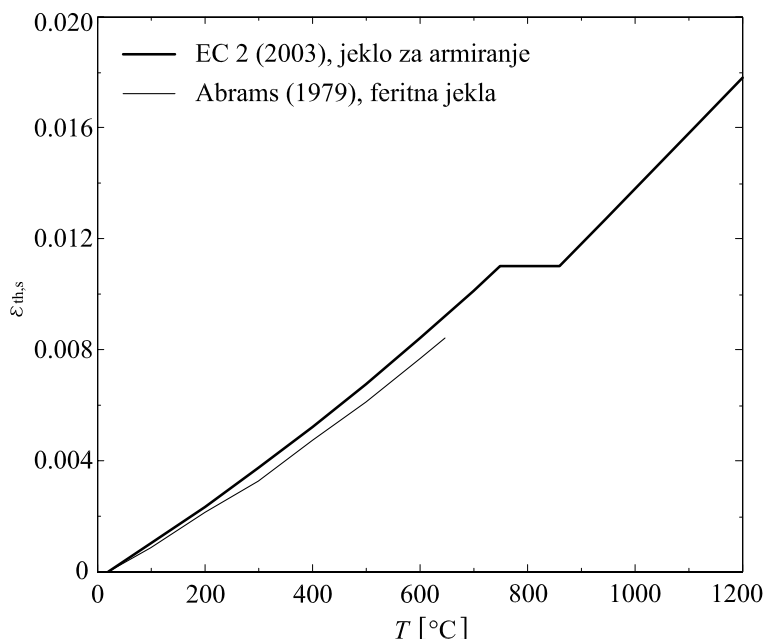
Jeklo za armiranje se vse do tališča postopoma razteza. Evropski standard Eurocode 2, Part 1-2 (2003) podaja naslednje izraze za določitev temperaturnih deformacij $\varepsilon_{th,s}$ zaradi raztezanja jekla za armiranje:

$$\varepsilon_{th,s}(T) = \begin{cases} -2.416 \cdot 10^{-4} + 1.2 \cdot 10^{-5}T + 0.4 \cdot 10^{-8}T^2, & 20^\circ\text{C} \leq T \leq 750^\circ\text{C} \\ 11 \cdot 10^{-3}, & 750^\circ\text{C} < T \leq 860^\circ\text{C} \\ -6.2 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-5}T, & 860^\circ\text{C} < T \leq 1200^\circ\text{C} \end{cases} \quad (3.100)$$

Zaradi nazornosti prikazujemo na sliki 3.14 temperaturne deformacije jekla za armiranje v odvisnosti od temperature tudi v grafični obliki. Na sliki 3.14 vidimo, da so približno do temperature 650°C temperaturne deformacije jekla za armiranje podobne temperaturnim deformacijam za feritna jekla, kot jih podaja Abrams (1979).

3.3.2.4 Specifična toplotna kapaciteta jekla za armiranje

Evropski standard Eurocode 2, Part 1-2 (2003) podaja izraze, s katerimi opišemo temperaturno odvisnost specifične toplote jekla c_s . Za približno oceno požarne odpornosti konstrukcij pa Eurocode 2, Part 1-2 (2003) priporoča konstantno vrednost za specifično toploto in sicer $c_s = 600 \text{ J/kgK}$.



Slika 3.14: Temperaturne deformacije jekla za armiranje.

Figure 3.14: Thermal elongation of reinforcing steel.

3.3.2.5 Konstitucijski zakon jekla za armiranje pri povišanih temperaturah

Zvezo med mehansko deformacijo jekla za armiranje $\varepsilon_{\sigma,s}$ in normalno napetostjo σ_s opišemo s konstitucijskim zakonom jekla za armiranje pri povišani temperaturi. Formalno ga zapišemo v obliki:

$$\sigma_s = \mathcal{F}_s(\varepsilon_{\sigma,s}), \quad (3.101)$$

Pri tem je \mathcal{F}_s poljubna funkcija, ki jo določimo s preizkusi. Skladno z Eurocode 2, Part 1-2 (2003) opišemo zvezo med napetostmi in deformacijami v jeklu za armiranje s tremi temperaturno odvisnimi materialnimi parametri: elastičnim modulom ($E_{s,T}$), mejo proporcionalnosti ($f_{sp,T}$) in s trdnostjo jekla ($f_{sy,T}$). Konstitucijski zakon jekla za armiranje skladno z Eurocode 2, Part 1-2 (2003) je:

$$\sigma_s(\varepsilon_{\sigma,s}, E_{s,T}, f_{sp,T}, \varepsilon_{sy,T}, \varepsilon_{st,T}, \varepsilon_{su,T}, f_{sy,T}, a, b, c) = \begin{cases} E_{s,T} \varepsilon_{\sigma,s}, & 0 \leq |\varepsilon_{\sigma,s}| \leq \frac{f_{sp,T}}{E_{s,T}} = \varepsilon_{sp,T} \\ \operatorname{sgn}(\varepsilon_{\sigma,s}) \left[f_{sp,T} - c + \left(\frac{b}{a}\right) \left[a^2 - \left(\varepsilon_{sy,T} - |\varepsilon_{\sigma,s}| \right)^2 \right]^{0.5} \right], & \varepsilon_{sp,T} \leq |\varepsilon_{\sigma,s}| \leq \varepsilon_{sy,T} \\ \operatorname{sgn}(\varepsilon_{\sigma,s}) f_{sy,T} & \varepsilon_{sy,T} < |\varepsilon_{\sigma,s}| \leq \varepsilon_{st,T} \\ \operatorname{sgn}(\varepsilon_{\sigma,s}) f_{sy,T} \left[\frac{1 - (|\varepsilon_{\sigma,s}| - \varepsilon_{st,T})}{(\varepsilon_{su,T} - \varepsilon_{st,T})} \right] & \varepsilon_{st,T} < |\varepsilon_{\sigma,s}| \leq \varepsilon_{su,T} \\ 0, & |\varepsilon_{\sigma,s}| = \varepsilon_{su,T} \end{cases} \quad (3.102)$$

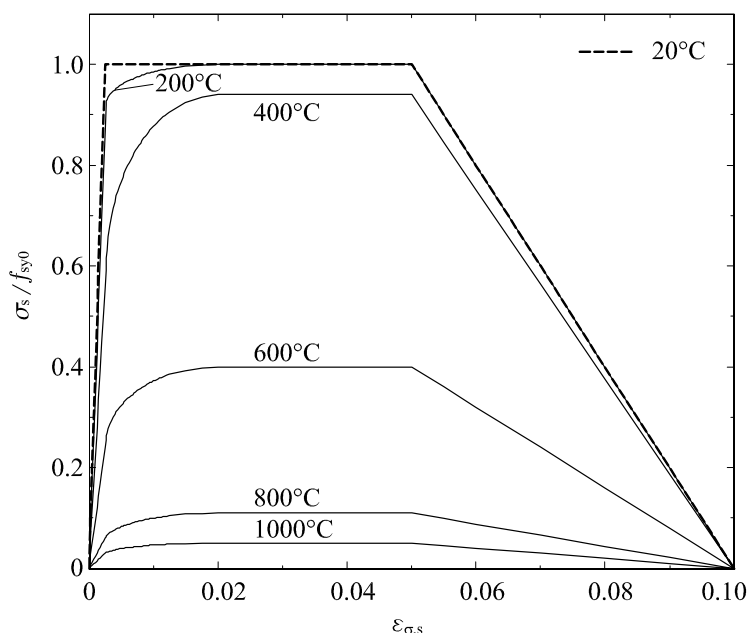
Temperaturno odvisne parametre a , b in c v enačbi (3.102) določimo z izrazi:

$$a^2(T) = (\varepsilon_{sy,T} - \varepsilon_{sp,T}) \left(\varepsilon_{sy,T} - \varepsilon_{sp,T} + \frac{c(T)}{E_{s,T}} \right), \quad (3.103)$$

$$b^2(T) = c(T) (\varepsilon_{sy,T} - \varepsilon_{sp,T}) E_{s,T} + c^2(T), \quad (3.104)$$

$$c(T) = \frac{(f_{sy,T} - f_{sp,T})^2}{(\varepsilon_{sy,T} - \varepsilon_{sp,T}) E_{s,T} - 2(f_{sy,T} - f_{sp,T})}. \quad (3.105)$$

Temperaturno neodvisni parametri v enačbi (3.102) pa so: deformacija pri doseženi trdnosti $\varepsilon_{sy,T} = 2\%$, deformacija na meji mehčanja $\varepsilon_{st,T} = 5\%$ ter mejna deformacija $\varepsilon_{su,T} = 10\%$. Konstitucijski zakon za hladno oblikovano jeklo pri povišanih temperaturah prikazujemo na sliki 3.15.



Slika 3.15: Konstitucijski zakon hladno oblikovanega jekla za armiranje pri izbranih temperaturah skladno z Eurocode 2, Part 1-2 (2003).

Figure 3.15: Stress-strain relationships of cold worked reinforcing steel at elevated temperature, recommended by Eurocode 2, Part 1-2 (2003).

Normalna napetost v posamezni armaturni palici betonskega dela prečnega prereza pri času t^{r+1} je zaradi adicijskega razcepa prirastka mehanske deformacije odvisna od prirastka geometrijske deformacije, prirastka temperaturne deformacije in prirastka deformacije viskoznega lezenja jekla pri povišani temperaturi. Deformacije viskoznega lezenja jekla so odvisne od nivoja napetosti. Zato je potrebno prirastek normalne napetosti kakor tudi prirastek deformacije viskoznega lezenja v posamezni armaturni palici v časovnem intervalu $[t^r, t^{r+1}]$ izračunati z Newtonovo iteracijsko metodo ($i = 1, 2, \dots$):

$$\Delta\sigma_{s,i}^{r+1} = \Delta\sigma_{s,i}^r + \delta\Delta\sigma_{s,i}^{r+1}, \quad (3.106)$$

$$\Delta\varepsilon_{cr,s,i}^{r+1} = \Delta\varepsilon_{cr,s,i}^r + \delta\Delta\varepsilon_{cr,s,i}^{r+1}. \quad (3.107)$$

V enačbah (3.106)–(3.107) predstavljata $\delta\Delta\sigma_{s,i}^{r+1}$ in $\delta\Delta\varepsilon_{cr,s,i}^{r+1}$ inkrement prirastka napetosti oziroma inkrement prirastka deformacij zaradi viskoznega lezenja jekla. Izračunamo ju z naslednjima enačbama:

$$\delta\Delta\sigma_{s,i}^{r+1} = \frac{-F_1 + \frac{\partial\mathcal{F}_s}{\partial\varepsilon_{\sigma,s}} F_2}{\frac{\partial\mathcal{F}_s}{\partial\varepsilon_{\sigma,s}} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Delta\sigma_s}}, \quad (3.108)$$

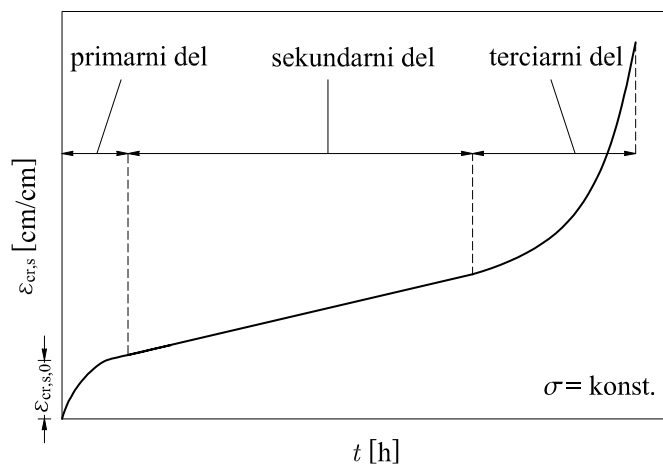
$$\delta\Delta\varepsilon_{cr,s,i}^{r+1} = -F_2 + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Delta\sigma_s} \delta\Delta\sigma_{s,i}^{r+1}. \quad (3.109)$$

V enačbah (3.108) in (3.109) smo z F_1 in F_2 označili algebrajski enačbi za napetost in deformacijo viskoznega lezenja jekla:

$$F_1 = \Delta\sigma_{s,i}^{r+1} - \mathcal{F}_s(\varepsilon_{\sigma,s,i}^{r+1}) + \sigma_{s,i}^r, \quad (3.110)$$

$$F_2 = \Delta\varepsilon_{cr,s,i}^{r+1} - \mathcal{L}(\sigma_{s,i}^{r+1}) + \varepsilon_{cr,s,i}^r. \quad (3.111)$$

Z \mathcal{L} smo označili zakon, s katerim izračunamo prirastek deformacije viskoznega lezenja jekla pri povišanih temperaturah (angl. *creep strain*). Na sliki 3.16 prikazujemo diagram časovnega razvoja lezenja jekla, ki ga razdelimo na tri področja. Prvo področje predstavlja primarno ali prehodno lezenje, drugo je sekundarno lezenje, tretje območje pa je terciarno lezenje ali lezenje z naraščajočo hitrostjo.



Slika 3.16: Značilni diagram časovnega razvoja lezenja jekla.

Figure 3.16: Typical time dependend creep diagram of steel.

V predstavljenem računskem modelu bomo časovni razvoj lezenja jekla modelirali skladno s priporočili Harmathyja (1967) oziroma Williams-Leira (1983). Časovni razvoj deformacij viskoznega lezenja jekla je določen z diferencialno enačbo prvega reda:

$$\dot{\varepsilon}_{cr,s} = \text{sgn}(\sigma_s) b_1 \coth^2(b_2 |\varepsilon_{cr,s}|). \quad (3.112)$$

V nadaljevanju enačbo diskretiziramo z diferenčno metodo z “desnim” operatorjem in dobimo prirastek deformacije viskoznega lezenja jekla v časovnem inkrementu $[t^r, t^{r+1}]$:

$$\Delta\varepsilon_{cr,s} = \mathcal{L}(\sigma_s^{r+1}, \varepsilon_{cr,s}^{r+1}) = \text{sgn}(\sigma_s^{r+1}) b_1 \coth^2(b_2 |\varepsilon_{cr,s}^{r+1}|) \Delta t, \quad (3.113)$$

kjer koeficienta b_1 in b_2 predstavljata funkciji konstantne napetosti v jeklu in konstantne absolutne temperature. Določimo ju z izrazoma:

$$b_1 = \begin{cases} c_1 e^{c_2 \ln|\sigma_s| - \frac{c_5}{T}}, & |\sigma_s| \leq \sigma_t \\ c_6 e^{c_7 |\sigma_s| - \frac{c_5}{T}}, & |\sigma_s| > \sigma_t \end{cases}, \quad (3.114)$$

$$b_2 = \frac{1}{c_3 |\sigma_s|^{c_4}}. \quad (3.115)$$

Pri tem je $\sigma_t \approx 10.3 \text{ kN/cm}^2$ in predstavlja t.i. prehodno napetost, parametri računskega modela lezenja jekla c_1, c_2, \dots, c_7 pa so medsebojno povezani z izrazoma:

$$\begin{aligned} c_6 &= c_1 \left(\frac{\sigma_t}{e}\right)^{c_2}, \\ c_7 &= \frac{c_2}{\sigma_t}. \end{aligned} \quad (3.116)$$

Parametre lezenja za različne vrste jekla prikazujemo v preglednici 3.1. Lezenje je najmanj izrazito pri jeklu z oznako Austen 50, najbplj pa pri jeklu z oznako SS 41 (Bratina, 2003; Srpčič, 1991).

Preglednica 3.1: Parametri lezenja po Williams-Leiru (1983).
Table 3.1: Creep parameters, reported by Williams-Leir (1983).

vrsta jekla	c_1 [min]	c_2	c_3	c_4	c_5 [°C]
Austen 50	$1.246 \cdot 10^{-3}$	4.858	$8.564 \cdot 10^{-11}$	1.731	44210
SM 58	$3.080 \cdot 10^{-2}$	4.206	$9.032 \cdot 10^{-5}$	0.302	40510
A 135	$1.143 \cdot 10^{-2}$	4.721	$1.251 \cdot 10^{-10}$	1.695	43250
X-60	$2.987 \cdot 10^{-3}$	4.624	$1.695 \cdot 10^{-24}$	4.661	41390
A 149	$1.120 \cdot 10^{-2}$	4.948	$4.914 \cdot 10^{-10}$	1.638	44960
SM 50	$3.175 \cdot 10^{-7}$	6.460	$4.949 \cdot 10^{-11}$	1.843	48970
SS 41	$7.991 \cdot 10^{20}$	3.225	$3.485 \cdot 10^{-30}$	6.701	77380

Prirastek temperaturene deformacije jekla za armiranje v časovnem inkrementu $[t^r, t^{r+1}]$ izračunamo z enačbo:

$$\Delta \varepsilon_{\text{th},s}^{r+1} = \varepsilon_{\text{th},s}^{r+1} - \varepsilon_{\text{th},s}^r. \quad (3.117)$$

Pri tem sta $\varepsilon_{\text{th},s}^r$ in $\varepsilon_{\text{th},s}^{r+1}$ temperaturni deformaciji na začetku oziroma na koncu časovnega intervala $[t^r, t^{r+1}]$. V okviru predstavljenega računskega postopka izračunamo temperaturene deformacije jekla za armiranje skladno z Eurocode 2, Part 1-2 (2003) (glej enačbo 3.100).

Prirastek geometrijske deformacije jekla za armiranje v časovnem intervalu $[t^r, t^{r+1}]$ izračunamo z izrazom:

$$\Delta \varepsilon_s = \Delta \varepsilon_{c0} + z_s \Delta \kappa_c. \quad (3.118)$$

Pri tem sta $\Delta \varepsilon_{c0} = \varepsilon_{c0}^{r+1} - \varepsilon_{c0}^r$ in $\Delta \kappa_c = \kappa_c^{r+1} - \kappa_c^r$ deformacijski količini obravnavanega prečnega prereza betonskega dela nosilca, z_s pa je pravokotna oddaljenost armaturene palice od referenčne osi nosilca.

3.3.3 Jeklo za prednapenjanje

3.3.3.1 Meja elastičnosti in natezna trdnost jekla za prednapenjanje

Med prvimi sta obnašanje hladno oblikovanih jeklenih palic za prednapenjanje pri povišanih temperaturah raziskovala Abrams in Cruz (1961). Ugotovila sta, da se pri jeklu za prednapenjanje meja tečenja z naraščanjem temperature zmanjšuje veliko hitreje kot pri jeklu za armiranje. Podobno je tudi zmanjševanje natezne trdnosti z višanjem temperature pri jeklu za prednapenjanje izrazitejše kot pri jeklu za armiranje. Kvantitativno pa sta ugotovila, da je do 200°C zmanjševanje natezne trdnosti jekla minimalno, nad 200°C pa izrazitejše. Tako je pri temperaturi 310°C natezna trdnost jekla okrog 75 % trdnosti jekla pri sobni temperaturi, pri 530°C pa le še 25 %. O podobnih mehanskih lastnostih jekla za prednapenjanje so kasneje poročali tudi Holmes in sodelavci (Holmes *et al.*, 1982) oziroma jih navaja Eurocode 2, Part 1-2 (2003). Spreminjanje meje elastičnosti ter trdnosti jekla za prednapenjanje s temperaturo kot jih navajajo Abrams in Cruz (1961), Holmes *et al.* (1982) ter Eurocode 2, Part 1-2 (2003) grafično prikazujemo na sliki 3.17. Vidimo, da ima po Eurocode 2, Part 1-2 (2003) toplotno obdelano jeklo v primerjavi z hladno obdelanimi vrvmi in kabli manjši padec trdnosti. Vidimo tudi, da rezultati Holmesa *et al.* (1982) v primerjavi z Eurocode 2, Part 1-2 (2003) precej odstopajo, medtem ko so rezultati Abramsa in Cruza (1961) z Eurocode 2, Part 1-2 (2003) primerljivi.

3.3.3.2 Elastični modul jekla za prednapenjanje

Elastični modul jekla za prednapenjanje se z naraščanjem temperature zmanjšuje veliko hitreje kot pri jeklu za armiranje. Zmanjšanje elastičnega modula jekla za prednapenjanje je v veliki meri odvisno od načina obdelave jekla, kar nazorno prikazuje slika 3.18. Tudi spreminjanje elastičnega modula jekla za prednapenjanje s temperaturo so raziskovali Abrams in Cruz (1961) ter Holmes s sodelavci (1982). Izsledke omenjenih avtorjev ter priporočila Eurocode 2, Part 1-2 (2003) prikazujemo na sliki 3.18. Vidimo, da Eurocode 2, Part 1-2 (2003) določa pri toplotno obdelanem jeklu izrazitejši padec elastičnega modula. Na sliki 3.18 tudi vidimo, da so rezultati Holmesa in sodelavcev (1982) primerljivi z rezultati v Eurocode 2, Part 1-2 (2003), medtem ko rezultati Abramsa in Cruza (1961) niso.

3.3.3.3 Koeficient raztezanja in krčenja pri jeklu za prednapenjanje

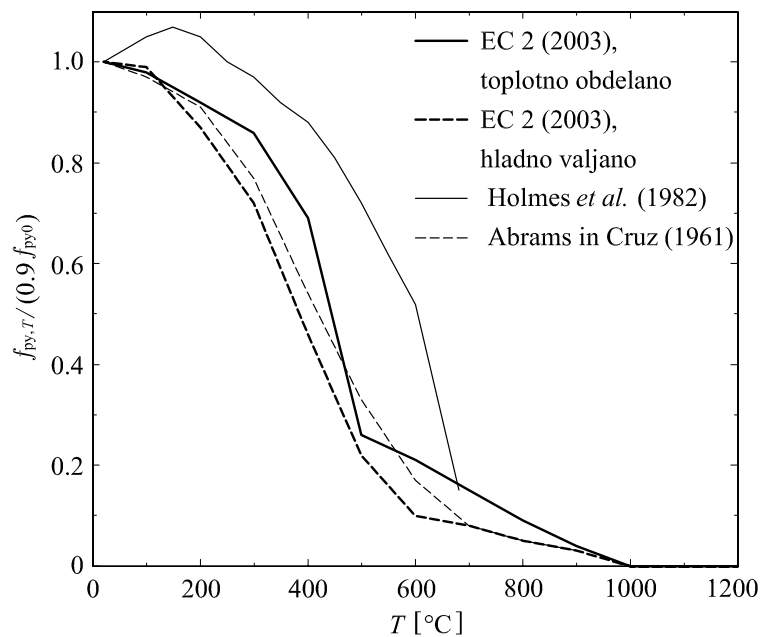
Temperaturne deformacije jekla za prednapenjanje, ki jih podaja standard Eurocode 2, Part 1-2 (2003), so podobne temperaturnim deformacijam pri jeklu za armiranje. Določa jih enačba:

$$\varepsilon_{th,p}(T) = \left\{ -2.016 \cdot 10^{-4} + 10^{-5}T + 0.4 \cdot 10^{-8}T^2, \quad 20^{\circ}\text{C} \leq T \leq 1200^{\circ}\text{C}. \quad (3.119) \right.$$

Spreminjanje temperaturnih deformacij jekla za prednapenjanje s temperaturo skladno z Eurocode 2, Part 1-2 (2003) oziroma skladno z meritvami Abramsa (1979) prikazujemo na sliki 3.19.

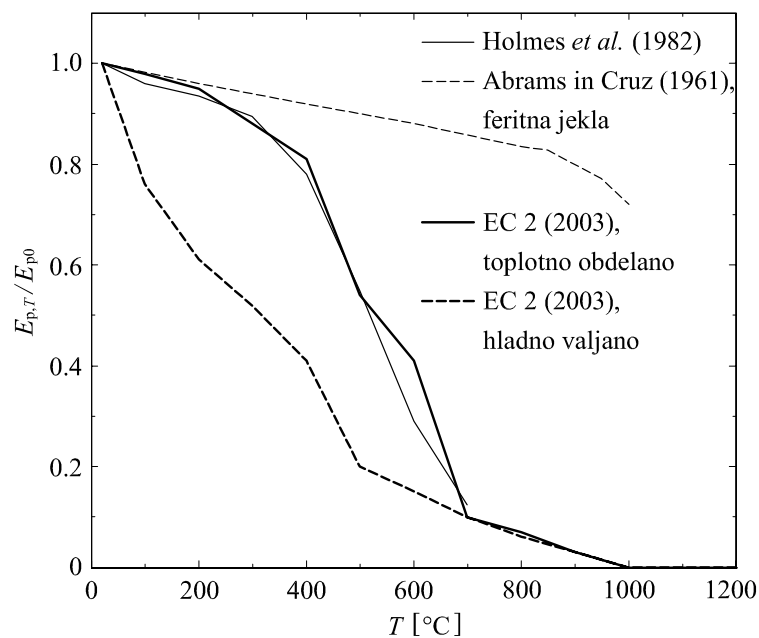
3.3.3.4 Specifična toplotna kapaciteta jekla za prednapenjanje

Skladno z določili standarda Eurocode 2, Part 1-2 (2003) lahko v analizi upoštevamo, da se specifična toplota jekla za prednapenjanje ne spreminja s temperaturo. Priporočena je konstantna vrednost $c_p = 600 \text{ J/kgK}$.



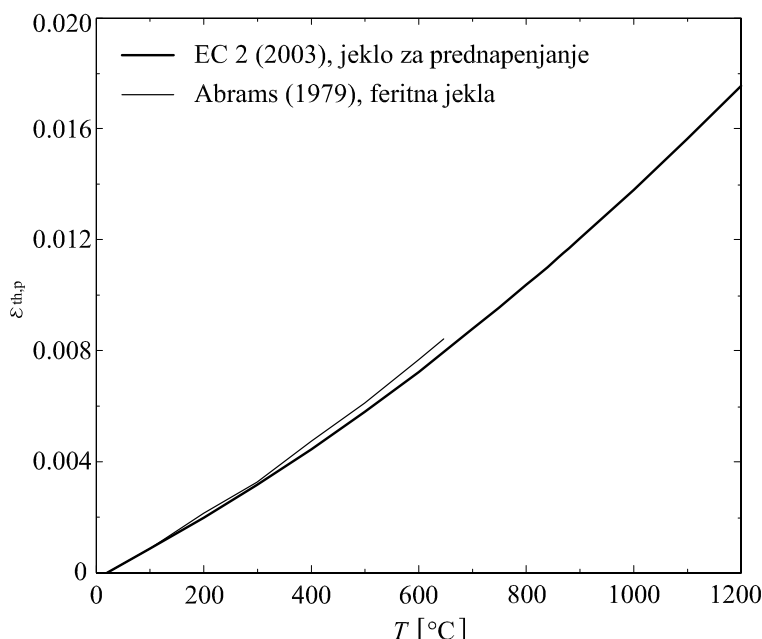
Slika 3.17: Spreminjanje meje elastičnosti in trdnosti jekla za prednapenjanje s temperaturo.

Figure 3.17: Strength and proportional limit of prestressing steel at elevated temperature.



Slika 3.18: Spreminjanje elastičnega modula jekla za prednapenjanje s temperaturo.

Figure 3.18: Modulus of elasticity of prestressing steel at elevated temperature.



Slika 3.19: Temperaturne deformacije jekla za prednapenjanje.

Figure 3.19: Thermal elongation of prestressing steel.

3.3.3.5 Konstitucijski zakon jekla za prednapenjanje pri povišanih temperaturah

Zvezo med mehansko deformacijo jekla za prednapenjanje $\varepsilon_{\sigma,p}$ in normalno napetostjo σ_p opišemo s konstitucijskim zakonom jekla za prednapenjanje pri povišani temperaturi. Formalno ga zapišemo v obliki:

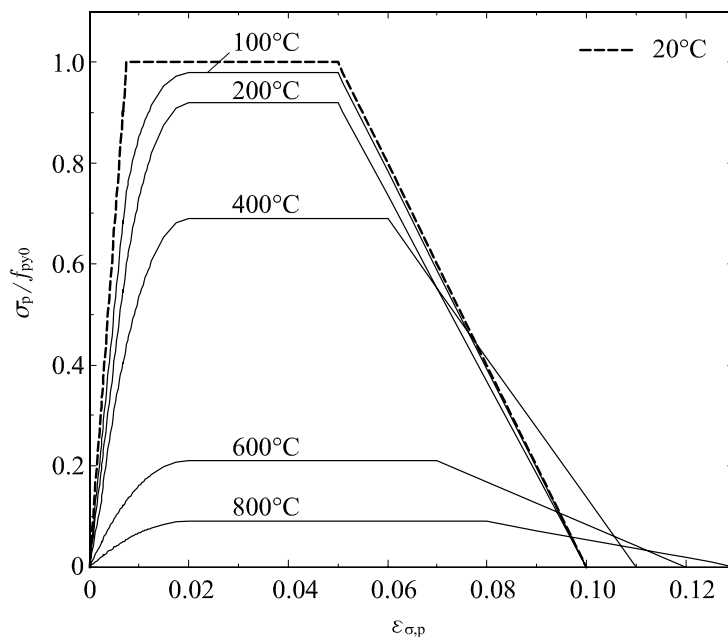
$$\sigma_p = \mathcal{F}_p(\varepsilon_{\sigma,p}), \quad (3.120)$$

Pri tem je \mathcal{F}_p poljubna funkcija, ki jo določimo s preizkusi. Skladno z Eurocode 2, Part 1-2 (2003) je konstitucijski zakon jekla za prednapenjanje podoben konstitucijskemu zakonu jekla za armiranje, ki je podan z enačbo (3.102). Modela se razlikujeta le v temperaturni odvisnosti materialnih parametrov. Zaradi preglednosti konstitucijski zakon hladno oblikovanega jekla za prednapenjanje pri povišanih temperaturah prikazujemo na sliki 3.20.

Podobno kot pri jeklu za armiranje je tudi pri jeklu za prednapenjanje normalna napetost v posameznem prednapetem kablju pri času t^{r+1} zaradi adicijskega razcepa prirastka mehanske deformacije odvisna od prirastka geometrijske deformacije, prirastka temperaturne deformacije in prirastka deformacije zaradi viskoznega lezenja pri povišanih temperaturah. Tudi pri jeklu za prednapenjanje prirastek normalne napetosti in napetostno odvisen prirastek deformacije viskoznega lezenja v časovnem intervalu $[t^r, t^{r+1}]$ izračunamo z Newtonovo iteracijsko metodo ($i = 1, 2, \dots$):

$$\Delta\sigma_{p,i}^{r+1} = \Delta\sigma_{p,i}^r + \delta\Delta\sigma_{p,i}^{r+1}, \quad (3.121)$$

$$\Delta\varepsilon_{cr,p,i}^{r+1} = \Delta\varepsilon_{cr,p,i}^r + \delta\Delta\varepsilon_{cr,p,i}^{r+1}. \quad (3.122)$$



Slika 3.20: Konstitucijski zakon za hladno oblikovano jeklo za prednapenjanje pri različnih temperaturah skladno z Eurocode 2, Part 1-2 (2003).

Figure 3.20: Stress-strain relationships of prestressing for cold worked steel at elevated temperature, recommended by Eurocode 2, Part 1-2 (2003).

Postopek računa je enak kot pri jeklu za armiranje, zato ga tukaj ne navajamo. Pri tem upoštevamo, da prirastek deformacije viskoznega lezenja jekla izračunamo s pomočjo modela po Williams-Leiru (1983) (glej enačbe (3.112)–(3.116) in preglednico 3.1).

Prirastek temperaturne deformacije jekla za prednapenjanje v časovnem inkrementu $[t^r, t^{r+1}]$ izračunamo z izrazom:

$$\Delta \varepsilon_{th,p}^{r+1} = \varepsilon_{th,p}^{r+1} - \varepsilon_{th,p}^r. \quad (3.123)$$

V enačbi (3.123) sta $\varepsilon_{th,p}^r$ in $\varepsilon_{th,p}^{r+1}$ temperaturni deformaciji na začetku oziroma na koncu časovnega intervala $[t^r, t^{r+1}]$. Izračunamo ju skladno z izrazi iz Eurocode 2, Part 1-2 (2003) (glej enačbo 3.119).

Prirastek geometrijske deformacije jekla za prednapenjanje v časovnem intervalu $[t^r, t^{r+1}]$ izračunamo z izrazom:

$$\Delta \varepsilon_p^k = \varepsilon_p^{k,r+1} - \varepsilon_p^{k,r}. \quad (3.124)$$

3.3.4 Stik med betonom in jeklom za prednapenjanje

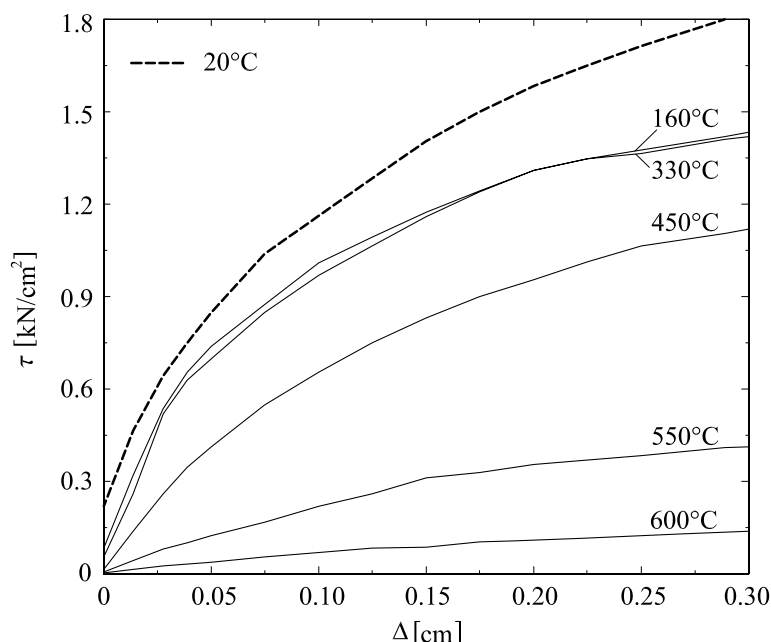
3.3.4.1 Mehanske lastnosti stika

Obnašanje stika med betonom in jeklom za prednapenjanje pri sobni temperaturi so raziskovali Abrishami in Mitchell (1993), Jendele in Crvenka (2006), Keuser in Mehlhorn (1983) in številni drugi. Redkejšje so raziskave, kjer raziskovalci analizirajo stik med betonom in jeklom pri povišanih temperaturah.

Nekaj rezultatov tovrstnih raziskav sta prikazala Diederichs in Schneider (1981). Z meritvami sta ugotovila, da ima obnašanje stika med betonom in jeklom pri povišanih temperaturah pomemben vpliv na

napetostno in deformacijsko stanje prednapetih betonskih konstrukcij. To sta ugotovila z izvlečnimi testi (angl. *pull-out*) na prednapetih betonskih vzorcih pri povišanih temperaturah. Meritve sta naredila na temperaturnem intervalu od 20°C do 800°C, temperaturo pa sta spreminjala s hitrostjo 1°C/min. Izvajala sta dve vrsti testov. Pri prvih sta opazovala trdnost na stiku med betonom in jeklom za prednapenjanje pri različnih temperaturah. Betonske vzorce sta segrevala do željene temperature in jih na mestu vstavljene prednapete palice enakomerno vlekla s silo 1 kN/s. Pri drugi vrsti testov sta trdnost stika določila s spreminjanjem temperature. V tem primeru sta najprej betonski vzorec pri sobni temperaturi obremenila z znano silo, nato pa sta vzorec segrevala do porušitve stika. Temperaturo ob porušitvi sta imenovala kritična temperatura. Ugotovitve Diederichsa in Schneiderja (1981) prikazujemo v obliki diagramov na slikah 3.21 in 3.22.

Slika 3.21 prikazuje zvezo med napetostjo in zamikom na stiku med betonskim delom in jeklom za prednapenjanje ($\phi_p = 7.5$ mm, $f_{p0.1k}/f_{pk} = 150/170$ kN/cm²) za različne nivoje temperature. Opazimo, da v temperaturnem območju od 160°C do 330°C padec napetosti ni izrazit, medtem ko se zveza napetost-zamik po preseženi temperaturi 330°C bistveno spremeni.

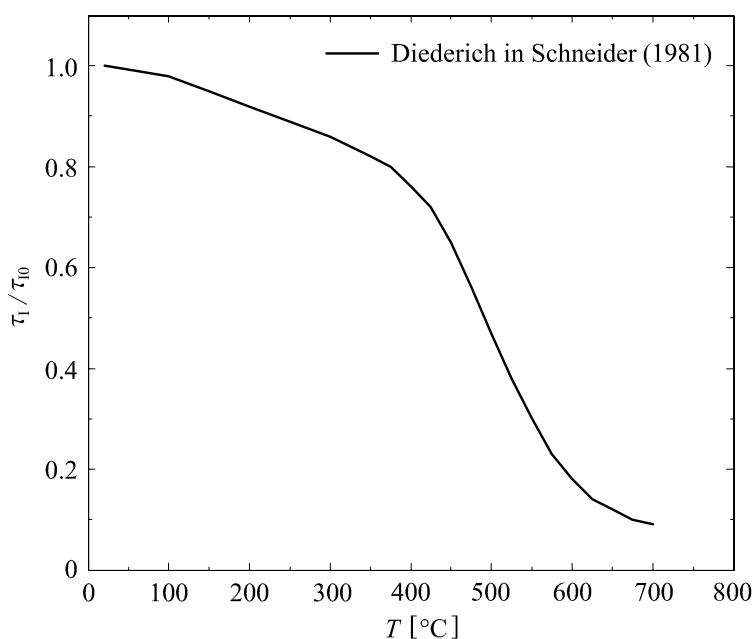


Slika 3.21: Konstitucijski zakon stika med betonom in jeklom za prednapenjanje pri različnih temperaturah po Diederichsu in Schneiderju (1981).

Figure 3.21: Bond stress-slip relationship between concrete and prestressing steel at elevated temperature, reported by Diederichs and Schneider (1981).

Na sliki 3.22 je prikazan vpliv temperature na padec trdnosti stika med betonom in jeklom za prednapenjanje. Eksperimenti kažejo, da z naraščanjem temperature trdnost stika pada. Do temperature okoli 350°C je padec trdnosti stika majhen. Tako znaša pri temperaturi 400°C trdnost stika še 75‰ trdnosti pri sobni temperaturi, pri temperaturi 490°C le 50‰, pri temperaturi 700°C pa le še okoli 9‰ trdnosti pri sobni temperaturi.

Iz povedanega sledi, da lahko v primeru požara porušitev stika med betonom in jeklom za prednapenjanje nastopi že pri relativno nizkih temperaturah.

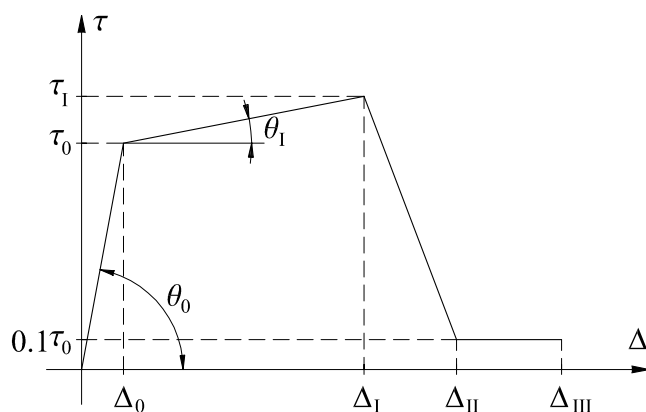


Slika 3.22: Temperaturno odvisna trdnost stika med betonom jeklom za prednapenjanje po Diederichsu in Schneiderju (1981).

Figure 3.22: Bond strength between concrete and prestressing steel at elevated temperature, reported by Diederichs and Schneider (1981).

3.3.4.2 Konstitucijski zakon stika pri povišanih temperaturah

Kot izhodišče izpeljave konstitucijskega zakona stika med betonom in jeklom za prednapenjanje pri povišanih temperaturah izberemo model stika pri sobni temperaturi skladno s priporočili Abrishamija in Mitchella (1993), Jendela in Crvenke (2006) oziroma Keuserja in Mehlhorna (1983). Graf tega zakona prikazujemo na sliki 3.23.

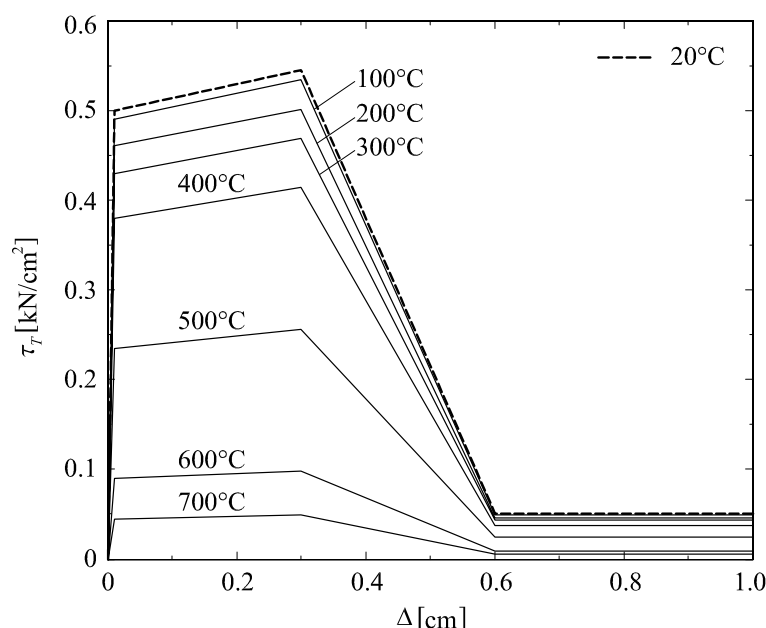


Slika 3.23: Konstitucijski zakon stika med betonom in jeklom za prednapenjanje pri sobni temperaturi (Keuser in Mehlhorn, 1983).

Figure 3.23: Bond stress-slip relationship between concrete and prestressing tendon at room temperature (Keuser in Mehlhorn, 1983).

Izbrani materialni parametri modela pri sobni temperaturi so: začetna togost stika $\theta_0 = 50 \text{ kN/cm}^3$, strižna napetost na meji elastičnosti $\tau_0 = 0.5 \text{ kN/cm}^2$, trdnost stika $\tau_I = 0.545 \text{ kN/cm}^2$, zamika na meji elastičnosti in trdnosti stika $\Delta_0 = 0.01 \text{ cm}$ in $\Delta_I = 0.3 \text{ cm}$. Vrednosti zamika v območju mehčanja izberemo na podlagi stabilizacije numeričnega postopka in sta: $\Delta_{II} = 0.6 \text{ cm}$ in $\Delta_{III} = 1.0 \text{ cm}$. Po mehčanju predpostavimo, da znaša preostala napetost na stiku le še desetinko napetosti na meji elastičnosti.

Kot smo že povedali, sta Diederichs in Schneider (1981) ugotovila, da se trdnost stika s temperaturo zmanjšuje (slika 3.22). To prikazujemo v preglednici 3.2. Skladno s temi ugotovitvami modificiramo model stika med betonom in jeklom za prednapenjanje pri povišanih temperaturah. Pri tem spreminjamo s temperaturo samo trdnost stika, ostale materialne parametre pa ohranimo nespremenjene. Tako modificirani konstitucijski zakon stika pri povišanih temperaturah prikazujemo na sliki 3.24.



Slika 3.24: Konstitucijski zakon stika med betonom in prednapetim kablom pri povišanih temperaturah (Keuser in Mehlhorn, 1983; Diederichs in Schneider, 1981).

Figure 3.24: Bond stress-slip relationship between concrete and prestressing tendon at elevated temperature (Keuser and Mehlhorn, 1983; Diederichs and Schneider, 1981).

Preglednica 3.2: Spreminjanje karakterističnih vrednosti strižne napetosti s temperaturo na stiku.

Table 3.2: The temperature dependent values of characteristic tangential stress between concrete and prestressing steel.

$T [^{\circ}\text{C}]$	20	100	200	300	400	500	600	700
$\tau_0 [\text{kN/cm}^2]$	0.5	0.49	0.46	0.43	0.38	0.235	0.09	0.045
$\tau_I [\text{kN/cm}^2]$	0.545	0.534	0.501	0.469	0.414	0.256	0.098	0.049

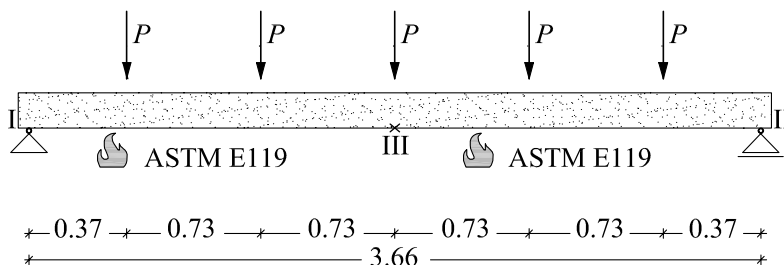
3.4 Računski primeri

Z računskimi primeri prikažemo učinkovitost, natančnost in primernost predstavljenega matematičnega modela in računskega postopka za analizo prednapetih betonskih linijskih konstrukcij med požarom. Izdelali smo ustrezen računalniški program v okolju `Matlab` oziroma z njim dopolnili program NFIRA (Bratina, 2003). Glede na ugotovitve v podpoglavju 2.3 v vseh prikazanih računskih primerih analiziramo prednapete betonske konstrukcije z 20 deformacijskimi končnimi elementi tipa E_{4-5} . Obravnavamo dva računska primera: (i) prostoležeče prednapete betonske plošče in (ii) prostoležečo prednapeto betonsko ploščo s previsi. Plošče so bile računane kot linijski noilec.

3.4.1 Prostoležeče prednapete betonske plošče

V prvem računskem primeru obravnavamo prostoležeče prednapete betonske plošče. Za te primere obstajajo v literaturi tudi eksperimentalni rezultati (Gustaferrero in Selvaggio, 1967). Cilj eksperimentov je bil ugotoviti vpliv vrste betona, količine in razporeditve prednapetega jekla v prerezu ter debeline zaščitne plasti betona na požarno odpornost plošče. S tem namenom sta Gustaferrero in Selvaggio (1967) plošče zgolj s spodnje strani izpostavila požarnemu režimu z oznako ASTM E119 (glej sliko 3.1). Glede na razpoložljive rezultate eksperimentov v računskem primeru analiziramo odziv štirih različnih prednapetih plošč na sočasno delovanje mehanske in požarne obtežbe. Geometrijske in materialne podatke ter podatke o obtežbi prednapetih betonskih plošč prikazujemo na sliki 3.25.

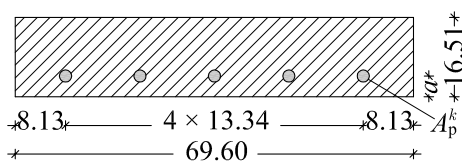
Prostoležeča plošča (dimenzije v m):



beton normalne teže: $q_{z,c} = 2.60$ kN/m

lahki beton: $q_{z,c} = 1.72$ kN/m

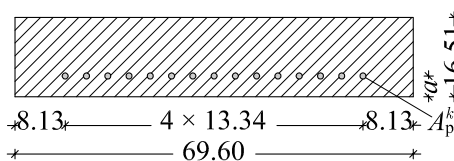
Prečni prerez 1 (dimenzije v cm):



$$f_{p0.1k} / f_{pk} = 162.6 / 180.6 \text{ kN/cm}^2$$

$$A_p^k = 0.7 \text{ cm}^2, \quad N_{p,pretn}^k = 84.46 \text{ kN}$$

Prečni prerez 2 (dimenzije v cm):



$$f_{p0.1k} / f_{pk} = 170.7 / 189.6 \text{ kN/cm}^2$$

$$A_p^k = 0.23 \text{ cm}^2, \quad N_{p,pretn}^k = 27.72 \text{ kN}$$

Slika 3.25: Prednapeta betonska plošča. Geometrijski in materialni podatki ter podatki o obtežbi.

Figure 3.25: Prestressed concrete slab. Geometrical, material and loading data.

Prikazujemo dva značilna prečna prereza obravnavanih plošč, ki se razlikujeta glede količine in razporeditve prednapetih kablov v prečnem prerezu. Mehke armature v prečnih prerezih ni. Glavne podatke obravnavanih plošč prikazujemo tudi v preglednici 3.3.

Kot vidimo na sliki 3.25, so dimenzije prečnih prerezov vseh plošč enake. Plošča z oznako PI_I je bila prednapeta s petimi kabli z napenjalnimi silami $N_{p,predn}^k = 84.46$ kN, prečni prerezi kablov pa so $A_p^k = 0.7$ cm² ($k = 1, 2, \dots, 5$). Ostale plošče so bile prednapete s petnajstimi kabli s prečnimi prerezi $A_p^k = 0.23$ cm² in napenjalnimi silami $N_{p,predn}^k = 27.27$ kN ($k = 1, 2, \dots, 15$). Plošče so se razlikovale tudi po debelini zaščitne plasti betona ($a = 5.08$ cm oziroma $a = 7.62$ cm), kvaliteti betona (normalni oziroma lahki beton), tlačni trdnosti betona f_{c0} , relativni vlažnosti okolja RH in velikosti zunanje obtežbe (preglednica 3.3 in 3.4).

Preglednica 3.3: Prednapete betonske plošče. Geometrijski in materialni podatki ter podatki o obtežbi.

Table 3.3: Prestressed concrete slabs. Geometrical, material and load data.

vrsta plošče	vrsta betona	št.prereza	a [cm]	f_{c0} [kN/cm ²]	P [kN]
PI _I	lahki	1	7.62	4.34	7.47
PI _{II}	normalni	2	5.08	5.34	9.15
PI _{III}	normalni	2	7.62	3.74	6.16
PI _{IV}	lahki	2	7.62	5.14	6.87

3.4.1.1 Določitev temperature in vlage v prečnem prerezu

Med eksperimentom je bila le spodnja površina plošče enakomerno ogrevana vzdolž celotne dolžine plošče. Bočne strani plošče so bile izolirane. Tako lahko v analizi predpostavimo, da se temperatura in vlaga spreminjata le v prečni smeri plošče. Spreminjanje temperature in vlage po prečnem prerezu plošče izračunamo na dva načina. Pri prvem načinu izračunamo časovno in krajevno razporeditev temperature in vlage v prečnem prerezu kot povezan prehod toplote in vlage v kapilarno poroznih materialih. Pri drugem načinu pa določimo temperaturno polje v plošči neodvisno od razporeditve vlage. Za to uporabimo računalniški program HEATC (Saje in Turk, 1987). Vrednosti vlažnostnega potenciala w_A , prevodnostnega koeficienta vlage D_m , specifične vlage snovi c_m in prestopnega koeficienta vlage h_m , ki jih potrebujemo v analizi, prikazujemo v preglednici 3.4.

Dodatno v računu predpostavimo, da je delež vlage v plinastem stanju $\varepsilon = 0.3$, izparilna toplota snovi pa $h_{LV} = 2.50 \cdot 10^6$ J/kg. Vpliv prednapetih kablov na razporeditev temperature in vlage po prečnem prerezu zanemarimo (Bratina, 2003). Spreminjanje specifične toplote ter gostote betona v odvisnosti od povišane temperature upoštevamo skladno z evropskim standardom za beton Eurocode 2, Part 1-2 (2003). Spreminjanje toplotne prevodnosti betona s temperaturo pa izberemo tako, da se izračunana časovna razporeditev temperature v prečnem prerezu čim bolj prilega izmerjenim vrednostim.

Najprej analiziramo vpliv izbire matematičnega modela na časovno razporeditev temperature v prečnem prerezu. Na sliki 3.26 prikažemo časovno spreminjanje temperature v prečnem prerezu na mestu prednapetih kablov za oba matematična modela. Glede na način ogrevanja plošče imajo pričakovano vsi kabli približno enako temperaturo. Na sliki 3.26 vidimo, da pri računu z upoštevanjem povezanega prenosa

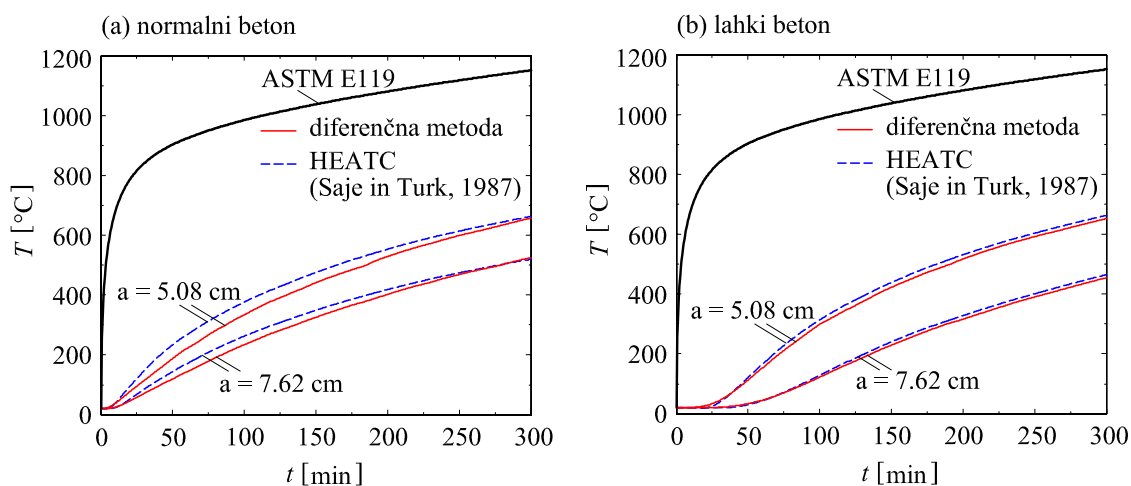
Preglednica 3.4: Podatki za račun povezanega prenosa toplote in vlage.

Table 3.4: Data for calculating coupled heat and mass transfer.

vrsta plošče	PI _I	PI _{II}	PI _{III}	PI _{IV}
RH [%]	66	63	65	69
w_A [°M]	12.79	12.12	12.57	13.45
D_m [kg/ms°M]	$2.59 \cdot 10^{-11}$	$3.74 \cdot 10^{-11}$	$3.61 \cdot 10^{-11}$	$2.46 \cdot 10^{-11}$
c_m [kg/kg°M]	0.00117	0.00123	0.00119	0.00112
h_m [kg/s m ² °M]	$4.11 \cdot 10^{-8}$	$5.94 \cdot 10^{-8}$	$5.73 \cdot 10^{-8}$	$3.90 \cdot 10^{-8}$

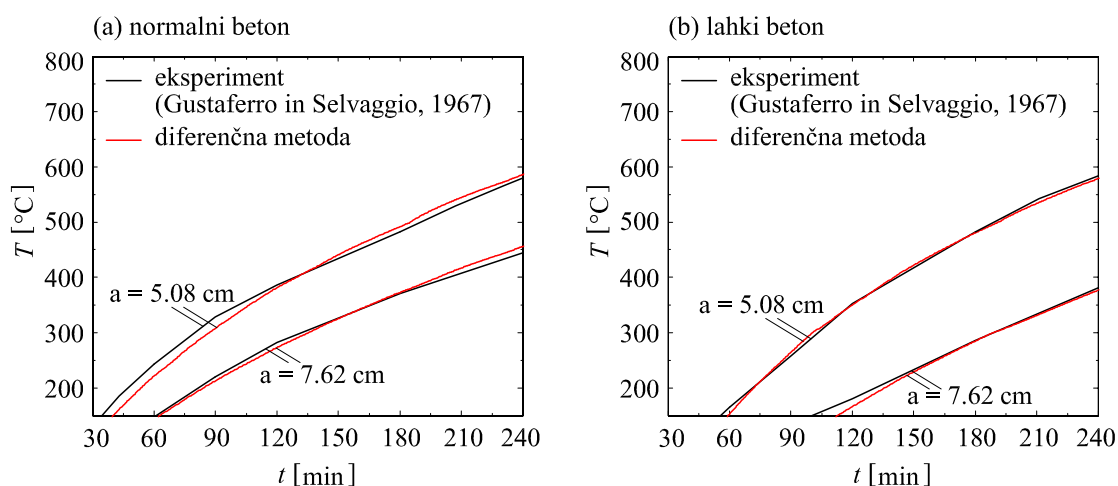
toplote in vlage temperatura v začetni fazi požara počasneje narašča kot v primeru, ko vpliv vlage zane-marimo. Razlika je izrazitejša pri normalnem betonu. Nižja temperatura pri računu z matematičnim modelom, s katerim časovno razporeditev vlage in temperature v plošči določimo kot povezan problem, je posledica dejstva, da se del toplote porabi za izparevanje vode.

Na koncu s primerjavo med eksperimentalnimi in numeričnimi rezultati ocenimo natančnost predstavljenega matematičnega modela za določitev temperature in vlage v prednapetih betonskih konstrukcijah med požarom. Glede na dostopne eksperimentalne rezultate v literaturi (Gustafsson in Selvaggio, 1967) prikazujemo na sliki 3.27 samo primerjavo časovnega spreminjanja temperature v prečnem prerezu plošče na mestu prednapetih kablov na časovnem intervalu od 30 do 240 minut. Ujemanje izmerjenih ter izračunanih temperatur je na tem časovnem intervalu za obe debelini zaščitne plasti betona ter za obe vrsti betona zelo dobro, kar dokazuje primernost predstavljenega matematičnega modela za določitev vlage in temperature v prednapetih betonskih linijskih konstrukcijah med požarom.



Slika 3.26: Časovno spreminjanje temperature v prečnem prerezu na mestu prednapetih kablov: (a) normalni beton in (b) lahki beton. Primerjava matematičnih modelov.

Figure 3.26: Time dependent temperature in cross section in place of prestressing tendons: (a) normal-weight concrete and (b) lightweight concrete. Comparison between mathematical models.



Slika 3.27: Časovno spreminjanje temperature v prečnem prerezu na mestu prednapetih kablov: (a) normalni beton in (b) lahki beton. Primerjava numeričnih in eksperimentalnih rezultatov.

Figure 3.27: Time dependent temperature in cross section in place of prestressing tendons: (a) normal-weight concrete and (b) lightweight concrete. Comparison between numerical and experimental results.

3.4.1.2 Analiza mehanskega odziva plošč pri sočasnem delovanju požara in mehanske obtežbe

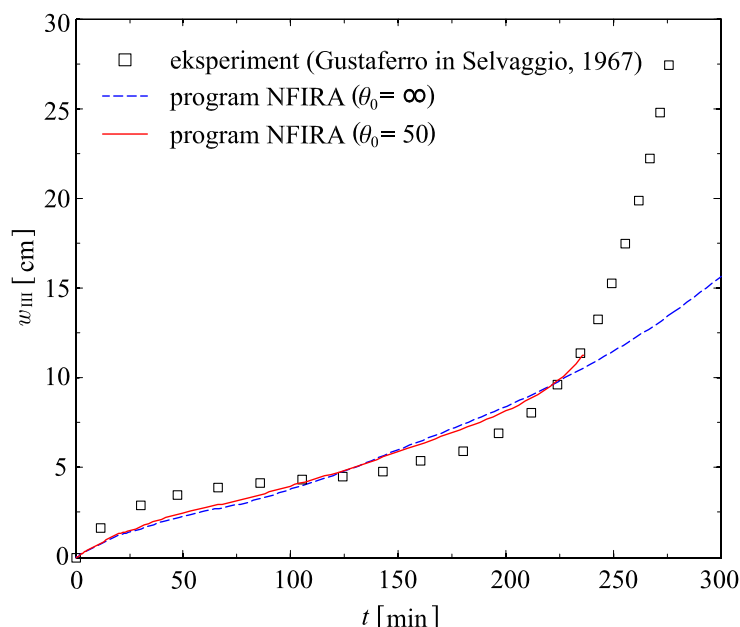
V nadaljevanju analiziramo mehanski odziv prednapete plošče pri sočasnem delovanju požara in mehanske obtežbe. Poudarek je na primerjavi med eksperimentalnimi in numeričnimi rezultati (Gustaferrero in Selvaggio, 1967) ter oceni vpliva togosti stika med betonom in prednapetimi kablji na značilne količine obravnavanih prednapetih betonskih plošč. Vpliv požarne obtežbe upoštevamo s časovno odvisnim temperaturnim poljem prečnega prereza, ki smo ga določili v podpoglavju 3.4.1.1. V nadaljevanju predstavimo parametre računa. Konstitucijska zakona za beton in jeklo za prednapenjanje izberemo skladno z Eurocode 2, Part 1-2 (2003) (glej sliko 2.6). Uporabljeni materialni parametri pri sobni temperaturi so: (a) za beton: tlačna trdnost betona $f_{c,T=20^{\circ}\text{C}}$ (preglednica 3.3), deformacija pri tlačni trdnosti $\varepsilon_{c1,T} = -2.5 \text{ ‰}$, mejna deformacija $\varepsilon_{cu,T} = -20 \text{ ‰}$, (b) za jeklo za prednapenjanje: za vrvi s prerezom $A_p^k = 0.7 \text{ cm}^2$ ($k = 1, 2, \dots, 5$) je trdnost jekla $f_{py,T=20^{\circ}\text{C}} = 162.5 \text{ kN/cm}^2$. V skladu s priporočili Eurocode 2, Part 1-2 (2003) je to 90 ‰ karakteristične trdnosti jekla $f_{pk,T=20^{\circ}\text{C}} = 180.6 \text{ kN/cm}^2$, ki sta jo izmerila in podala Gustaferrero in Selvaggio (1967) oziroma za prerez $A_p^k = 0.23 \text{ cm}^2$ ($k = 1, 2, \dots, 15$) je $f_{py,T=20^{\circ}\text{C}} = 170.6 \text{ kN/cm}^2$ ($f_{pk,T=20^{\circ}\text{C}} = 189.6 \text{ kN/cm}^2$), napetost na meji proporcionalnosti $f_{pp,T}$ je pri sobni temperaturi enaka trdnosti jekla $f_{py,T}$, elastični modul $E_{p,T=20^{\circ}\text{C}} = 19500 \text{ kN/cm}^2$, deformacija pri trdnosti jekla $\varepsilon_{py,T} = 20 \text{ ‰}$, deformacija na meji mehčanja $\varepsilon_{pt,T} = 50 \text{ ‰}$ in mejna deformacija $\varepsilon_{pu,T} = 100 \text{ ‰}$. V skladu z evropskim standardom za beton Eurocode 2, Part 1-2 (2003) upoštevamo, da je prirastek celotne (geometrijske) deformacije betonskega vlakna sestavljen iz prirastka mehanske deformacije $\Delta\varepsilon_{\sigma,c}$, prirastka temperaturne deformacije $\Delta\varepsilon_{th,c}$, prirastka deformacije lezenja betona $\Delta\varepsilon_{cr,c}$ in prirastka prehodne deformacije betona $\Delta\varepsilon_{tr,c}$. Prirastek temperaturne deformacije betonskega vlakna izračunamo skladno s priporočili Eurocode 2, Part 1-2 (2003), prispevek deformacije lezenja betona pri povišanih temperaturah upoštevamo z modelom, ki ga podaja Harmathy (1993), prispevek prehodnih deformacij pa z modelom po Anderbergu in Theanderzonu (Bratina, 2003). Podobno predpostavimo, da je prirastek celotne (geometrijske) deformacije jekla za prednapenjanje sestavljen iz prirastka mehanske deformacije $\Delta\varepsilon_{\sigma,p}$ in temperaturne deformacije $\Delta\varepsilon_{th,p}$. Temperaturno deformacijo jekla za prednapenjanje izračunamo skladno z Eurocode 2, Part 1-2 (2003). Ob predpostavki, da je vpliv viskoznega lezenja jekla pri povišanih temperaturah upoštevan že v

konstitucijskem zakonu za jeklo, ki ga podaja Eurocode 2, Part 1-2 (2003), pri adicijskem razcepu celotne deformacije jekla prispevka deformacij viskoznega lezenja dodatno ne upoštevamo. Konstitucijski zakon stika med betonom in prednapetimi kabli privzamemo skladno s priporočili Keuserja in Mehlhorna (1983) (slika 2.6d), njegovo modificirano obliko pri povišanih temperaturah pa prilagodimo meritvam Diederichsa in Schneiderja (1981) (slika 3.24).

Na slikah 3.28 do 3.31 prikazujemo primerjavo med izmerjenimi ter izračunanimi navpičnimi pomiki na sredini razpona (točka III na sliki 3.25) za vse štiri izbrane prednapete plošče z oznakami PI_I , PI_{II} , PI_{III} in PI_{IV} . Numerične rezultate prikazujemo za plošče s podajnim ($\theta_0 = 50 \text{ kN/cm}^3$) in togim stikom ($\theta_0 = \infty \text{ kN/cm}^3$) med betonom in prednapetimi kabli.

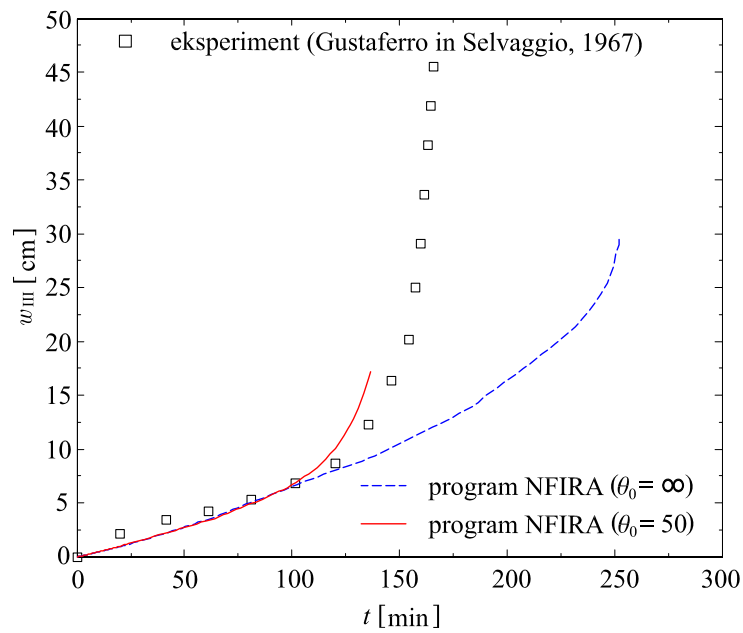
Na slikah 3.28 do 3.31 vidimo, da je pri vseh obravnavanih prednapetih ploščah požarna odpornost plošč s togim stikom bistveno večja kot pri ploščah s podajnim stikom med betonom in prednapetimi kabli. Dodatno na slikah vidimo, da se rezultati plošč s podajnim stikom bistveno bolje prilegajo eksperimentalnim rezultatom kot rezultati plošč s togim stikom, čeprav so odstopanja še kar velika. Največja opazimo v območju, kjer pričnejo pomiki hitro naraščati (to običajno pomeni porušitev konstrukcije). Da numerični rezultati v tem območju ne sledijo eksperimentalnim, je posledica nestabilnosti računskega postopka. Ta pa je najverjetneje posledica lokalizacij deformacij, ki se pojavlja kot izrazito in nefizikalno nihanje deformacij po referenčnih oseh obravnavanih plošč. Takšnemu pojavu se v analizi armiranobetonskih linijskih konstrukcij v veliki meri izognemo z vpeljavo t.i. kratkih končnih elementov (Bratina, 2003). Taka modificirana analiza bo tudi predmet naših nadaljnjih raziskav. Zaradi preglednosti predstavimo rezultate analiz tudi v preglednici 3.5, kjer smo porušitev plošč med požarom zaradi nestabilnosti računskega postopka označili s t_{cr} .

Na koncu na slikah 3.33 in 3.32 ter v preglednici 3.6 za prostoležečo prednapeto betonsko ploščo z oznako PI_{II} za 0, 10, 70 in 137 minut trajanja požara predstavimo vrednosti nekaterih značilnih količin.



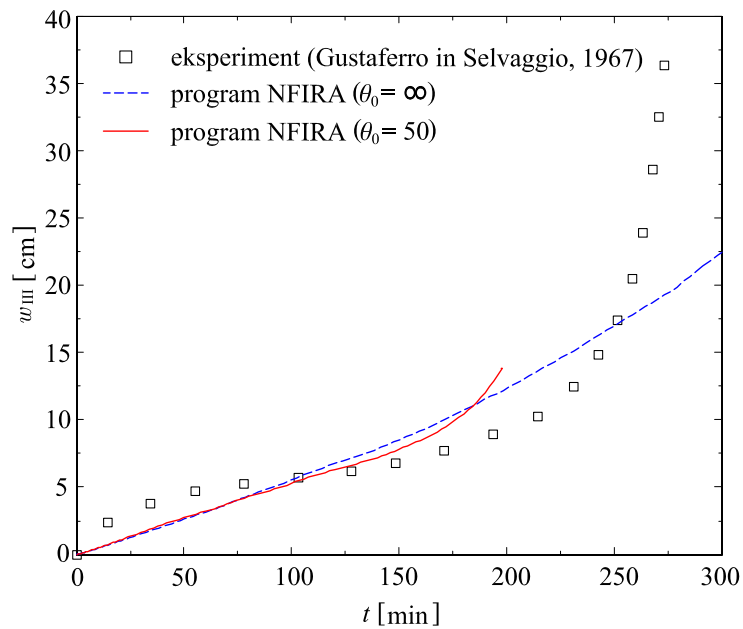
Slika 3.28: Prednapeta betonska plošča PI_I . Izmerjeni in izračunani navpični pomik na sredini razpona plošče w_{III} .

Figure 3.28: Prestressed concrete slab PI_I . Measured and calculated vertical midspan deflection w_{III} .



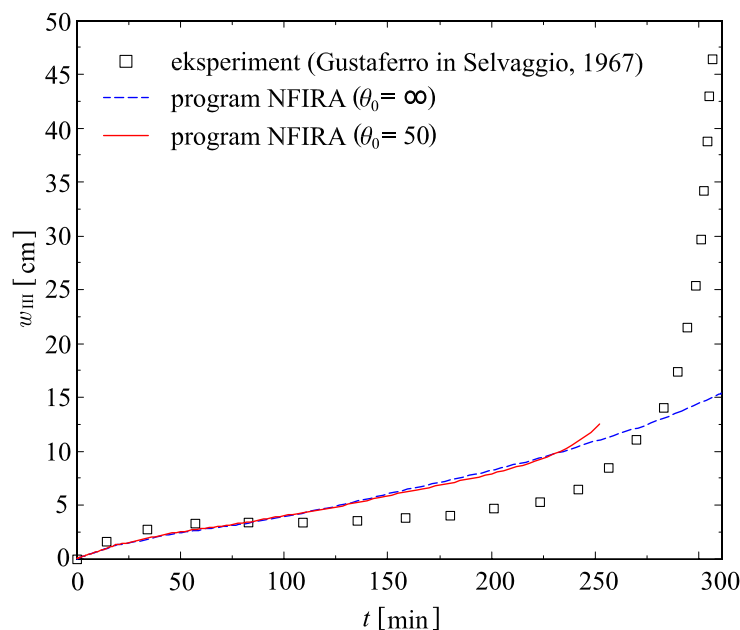
Slika 3.29: Prednapeta betonska plošča Pl_{II}. Izmerjeni in izračunani navpični pomik na sredini razpona plošče w_{III} .

Figure 3.29: Prestressed concrete slab Pl_{II}. Measured and calculated vertical midspan deflection w_{III} .



Slika 3.30: Prednapeta betonska plošča Pl_{III}. Izmerjeni in izračunani navpični pomik na sredini razpona plošče w_{III} .

Figure 3.30: Prestressed concrete slab Pl_{III}. Measured and calculated vertical midspan deflection w_{III} .



Slika 3.31: Prednapeta betonska plošča Pl_{IV}. Izmerjeni in izračunani navpični pomik na sredini razpona plošče w_{III} .

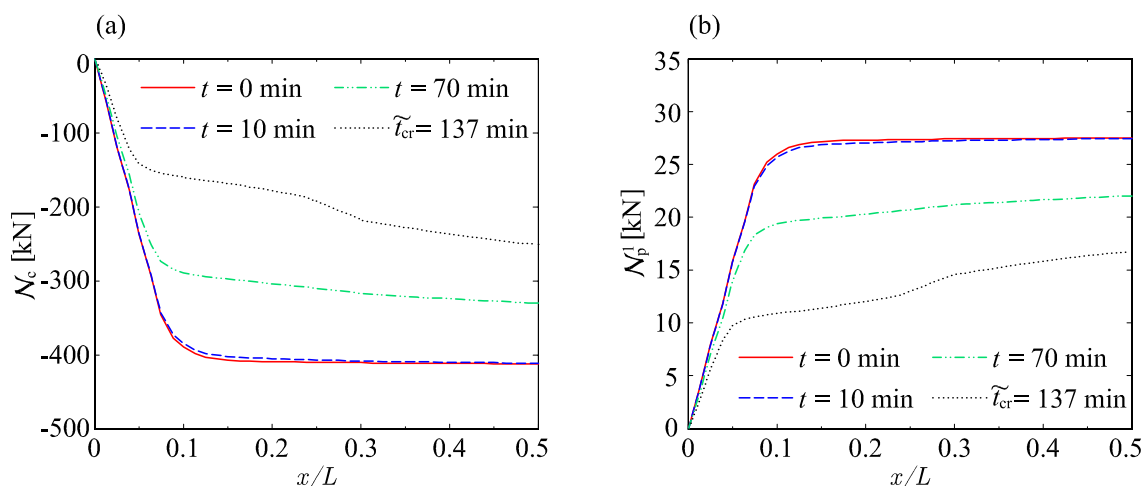
Figure 3.31: Prestressed concrete slab Pl_{IV}. Measured and calculated vertical midspan deflection w_{III} .

Preglednica 3.5: Primerjava numeričnih in eksperimentalnih rezultatov za mejni pomik na sredini plošče ter požarna odpornost.

Table 3.5: The comparison of numerical and experimental results of limit midspan deflection. Fire endurance of prestressed concrete slabs.

vrsta plošče	eksperiment		program NFIRA	
	t_{cr} [min]	$w_{III,cr}$ [cm]	\tilde{t}_{cr} [min]	$w_{III,cr}$ [cm]
Pl _I	275	27.40	237	11.28
Pl _{II}	169	45.52	137	17.22
Pl _{III}	276	36.29	198	13.83
Pl _{IV}	311	46.37	253	12.50

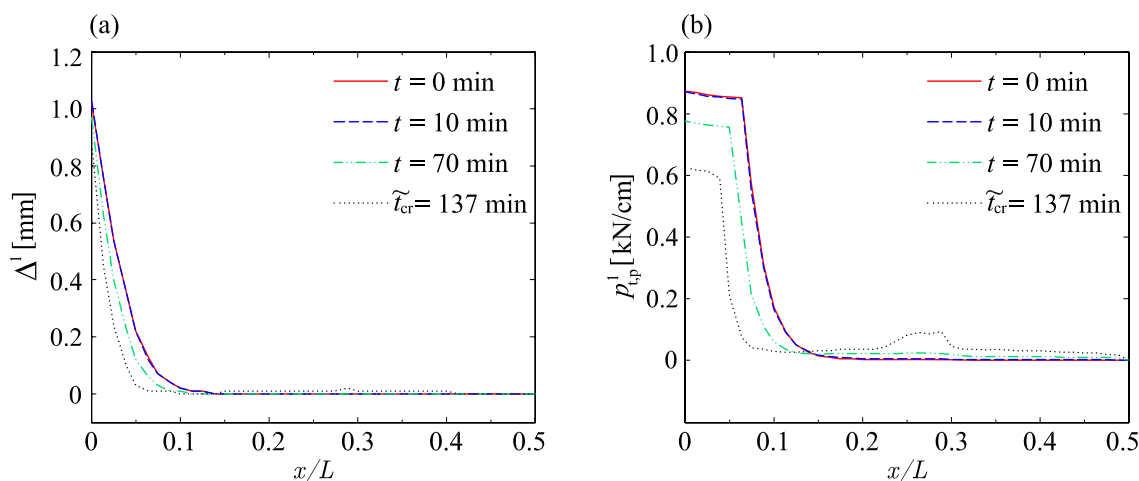
Na sliki 3.32 prikazujemo spreminjanje osne sile v betonu \mathcal{N}_c in kablju \mathcal{N}_p^1 za 0, 10, 70 in 137 minut trajanja požara. Spreminjanje osnih sil je simetrično glede na sredino plošče. Opazimo, da je padec osnih sil s časom izrazitejši, največji pa je v območju vnosa napenjalne sile v betonski del plošče, in sicer ne glede na čas trajanja požara.



Slika 3.32: Prednapeta betonska plošča Pl_{II}. Porazdelitev osnih sil v: (a) betonu N_c in (b) prednapetem kablju N_p^1 za 0, 10, 70, 137 minut trajanja požara.

Figure 3.32: Prestressed concrete slab Pl_{II}. The distribution of axial force in: (a) concrete N_c and (b) prestressing tendon N_p^1 for 0, 10, 70, 137 minutes of fire.

Na sliki 3.33a prikazujemo porazdelitev zamikov Δ^1 na stiku med betonom in prednapetimi kablji. Opazimo, da je zamik največji na robu plošče in ne presega zamika na meji nosilnosti stika $\Delta_I = 3$ mm (zakon stika na sliki 3.24). Opazimo tudi, da se s časom zamik na stiku manjša. Vzporedno na sliki 3.33b prikazujemo porazdelitev strižne komponente kontaktne linijske obtežbe $p_{t,p}^1$. Ta je na robu plošče največja in pada z oddaljenostjo od roba plošče. Daljši je čas trajanja požara, izrazitejši je padeč strižne komponente kontaktne linijske obtežbe. Na slikah 3.33a in 3.33b tudi nazorno vidimo nihanje Δ^1 in $p_{t,p}^1$ pri času $\tilde{t}_{cr} = 137$ min. Značilne količine za ploščo Pl_{II} predstavimo tudi v preglednici 3.6.



Slika 3.33: Prednapeta betonska plošča Pl_{II}. Porazdelitev: (a) zamikov Δ^1 in (b) strižne komponente linijske obtežbe na stiku med betonom in prednapetim kablom $p_{t,p}^1$ za 0, 10, 70, 137 minut trajanja požara.

Figure 3.33: Prestressed concrete slab Pl_{II}. The distribution of: (a) slips Δ^1 and (b) tangential component of bond stress vector between concrete and prestressing tendon $p_{t,p}^1$ for 0, 10, 70, 137 minutes of fire.

Preglednica 3.6: Prednapeta betonska plošča Pl_{II}. Značilne količine na stiku med betonom in prednapetim kablom in osni sili pri štirih časih trajanja požara $t = 0, 10, 70, 137$ min.

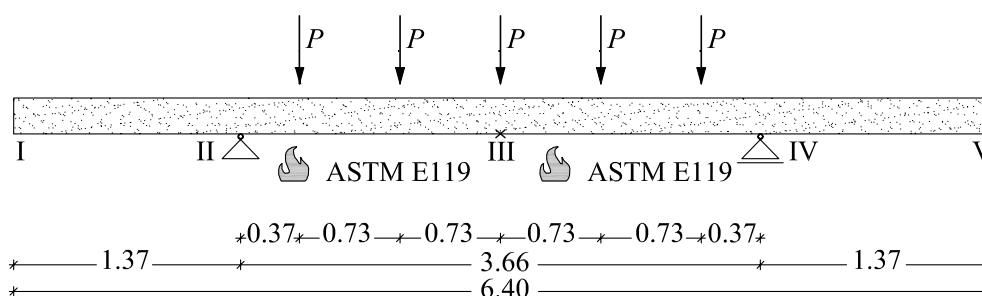
Table 3.6: Prestressed concrete slab Pl_{II}. Characteristic quantities in a contact between concrete and prestressing tendon and axial forces for four different times of fire duration $t = 0, 10, 70, 137$ min.

	$t = 0$	$t = 10$	$t = 70$	$\tilde{t}_{cr} = 137$
plošča Pl _{II}	[min]	[min]	[min]	[min]
$\mathcal{N}_{c,III}$ [kN]	-412.19	-411.33	-330.05	-250.65
$\mathcal{N}_{p,III}^1$ [kN]	27.48	27.42	22.00	16.71
Δ_I^1 [mm]	1.02	1.03	0.97	0.88
$p_{t,p,I}^1$ [kN/cm]	0.87	0.87	0.78	0.63

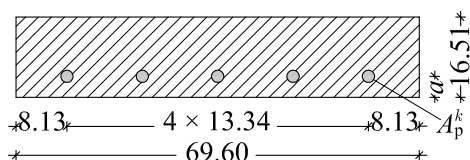
3.4.2 Prednapeta betonska plošča s previsi

V drugem računskem primeru obravnavamo prostoležečo prednapeto betonsko ploščo s previsi. Tudi za to prednapeto ploščo obstajajo v literaturi eksperimentalni rezultati (Gustaferro in Selvaggio, 1967). Gustaferro in Selvaggio (1967) sta ploščo v območju med podporama zgolj s spodnje strani izpostavila požarni obtežbi, pri kateri je temperatura požarnega prostora naraščala skladno s požarno krivuljo ASTM E119 (slika 3.1). Na sliki 3.34 prikažemo geometrijske in materialne podatke ter podatke o obtežbi prednapete plošče s previsi.

Prostoležeča plošča s previsoma (dimenzije v m):



Prečni prerez (dimenzije v cm):



lahki beton: $q_{z,c} = 1.72$ kN/m

$f_{p0.1k} / f_{pk} = 162.6 / 180.6$ kN/cm²

$A_p^k = 0.7$ cm², $\mathcal{N}_{p,predn}^k = 84.46$ kN

$a = 2.54$ cm

Slika 3.34: Prednapeta betonska plošča s previsi. Geometrijski in materialni podatki ter podatki o obtežbi.

Figure 3.34: Prestressed concrete slab with overhangs. Geometrical, material and loading data.

Plošča je bila prednapeta s petimi kabli s prečnimi prerezi $A_p^k = 0.7 \text{ cm}^2$, prednapetimi s silami $N_{p,predn}^k = 84.46 \text{ kN}$ ($k = 1, 2, \dots, 5$). Debelina zaščitne plasti betona je $a = 2.54 \text{ cm}$. Pri sobni temperaturi ($T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$) je izmerjena tlačna trdnost betona $f_{c,T} = 4.5 \text{ kN/cm}^2$, izmerjena trdnost jekla za prednapenjanje je $f_{py,T} = 162.6 \text{ kN/cm}^2$, karakteristična trdnost pa $f_{pk,T} = 180.6 \text{ kN/cm}^2$. Relativna vlažnost okolice je $RH = 67 \text{ }^\circ\text{o}$. Poleg lastne teže $q_{z,c} = 1.72 \text{ kN/m}$ je plošča na območju med podporama obremenjena tudi z zunanjiimi točkovnimi silami P ($P = 12.25 \text{ kN}$).

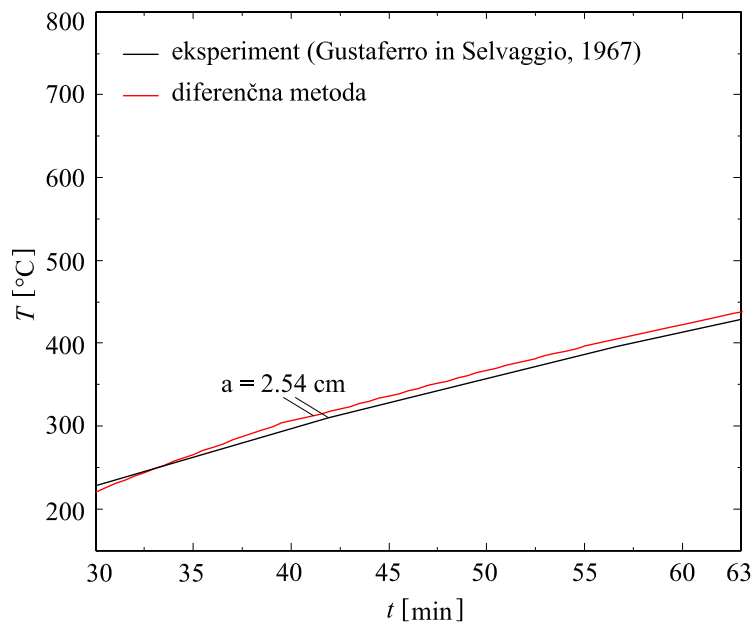
3.4.2.1 Določitev temperature in vlage v prečnem prerezu

Med eksperimentom je bila enakomerno ogrevana le spodnja površina plošče v območju med podporama. Previsa plošče nista bila izpostavljena požaru. Bočne strani plošče so bile med požarom izolirane. V analizi zato predpostavimo, da se temperatura in vlaga spreminjata le v prečni smeri plošče. Za previsa plošče predpostavimo, da se temperatura in vlaga med požarom ne spreminjata. Časovno in krajevno razporeditev temperature in vlage v prečnem prerezu izračunamo kot povezan prehod toplote in vlage v kapilarno poroznih materialih. Postopek računa temperature je podrobneje predstavljen v podpoglavju 3.1.1, zato tu navajamo le vrednosti parametrov, ki jih potrebujemo pri računu povezanega prenosa toplote in vlage. Vrednosti parametrov so: vlažnostni potencial okolice je $w_A = 13.01 \text{ }^\circ\text{M}$, prevodnostni koeficient vlage $D_m = 2.54 \cdot 10^{-11} \text{ kg/ms}^\circ\text{M}$, specifična vlaga betona $c_m = 0.00115 \text{ kg/kgs}^\circ\text{M}$, prestopni koeficient vlažnosti $h_m = 4.04 \cdot 10^{-8} \text{ kg/sm}^2\text{ }^\circ\text{M}$, delež vlage v plinastem stanju $\varepsilon = 0.30$ in izparilna toplota snovi $h_{LV} = 2.50 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$. Spreminjanje specifične toplote ter gostote betona v odvisnosti od temperature upoštevamo skladno z evropskim standardom za beton Eurocode 2, Part 1-2 (2003), spreminjanje toplotne prevodnosti betona pa povzamemo iz prvega računskega primera. Vpliv prednapetih kablov na razporeditev temperature in vlage zanemarimo.

Na sliki 3.35 prikažemo primerjavo med numeričnimi in eksperimentalnimi rezultati za časovno spreminjanje temperature v plošči, na mestu prednapetih kablov. Primerjavo rezultatov prikažemo na časovnem intervalu od 30 do 63 minut. Na tem območju je ujemanje izmerjenih in izračunanih temperatur zelo dobro, torej je predstavljeni matematični model za določitev vlage in temperature v prednapetih betonskih linijskih konstrukcijah med požarom ustrezen.

Na sliki 3.36 prikažemo računsko razporeditev temperature in vlage v prečnem prerezu prednapete plošče pri treh različnih časih trajanja požara (10, 30 in 63 minut). V računu smo upoštevali simetrijo prečnega prereza. Polovico prereza smo razdelili v mrežo 31×14 točk. Časovno razporeditev temperature in vlage smo izračunali z diferenčno metodo (podpoglavje 3.1.2). S točko A na sliki 3.36 smo označili spodnjo površino plošče, s točko B lego prednapetih kablov, s točko C pa zgornjo površino prednapete plošče.

Pri času $t = 10 \text{ min}$ so izračunane temperature v referenčnih točkah naslednje: $T_A = 433 \text{ }^\circ\text{C}$, $T_B = 45 \text{ }^\circ\text{C}$ in $T_C = 20 \text{ }^\circ\text{C}$. Vrednosti potenciala vlage so po 10 minutah požara skoraj nespremenjene. Vrednosti v referenčnih točkah so: $w_A = 12.96 \text{ }^\circ\text{M}$, $w_B = 13.01 \text{ }^\circ\text{M}$ in $w_C = 13 \text{ }^\circ\text{M}$. Po 30 minutah požara temperatura v betonu na spodnjem robu plošče naraste na $T_A = 726 \text{ }^\circ\text{C}$, na mestu kablov pa na $T_B = 212 \text{ }^\circ\text{C}$. Na zgornjem robu plošče je temperatura še vedno $20 \text{ }^\circ\text{C}$. Opazimo padec potenciala vlage na spodnjem robu plošče zaradi izhlapevanja vlage iz plošče ($w_A = 12.84 \text{ }^\circ\text{M}$, $w_B = 13.04 \text{ }^\circ\text{M}$ in $w_C = 13 \text{ }^\circ\text{M}$). Po 63 minutah požara je temperatura v betonu na spodnjem robu plošče že $T_A = 865 \text{ }^\circ\text{C}$, na mestu kablov pa že $T_B = 428 \text{ }^\circ\text{C}$, medtem ko ima zgornja površina plošče še vedno začetno temperaturo. Padec potenciala vlage pa je še izrazitejši, njegove vrednosti v referenčnih točkah so: $w_A = 12.69 \text{ }^\circ\text{M}$, $w_B = 13.05 \text{ }^\circ\text{M}$ in $w_C = 13 \text{ }^\circ\text{M}$.



Slika 3.35: Časovno spreminjanje temperature v prečnem prerezu na mestu prednapetih kablov. Primerjava numeričnih in eksperimentalnih rezultatov.

Figure 3.35: Time dependent temperature in cross section in place of prestressing tendons. Comparison between numerical and experimental results.

3.4.2.2 Analiza mehanskega odziva plošče pri sočasnem delovanju požara in mehanske obtežbe

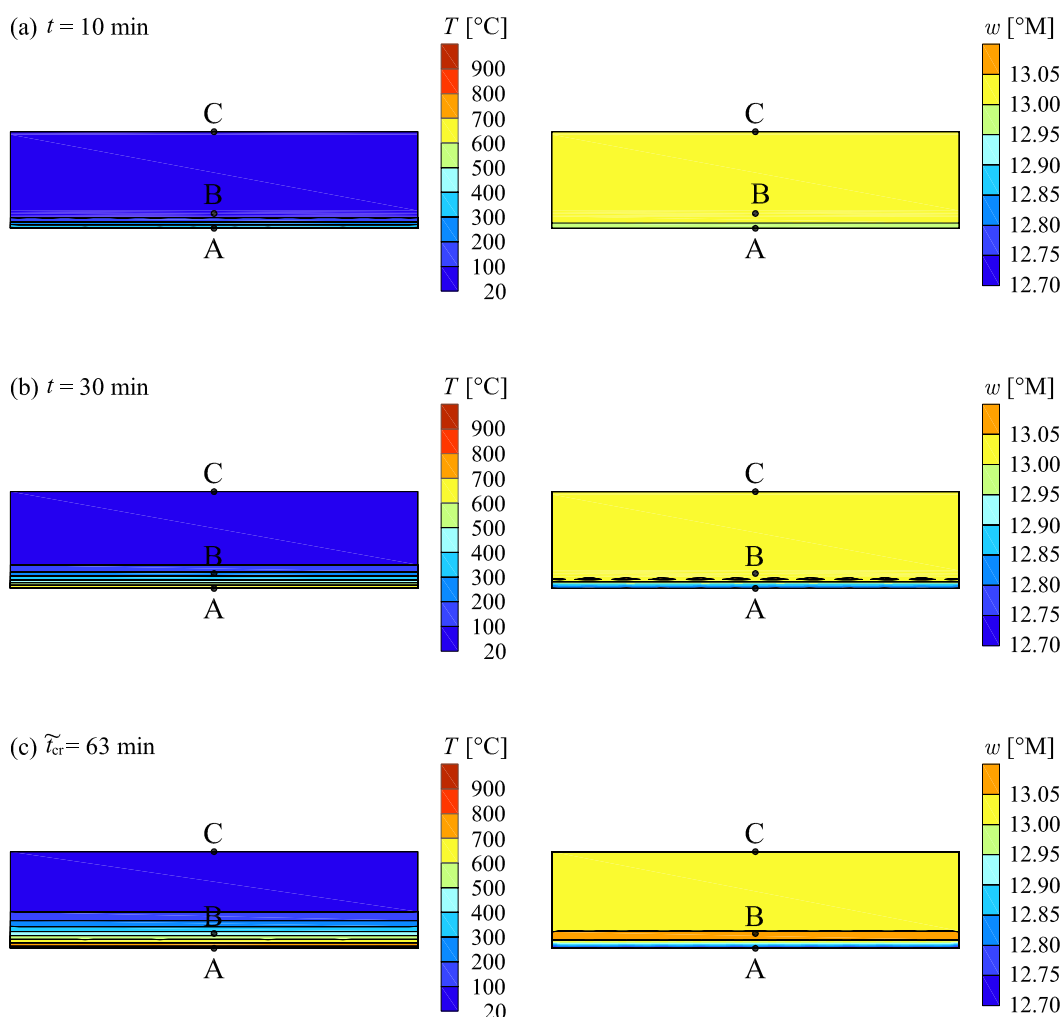
V nadaljevanju analiziramo napetostno in deformacijsko stanje prednapete plošče s previsi pri sočasnem delovanju požarne in mehanske obtežbe. Vpliv požarne obtežbe upoštevamo s časovno odvisnim temperaturnim poljem prečnega prereza, izračunanem v podpoglavju 3.4.2.1. Podrobneje nas zanima napetostno in deformacijsko stanje v plošči med požarom ter primerjava dobljenih rezultatov z eksperimentalnimi rezultati (Gustafsson in Selvaggio, 1967).

Konstitucijski zakon za beton in jeklo za prednapenjanje povzamemo skladno s priporočili iz Eurocode 2, Part 1-2 (2003). Uporabljeni parametri pri sobni temperaturi so: tlačna trdnost betona $f_{c,T=20^{\circ}\text{C}} = 4.5 \text{ kN/cm}^2$, trdnost jekla za prednapenjanje $f_{py,T=20^{\circ}\text{C}} = 162.6 \text{ kN/cm}^2$ (izmerjena vrednost karakteristične trdnosti jekla je bila $f_{pk,T=20^{\circ}\text{C}} = 180.6 \text{ kN/cm}^2$). Preostali materialni parametri so enaki kot pri prejšnjem računskem primeru, zato jih tukaj ne navajamo.

V skladu z Eurocode 2, Part 1-2 (2003) upštevamo adicijski razcep mehanske deformacije betonskega vlakna in jekla za prednapenjanje. Za račun prispevkov temperaturnih deformacij, deformacij lezenja in t.i. prehodnih deformacij uporabimo enake modele in parametre kot pri prejšnjem računskem primeru. Ohranimo tudi lastnosti konstitucijskega zakona stika med betonom in prednapetimi kabli (slika 3.24).

Na sliki 3.37 prikazujemo primerjavo med izmerjenim in izračunanim navpičnim pomikom prednapete plošče na sredini razpona (točka III na sliki 3.34). Numerične rezultate prikazujemo za ploščo s podajnim ($\theta_0 = 50 \text{ kN/cm}^3$) in togim stikom ($\theta_0 = \infty \text{ kN/cm}^3$) med betonom in prednapetimi kabli. Na sliki vidimo, da je tudi pri plošči s previsi požarna odpornost pri računu s togim stikom med betonom in kabli bistveno večja kot pri računu s podajnim stikom. Rezultati za ploščo s podajnim stikom se bolje prilegajo eksperimentalnim rezultatom, čeprav so odstopanja relativno velika. Največja odstopanja ponovno opazimo v območju, ko pričnejo pomiki plošče hitro naraščati in izračunani pomiki zaradi nestabilnosti

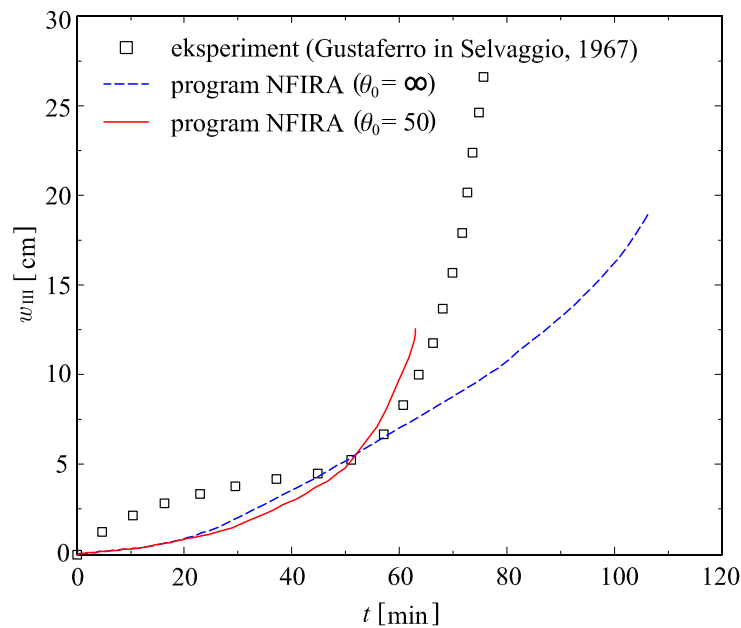
računskega postopka ne sledijo izmerjenim vrednostim. Rezultate prikažemo tudi v preglednici 3.7.



Slika 3.36: Razporeditev temperature in vlage v prečnem prerezu plošče za 10, 30, 63 minut trajanja požara.

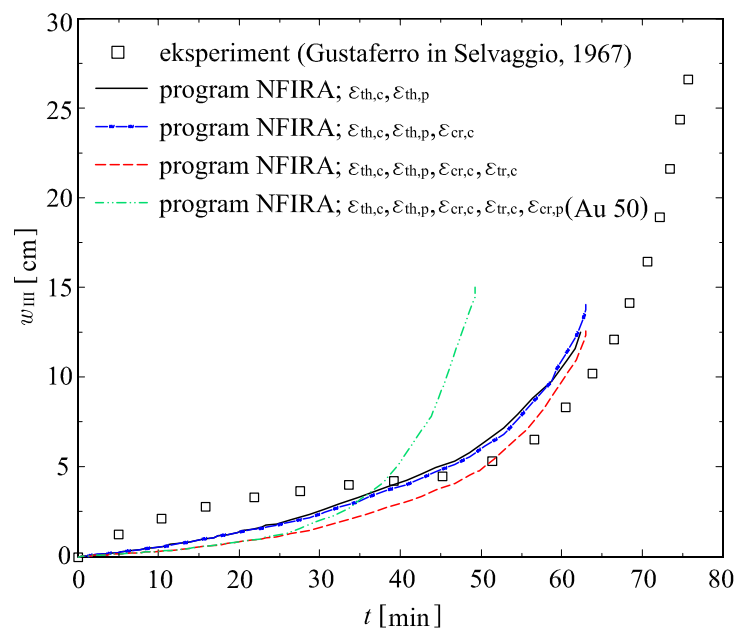
Figure 3.36: The distribution of temperature and moisture in slab cross section for 10, 30, 63 minutes of fire.

V nadaljevanju analiziramo vpliv posameznih deformacijskih prispevkov na mehanski odziv prednapete plošče. Rezultate računa zberemo v preglednici 3.7 in prikažemo na sliki 3.38. Na sliki 3.38 vidimo, da imajo deformacije viskoznega lezenja jekla največji vpliv na mehanski odziv prednapete plošče. Požarna odpornost plošče je v primerjavi z ostalimi rezultati računa manjša kar za 22 %. Iz povedanega lahko sklepamo, da velja predpostavka, da je vpliv viskoznega lezenja jekla pri povišanih temperaturah upoštevan že v konstitucijskem zakonu za jeklo, ki ga podaja Eurocode 2, Part 1-2 (2003), in ga zato v analizi ni smiselno dodatno upoštevati. Vpliv preostalih deformacijskih prispevkov na mehanski odziv prednapete plošče je bistveno manjši. Vpliv deformacij lezenja betona pri povišanih temperaturah je zanemarljiv, ker je čas trajanja požara relativno kratek. Ko v računu odziva upoštevamo t.i. prehodne deformacije v betonu, so izračunani pomiki plošče manjši. Prehodne deformacije betona so nasprotnega predznaka kot temperaturne deformacije.



Slika 3.37: Prednapeta betonska plošča s previsi. Izmerjeni in izračunani navpični pomik na sredini plošče w_{III} .

Figure 3.37: Prestressed concrete slab with overhangings. Measured and calculated vertical midspan deflection w_{III} .



Slika 3.38: Prednapeta betonska plošča s previsoma. Vpliv upoštevanja prispevkov deformacij na velikost mejnega pomika na sredini plošče w_{III} .

Figure 3.38: Prestressed concrete slab with overhangings. The influence of strain contributions to value of limit midspan deflection w_{III} .

Preglednica 3.7: Vpliv prispevkov deformacij na velikost mejnega pomika na sredini plošče.

Table 3.7: The influence of strain contributions to value of limit midspan deflection.

upoštevane deformacije		eksperiment		program NFIRA	
beton	kabel	t_{cr} [min]	$w_{III,cr}$ [cm]	\widetilde{t}_{cr} [min]	$w_{III,cr}$ [cm]
$\varepsilon_{th,c}$	$\varepsilon_{th,p}$	76	26.60	62.50	12.48
$\varepsilon_{th,c}, \varepsilon_{cr,c}$	$\varepsilon_{th,p}$	— —	— —	62.89	14.03
$\varepsilon_{th,c}, \varepsilon_{cr,c}, \varepsilon_{tr,c}$	$\varepsilon_{th,p}$	— —	— —	62.82	11.96
$\varepsilon_{th,c}, \varepsilon_{cr,c}, \varepsilon_{tr,c}$	$\varepsilon_{th,p}, \varepsilon_{cr,p}(\text{Au50})$	— —	— —	49.31	15.03

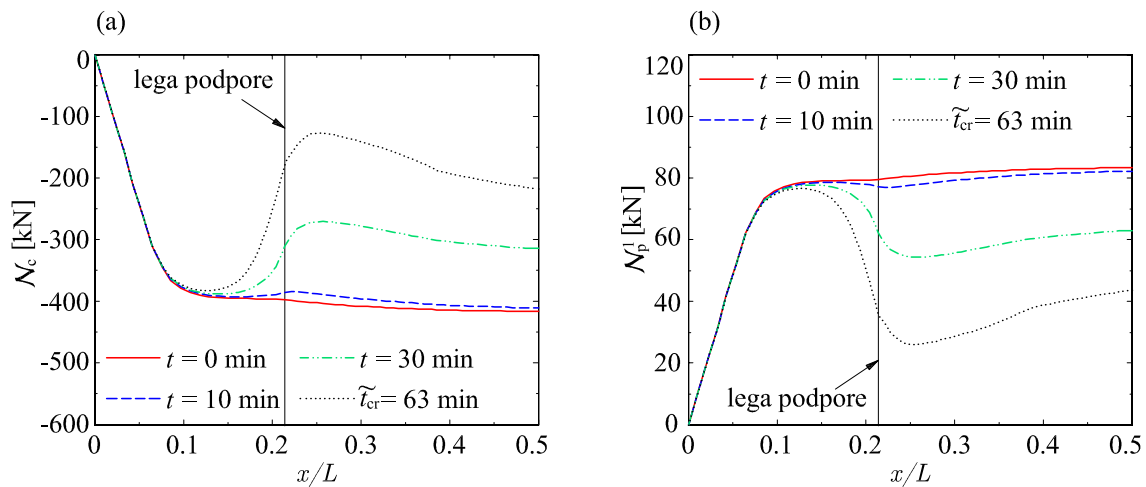
Na koncu računske analize na slikah 3.41–3.43 ter v preglednici 3.8 prikažemo izbrane količine prednapete plošče s previsi, in sicer: osno silo v betonu \mathcal{N}_c in prednapetem kablju \mathcal{N}_p^1 (slika 3.39), upogibni moment \mathcal{M}_c v betonskem delu prednapete plošče in skupni upogibni moment $\mathcal{M} = \mathcal{M}_c - \sum_{k=1}^{n_p} \mathcal{N}_p^k z_p^k$ v prednapeti plošči (slika 3.40), zamik Δ^1 in strižno komponento kontaktnega napetostnega vektorja $p_{t,p}^1$ na stiku med betonom in kablom (slika 3.41), deformirano obliko prednapete plošče (slika 3.42) in deformacijske količine v betonu, ε_{c0} , κ_c , ter prednapetem kablju ε_p^1 (slika 3.43). Rezultate prikažemo pri štirih izbranih časih trajanja požara (0, 10, 30 in 63 minut). Zaradi simetrije plošče in obtežbe nekatere rezultate analize prikažemo le za polovico plošče ($0 \leq x/L \leq 0.5$).

Na sliki 3.39 opazimo, da se osni sili v betonu \mathcal{N}_c oziroma kablju \mathcal{N}_p^1 med požarom zmanjšujeta le v osrednjem delu plošče, t.j. med podporama, medtem ko se v območju vnosa napenjalne sile osni sili v betonu oziroma kablju med požarom ne spreminjata. Podobna ugotovitev velja tudi za upogibna momenta \mathcal{M}_c in \mathcal{M} (slika 3.40). Pred nastopom požarne obtežbe sta oba upogibna momenta \mathcal{M}_c in \mathcal{M} največja ob podpori (točka II na sliki 3.34). Med požarom se momenta \mathcal{M}_c in \mathcal{M} ob podpori zmanjšujeta, v polju pa povečujeta. Pri času $\widetilde{t}_{cr} = 63$ min upogibni moment \mathcal{M} v osrednjem delu plošče spremeni predznak. Pri tem času je njegova vrednost $\mathcal{M} = 5.49$ kNm (točka III na sliki 3.34).

Na sliki 3.41a opazimo, da je zamik Δ^1 na stiku med betonom in kablom največji na robu plošče (točka I na sliki 3.34) in ne presega zamika na meji nosilnosti stika $\Delta_I = 3$ mm. Opazimo tudi, da se s časom zamik zelo poveča v območju podpiranja plošče (točka II na sliki 3.34). Opazimo, da se pri daljšem času trajanja požara zamiki pojavijo tudi v osrednjem delu plošče. Nihanje zamikov v osrednjem delu plošče je najverjetneje posledica lokalizacije deformacij. Vzporedno na sliki 3.41b prikazujemo porazdelitev strižne komponente kontaktnega napetostnega vektorja $p_{t,p}^1$ na stiku. Ta je na robu plošče največja. S časom se strižna napetost najbolj poveča v območju podpiranja plošče (točka II na sliki 3.34).

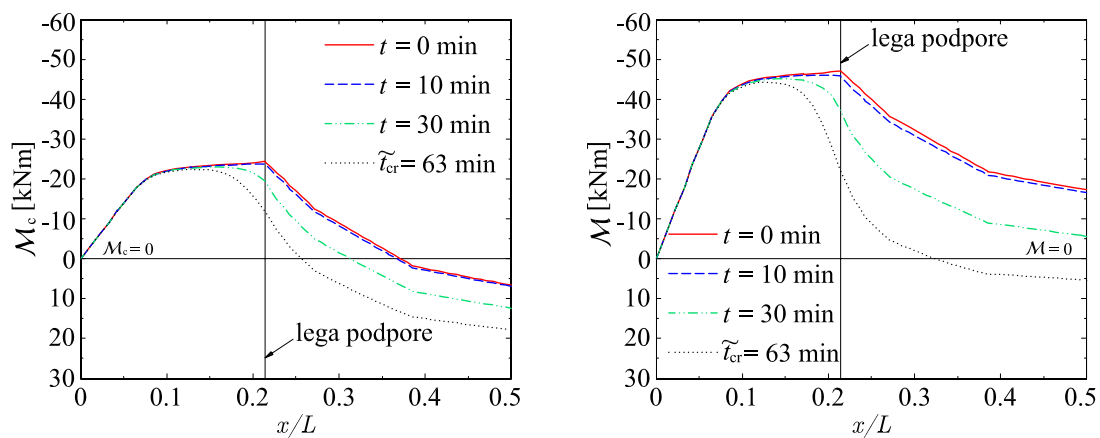
Na sliki 3.42 opazimo, da se pomiki obravnavane prednapete plošče med požarom zelo povečajo. Pri času $\widetilde{t}_{cr} = 63$ min je največji izračunani pomik plošče v polju 12 cm (poveča se kar za 99.8 %), pri tem pa se previsni del plošče dvigne za 11.5 cm.

Na sliki 3.43 opazimo lokalizacijo deformacijskih količin betonskega dela plošče (ε_{c0} , κ_c) pred računsko porušitvijo.



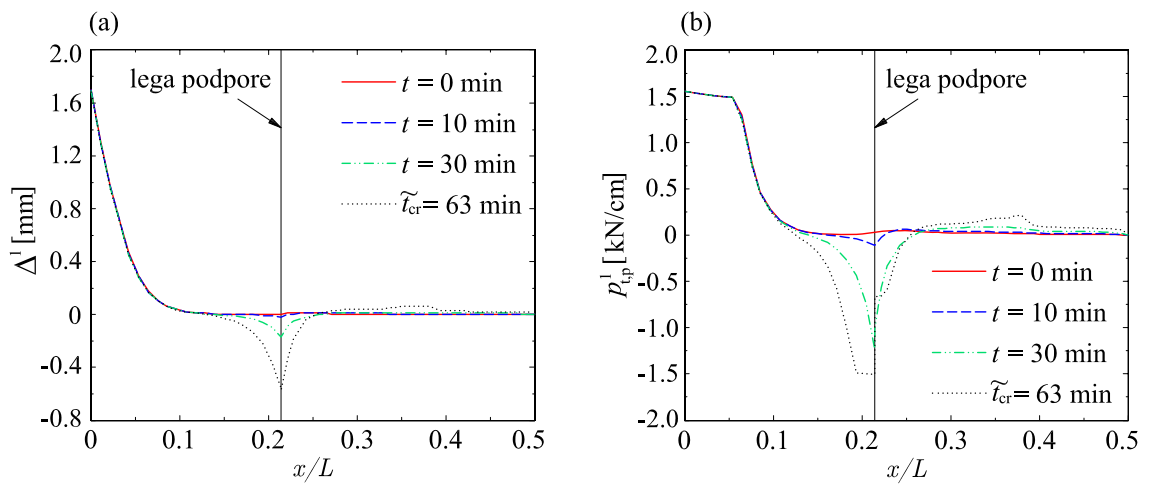
Slika 3.39: Porazdelitev osnih sil v: (a) betonu N_c in (b) prednapetem kablu N_p^1 za 0, 10, 30, 63 minut trajanja požara.

Figure 3.39: The distribution of axial force in: (a) concrete N_c and (b) prestressing tendon N_p^1 for 0, 10, 30, 63 minutes of fire.



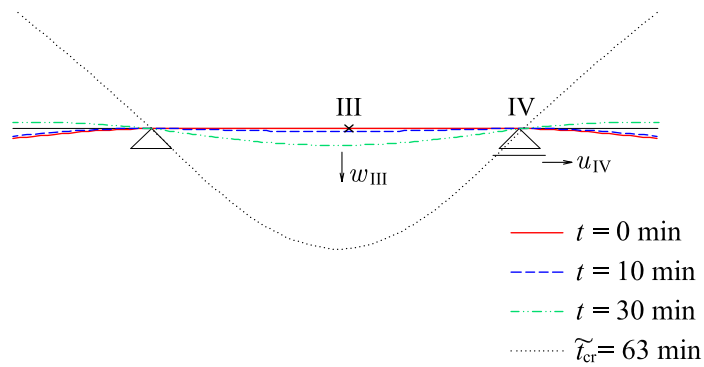
Slika 3.40: Upogibni moment: (a) v betonskem delu plošče M_c in (b) v prednapeti plošči M za 0, 10, 30, 63 minut trajanja požara.

Figure 3.40: The distribution of the bending moment: (a) in concrete part of slab M_c and (b) in prestressed concrete slab M for 0, 10, 30, 63 minutes of fire.



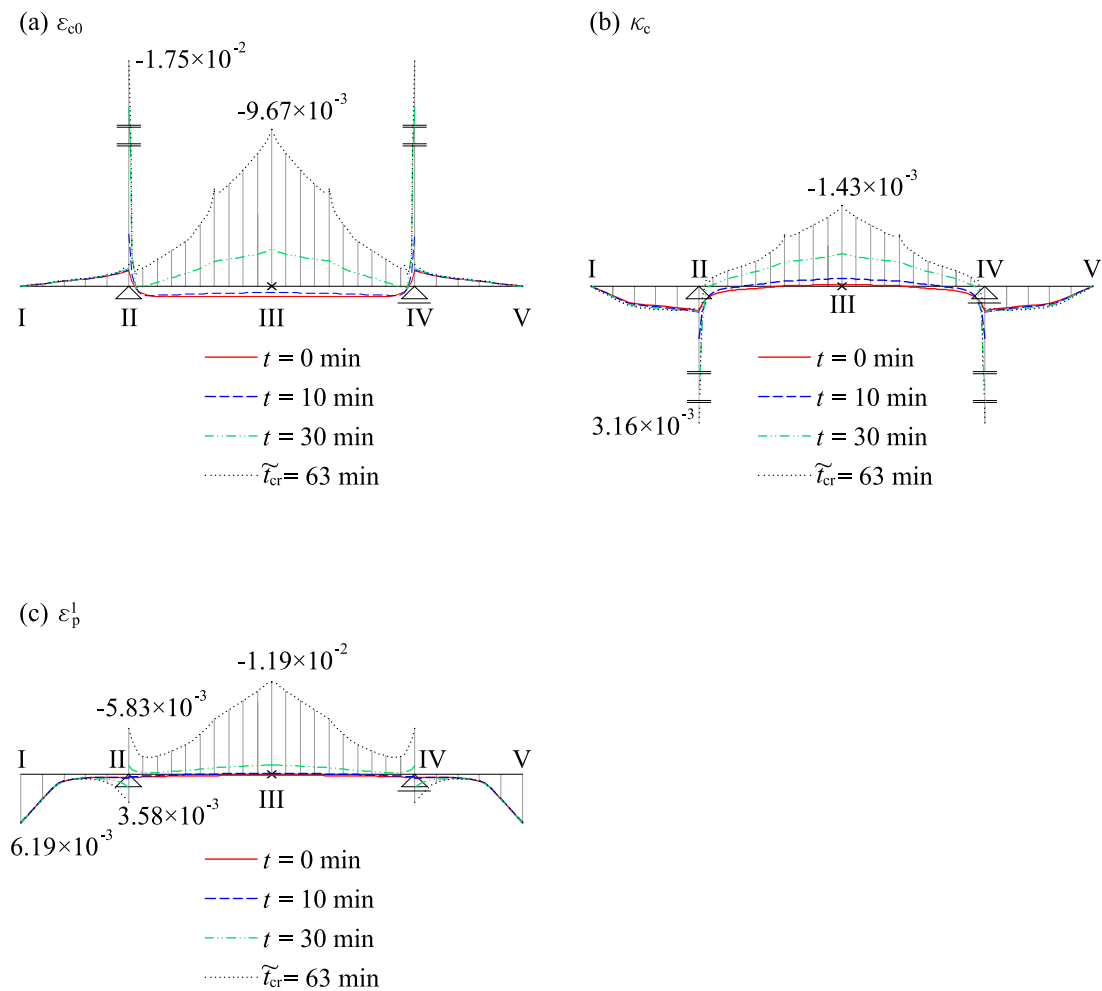
Slika 3.41: Porazdelitev: (a) zamika Δ^1 in (b) tangencialne komponente kontaktnega napetostnega vektorja vzdolž stika med betonom in prednapetim kablom $p^1_{t,p}$ za 0, 10, 30, 63 minut trajanja požara.

Figure 3.41: The distribution of: (a) slip Δ^1 and (b) tangential component of bond stress vector between concrete and prestressing tendon $p^1_{t,p}$ for 0, 10, 30, 63 minutes of fire.



Slika 3.42: Deformirana oblika računskega modela za 0, 10, 30, 63 minut trajanja požara.

Figure 3.42: The deformed shape of mathematical model for 0, 10, 30, 63 minutes of fire.



Slika 3.43: Porazdelitev: (a) specifične spremembe dolžine referenčne osi betonskega dela nosilca ε_{c0} , (b) pseudoukrivljenosti referenčne osi betonskega dela nosilca κ_c in (c) specifične spremembe referenčne osi prednapetega kabla ε_p^1 za 0, 10, 30, 63 minut trajanja požara.

Figure 3.43: The distribution of: (a) extensional strain of centroidal axis for concrete part of beam ε_{c0} , (b) pseudocurvature of centroidal axis for concrete part of beam κ_c and (c) extensional strain of centroidal axis for prestressed tendon ε_p^1 for 0, 10, 30, 63 minutes of fire.

Preglednica 3.8: Prednapeta betonska plošča s previsnima poljema. Značilne kinematične, ravnotežne in deformacijske količine pri štirih časih trajanja požara $t = 0, 10, 30, 63$ min.

Table 3.8: Prestressed concrete slab with overhangings. Characteristic kinematic, equilibrium and deformation quantities for four different times of fire duration $t = 0, 10, 30, 63$ min.

	$t = 0$ [min]	$t = 10$ [min]	$t = 30$ [min]	$t_{cr} = 63$ [min]
$\mathcal{N}_{c,II}$ [kN]	-397.48	-385.71	-310.62	-172.03
$\mathcal{N}_{c,III}$ [kN]	-416.33	-410.61	-314.63	-211.90
$\mathcal{N}_{p,II}^1$ [kN]	79.50	77.14	62.12	34.36
$\mathcal{N}_{p,III}^1$ [kN]	83.27	82.12	62.93	42.38
$\mathcal{M}_{c,II}$ [kNm]	-24.40	-23.73	-19.43	-11.46
$\mathcal{M}_{c,III}$ [kNm]	6.57	6.90	12.39	18.23
\mathcal{M}_{II} [kNm]	-47.12	-45.77	-37.18	-21.99
\mathcal{M}_{III} [kNm]	-17.23	-16.57	-5.60	5.49
Δ_I^1 [mm]	1.70	1.70	1.69	1.68
Δ_{II}^1 [mm]	0	-0.02	-0.17	-0.60
$p_{t,p,I}^1$ [kN/cm]	1.56	1.56	1.56	1.56
$p_{t,p,II}^1$ [kN/cm]	0.03	-0.11	-1.23	-1.51
u_{IV} [cm]	-0.04	-0.03	0.08	0.37
w_{III} [cm]	0.02	0.32	1.66	11.96
$\varepsilon_{c0,II,max}$	$-1.92 \cdot 10^{-4}$	$-6.65 \cdot 10^{-4}$	$-3.85 \cdot 10^{-3}$	$-1.75 \cdot 10^{-2}$
$\varepsilon_{c0,III}$	$1.34 \cdot 10^{-4}$	$7.11 \cdot 10^{-5}$	$-4.88 \cdot 10^{-4}$	$-9.67 \cdot 10^{-3}$
$\kappa_{c,II,max}$	$1.04 \cdot 10^{-4}$	$2.24 \cdot 10^{-4}$	$8.50 \cdot 10^{-4}$	$3.16 \cdot 10^{-3}$
$\kappa_{c,III}$	$-9.37 \cdot 10^{-6}$	$-3.26 \cdot 10^{-5}$	$-1.38 \cdot 10^{-4}$	$-1.43 \cdot 10^{-3}$
$\varepsilon_{p,I}^1$	$6.19 \cdot 10^{-3}$	$6.19 \cdot 10^{-3}$	$6.19 \cdot 10^{-3}$	$6.19 \cdot 10^{-3}$
$\varepsilon_{p,II,min}^1$	$3.64 \cdot 10^{-4}$	$5.36 \cdot 10^{-4}$	$-1.10 \cdot 10^{-4}$	$-5.83 \cdot 10^{-3}$
$\varepsilon_{p,II,max}^1$	$3.64 \cdot 10^{-4}$	$2.69 \cdot 10^{-4}$	$1.64 \cdot 10^{-3}$	$3.58 \cdot 10^{-3}$
$\varepsilon_{p,III}^1$	$8.74 \cdot 10^{-5}$	$-9.78 \cdot 10^{-5}$	$-1.20 \cdot 10^{-3}$	$-1.19 \cdot 10^{-2}$

4 ZAKLJUČKI

V disertaciji smo predstavili matematični model in računski postopek za nelinearno analizo prednapetih betonskih linijskih konstrukcij, ki so izpostavljene sočasnemu delovanju mehanske obtežbe in požara. Pri izpeljavi modela smo upoštevali zamike na stiku med betonom in jeklom za prednapenjanje, luščenja betona pa nismo upoštevali. V ta namen smo v programskem okolju `Matlab` izdelali računalniški program. Zaradi zahtevnosti problema smo disertacijo razčlenili na dva dela.

V prvem delu disertacije smo predstavili matematični model in računski postopek za analizo prednapetih betonskih linijskih konstrukcij pri sobni temperaturi. Obnašanje betonskega dela prednapetega nosilca smo opisali z Reissnerjevim modelom ravninskega nosilca, obnašanje prednapetih kablov pa z modelom vrvi. Posplošene ravnotežne enačbe predstavljenega modela smo rešili z metodo končnih elementov. S tem namenom smo razvili novo družino deformacijskih končnih elementov. Izpeljali smo jo z modificiranim izrekom o virtualnem delu. Značilnost vpeljanih deformacijskih končnih elementov je v tem, da poleg deformacijskih količin interpoliramo tudi materialno koordinato x_p^{*k} , ki posredno določa zamik na stiku med betonom in prednapetimi kabli ter normalno komponento kontaktne linijske obtežbe $p_{n,p}^k$ k -tega prednapetega kabla ($k = 1, 2, \dots, n_p$). Pri izpeljavi enačb smo se omejili na predhodno napete elemente z ravnimi kabli, kjer smo k -ti prednapeti kabel predhodno napeli z začetno silo prednapetja $\mathcal{N}_{p,\text{predn}}^k$ oziroma deformacijo $\varepsilon_{p,\text{predn}}^k = \mathcal{N}_{p,\text{predn}}^k / E_p A_p$, ($k = 1, 2, \dots, n_p$). Pri tem smo vpliv izgub sile v kablilih zaradi reoloških pojavov zanemarili. Ker je pri večini gradbenih konstrukcij vpliv strižnih deformacij na njihovo obnašanje zanemarljiv, smo tudi njihov vpliv zanemarili. Ustreznost in natančnost predstavljenega matematičnega modela in računskega postopka za statično analizo prednapetih betonskih linijskih konstrukcij pri sobni temperaturi smo ocenili s primerjavo numeričnih in eksperimentalnih rezultatov. S primerjavo rezultatov in parametričnimi študijami smo ugotovili:

- Primerjava med eksperimentalnimi in numeričnimi rezultati je pokazala relativno dobro ujemanje rezultatov. Zato je predstavljeni matematični model primeren za analizo prednapetih betonskih linijskih konstrukcij pri sobni temperaturi.
- Predstavljeni deformacijski končni elementi so zelo natančni in neobčutljivi na vse vrste blokiranja. Konvergenčna analiza deformacijskih končnih elementov je pokazala, da se natančnost izračunane mejne nosilnosti obravnavanih prednapetih betonskih nosilcev povečuje z večanjem števila končnih elementov, hkrati pa se ne povečuje s stopnjo numerične integracije.
- Iz povedanega sklepamo, da so deformacijski končni elementi primerni za analizo prednapetih betonskih linijskih konstrukcij z upoštevanjem zamika na stiku med betonom in prednapetimi kabli.
- Togost oziroma podajnost stika med betonom in prednapetimi kabli bistveno vpliva na obnašanje prednapetih betonskih linijskih konstrukcij. Ta vpliv je največji na duktilnost in nosilnost pred-

napetih betonskih konstrukcij, nekoliko manjši pa na togost. Zato podajnosti stika med betonom in prednapetimi kabli v analizi prednapetih betonskih linijskih konstrukcij ne smemo zanemariti.

V drugem delu disertacije smo matematični model in računski postopek za analizo prednapetih betonskih linijskih konstrukcij pri sobni temperaturi razširili na razmere, ki vladajo med požarom. Model smo razdelili v dve matematično nepovezani fazi. V prvi fazi smo analizirali temperaturno-valžnostno stanje v betonskem prečnem prerezu. Za opis povezanega prenosa toplote in vlage po betonskem prečnem prerezu smo upoštevali matematični model Luikova (Luikov, 1966). Pripadajoče enačbe smo rešili z diferenčno metodo. Dobljene rezultate smo upoštevali v drugi fazi analize, kjer smo določili napetostno in deformacijsko stanje prednapetih betonskih linijskih konstrukcij pri sočasnem delovanju mehanske in temperaturne obtežbe. Za materialne zakone betona, jekla za armiranje in prednapenjanje smo izbrali nelinearne zveze, pripadajoči materialni parametri pa so bili odvisni od temperature. Tudi za konstitucijski zakon stika smo izbrali nelinearno in temperaturno odvisno zvezo med zamiki in strižnimi napetostmi na stiku med betonom in prednapetimi kabli. Pri določitvi napetostnega in deformacijskega stanja prednapetih linijskih konstrukcij med požarom smo poleg mehanskih in temperaturnih deformacij upoštevali tudi t.i. prehodne deformacije betona in lezenje betona ter viskozno lezenje jekla za armiranje in prednapenjanje. Ustreznost in natančnost predstavljenega matematičnega modela in računskega postopka za analizo prednapetih betonskih linijskih konstrukcij pri sočasnem delovanju mehanske in požarne obtežbe smo ocenili s primerjavo numeričnih in eksperimentalnih rezultatov. S primerjavo rezultatov in parametričnimi študijami smo ugotovili:

- Primerjava med eksperimentalnimi in numeričnimi rezultati za časovno spreminjanje temperature v prečnem prerezu je pokazala dobro ujemanje. Zato je časovno razporeditev temperature v prednapetih betonskih linijskih konstrukcijah smiselno določiti z upoštevanjem matematičnega modela Luikova, kjer prenos vlage in toplote po betonskem prečnem prerezu obravnavamo povezano.
- Primerjava med eksperimentalnimi in numeričnimi rezultati mehanskega odziva prednapetih betonskih linijskih konstrukcij med požarom je pokazala relativno dobro ujemanje, kar dokazuje primernost predstavljenega matematičnega modela in računskega postopka za analizo prednapetih betonskih linijskih konstrukcij.
- Podrobna parametrična študija je pokazala, da togost oziroma podajnost stika med betonom in prednapetimi kabli bistveno vpliva na napetostno in deformacijsko stanje prednapetih betonskih linijskih konstrukcij med požarom. Zato jih v analizi ne smemo zanemariti.

VIRI

Abrams, M.S. 1979. Behaviour of inorganic materials in fire. ASTM STP 685. Design of Buildings for Fire Safety.

Abrams, M.S., Cruz, C.R. 1961. The Behaviour at High Temperature of Steel Strand for Prestressed Concrete. Journal of the PCA Research and Development Laboratories 3: 8–19.

Abrishami, H.H., Mitchell, D. 1993. Bond characteristic of pretensioned strand. ACI Materials Journal 90, 3: 232–262.

Anderberg, Y. 1976. Fire-exposed hyperstatic concrete structures (An experimental and theoretical study). Division of Structural Mechanics and Concrete Construction. Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, Bulletin 55.

Anderberg, Y., Thelandersson, S. 1976. Stress and deformation characteristics of concrete. 2-experimental investigation and material behaviour model. Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, Bulletin 54.

ASTM E-119-76. 1976. Standard methods of fire tests of building construction and materials. Annual book of ASTM standards, Part 18, American Society for Testing and Materials, West Conshohocken, PA.

Bažant, Z.P., Kaplan, M.F. 1996. Concrete at high temperatures: Material Properties and Mathematical Models, Longman Group Limited: 412 f.

Bianco, M., Bilardi G., Pesavento, F., Pucci, G., Schrefler, A., 2003. A frontal solver tuned for fully coupled non-linear hygro-thermo-mechanical problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering 57: 1801–1818.

Bratina, S. 2003. Odziv armiranobetonskih linijskih konstrukcij na požarno obtežbo. Doktorska disertacija. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Oddelek za gradbeništvo, Konstrukcijska smer: 159 f.

Bratina, S., Planinc, I., Čas, B., Saje, M., Turk, G. 2003. Non-linear fire-resistance analysis of reinforced concrete beams. Structural Engineering and Mechanics 16: 695–712.

Bratina, S., Saje, M., Planinc, I. 2004. On materially and geometrically non-linear analysis of reinforced concrete planar frames. *International Journal of Solid Structures* 41: 7181–7207.

Buchanan, A.H. 2004. *Structural Design for Fire Safety*. John Wiley & Sons Ltd, Reprinted version: 421 f.

Budaiwi, I., El. Diasty, R. Abdou, A. 1999. Modelling of moisture and thermal transient behaviour of multi-layer non-cavity walls, *Building and Environment* 34: 537–551.

Campbell, T.I., Kodur, V.K.R. 1990. Deformation controlled nonlinear analysis of prestressed concrete beams. *PCI Journal* 35, 5: 42–755.

Carlson, C.C. 1962. Fire resistance of prestressed concrete beams (Study A: Influence of thickness of concrete covering over prestressing steel strand). PCA, Research Department Bulletin 147.

Chang, W.J., Weng, C.-I. 2000. An analytical solution to coupled heat and moisture diffusion transfer in porous material. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 43: 3621–3632.

Chern, J.-C., You, C.-M., Bažant, Z.P. 1992. Deformation of progressively cracking partially prestressed concrete beams. *PCI Journal* 37, 1: 74–85.

Chung, J.H., Consolazio, G.R. 2005. Numerical modelling of transport phenomena in reinforced concrete exposed to elevated temperatures. *Cement and Concrete Research* 35: 597–608.

Cruz, C.R. 1968. Apparatus for measuring creep of concrete at high temperatures. *Journal of PCA Research and Development Laboratories* 8, 1: 37–45.

Čas, B. 2004. Nelinearna analiza kompozitnih nosilcev z upoštevanjem zdrsa med sloji. Doktorska disertacija. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Oddelek za gradbeništvo, Konstrukcijska smer: 136 f.

Dal Pont, S., Ehlacher, A. 2004. Numerical and experimental analysis of chemical dehydration, heat and mass transfer in a concrete hollowcylinder submitted to high temperatures. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 47: 135–147.

Dal Pont, S., Schrefeler, B.A., Ehlacher, A. 2005. Intrinsic Permeability Evolution in High Temperature Concrete. An Experimental and Numerical Analysis, *Transport in Porous Media* 60: 43–74.

Diederichs, U., Schneider, U. 1981. Bond strength at high temperatures. *Magazine of Concrete Research* 33, 115: 75–84.

Ellingwood, B., Shaver, J. 1979. Fire effect on reinforced concrete members. Technical Note 985. Washington, D. C.: National Bureau of Standards.

Eurocode 1, 1995. Basic of Design and Actions on Structures, Part 2-2: Actions on structures-Actions on structures exposed to fire, ENV 1991-2-2.

Eurocode 2, 2004. Design of Concrete Structures, Part 1-1: General rules and rules for buildings, EN 1992-1-1.

Eurocode 2, 2003. Design of Concrete Structures, Part 1-2: General rules-Structural fire design, prEN 1992-1-2.

Gams, M. 2003. Povezan prenos vlage in toplote v poroznem materialu. Diplomsko naloga. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Oddelek za gradbeništvo, Konstrukcijska smer: 78 f.

Gawin, D., Pasavento, F., Schrefeler, B.A.. 2003. Modelling of hygro-thermal behaviour of concrete at high temperature with thermo-chemical and mechanical material degradation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 192: 1731–1771.

Gustaferro, A.H., Abrams, M.S., Salse, E.A.B. 1972. Fire Resistance of Prestressed Concrete Beams (Study C: Structural Behaviour During Fire Tests) PCA, Research and Development Bulletin, RD00901B, Skokie, Ill.

Gustaferro, A.H., Selvaggio, S.L. 1967. Fire Endurance of Simply-Supported Concrete Slabs. Journal of Prestressed Concrete Institute 12: 37–53.

Han, C.G., Hwang, Y.-S., Yang, S.-H., Gowriplan, N. 2005. Performance of spalling resistance of high performance concrete with polypropylen fiber contents and lateral confinement. Cement and Concrete Research 35: 1747–1753.

Harmathy, T.Z. 1967. A comprehensive creep model. Journal of Basic Engineering 89: 496–502.

Harmathy, T.Z. 1993. Fire Safety Design and Concrete. London: Longman Group

Hertz, K.D. 2003. Limits of spalling of fire-exposed concrete. Fire Safety Journal 38: 103–116.

Hertz, K.D. 2005. Test method for spalling of fire exposed concrete. Fire Safety Journal 40: 466–476.

Holmes, M., Anchor, R.D., Cook, G.M.E., Crook, R.N. 1982. The effect of elevated temperatures on the strength properties of reinforcing and prestressing steel. Structural Engineer-Part B 60, 1: 7–13.

Huang, Z.H., Platten, A. 1997. Nonlinear finite element analysis of planar reinforced concrete members subjected to fires. *ACI Structural Journal* 94, 3: 272–282.

Hurst, M.K. 1988. *Prestressed concrete design*. London, New York: Chapman and Hall: 262 f.

Ichikawa, Y., England, G.L. 2004. Prediction of moisture migration and pore pressure build-up in concrete at high temperatures. *Nuclear Engineering and Design* 228: 245–259.

ISO 834. 1999. *Fire-resistance Tests - Elements of Building Construction - Part 1: General Requirements*. ISO 834-1. International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland.

Jendale, L., Cervenka, J. 2006. Finite element modelling of reinforcement with bond. *Computers and Structures* 84: 1780–1791.

Kalifa, P., Menneteau, F.-D., Quenard, D. 2000. Spalling and pore pressure in HPC at high temperatures. *Cement and Concrete Research* 30: 1915–1927.

Kalifa, P., Chene, G., Galle, C. 2001. High temperature behaviour on HPC with polypropylene fibres from spalling to microstructure. *Cement and Concrete Research* 31: 1487–1499.

Keuser, M., Mehlhorn, G. 1983. Bond between prestressed steel and concrete: Computer analysis using ADINA. *Computers and Structures* 17, 5, 6: 669–676.

Kodur, V.K.R. 1999. Fire performance of high-strength concrete structural members. *Institute for Research in Construction: Construction Technology Update* 31: 1–14.

Krauberger, N., Saje, M., Bratina, S., Planinc, I. 2007. Nelinearna analiza prednapetih betonskih linijskih nosilcev = Non-linear analysis of prestressed concrete planar beams. V: Korelc, J. (ur), Zupan, D. (ur). *Kuhljevi dnevi 2007*. Terme Snovik, 20.-21. september 2007. Ljubljana: Slovensko društvo za mehaniko: str. 131–138.

Krauberger, N., Bratina, S., Planinc, I. 2007. Analiza prednapetih betonskih nosilcev z upoštevanjem zdrsa kabla = Analysis of prestressed concrete beams considering slip between concrete and steel tendon. V: Lopatič, J. (ur), Markelj, V. (ur), Saje, F. (ur). *Zbornik 29. zborovanja gradbenih konstrukterjev Slovenije*. Bled, 19.-20. oktober 2007. Ljubljana: str. 201–208.

Li, G., Lu, Z.D., Wang, L.G. 2003. Fire resistance of prestressed concrete frames. *ICACS 2003: International Conference on Advances in Concrete Structures 1 and 2*, 32: 445–452.

Li, L-y., Purkiss, J. 2005. Stress strain constitutive equations of concrete material at elevated temperatures. *Fire Safety Journal* 40: 669–686.

Lien, H.P., Wittmann, F.H. 1995. Coupled heat and mass transfer in concrete elements at elevated tem-

peratures. *Nuclear Engineering and Design* 157, 7: 109–119.

Liu, J.Y., Cheng, S. 1991. Solutions of Luikov equations of heat and mass transfer in capillary-porous bodies. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 34, 7: 1747–1754.

Lou, T., Xiang, Y. 2006. Finite element modelling of concrete beams prestressed with external tendons. *Engineering Structures* 28: 1919–1926.

Lobbo, P.D., Mikhailov, Yu.A., Ozisk, M.N. 1987. On the complex eigenvalues of Luikov system of equations. *Drying technology* 5, 2: 273–286.

Luikov, A.V. 1966. Heat and mass transfer in capillary porous bodies. Pergamon Press, Oxford, England: 623 f.

Luikov, A.V. 1975b. System of differential equations of heat and mass transfer on capillary-porous bodies (review). *International Journal of Heat and Mass Transfer* 18: 1–14.

Luikov, A.V., Mikhailov, Yu.A. 1966. Theory of energy and mass transfer. Pergamon Press, Oxford, United Kingdom: 392 f.

Mang, H.A., Meschke, G. 1991. Nonlinear finite element analysis of reinforced and prestressed concrete structures. *Engineering Structures* 13, 2: 211–226.

McGrath, R. 2003. Fire Endurance of High Strength Concrete Columns. *Fire Technology* 39: 73–87.

Mendes, P.A., Valente, J.C., Branco, F.A. 2000. Simulation of ship fire under Vasco da Gama bridge. *ACI Structural Journal* 97, 2: 285–290.

Meszaros, C.S., Farkas, I., Balint, A. 2001. A new application of percolation theory of coupled transport phenomena through porous media. *Mathematic and Computer Simulation* 56: 595–404.

Neves, I.R., Rodrigues, J.P.C., Loureiro, A.D. 1996. Mechanical properties of reinforcing and prestressing steel after heating. *Journal of Materials in Civil Engineering* 8, 4: 189–194.

Nie, J.G., Cai, C.S., Zho, T.R., Li, Y. 2007. Experimental and analytical study of prestressed steel concrete composite beams considering slip effect. *Journal of Structural Engineering ASCE* 133: 530–540.

Obeid, W., Mounajed, G., Alliche, A. 2001. Mathematical formulation of thermo-higro-mechanical coupling problem in non saturated porous material. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190: 5105–5122.

Özisik, M.N. 1985. Heat transfer: A basic approach. McGraww-Hill Book Company, Singapore: 780 f.

- Özisik, M.N. 1994. Finite difference methods in heat transfer. CRC Press, Boca Raton, Florida, USA: 412 f.
- Pandey, R.N., Pandey, S.K., Michailov, M.D. 1999a. Temperature and moisture distributions in a moist spherical capillary-porous body-a new approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 45: 125–146.
- Pandey, R.N., Srivastava, S.K., Michailov, M.D. 1999b. Solution of Luikov equations of heat and mass transfer in capillary porous bodies through matrix calculus: a new approach. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 42: 2649–2660.
- Pickard, R. 1994. Fire Safety and Protection in Historic Buildings in England and Ireland – Part I. *Structural Survey*: 12, 2: 27–31
- Planinc, I. 1998. Račun kritičnih točk konstrukcij s kvadratično konvergentnimi metodami. Doktorska disertacija. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Oddelek za gradbeništvo, Konstrukcijska smer: 83 f.
- Purkiss, J.A. 1996. Fire Safety Engineering: Design of Structures. Butterworth-Heinemann: 342 f.
- Rabczuk, T., Eibl, J. 2004. Numerical analysis of prestressed concrete beams using a coupled element free Galerkin/finite element approach. *International Journal of Solids and Structures* 41: 1061–1080.
- Rabczuk, Akkermann, J., T., Eibl, J. 2005. Numerical model for reinforced concrete structures. *International Journal of Solids and Structures* 42: 1327–1354.
- Reissner, E. 1972. On one-dimensional finite-strain beam theory: The plane problem. *Journal of Applied Mechanics and Physics (ZAMP)* 23: 795–804.
- Saje, M. Turk, G. 1987. HEATC: Program za račun nelinearnega in nestacionarnega prevajanja toplote. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Oddelek za gradbeništvo.
- Selvaggio, S.L., Carlson, C.C. 1963. Effect of Restraint on Fire Resistance of Prestressed Concrete, Symposium on Fire Test Methods. American Society for Testing and Materials 344: 1–25.
- Selvaggio, S.L., Carlson, C.C. 1964. Fire Resistance of Prestressed Concrete Beams (Study B: Influence of Aggregate and Load intensity). *Journal of the PCA Research and Development Laboratories* 6: 41–64.
- Schnabl, S. 2007. Analiza obnašanja kompozitnih nosilcev pri požaru. Doktorska disertacija. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Oddelek za gradbeništvo, Konstrukcijska smer: 109 f.

Schneider, U. 1986. Modeling of concrete behaviour at high temperature. In: Anchor, R.D., Malhotra, H.L., Purkiss, J.A., editors. Design of structures against fire. New York, Elsevier: 53–69.

Simo, J.C. 1985. A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I. Computer methods in applied mechanics and engineering 49: 55–70.

Srpčič, S. 1991. Račun vpliva požara na jeklene konstrukcije. Doktorska disertacija. Ljubljana, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Oddelek za gradbeništvo, Konstrukcijska smer: 104 f.

Šelih, J., Sousa, A.C.M., Bremner, T.W. 1994. Moisture and heat flow in concrete walls exposed to fire. Journal of Engineering Mechanics 120: 2028–2043.

Tenchev, R., Li, L.Y., Purkiss, J.A. 2001. Finite element analysis of coupled heat and moisture transfer in concrete, subjected to fire. Numerical Heat Transfer, Part A 39: 685–710.

Tenchev, R., Purnell, P. 2005. An application of damage constitutive model to concrete at high temperature and predicting of spalling. International Journal of Solids and Structures 42: 6550–6565.

Thomas, H.R., Morgan, K., Lewis, R.W. 1980. A fully nonlinear analysis of heat and mass transfer problems in porous bodies. International Journal of Numerical Methods in Engineering 15: 1381–1393.

Wang, Y.C. 2002. Steel and Composite Structures: Behaviour and design for fire safety . Spon Press: 332 f.

Whitaker, S. 1977. Simultaneous heat, mass and momentum transfer in porous media: A theory of drying. Advances in Heat Transfer 22: 257–266.

White, G.C., Shirvill, L.C. 1995. Fire testing a review of past, current and future methods. 14th International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, Copenhagen, Denmark. Published by ASTM, ISBN 2: 397–404.

Williams-Leir, G. 1983. Creep of structural steel in fire: Analytical expressions. Fire and Materials 7, 2: 73–78.

Youssef, M., Ghobarah, A. 2000. Strength Deterioration due to Bond Slip and Concrete Chushing in Modeling of Reinforced Concrete Members. ACI Structural Journal 96, 6: 596–966.